



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Confronto di diverse formulazioni dell'elettrodinamica
dell'assione e loro applicazione per esperimenti di tipo
haloscope

Relatore

Dr.ssa Ramona Groeber

Laureando

Gaia De Paciani

Anno Accademico 2021/2022

Indice

1	L'Assione e lo Strong CP Problem	1
1.1	La Violazione CP nella QCD	1
1.2	Proprietà degli Assioni e Materia Oscura	3
2	Separazione delle Equazioni di Maxwell per la ricerca tramite aloscopio	5
2.1	Le equazioni di Maxwell modificate	5
2.2	L'Aloscopio come cavità cilindrica	7
2.2.1	Il limite in "onda lunga"	9
3	La controversia: vettore di Poynting di Abraham e Minkowski	11
3.1	Forma alternativa delle equazioni di Maxwell modificate	12
3.2	Trattazione con i fasori	13
3.2.1	Calcolo della potenza generata tramite il teorema di Poynting	14
3.3	Teorema di Poynting per l'analisi Haloscope	14
3.3.1	Soluzione della controversia per esperimenti haloscope con rivelatori a banda larga	16
4	Conclusioni	19
5	Appendice	25
5.1	Calcolo delle Equazioni di Lagrange modificate	25
5.2	Integrazione dalla legge di Faraday	26
5.2.1	Integrazione per un solenoide con area simmetrica rettangolare	26
5.2.2	Integrazione per un solenoide con area asimmetrica rettangolare	26
5.3	Soluzione in cavità cilindrica	27
5.3.1	Armoniche cilindriche	27
5.3.2	Funzioni di Bessel del secondo ordine	27
5.3.3	Operatore Laplaciano in coordinate cilindriche	28
5.3.4	Applicazione ad un solenoide cilindrico	28
5.4	Teorema di Poynting nelle versioni di Abraham e Minkowski	29
5.4.1	Vettore di Poynting per Minkowski	29
5.4.2	Vettore di Poynting per Abraham	30

Capitolo 1

L'Assione e lo Strong CP Problem

Escludendo la gravità, che opera su ordini di grandezza molto inferiori, negli ultimi decenni il Modello Standard ha dimostrato di prestarsi con grande successo alla descrizione della maggior parte delle teorie legate alle interazioni fondamentali. Tutti gli esperimenti svolti fino ad ora non hanno mai mostrato violazione della simmetria di carica C o della coniugazione carica-parità CP per le interazioni di tipo forte, mentre è stato dimostrato che interazioni deboli violano P, C e CP. Tuttavia, sin da subito un problema emerse con l'adozione dello Standard Model: la violazione di P e CP delle interazioni deboli comporterebbe le stesse violazioni nelle interazioni forti a meno di introdurre ulteriori termini che ne modificano la forma originaria. Il nome con cui questa questione, ad oggi irrisolta, è globalmente nota è Strong CP Problem [1]. Per poter quantificare il grado di violazione delle simmetrie P e CP nelle interazioni forti si è pensato di introdurre un parametro θ_{QCD} nella formula della densità di azione dello Standard Model $\mathcal{L}_{SM} = \dots + \theta_{QCD} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$, dove con $G_{\mu\nu}^a$ si indicano i tensori dell'intensità del campo forte nella Quantum Chromodynamics (QCD) e g_s è la costante di accoppiamento relativa, mentre $\tilde{G}^{a\mu\nu}$ è ottenuto applicando il tensore di Levi Civita¹: $\tilde{G}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a$.

1.1 La Violazione CP nella QCD

Ad oggi si è in grado di confermare, grazie ad alcune importanti misurazioni di fenomeni come la Radiazione di Fondo [2], l'attendibilità di alcune teorie legate alle fasi primordiali della formazione dell'Universo. Durante il Big Bang si suppone che enormi ed uguali quantità di materia ed antimateria siano state create e che, molto velocemente, una volta entrate in contatto, abbiano dato luogo ad un processo di annichilazione, liberando grandi quantità di energia. Tuttavia, una parte della materia non è stata sottoposta a questo processo ma è "sopravvissuta" dando origine all'Universo come lo si conosce. Un tentativo di spiegazione di questa anomalia è stato avanzato da A. Sakharov [3] tramite la teoria della CP Violation.

La simmetria CP è una simmetria discreta data dalla composizione della coniugazione di carica C, che sostanzialmente trasforma una particella nella sua corrispondente antiparticella applicando un'inversione dei principali numeri quantici della stessa, insieme con la trasformazione di parità P, che applica un'inversione delle coordinate spaziali. In generale, ci si aspetta che questa simmetria sia naturalmente rispettata da tutte le interazioni ma ciò non accade: come dimostrato da C.S. Wu le interazioni di tipo debole violano questa simmetria [4].

Il Modello Standard nella sua forma classica risulta essere una teoria quantistica di tipo locale, Lorentz covariante e causale e, di conseguenza, per essa si dovrebbe assumere una totale conservazione della simmetria CPT [5]. La violazione CP rientrerebbe in questo modello come effetto sostanzialmente irrilevante e, nello specifico, insufficiente a giustificare il disequilibrio tra materia e antimateria che viene osservato, che si presenta come una manifestazione di antisimmetria barione/antibarione [3].

¹In questa introduzione usiamo $\hbar = c = 1$, la metrica di Minkowski ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$) e $\epsilon^{0123} = +1$.

Generalmente, nell'ambito della rappresentazione Lagrangiana delle teorie quantistiche di campi, la violazione della simmetria CP viene modellizzata introducendo delle costanti di accoppiamento di fasi complesse irriducibili [6].

Un meccanismo efficace è quello di Kobayashi-Maskawa, che assume che la componente della Lagrangiana relativa alle interazioni forti sia CP invariante e postula l'introduzione di un ulteriore termine lagrangiano legato ad una particella di massa sufficientemente grande e consistente con le conoscenze note rispetto ai processi semi leptonici [7]. Questo sistema, funzionale a descrivere realisticamente la violazione, non fornisce tuttavia una spiegazione soddisfacente rispetto all'origine fisica di questo termine anomalo, in quanto si osserva una discrepanza tra il rapporto materia/antimateria osservato sperimentalmente e quello predetto dalla suddetta teoria [8].

L'ipotetica violazione della simmetria CP nella QCD viene descritta da θ_{QCD} , che è un angolo con periodo 2π . La teoria ad esso associata prevede l'effettuarsi di eventi detti *instantoni* [9] che violano P e CP quando l'angolo differisce da 0 e π : considerando che le interazioni forti obbediscono alla conservazione di P e CP, si ritiene che θ_{QCD} debba essere vicina ad uno di questi due valori. $\theta_{QCD} = 0$ o π non è un risultato atteso, perché comporterebbe la conservazione di P e CP nelle interazioni deboli (cosa che non accade), però tramite misure sperimentali è stato calcolato un limite superiore per l'angolo a partire dalla misura del momento di dipolo elettrico del neutrone $d_n < 3 \cdot 10^{-26} e \cdot \text{cm}$ con $d_n \sim 3 \cdot 10^{-16} \theta_{QCD} \cdot e \cdot \text{cm}$ [1, 10]. Il motivo per cui la stima sperimentale di questo angolo risulti essere così ridotta e, quindi, il motivo per cui non sembrerebbe esserci manifestazione di violazione di CP nell'ambito delle interazioni forti è il quesito cardine dello Strong CP Problem. Tendenzialmente, l'approccio utilizzato per lo studio delle caratteristiche dell'angolo θ_{QCD} prevede l'utilizzo di una Lagrangiana di tipo chirale: in tali casi è importante tenere in considerazione il fatto che solamente la combinazione lineare delle fasi $\bar{\theta} = \theta + \theta_q$ è invariante rispetto alla rotazione chirale dei quark, dove θ_q (la fase delle masse dei quark) e θ (la fase associata al termine topologico $G\tilde{G}$) sono i due termini che si ritiene contribuiscano alla violazione di CP [11].

Peccei e Quinn [12] ipotizzarono che questo problema potesse essere risolto postulando l'esistenza di una simmetria $U_{PQ}(1)^2$ che permetteva di aggirare l'anomalia legata alla costante θ_{QCD} apportando una modifica al Modello Standard: introduceva, infatti, un campo pseudo-scalare $a(x)$ e la costante di decadimento dell'assione f_a^3 e quindi un nuovo termine nella lagrangiana della QCD:

$$\mathcal{L}_{PQ} = \xi \frac{a}{f_a} \frac{g_s^2}{32\pi^2} \tilde{G}_{\mu\nu}^b G_{b\mu\nu}. \quad (1.1)$$

In questo modo si perdeva la dipendenza della componente lagrangiana dalla costante θ_{QCD} . Il campo $a(x)$ venne associato al bosone di Nambu-Goldstone⁴, chiamato in questo caso *assione*, responsabile della rottura spontanea della simmetria $U_{PQ}(1)$.

Tuttavia, numerosi esperimenti hanno portato ad escludere il modello PQWW⁵ originale (che prevedeva una costante di accoppiamento dell'ordine della scala elettrodebole) tra questi anche la mancata osservazione di assioni formati a partire da scontri tra fasci di particelle o decadimenti e lo studio dei limiti nei processi evolutivi delle stelle [13].

Nonostante ciò, il modello introdotto da Peccei e Quinn non è stato scartato completamente ma si è sostenuta l'ipotesi, proposta sin da subito soprattutto da J. E. Kim [14], che la simmetria venga rotta esclusivamente ad energie elevate e che quindi la costante f_a sia molto grande. In tale ipotesi, la massa dell'assione risulta essere molto piccola ($m_a \simeq 6 \cdot 1 \times 10^{-9} \text{ eV}$ se $f_a = 1 \times 10^{15} \text{ GeV}^6$) e la particella forma accoppiamenti molto deboli.

² $U_{PQ}(1)$ risulta una simmetria esatta e rotazionale rispetto alla Lagrangiana del Modello Standard.

³La costante f_a ha dimensione di energia.

⁴I bosoni di Nambu-Goldstone sono particelle scalari prive di massa che compaiono nello spettro delle possibili eccitazioni quando viene rotta una simmetria (teorema di Goldstone).

⁵Peccei-Quinn-Weinberg-Wilczek, gli ultimi due sottolinearono l'effettivo legame tra gli instantoni e il campo $a(x)$.

⁶Grand Unification Energy: energia sopra la quale le interazioni di tipo forte, debole ed EM diventano indistinguibili.

1.2 Proprietà degli Assioni e Materia Oscura

Risulta abbastanza evidente l'inadeguatezza del Modello Standard nella descrizione della Materia Oscura (DM). Per ottenere informazioni su questa importante componente dell'Universo si deve fare affidamento su osservazioni astrofisiche di fenomeni prettamente gravitazionali: questi sembrano suggerire che la Materia Oscura sia caratterizzata dal fatto di essere sostanzialmente "fredda" e molto "lenta", cioè poco interagente.

A questo proposito, un'ulteriore ipotesi che ha avuto successo negli ultimi anni nell'ambito dello studio degli assioni è l'idea di un "assione invisibile", cioè una particella di cui è possibile scegliere la costante f_a in modo che la massa m_a rimanga all'interno di un determinato range di valori (da 1×10^{-13} eV a 1×10^{-2} eV) dove il limite inferiore deriva da valutazioni relative alla scala di Planck, mentre quello superiore è identificato a partire da studi relativi alla super radianza dei buchi neri rotanti [15, 16].

Considerando, dunque, la famiglia degli assioni originatisi con il Big Bang, è possibile attuare una suddivisione in due gruppi: gli assioni "caldi", che derivano dal plasma primordiale e gli assioni "freddi", che derivano da un *riallineamento nel vuoto* dei campi assionici generati dalle particelle più calde. Una delle caratteristiche più interessanti degli assioni "freddi" è che, a causa della scarsa tendenza a formare accoppiamenti con altre particelle, le oscillazioni del campo assionico tendenzialmente non vengono dissipate sotto altre forme di energia [1]. Si può ipotizzare, quindi, che la presenza degli assioni contribuisca in modo consistente alla densità energetica dell'Universo e che questa si possa considerare come una forma di Materia Oscura: laddove l'anomalia nella densità assionica risulti essere più consistente si osserveranno maggiori fluttuazioni barioniche e quindi uno scompenso tra materia ed antimateria [17].

La massa dell'assione viene calcolata tramite una teoria basata su una lagrangiana chirale di interazione assione-pione⁷ che porta alla relazione $m_{fa} \sim m_\pi f_\pi$. Questi avvenimenti sono ben descritti dalla teoria degli *istantoni* e permettono di associare all'assione una massa pari a [18]:

$$m_a = (5,700 \pm 0,007) \text{ peV} \left(\frac{1 \times 10^{12} \text{ GeV}}{f_a} \right). \quad (1.2)$$

Sono state sviluppate diverse teorie riguardanti la capacità di accoppiamento degli assioni con altre tipologie di particelle: ovviamente essi interagiscono con i fotoni e questo processo è alla base della teoria di modifica delle equazioni di Maxwell che sarà trattata nel capitolo successivo, ma questa particella è anche interessata da interazioni con fermioni, cioè nucleoni ed elettroni, con costanti di accoppiamento molto piccole. L'accoppiamento con i fotoni è di particolare importanza perché su di esso si basano i principali esperimenti di ricerca degli assioni che compongono la Materia Oscura, detti esperimenti di tipo *Haloscope*.

Gli assioni assumono anche un ruolo importante nell'ambito dell'evoluzione delle stelle. Questo processo, infatti, risulta essere sottoposto a delle limitazioni a causa dell'azione di questa particella. All'interno del nucleo delle stelle, avviene la conversione di un fotone in assione a causa dell'interazione mediata dal campo Coulombiano di un nucleo atomico: questo processo viene denominato effetto Primakoff. Nello specifico, le stelle sono portate ad emettere assioni tramite dei processi molto simili all'emissione Compton e alla *Bremsstrahlung* elettroniche: l'energia che viene persa porta ad un rallentamento del ritmo di combustione dell'elio all'interno dei nuclei e sostanzialmente provoca un raffreddamento anticipato dei corpi. Per la ricerca degli assioni prodotti nel Sole, esistono degli esperimenti specifici denominati *Helioscope* [19].

⁷Si noti che tale interazione può avvenire solamente perché le due particelle sono due bosoni con gli stessi numeri quantici.



Capitolo 2

Separazione delle Equazioni di Maxwell per la ricerca tramite aloscopio

Il fatto che gli assioni possano essere "invisibili" ha portato ad ipotizzare che essi giochino un ruolo importante nella composizione della DM, ma risulta anche molto probabile che essi abbiano delle interazioni contenute con i campi elettromagnetici, cosa che li renderebbe effettivamente rilevabili tramite una qualche tipologia di esperimento.

Quest'ultima ipotesi comporta la necessità di operare alcune modifiche alle equazioni di Maxwell considerando un accoppiamento dell'assione al campo EM nella forma $a\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$: tale accoppiamento porta ad una conversione dell'assione in fotone per effetto Primakoff¹ [20].

La ricerca del fotone Primakoff tramite esperimenti *Haloscope* è alla base dei principali sistemi sperimentati per la conferma dell'esistenza dell'assione. Un problema fondamentale di questo procedimento è che le modifiche che vengono applicate alle equazioni di Maxwell non rispettano naturalmente alcune condizioni al contorno necessarie alla ricerca tramite aloscopio perché generalmente il campo indotto dall'assione non è naturalmente separabile dal campo esterno. Tuttavia, una apposita approssimazione permette di disaccoppiare il campo generato dall'assione da quelli esterni.

Come si vedrà in seguito, è possibile applicare le equazioni di Maxwell modificate ad aloscopi di diverse forme valutando i valori dei campi elettromagnetici risultanti, osservando la presenza di una piccola differenza tra l'energia immagazzinata dal campo magnetico e quello elettrico.

2.1 Le equazioni di Maxwell modificate

La lagrangiana effettiva delle interazioni elettromagnetiche, inclusa la componente di interazione con il campo dell'assione, risulta²:

$$\mathcal{L}_{0+a} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4\mu_0} a F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_U, \quad (2.1)$$

dove $\mathcal{L}_U = \frac{1}{2}(\partial^\mu a)(\partial_\mu a) - \frac{1}{2}\omega_a^2 a^2$ è la lagrangiana dell'assione con un potenziale $U(a)$, mentre $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu$ è la Lagrangiana standard dell'elettrodinamica. Inoltre la costante di accoppiamento è $g_{a\gamma\gamma} = \frac{\alpha_{EM}}{2\pi f_a} c_{a\gamma\gamma}$ ³.

¹Al di là del caso specifico osservato nelle stelle, l'effetto Primakoff è la produzione risonante di mesoni pseudoscalari neutri da parte di fotoni ad alta energia che interagiscono con un nucleo atomico. Può essere visto come il processo inverso del decadimento del mesone in due fotoni ed è stato utilizzato per la misurazione della larghezza di decadimento dei mesoni neutri.

²In unità SI.

³ f_a è la costante di decadimento dell'assione in GeV mentre $c_{a\gamma\gamma}$ è la costante di accoppiamento adimensionale e vale -1.92 nel modello KSVZ [21, 22] e 0.75 nel modello DFSZ [23, 24].

Le equazioni di Maxwell che si ottengono sono le seguenti⁴:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} - cg_{a\gamma\gamma}a\mathbf{B}) = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times (c\mathbf{B} + g_{a\gamma\gamma}a\mathbf{E}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} - cg_{a\gamma\gamma}a\mathbf{B}) + c\mu \mathbf{J}_e. \quad (2.2d)$$

A causa dell'anomalia dell'assione, questo set di equazioni di Maxwell non rispetta naturalmente alcune condizioni al contorno naturali e necessarie per la ricerca dei fotoni Primakoff. In generale, dunque, si assumono le seguenti condizioni per una loro effettiva applicazione [25]:

- corrente nulla $J_e = 0$,
- densità di carica nulla $\rho_e = 0$,
- campo elettrico esterno nullo $\mathbf{E}_{ext} = \mathbf{0}$,
- campo magnetico esterno non nullo $\mathbf{B}_{ext} = \mathbf{B}$,
- campo magnetico a rotore nullo $\nabla \times \mathbf{B} = 0$,
- campo magnetico indipendente dal tempo $\dot{\mathbf{B}} = 0$.

Con queste premesse dall'equazione (2.2d) otteniamo

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{B} + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c}a\mathbf{E}) &= (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c}(\nabla \times a\mathbf{E}) = (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c}(\nabla a \times \mathbf{E} + a\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c}(\nabla a \times \mathbf{E}) - \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \frac{1}{c} g_{a\gamma\gamma} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) \mathbf{B} - \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c} a \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sostituendo nell'ultima riga \mathbf{E} con \mathbf{E}_{ext} e \mathbf{B} con \mathbf{B}_{ext} , si ottiene

$$\nabla \times \mathbf{B}_{ext} = -\frac{1}{c} g_{a\gamma\gamma} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right) \mathbf{B}_{ext} \quad (2.4)$$

e si nota che la condizione al contorno di rotore del campo magnetico nullo non è automaticamente rispettata dal termine di destra in quanto non è affermabile a priori che la derivata del campo assionico sia nulla. Per evitare questo problema si sono introdotti due nuovi campi \mathbf{E}_a e \mathbf{B}_a [26] tali che

$$\nabla \times \mathbf{B}_a = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{c} \mathbf{B}_{ext} \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Inoltre, a partire dall'equazione (2.2c), possiamo definire l'equazione di Maxwell-Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E}_a = -\frac{\partial \mathbf{B}_a}{\partial t} \quad (2.6)$$

che è una generalizzazione della legge di Faraday⁵. Sulla base della relazione espressa nell'equazione (2.5) possiamo quindi stimare il campo elettrico⁶

$$\mathbf{E}_a = -cg_{a\gamma\gamma}a\mathbf{B}_{ext} + \mathbf{f}(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Invece applicando il teorema di Stoke nell'uguaglianza di sinistra si ottiene una stima per \mathbf{B}_a

$$\int_A \nabla \times \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} = \oint_{\partial A} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{l} = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{c} \dot{a} A \mathbf{B}_{ext} \quad (2.8)$$

⁴In appendice 5.1 sono mostrati i calcoli necessari a ricavarle.

⁵Ogni campo elettromagnetico definito dinamicamente dalle condizioni al contorno di partenza deve soddisfare la legge di Faraday, dunque deve valere anche per i campi assionici.

⁶ $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ si stima dalle condizioni al contorno imposte e deriva dal processo di integrazione.

dove \mathcal{A} è l'area di integrazione e il campo magnetico esterno si assume uniforme $\mathbf{B}_{ext} = B_0 \hat{z}$. Dunque assumendo per la cavità dell'aloscopio una simmetria assiale (per esempio cilindrica [26]) possiamo stimare

$$\mathbf{B}_a = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{2c} r B_0 \dot{a} \hat{\phi}. \quad (2.9)$$

Essendo soluzioni complete, i campi \mathbf{E}_a e \mathbf{B}_a devono rispettare la legge di Maxwell-Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E}_a = \nabla \times (-c g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{B}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{r})) = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{2c} r B_0 \ddot{a} \hat{\phi}, \quad (2.10)$$

ma notiamo⁷ che ciò non avviene a meno di imporre $\ddot{a} = 0$.

Il problema principale è che il campo generato dall'assione non è chiaramente disaccoppiato dal campo elettromagnetico esterno applicato per l'interazione dell'assione. Per risolvere questa questione si utilizza una approssimazione nelle equazioni di Maxwell [26] e, assumendo che l'anomalia assionica perturbi il campo esterno in maniera contenuta, possiamo espandere i campi come

$$\mathbf{E} = \sum_m (g_{a\gamma\gamma})^m \mathbf{E}_m = \mathbf{E}_0 + g_{a\gamma\gamma} \mathbf{E}_1 + g_{a\gamma\gamma}^2 \mathbf{E}_2 + \dots \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{B} = \sum_m (g_{a\gamma\gamma})^m \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_0 + g_{a\gamma\gamma} \mathbf{B}_1 + g_{a\gamma\gamma}^2 \mathbf{B}_2 + \dots \quad (2.11b)$$

e generalmente vengono troncati al primo ordine in quanto $g_{a\gamma\gamma} \sim 1 \times 10^{-8} \text{ GeV}$. Applicando questa approssimazione, quindi, si sta assumendo che lo spazio considerato sia interessato da campi esterni \mathbf{E}_0 e \mathbf{B}_0 e che ci sia un termine aggiuntivo di reazione dovuto all'interazione assione-fotone

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{rea}, \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{rea}, \quad (2.12b)$$

in cui $\mathbf{E}_{rea} = g_{a\gamma\gamma} \mathbf{E}_1$ e $\mathbf{B}_{rea} = g_{a\gamma\gamma} \mathbf{B}_1$. Quindi, si possono applicare le condizioni specifiche della ricerca con aloscopio. Rimangono valide le equazioni di Maxwell relative ai campi esterni mentre si ottiene un nuovo set relativo ai campi da reazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_{rea} = 0, \quad (2.13a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{rea} = 0, \quad (2.13b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_{rea} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{rea}}{\partial t}, \quad (2.13c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{rea} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_{rea} - c g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{B}_0). \quad (2.13d)$$

Poiché il campo dell'assione nell'esperimento dell'aloscopio può essere considerato come omogeneo, possiamo scrivere $a(t) = a_0 e^{-i\omega_a t}$, dove ω_a è la frequenza di oscillazione dell'assione.

2.2 L'Aloscopio come cavità cilindrica

L'aloscopio è uno strumento considerato fondamentale per la ricerca e la rivelazione degli assioni. Si tratta di una cavità metallica cava che viene posizionata in una zona sottoposta ad un forte campo magnetico. Questo campo permette di far interagire l'assione entrante con un fotone e di generare un campo elettromagnetico oscillante secondario: quest'ultimo viene rilevato sotto forma di fotone (detto "di secondo ordine") tramite delle particolari tecniche di amplificazione del segnale.

In generale, per essere efficiente, un aloscopio deve avere un volume ottimale, cioè abbastanza grande da aumentare le probabilità di rivelazione di interazioni assioniche ma anche con dimensioni lineari tali da adattarsi alla lunghezza d'onda del fotone per permettere all'onda EM corrispondente di raggiungere la situazione di risonanza. Un'altra proprietà necessaria per questo strumento è un buon fattore di

⁷La dimostrazione esplicita si trova in appendice 5.2.

merito, ovvero un coefficiente definito da alcune caratteristiche intrinseche del materiale e legate alla forma dello strumento che definisce il numero di rimbalzi che un fotone effettua mediamente sulle pareti della cavità prima di essere assorbito.

Nella maggior parte degli esperimenti che vengono effettuati per la ricerca di assioni relativi alla Materia Oscura (come gli esperimenti ADMX [27, 28] o HAYSTAC [29]), la cavità risonante utilizzata è di forma cilindrica e le condizioni al contorno necessarie consistono in un campo magnetico esterno uniforme e una superficie conduttiva. Per semplicità assumiamo che il campo magnetico sia presente solamente all'interno della cavità ($\mathbf{B}_{ext} = \mathbf{B}_0$ se $r \leq r_0$ e $\mathbf{B}_{ext} = 0$ se $r \geq r_0$).

La geometria più semplice da considerare in questo caso risulta essere quella relativa ad un solenoide infinitamente lungo che, nella realtà, non può essere ottenuto. Ovviamente un solenoide fisico presenta dei campi residui di ritorno all'esterno delle sue estremità, tuttavia essi si possono considerare in maniera molto limitata rispetto ai campi interni al solenoide e comportano correzioni non dominanti.

Se si assume di avere un solenoide infinito con sezione di raggio R nella direzione \hat{z} (come assunto in [30]), in coordinate cilindriche, la densità di corrente sulle pareti è descritta da

$$\mathbf{J}_e = B_0 \delta(\rho - R) \hat{\phi} \quad (2.14)$$

e dunque le equazioni di Maxwell non modificate portano alla seguente soluzione

$$\mathbf{B}_0 = \begin{cases} B_0 \hat{z} & \rho < R, \\ 0 & \rho > R. \end{cases} \quad (2.15)$$

Inoltre, imponendo che la corrente non possa scorrere attraverso le pareti del solenoide in direzione \hat{z} e che $\rho_e = 0$ (così che $\mathbf{E}_0 = 0$), ricaviamo le seguenti equazioni d'onda per il campo elettrico e quello magnetico

$$\nabla^2 \mathbf{E}_1 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \mathbf{E}_1 = \begin{cases} \frac{g_{a\gamma\gamma}}{c} B_0 \frac{\partial^2 a(t)}{c^2 \partial t^2} \hat{z} & \rho < R, \\ 0 & \rho > R, \end{cases} \quad (2.16a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}_1 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \mathbf{B}_1 = -g_{a\gamma\gamma} \frac{\partial a(t)}{c \partial t} B_0 \delta(\rho - R) \hat{\phi}. \quad (2.16b)$$

Nella trattazione [30] non consideriamo le soluzioni transienti ma ci concentriamo solo su quelle oscillanti, in questo modo possiamo proporre le soluzioni mostrate di seguito

$$E_{1z}(\rho, t) = \psi_E(\rho) e^{i\omega_a t}, \quad (2.17a)$$

$$B_{1\phi}(\rho, t) = \psi_B(\rho) e^{i\omega_a t}. \quad (2.17b)$$

Si noti che le uniche componenti di interesse, per la simmetria del problema, sono il campo elettrico in direzione \hat{z} e quello magnetico in direzione $\hat{\phi}$.

Considerando un'apposita sostituzione di variabile ($\rho' = \omega_a \rho$) otteniamo i campi modificati risolvendo le specifiche equazioni d'onda, che risultano essere equazioni di Bessel⁸

$$\psi_B(\rho') = \begin{cases} a_B J_1(\rho') & \rho' < \omega_a R, \\ b_B H_1^+(\rho') & \rho' > \omega_a R, \end{cases} \quad (2.18a)$$

$$\psi_E(\rho') = \begin{cases} a_E J_0(\rho') - g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 & \rho' < \omega_a R, \\ b_E H_0^+(\rho') & \rho' > \omega_a R \end{cases} \quad (2.18b)$$

dove possiamo esprimere i coefficienti nella forma compatta che segue

$$\begin{pmatrix} a_E \\ b_E \\ a_B \\ b_B \end{pmatrix} = \frac{\pi g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 \omega_a R}{2} \begin{pmatrix} i H_1^+(\omega_a R) \\ i J_1(\omega_a R) \\ -H_1^+(\omega_a R) \\ -J_1(\omega_a R) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

⁸In appendice 5.3 sono esposti i calcoli espliciti per ricavare le equazioni ed una introduzione alle funzioni di Bessel.

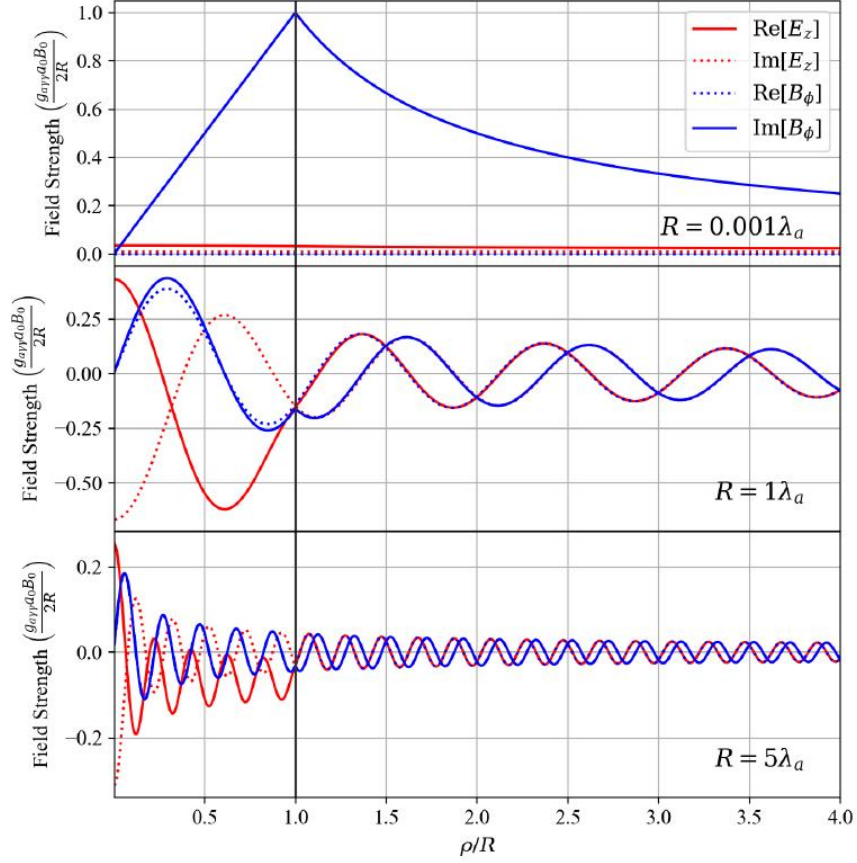


Figura 2.1: Le immagini, tratte dal documento [30], rappresentano l'andamento analitico dell'intensità dei campi al variare dei possibili valori di λ_a , espresse in unità di $\frac{g_{a\gamma a_0 B_0}}{2R}$. Nel primo dei tre grafici si può visualizzare il limite di onda lunga considerato nell'analisi.

2.2.1 Il limite in "onda lunga"

La variabile $\rho' = \frac{2\pi\rho}{\lambda_a}$ è legata alla lunghezza d'onda assionica, che è, di conseguenza, una grandezza di fondamentale importanza per la ricerca della particella. Se consideriamo il limite in cui $\lambda_a \gg R$ entrambi i bordi del solenoide si possono considerare in fase e i campi si sovrappongono in maniera coerente [30]. Dal punto di vista dei calcoli, questa approssimazione semplifica notevolmente la trattazione: possiamo riscrivere i sistemi mostrati in (2.18) sostituendo le funzioni di Bessel con i rispettivi limiti asintotici, ottenendo quanto segue⁹

$$\psi_B(\rho) \approx \begin{cases} \frac{i}{2} g_{a\gamma\gamma} \omega_a a_0 B_0 \rho & \rho < R \\ \frac{i}{2} g_{a\gamma\gamma} \omega_a a_0 B_0 \frac{R^2}{\rho} & \rho > R \end{cases} \quad (2.20a)$$

$$\psi_E(\rho) \approx -\frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 (\omega_a R)^2 \begin{cases} (\gamma'(\omega_a R) - \frac{1}{2}) + \frac{\rho^2}{2R^2} & \rho < R \\ \frac{i}{2} g_{a\gamma\gamma} \omega_a a_0 B_0 \frac{R^2}{\rho} & \rho > R \end{cases} \quad (2.20b)$$

Nel sistema (2.20b) si è definita la funzione $\gamma'(x) = \log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma - \frac{i\pi}{2}$, con γ la costante di Eulero-Mascheroni [31]. Come si può notare nel grafico 2.1, se si considera il limite di onda lunga, i campi elettrici all'interno dell'aloscopio risultano essere fortemente soppressi. Sulla base di questi calcoli, risulta evidente che la ricerca di campi elettrici indotti all'interno della cavità non è un buon metodo per la rivelazione degli assioni e questa considerazione si può dimostrare per qualunque forma geometrica della cavità aloscopica. In generale, comunque, si ottiene che i campi elettrici indotti dagli assioni risultano soppressi se si assume che le cariche e le correnti dei campi esterni siano costanti nel tempo e che l'aloscopio abbia una dimensione lineare caratteristica molto inferiore a λ_a .

⁹In questo caso si esprimono i sistemi rispetto a ρ .



Capitolo 3

La controversia: vettore di Poynting di Abraham e Minkowski

Le prime proposte per la ricerca degli assioni tramite l'utilizzo di aloscopi furono avanzate da P. Sikivie [19] e si basano sulla tecnica descritta precedentemente. Fondamentalmente, questi esperimenti sfruttano il termine di anomalia elettromagnetica dovuto all'accoppiamento di due fotoni con l'assione incidente: per sperare di rilevare l'assione con una discreta sensibilità è necessario fare affidamento su un primo fotone associato ad un campo magnetico continuo e costante di intensità elevata, l'interazione di quest'ultimo con l'assione genera così un secondo fotone abbastanza energetico da poter essere rilevato.

La possibilità di valutare l'interazione del campo elettromagnetico iniziale con l'assione è dovuta al fatto che il processo di conversione di quest'ultimo in fotone è un processo non conservativo che trasforma l'energia incanalata in un campo con frequenza di oscillazione pari alla massa dell'assione.

L'utilità dello sfruttamento del vettore di Poynting per descrivere con efficacia la distribuzione dell'energia e delle forze nei materiali dielettrici è risultata particolarmente evidente negli ultimi anni con l'introduzione delle cosiddette *curl forces*, ovvero forze Newtoniane che dipendono solo dalla posizione ma che non sono conservative (per esempio forze con rotore non nullo) [32]. Queste *curl forces* sono tali da non poter essere generate a partire da una Hamiltoniana composta da un'energia cinetica isotropa ed un classico potenziale scalare ma richiedono, ad esempio, una funzione quadratica del momento che sia anisotropa. Di norma, esse non giocano un ruolo fondamentale nella fisica delle particelle, tuttavia formano una sottoclasse interessante di sistemi dinamici di tipo reversibile: nonostante siano non conservative sono anche non dissipative, dunque generalmente vengono usate per descrivere sistemi per i quali l'inversione della velocità ad un certo istante permette alla particella di ripercorrere la stessa traiettoria. Come si vedrà in seguito, nella trattazione dei campi elettromagnetici modificati dalla perturbazione assionica e descritti tramite i vettori di Poynting compare una componente che si può descrivere ed interpretare come termine dinamico legato ad una *curl force*.

Il teorema di Poynting può essere formulato in quattro diverse versioni [33] ma due, nello specifico, risultano utili per l'analisi del bilancio energetico nel rilevamento dell'assione:

- vettore di Minkowski $\mathbf{S}_{DB} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\mathbf{D} \times \mathbf{B}$, dove $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ e $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$,
- vettore di Abraham $\mathbf{S}_{EH} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

Se si è in presenza di un termine di polarizzazione con rotore non nullo è necessario che il materiale utilizzato sia un elettrete (cioè un dielettrico con polarizzazione elettrostatica) oppure, in generale, un materiale in grado di accumulare energia. Inoltre, questo termine si comporta come un dipolo oscillante attivo ed impone la modifica delle leggi di Faraday a causa della presenza di una *curl force* (che deve derivare da un potenziale vettoriale elettrico e non può discendere da un normale potenziale scalare).

Nell'elettrodinamica che descrive l'interazione assionica con un campo già esistente, entra quindi in gioco proprio il termine preannunciato che può essere associato ad una *curl force* ed agisce nel momento in cui avviene l'accoppiamento tra il fotone energetico e l'assione.

In alcune recenti trattazioni [34] si è tentato di quantificare da un punto di vista energetico l'azione di accoppiamento dell'assione sfruttando il teorema di Poynting nelle due forme sopra citate con l'obiettivo di dimostrare che l'applicazione dei due vettori porta a due risultati differenti (nello specifico si sosteneva che il vettore di Minkowski fosse in grado di considerare anche il termine legato alla *curl force*, ignorato con il vettore di Abraham).

Tuttavia, secondo un'analisi successiva effettuata da un secondo gruppo di ricerca e qui riproposta [35], questa differenza nei risultati risulta essere legata esclusivamente ad un processo di approssimazione errata e dunque, come è anche naturale pensare, l'utilizzo di due differenti metodi di descrizione del fenomeno non ne comporta una diversa manifestazione fisica.

3.1 Forma alternativa delle equazioni di Maxwell modificate

Nel capitolo precedente si erano calcolate le equazioni di Maxwell modificate dal termine di accoppiamento assionico per poi limitarsi a mostrare quelle relative ai campi di reazione \mathbf{E}_{rea} e \mathbf{B}_{rea} ¹. Per favorire la trattazione successiva, risulta più conveniente scrivere le equazioni includendo i termini di modifica all'interno delle sorgenti stesse: è importante notare che le due forme esposte sono del tutto equivalenti da un punto di vista fisico.

Di seguito si riportano le equazioni riarrangiate e troncate al primo ordine nella costante di accoppiamento $g_{a\gamma\gamma}$: si sottolinea che in questa parte della trattazione, per snellire la scrittura, i termini con pedice 1 includono già al loro interno la costante $g_{a\gamma\gamma}$ quindi svolgono la stessa funzione dei termini precedentemente indicati con pedice *rea*.

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) - g_{a\gamma\gamma} a(t) c \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)) = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} g_{a\gamma\gamma} a(t) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) - g_{a\gamma\gamma} a(t) c \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t)) = \mathbf{J}_e, \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot c \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.1d)$$

Questa scrittura è equivalente a considerare la seguente trasformazione perturbativa dei campi

$$c \mathbf{B}'_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow c \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) + g_{a\gamma\gamma} a(t) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t), \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{E}'_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) - g_{a\gamma\gamma} a(t) c \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t). \quad (3.2b)$$

Le equazioni (3.2a) e (3.2b) si possono interpretare come trasformazioni di simmetria rotazionale variabili nel tempo: nel caso di assioni associati alla materia oscura, il termine di rotazione rimarrebbe comunque molto piccolo a causa dell'ordine di grandezza limitato della costante di accoppiamento.

Si nota che queste trasformazioni possono essere lette anche come manifestazione del quadrivettore duale che contiene sia il potenziale magnetico (scalare) che il potenziale elettrico (vettoriale) che è proprio responsabile dell'espressione della *curl force* che interviene nell'interazione tra l'assione e il campo magnetico [34]. Alternativamente possiamo direttamente esprimere le equazioni tramite i campi

¹Le equazioni relative ai campi esterni applicati risultavano invariate. Vedi equazioni (2.13).

usati per i materiali dielettrici

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t) = \rho_e, \quad (3.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_e, \quad (3.3b)$$

$$\nabla \cdot c\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.3c)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.3d)$$

dove

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{a1}, \quad \mathbf{M}_{a1} = -g_{a\gamma\gamma} a \varepsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{a1}, \quad \frac{\mathbf{P}_{a1}}{\varepsilon_0} = -g_{a\gamma\gamma} c \mathbf{B}_0. \quad (3.5)$$

Il comportamento del sistema è molto simile a quello di un elettrete ed un magnete permanenti a causa del fatto che $\nabla \times \mathbf{P}_{a1} \neq 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{M}_{a1} \neq 0$. È importante sottolineare che in fase di derivazione delle equazioni di Maxwell modificate è necessario non attuare l'approssimazione $\nabla a = 0$ altrimenti non sarebbe possibile ricavare le relazioni esposte in (3.4) e (3.5).

La maggior parte degli esperimenti haloscope considera strumenti che hanno un'interazione limitata con gli assioni, cioè uno scambio di energia tra il campo EM secondario assionico e quello primario contenuto. In questi casi, è sempre presente una corrente \mathbf{J}_{e0} che genera il campo magnetico principale \mathbf{B}_0 e, se si verifica l'interazione di un assione con la corrente elettrica \mathbf{J}_{e0} , si manifesta una "corrente magnetica" \mathbf{J}_{m1} . Inoltre, se si assume che sia presente solamente un campo magnetico primario e che il sistema sia nel vuoto, questa "corrente magnetica" si ottiene da

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \mathbf{D}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1 = -g_{a\gamma\gamma} a \mu_0 c \mathbf{J}_{e0} = -\mathbf{J}_{m1}. \quad (3.6)$$

3.2 Trattazione con i fasori

Poiché è conveniente risolvere il sistema delle equazioni modificate concentrandosi solo sulle soluzioni oscillanti, trascurando le componenti transienti, si definiscono di seguito i fasori dei campi interessati. Si noti che di seguito si utilizzerà la convenzione presente in [34] e si indicheranno i fasori vettori in grassetto sormontati da una tilde e i vettori classici sormontati da una freccia.

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_1(\vec{r})e^{-i\omega_1 t}], \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\vec{r}, t) = \mathbf{E}_1(\vec{r})e^{-i\omega_1 t}, \quad (3.8)$$

$$\tilde{A} = \tilde{a}e^{-i\omega_a t}. \quad (3.9)$$

La legge di Ampere modificata risulta quindi

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\mathbf{J}}_{e1} - i\omega_1 \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}_1 + i\omega_a g_{a\gamma\gamma} \varepsilon_0 c \tilde{A} \tilde{\mathbf{B}}_0, \quad (3.10)$$

mentre la legge di Faraday con i campi modificati è declinata come segue

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \times \tilde{\mathbf{D}}_1 = i\omega_1 \tilde{\mathbf{B}}_1 - g_{a\gamma\gamma} c \mu_0 \tilde{A} \tilde{\mathbf{J}}_0. \quad (3.11)$$

Ovviamente per ognuna di queste forme si può definire la corrispondente complessa coniugata effettuando il processo di coniugazione su ogni singolo termine.

3.2.1 Calcolo della potenza generata tramite il teorema di Poynting

In primo luogo, per introdurre la trattazione successiva, si considera la forma generica del vettore di Poynting istantaneo di due campi \vec{E}_1 e \vec{B}_1 , che qui denominiamo \vec{S}_1 , e si applica il teorema di Poynting ai campi espressi in forma di fasori, ottenendo quanto segue:

$$\vec{S}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 \times \vec{B}_1 = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1^*) + \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1 e^{-i2\omega_1 t}). \quad (3.12)$$

Tale vettore di Poynting risulta composto da due parti: una componente (la prima nel termine di destra dell'equazione (3.12)) risulta un termine in corrente continua, coincidente con il valore medio nel tempo del vettore \mathbf{S}_1 stesso, mentre il secondo rappresenta un termine oscillante ad alta frequenza. Quindi si può definire in modo standard il fasore del vettore di Poynting e da esso ricaviamo la densità di potenza $\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1^*$ legata all'oscillazione dell'onda elettromagnetica. Quando i due campi \mathbf{E}_1 e \mathbf{B}_1 sono in fase, il vettore di Poynting complesso risulta essere complessivamente reale mentre se il vettore è immaginario, i due campi sono fuori fase.

Il primo caso, ovvero quando i campi sono in fase, è ciò che si ottiene, ad esempio, tramite un'antenna emittente nel limite di distanza molto elevata (vedi (2.2.1)). In questo caso, la potenza ricavata integrando appositamente il vettore di Poynting coincide con quella persa dall'antenna.

Lo stesso esempio di perdita energetica si ha anche nei sistemi che presentano una componente resistiva non trascurabile: l'energia dei fotoni incidenti viene persa sotto forma di calore durante il processo di interazione (fenomeno denominato *perdita per radiazione*).

Se i due campi sono fuori fase, invece, è possibile interpretare l'interazione del fotone con il campo esistente come un'oscillazione di potenza e i due campi \mathbf{E}_1 e \mathbf{B}_1 risultano quasi statici (questo fenomeno avviene solo a distanze inferiori della lunghezza d'onda del fotone).

In appendice 5.4 sono mostrati i passaggi espliciti per ricavare il valore del vettore di Poynting, sia nel caso di Minkowski che di Abraham, calcolando la componente reale e quella immaginaria del rispettivo fasore in maniera da poter effettuare un effettivo confronto tra i due approcci. Nello specifico, dopo aver ricavato le divergenze dei fasori \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_1^* associati ai vettori di Poynting (vedi (5.35) e (5.38)) si è utilizzato il teorema delle divergenze per calcolare la potenza radiata verso l'esterno dell'aloscopio. Gli integrali relativi alle componenti reali ((5.36a) e (5.40a)) restituiscono il valore della potenza mediata nel tempo uscente dall'aloscopio, mentre quelli calcolati sulle componenti immaginarie ((5.36b) e (5.40b)) restituiscono la potenza radiativa emessa all'esterno dello strumento.

Per sistemi chiusi (come la cavità dell'aloscopio) gli integrali delle componenti reali devono essere nulli mentre la potenza radiativa legata alla parte immaginaria del vettore di Poynting può rappresentare l'oscillazione dell'energia tra una sorgente di un campo magnetico e i campi esterni in cui si trova immersa e, di conseguenza, non deve forzatamente essere nulla [34].

Ovviamente si nota che le due scritture degli integrali definiti rispetto al vettore di Minkowski e di Abraham non coincidono: nello specifico, con il primo modello si ottengono dei termini in eccesso che non risultano nel vettore di Abraham. I termini aggiuntivi che figurano nel vettore di Minkowski evidenziano la struttura di *curl force* dell'anomalia introdotta dall'assione.

3.3 Teorema di Poynting per l'analisi Haloscope

Il funzionamento dell'aloscopio per la ricerca di assioni da Materia Oscura, detto ADMX (Axion Dark Matter Experiment) [27, 28], si basa sul principio di funzionamento della cavità risonante (schematizzato anche in figura 3.1). La cavità risulta essere immersa in un campo magnetico esterno \vec{B}_0 : quando un assione interagisce con il campo magnetico genera una determinata potenza, P_s , che raggiunge successivamente la cavità ed è interpretata come componente reale del vettore di Poynting. A questo punto, anche all'interno della cavità inizia a circolare una potenza P_c , il cui valore effettivo dipende da un fattore moltiplicativo, Q specifico per la singola cavità.

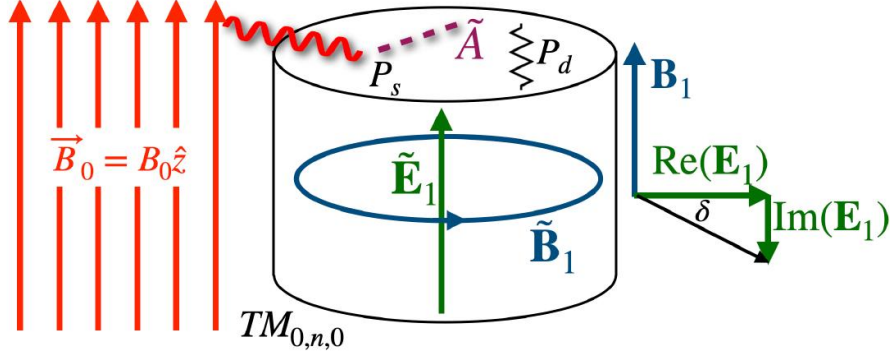


Figura 3.1: Figura dimostrativa del processo di conversione dell'assione in una cavità risonante, strumento per la ricerca di assioni associati alla Materia Oscura. L'immagine è tratta dal documento [34].

La cavità è definita risonante nel momento in cui la potenza attiva immessa dalla sorgente assionica risulta nulla: in questo caso non è presente una quota di energia che oscillerà tra la parte interna della cavità e la sorgente, dunque il sistema si può considerare chiuso.

Dentro la cavità, invece, il surplus energetico portato dalla sorgente genera una oscillazione tra il campo elettrico e quello magnetico; la potenza che circola nel volume dell'aloscopio può essere descritta dalla componente immaginaria del vettore di Poynting ed ha la seguente regola di dipendenza dalla potenza della sorgente: $P_c = Q_1 P_s$.

Chiaramente, all'interno della cavità risonante il campo elettrico e quello magnetico non risultano essere in fase tra di loro²: il prodotto delle due componenti vettoriali fuori fase genera un contributo al vettore di Poynting completamente immaginario e che dipende da un angolo δ (detto *angolo di perdita*) il quale può essere quantificato tramite il fattore Q_1 dell'aloscopio: se tale fattore è molto elevato, si definisce $\tan \delta \sim \frac{1}{Q_1}$.

L'effetto anomalo generato dall'assione sul campo elettrico è molto limitato: per calcolarlo è conveniente porre a zero la potenza reattiva in condizioni di risonanza. Con questa scelta qualunque fenomeno di eccitazione viene rilevato come variazione della fase relativa lasciando comunque il fasore del campo elettrico reale nella quasi totalità (ciò coincide con un angolo δ molto piccolo).

Per calcolare la potenza che viene dissipata all'interno dell'aloscopio bisogna considerare i contributi di perdita energetica interni al volume e quelli superficiali. Le componenti della potenza dissipata nel volume si calcolano a partire da un termine che figura nel fasore reale di entrambi i vettori di Poynting: $\frac{1}{4}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1})$ (si vedano le equazioni (5.36a) e (5.40a)).

I termini dissipativi del campo elettrico, sia nel volume che sulla superficie della cavità risonante, sottostanno alla legge di Ohm, per cui sono in fase con le correnti e con il campo magnetico. Definendo σ_e come la conducibilità dell'aloscopio, possiamo scrivere la corrente nel volume come $\mathbf{J}_{e1} = \sigma_e \mathbf{E}_1 \sim \frac{\omega_a \epsilon_0}{Q_1} \mathbf{E}_1$. Dunque la potenza dissipata nella cavità risulta essere

$$P_d = \frac{\omega_a \epsilon_0}{2Q_1} \int \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* dV = \frac{\omega_a U_1}{Q_1}. \quad (3.13)$$

Invece il termine dissipato sulla superficie si calcola considerando la corrente di superficie con $\mathbf{K}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_1$ ed è equivalente al termine volumetrico.

Nella pratica dell'esperimento, il sistema non può essere considerato chiuso ma si deve calcolare la potenza che fuoriesce dalla cavità a causa dell'effetto di accoppiamento assionico: questo termine

²Si associa il campo elettrico, senza perdite energetiche, ad un fasore completamente reale e quello magnetico ad un fasore immaginario: il loro prodotto vettoriale risulta immaginario. Se il campo elettrico è sottoposto a perdite energetiche esso guadagna componente immaginaria.

influisce a sua volta sul fattore Q aumentandolo e, dunque, generando un effetto al secondo ordine che può essere valutato successivamente.

La potenza della sorgente P_s , cioè generata dall'assione, si trova come integrale del fasore reale del vettore di Poynting e con le assunzioni fatte e imponendo anche che la frequenza di risonanza coincida con quella dell'assione, risulta equivalente alla potenza dissipata P_d già calcolata. Il risultato, inoltre, è uguale utilizzando entrambe le declinazioni del vettore di Poynting (Minkowski e Abraham).

Quest'ultima considerazione si dimostra facilmente notando che, almeno in prima approssimazione, gli integrali delle componenti reali dei fasori \mathbf{S}_{DB} ed \mathbf{S}_{EH} coincidono. Infatti, mostrando le equazioni semplificate rispetto al fattore $\frac{cg_{a\gamma\gamma}}{4}$, si ottiene

$$\operatorname{Re}(\mathbf{S}_{DB}) - \operatorname{Re}(\mathbf{S}_{EH}) = i\omega_1\epsilon_0\vec{B}_0(\tilde{a}\mathbf{E}_1^* - \tilde{a}^*\mathbf{E}_1) + \epsilon_0\vec{B}_0(\tilde{a}\mathbf{J}_{e1}^* + \tilde{a}^*\mathbf{J}_{e1}) - \mathbf{J}_{e1}(\tilde{a}\mathbf{B}_1^* + \tilde{a}^*\mathbf{B}_1). \quad (3.14)$$

Ora è conveniente esprimere le dimensioni tipiche del campo elettrico e quello magnetico derivanti dalla correzione al primo ordine come: $E_1 \sim g_{a\gamma\gamma}B_0$ e $B_1 \sim g_{a\gamma\gamma}B_0$ e considerare la corrente effettiva $J_{\text{eff}} = g_{a\gamma\gamma}B_0 = -i\omega_a(B_0g_{a\gamma\gamma}\dot{a})$ [35].

L'equazione (3.14), come ci si aspettava, diventa

$$\operatorname{Re}(\mathbf{S}_{DB}) - \operatorname{Re}(\mathbf{S}_{EH}) = i\omega_1\epsilon_0B_0^2g_{a\gamma\gamma} \cdot 0 = 0. \quad (3.15)$$

Si tenga conto del fatto che nel calcolo si è considerata la relazione $J_0 \sim B_0$, ottenuta ponendo $E_0 = 0$ e $\nabla a = 0$ e calcolando

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 - \partial_t \mathbf{E}_1 + g\dot{a}\vec{B}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_1 - g\dot{a}\vec{B}_0 + g\dot{a}\vec{B}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_1 = \mathbf{J}_{e1}. \quad (3.16)$$

Dunque, in conclusione, la sensibilità della misurazione della potenza dissipata per aloscopi a cavità risonante non è influenzata dall'utilizzo dell'uno o dell'altro vettore di Poynting.

A partire dalla formula della potenza dissipata (3.13) è poi possibile ricavare l'energia accumulata nella cavità risonante e quindi il valore della potenza che circola al suo interno [34], generata dall'interazione assionica³

$$P_1 = \omega_a QU_1 = g_{a\gamma\gamma}^2 \rho_a Q_1 \epsilon_0 c^5 B_0^2 V_1 C_1 \frac{1}{\omega_a}. \quad (3.17)$$

3.3.1 Soluzione della controversia per esperimenti haloscope con rivelatori a banda larga

Una differente tecnica di ricerca degli assioni a massa ridotta consiste nell'utilizzo di rivelatori a banda larga. In questo caso gli aloscopi possono essere di tipo induttivo o capacitivo⁴ e sono generalmente costituiti da particolari capacitori con dimensioni adatte alla rivelazione dei campi assionici. La sensibilità della rivelazione, in questo caso, sarà determinata dalla potenza reattiva che deriva dall'interazione dell'assione con il campo magnetico di fondo.

Alcuni gruppi di ricerca hanno messo in luce una problematica: nel caso di esperimenti a "banda larga", cioè con lunghezza d'onda di Compton assionica superiore alle dimensioni sperimentali dello strumento, la sensibilità dello strumento alla misura del campo elettrico risulta essere soppressa di un certo fattore che dipende dalla lunghezza d'onda assionica λ_a [26, 30]. In seguito a queste osservazioni, sono stati avanzati dei dubbi che hanno dato origine ad una controversia relativa al possibile utilizzo preferenziale di uno dei due vettori di Poynting analizzati, ipotizzando che la scelta dell'uno o dell'altro vettore portasse a prevedere sensibilità differenti per lo strumento utilizzato [34].

Come visto nella formula (5.33) della divergenza per Minkowski, il termine quadratico in $g_{a\gamma\gamma}$ (che compare per ultimo nelle formule indicate) risulta essere confrontabile con gli altri termini e non può

³ ρ_a è il valore della densità dell'assione associato alla materia oscura.

⁴ Si considerano sempre i fasori del campo elettrico come totalmente reali.

essere escluso a priori: proprio il fatto di trascurare questo termine nella trattazione del vettore di Minkowski, determina l'errata interpretazione presentata in [34].

Se consideriamo un condensatore a piastre parallele possiamo applicare alcune semplificazioni: la corrente di conduzione deve essere nulla nel volume del condensatore ed esso deve essere immerso in un magnete con campo generato da corrente continua, inoltre, come prima, la frequenza di risonanza coincide con quella dell'assione.

Con queste accortezze, la potenza calcolata a partire dai fasori immaginari risulta essere, nei due casi

$$\begin{aligned} \oint i\text{Im}(\mathbf{S}_{DB}) \cdot \hat{n} ds &= \int \left(\frac{i(\omega_1 + \omega_a)}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* + \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) + \frac{i\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\omega_a}{2\mu_0} (g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2 \right) dV = \int i\omega_a \left(\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{(g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2}{2\mu_0} + \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} a_0 c \vec{B}_0 \cdot \frac{\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_1}{2} \right) dV, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\oint i\text{Im}(\mathbf{S}_{EH}) \cdot \hat{n} ds = \int i\omega_a \left(\frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{\epsilon_0}{2} g_{a\gamma\gamma} a_0 c \vec{B}_0 \cdot \frac{\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_1}{2} \right) dV. \quad (3.19)$$

Si nota che gli ultimi termini di entrambi gli integrali possono essere riformulati considerando l'approssimazione già introdotta $E_1 \sim g_{a\gamma\gamma} B_0$ e $B_1 \sim g_{a\gamma\gamma} B_0$: così facendo si ottengono gli stessi valori per le due potenze dissipate eliminando quindi l'ambiguità che creava la discordanza tra i due vettori utilizzati.



Capitolo 4

Conclusioni

Nel corso di questa tesi si sono esposte ed analizzate le principali caratteristiche dell'assione: come si è visto, lo studio di questa pseudo particella è, da decenni, in continua evoluzione ed in fase di perfezionamento. Si sono qui forniti i valori delle stime considerate più attendibili delle principali grandezze caratteristiche (con particolare riguardo alla massa ed alla costante di accoppiamento con i fotoni).

Gli apparati per esperimenti di tipo haloscope risultano essere, ad oggi, il miglior setup sperimentale in grado di permetterci (almeno teoricamente) di rilevare un evento di interazione tra i fotoni e gli assioni che si ipotizzano costituire, almeno parzialmente, la Materia Oscura. Si è studiato, nello specifico, il processo di perturbazione del campo elettromagnetico misurabile nella cavità risonante dell'aloscopia in seguito ad un accoppiamento assione/fotone, ricavando le equazioni di Maxwell dei campi modificati e, in seguito, calcolando il vettore di Poynting associato ai campi nelle due versioni di Minkowski e Abraham. Si sono confrontate le due versioni e si è dimostrato, nel limite delle scelte di approssimazione fatte, che l'utilizzo dell'una o dell'altra formulazione non influisce sulle previsioni teoriche relative alle eventuali rivelazioni.

Poiché la maggior parte dei modelli proposti fino ad ora prevede che gli accoppiamenti con i fotoni siano caratterizzati da costanti molto piccole, non è garantito che si assisterà a breve alla scoperta dell'assione. Comunque, si stanno prospettando numerose opportunità sperimentali da cui, sperabilmente, si potranno attendere tanti risultati in tempi brevi. Dopodiché, se tale risultati permetteranno di annunciare una scoperta o se porteranno a stabilire solamente dei limiti nello spazio dei parametri solo i dati futuri potranno dirlo.

Tuttavia, è importante sottolineare come l'avanzamento degli studi teorici relativi a questo ipotetico bosone abbiano recentemente aperto nuove strade per la ricerca della Materia Oscura: se, prima degli anni Ottanta, la ricerca si concentrava su candidati particolarmente pesanti e che potevano essere eventualmente rilevati tramite esperimenti al LHC, il fallimento di tali ricerche ha portato, ad oggi, a considerare altre vie come più percorribili. La scoperta dell'assione permetterebbe di sviluppare un nuovo ramo della Fisica Moderna che supera la nostra attuale visione del Modello Standard e, in generale, della struttura dell'Universo.



Bibliografia

- [1] Pierre Sikivie. “Invisible axion search methods”. In: *Reviews of Modern Physics* 93.1 (feb. 2021). DOI: [10.1103/revmodphys.93.015004](https://doi.org/10.1103/revmodphys.93.015004). URL: <https://doi.org/10.1103%2Frevmodphys.93.015004>.
- [2] I A Boriev. “Existence of dark matter with observed properties of cosmic microwave background radiation substantiates three conservation laws of classical physics and all principles of quantum mechanics as creates the value of Planck’s constant”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 996 (mar. 2018), p. 012017. DOI: [10.1088/1742-6596/996/1/012017](https://doi.org/10.1088/1742-6596/996/1/012017). URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/996/1/012017>.
- [3] A. D. Sakharov. “Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe”. In: *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 5 (1967), pp. 32–35. DOI: [10.1070/PU1991v034n05ABEH002497](https://doi.org/10.1070/PU1991v034n05ABEH002497).
- [4] C. S. Wu et al. “Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay”. In: *Phys. Rev.* 105 (4 feb. 1957), pp. 1413–1415. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1413](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1413>.
- [5] Gerhart Lüders. “Proof of the TCP theorem”. In: *Annals of Physics* 2.1 (1957), pp. 1–15. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(57\)90032-5](https://doi.org/10.1016/0003-4916(57)90032-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491657900325>.
- [6] Thomas Mannel. “Theory and Phenomenology of CP Violation”. In: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 167 (2007). Proceedings of the 7th International Conference on Hyperons, Charm and Beauty Hadrons, pp. 170–174. ISSN: 0920-5632. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.083>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563206010711>.
- [7] Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa. “CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction”. In: *Progress of Theoretical Physics* 49.2 (feb. 1973), pp. 652–657. ISSN: 0033-068X. DOI: [10.1143/PTP.49.652](https://doi.org/10.1143/PTP.49.652). eprint: <https://academic.oup.com/ptp/article-pdf/49/2/652/5257692/49-2-652.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1143/PTP.49.652>.
- [8] Gabriella Sciolla. “The Mystery of CP Violation”. In: *MIT Physic Annal* (2006). URL: https://physics.mit.edu/wp-content/uploads/2021/01/physicsatmit_06_sciollafeature.pdf.
- [9] T. Schäfer e E. V. Shuryak. “Instantons in QCD”. In: *Reviews of Modern Physics* 70.2 (apr. 1998), pp. 323–425. DOI: [10.1103/revmodphys.70.323](https://doi.org/10.1103/revmodphys.70.323). URL: <https://doi.org/10.1103%2Frevmodphys.70.323>.
- [10] J. M. Pendlebury et al. “Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron”. In: *Phys. Rev. D* 92 (9 nov. 2015), p. 092003. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.092003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.092003). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.92.092003>.
- [11] Luca Di Luzio et al. “The landscape of QCD axion models”. In: *Physics Reports* 870 (lug. 2020), pp. 1–117. DOI: [10.1016/j.physrep.2020.06.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.06.002). URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2020.06.002>.
- [12] Roberto D. Peccei e Helen R. Quinn. “CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles”. In: *Physical Review Letters* 38 (1977), pp. 1440–1443.
- [13] Georg G. Raffelt. “Axions in astrophysics and cosmology”. In: *30th Rencontres de Moriond: Euroconferences: Dark Matter in Cosmology, Clocks and Tests of Fundamental Laws*. 1995, pp. 159–168. arXiv: [hep-ph/9502358](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9502358).

-
- [14] Jihn E. Kim. “Weak-Interaction Singlet and Strong CP Invariance”. In: *Phys. Rev. Lett.* 43 (2 lug. 1979), pp. 103–107. DOI: [10.1103/PhysRevLett.43.103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.103). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.43.103>.
- [15] Matthew J. Stott e David J. E. Marsh. “Black hole spin constraints on the mass spectrum and number of axionlike fields”. In: *Physical Review D* 98.8 (ott. 2018). DOI: [10.1103/physrevd.98.083006](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.083006). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.98.083006>.
- [16] Masha Baryakhtar et al. “Black hole superradiance of self-interacting scalar fields”. In: *Physical Review D* 103.9 (mag. 2021). DOI: [10.1103/physrevd.103.095019](https://doi.org/10.1103/physrevd.103.095019). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.103.095019>.
- [17] J. Ipser e P. Sikivie. “Can Galactic Halos Be Made of Axions?” In: *Phys. Rev. Lett.* 50 (12 mar. 1983), pp. 925–927. DOI: [10.1103/PhysRevLett.50.925](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.925). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.50.925>.
- [18] Giovanni Grilli di Cortona et al. “The QCD axion, precisely”. In: *Journal of High Energy Physics* 2016.1 (gen. 2016). DOI: [10.1007/jhep01\(2016\)034](https://doi.org/10.1007/jhep01(2016)034). URL: <https://doi.org/10.1007%2Fjhep01%282016%29034>.
- [19] P. Sikivie. “Experimental Tests of the ”Invisible” Axion”. In: *Phys. Rev. Lett.* 51 (16 ott. 1983), pp. 1415–1417. DOI: [10.1103/PhysRevLett.51.1415](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.51.1415). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1415>.
- [20] H. Primakoff. “Photo-Production of Neutral Mesons in Nuclear Electric Fields and the Mean Life of the Neutral Meson”. In: *Phys. Rev.* 81 (5 mar. 1951), pp. 899–899. DOI: [10.1103/PhysRev.81.899](https://doi.org/10.1103/PhysRev.81.899). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.81.899>.
- [21] Jihn E. Kim. “Weak-Interaction Singlet and Strong CP Invariance”. In: *Phys. Rev. Lett.* 43 (2 lug. 1979), pp. 103–107. DOI: [10.1103/PhysRevLett.43.103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.103). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.43.103>.
- [22] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein e V.I. Zakharov. “Can confinement ensure natural CP invariance of strong interactions?” In: *Nuclear Physics B* 166.3 (1980), pp. 493–506. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(80\)90209-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(80)90209-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380902096>.
- [23] A. R. Zhitnitsky. “On Possible Suppression of the Axion Hadron Interactions. (In Russian)”. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 31 (1980), p. 260.
- [24] Michael Dine, Willy Fischler e Mark Srednicki. “A simple solution to the strong CP problem with a harmless axion”. In: *Physics Letters B* 104.3 (1981), pp. 199–202. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)90590-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90590-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381905906>.
- [25] Ben T. McAllister, Stephen R. Parker e Michael E. Tobar. “Axion Dark Matter Coupling to Resonant Photons via Magnetic Field”. In: *Phys. Rev. Lett.* 116 (16 apr. 2016), p. 161804. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.161804](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.161804). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.161804>.
- [26] Younggeun Kim et al. *Effective Approximation of Electromagnetism for Axion Haloscope Searches*. 2018. DOI: [10.48550/ARXIV.1810.02459](https://doi.org/10.48550/ARXIV.1810.02459). URL: <https://arxiv.org/abs/1810.02459>.
- [27] S. Asztalos et al. “Large-scale microwave cavity search for dark-matter axions”. In: *Phys. Rev. D* 64 (9 ott. 2001), p. 092003. DOI: [10.1103/PhysRevD.64.092003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.092003). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.092003>.
- [28] N. Du et al. “Search for Invisible Axion Dark Matter with the Axion Dark Matter Experiment”. In: *Phys. Rev. Lett.* 120 (15 apr. 2018), p. 151301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.120.151301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.151301). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.151301>.
- [29] L. Zhong et al. “Results from phase 1 of the HAYSTAC microwave cavity axion experiment”. In: *Phys. Rev. D* 97 (9 mag. 2018), p. 092001. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.092001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.092001). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.092001>.
- [30] Jonathan Ouellet e Zachary Bogorad. “Solutions to axion electrodynamics in various geometries”. In: *Physical Review D* 99.5 (mar. 2019). DOI: [10.1103/physrevd.99.055010](https://doi.org/10.1103/physrevd.99.055010). URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.99.055010>.

-
- [31] Wikipedia. *Costante di Eulero-Mascheroni* — *Wikipedia, L'enciclopedia libera*. [Online; in data 26-agosto-2022]. 2021. URL: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Costante_di_Eulero-Mascheroni&oldid=119590281.
- [32] Berry M. V. e Shukla Pragya. “Hamiltonian curl forces”. In: *Proc. R. Soc. A.* (2015). DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0002>.
- [33] Paul Kinsler, Alberto Favaro e Martin W McCall. “Four Poynting theorems”. In: *European Journal of Physics* 30.5 (lug. 2009), pp. 983–993. DOI: [10.1088/0143-0807/30/5/007](https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/5/007). URL: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/30/5/007>.
- [34] Michael E Tobar, Ben T McAllister e Maxim Goryachev. “Poynting vector controversy in axion modified electrodynamics”. In: (2021). DOI: [10.48550/ARXIV.2109.04056](https://arxiv.org/abs/2109.04056). URL: <https://arxiv.org/abs/2109.04056>.
- [35] Kevin Zhou. *Comment on "Poynting vector controversy in axion modified electrodynamics"*. 2022. DOI: [10.48550/ARXIV.2203.15821](https://arxiv.org/abs/2203.15821). URL: <https://arxiv.org/abs/2203.15821>.
- [36] Wikipedia. *Armoniche cilindriche* — *Wikipedia, L'enciclopedia libera*. [Online; in data 26-agosto-2022]. 2022. URL: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Armoniche_cilindriche&oldid=125632527.
- [37] Wikipedia. *Nabla in coordinate cilindriche e sferiche* — *Wikipedia, L'enciclopedia libera*. [Online; in data 26-agosto-2022]. 2022. URL: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=Nabla_in_coordinate_cilindriche_e_sferiche&oldid=126444457.



Capitolo 5

Appendice

5.1 Calcolo delle Equazioni di Lagrange modificate

Si premette che non verrà esplicitata la parte della lagrangiana relativa al potenziale esclusivamente assionico (\mathcal{L}_U) in quanto non influisce nel calcolo variazionale effettuato rispetto al campo \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{4\mu_0} a F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_U \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J_e^\mu + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{2\mu_0} a F^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \mathcal{L}_U \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - A_\mu J_e^\mu + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{2\mu_0} a \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) F^{\alpha\beta} + \mathcal{L}_U \\
 &= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - A_\mu J_e^\mu + \frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \partial^\mu (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\nu F^{\alpha\beta}) + \mathcal{L}_U.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Per effettuare questo ultimo passaggio si è sfruttata l'identità di Bianchi $\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0$ e l'antisimmetria di Maxwell ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$). Definendo il terzo termine come $\tilde{\mathcal{L}} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \partial^\mu (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\nu F^{\alpha\beta})$ otteniamo:

$\partial^\mu \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} \right) = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} (\partial^\mu a \tilde{F}_{\mu\nu} + a \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu})$ e $\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A^\nu} = \frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu}$ dunque complessivamente:

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu + \partial_\mu a \tilde{F}^{\mu\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu + \partial_\mu \left(\frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Dunque è possibile ricavare le equazioni di Maxwell ricercate.

- Ponendo $\nu = 0, \mu = i = 1, 2, 3$ otteniamo:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} - \partial_\mu \left(\frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \tilde{F}^{\mu 0} \right) = c\rho,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} - c g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{B}) = \frac{\rho_e}{\epsilon}.$$

- Ponendo $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ otteniamo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\mu \left(\frac{g_{a\gamma\gamma}}{\mu_0} a \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = j^\nu,$$

$$\nabla \times (c\mathbf{B} + g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{E}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} - c g_{a\gamma\gamma} a \mathbf{B}) + c\mu \mathbf{J}_e.$$

- Dall'identità di Bianchi:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

5.2 Integrazione dalla legge di Faraday

Si effettua il calcolo esplicito della legge di Maxwell per i campi \mathbf{E}_a e \mathbf{B}_a dell'assione e si verifica se, nei vari casi, viene rispettata. Per farlo esplicitiamo la legge in forma integrale, sfruttando il teorema di Stoke

$$\int \nabla \times \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{A} = \oint \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A}. \quad (5.2)$$

Dalle soluzioni (2.7) e (2.9) ottenute in precedenza, ricaviamo i campi nel caso specifico analizzato

$$\mathbf{E}_a = -cg_{a\gamma\gamma} a B_0 \hat{z}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{B}_a = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{2c} B_0 \dot{a} \hat{\phi}. \quad (5.4)$$

5.2.1 Integrazione per un solenoide con area simmetrica rettangolare

Considerando un solenoide di sezione rettangolare simmetrica rispetto all'asse di rotazione con vertici indicati dalle lettere a, b, c, d in cui i lati ab e cd sono paralleli all'asse si ottengono le relazioni seguenti:

$$\oint \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E_a dl + \int_b^c E_a dl + \int_c^d E_a dl + \int_d^a E_a dl = \int_a^b E_a dl - \int_d^c E_a dl = 0, \quad (5.5)$$

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} + \int_{\mathcal{A}_s} \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{A}_s} B_a dA - \int_{\mathcal{A}_s} B_a dA = 0. \quad (5.6)$$

Si noti che il campo magnetico e il versore ortogonale all'area del solenoide sono paralleli tra loro, dividendo la superficie del solenoide in una parte di destra \mathcal{A}_d e una di sinistra \mathcal{A}_s i due integrali di (5.6) complessivamente si annullano a vicenda. Dunque si vede che nel caso di area di integrazione simmetrica le soluzioni rispettano ancora la legge di Maxwell.

5.2.2 Integrazione per un solenoide con area asimmetrica rettangolare

Se si considerava una superficie rettangolare asimmetrica (con il lato $\bar{d}a$ allineato all'asse di rotazione) l'integrale di linea si annulla a causa dell'uniformità spaziale del campo magnetico e l'unica componente da calcolare (facendo riferimento all'equazione (2.10)) risulta

$$\oint \mathbf{E}_a \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}, \quad (5.7)$$

mentre l'integrale di superficie diventa

$$\int \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} = -\frac{g_{a\gamma\gamma}}{2c} B_0 \dot{a} \hat{\phi} \cdot \mathbf{n} \int_0^L \int_0^R r dr = -\frac{g_{a\gamma\gamma} B_0 \dot{a}}{4c} LR^2, \quad (5.8)$$

che è solitamente non nullo e dipendente dal tempo, infatti si mostra che la sua derivata temporale risulta essere

$$-\frac{d}{dt} \int \mathbf{B}_a \cdot d\mathbf{A} = -\frac{g_{a\gamma\gamma} B_0 \ddot{a}}{4c} LR^2 \neq \oint \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}, \quad (5.9)$$

in quanto \mathbf{f} è indipendente dal tempo: l'unico modo perché l'equazione sia rispettata è che la derivata seconda del campo assionico sia costante, in contraddizione, però, con la natura oscillatoria del campo assionico. Dunque in generale la legge di Faraday non viene rispettata con una superficie di integrazione asimmetrica.

5.3 Soluzione in cavità cilindrica

5.3.1 Armoniche cilindriche

Le armoniche cilindriche sono le soluzioni canoniche delle equazioni di Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (5.10)$$

dove α è un numero arbitrario che rappresenta l'ordine della funzione.

Le soluzioni sono generalmente linearmente indipendenti e si esprimono nella forma [36]

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}. \quad (5.11)$$

Poiché contengono la gamma di Eulero, un caso particolare è quello in cui α è un numero intero n : per la parità della funzione in α , si ottiene che $J_{-\alpha}(x) = (-1)^\alpha J_\alpha(x)$ ($\alpha \in \mathbb{N}$).

A causa della ridondanza delle funzioni di Bessel si introducono le funzioni di Neumann $Y_\alpha(x)$, dette Bessel di seconda specie

$$Y_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (5.12)$$

Mentre un'ulteriore riformulazione viene fornita dalle funzioni di Henkel (o di Bessel del terzo tipo)

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iY_\alpha(x) = J_{-\alpha}(x) + e^{-i\alpha\pi} \frac{J_\alpha(x)}{i \sin(\alpha\pi)}, \quad (5.13a)$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iY_\alpha(x) = J_{-\alpha}(x) + e^{i\alpha\pi} \frac{J_\alpha(x)}{-i \sin(\alpha\pi)}. \quad (5.13b)$$

Inoltre, di particolare rilevanza è la forma della derivata

$$\frac{dJ_\alpha}{dx}(x) = \frac{n}{x} J_\alpha(x) - J_{\alpha+1}(x). \quad (5.14)$$

5.3.2 Funzioni di Bessel del secondo ordine

Se consideriamo una equazione di Bessel del secondo ordine, otteniamo due possibili soluzioni indipendenti ($\nu \equiv J_m$ e μ , che viene definita in (5.19)) che rispettano il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x\mu'' + \mu' + x\mu = 0 \\ x\nu'' + \nu' + x\nu = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Riarrangiando le due equazioni otteniamo

$$x(\mu''\nu - \nu''\mu) + \mu'\nu - \nu'\mu = \frac{d}{dx}[x(\mu'\nu - \nu'\mu)] = \frac{d}{dx}B = 0, \quad (5.16)$$

dunque l'equazione che identifichiamo come B risulta essere costante rispetto a x . Sfruttando questo otteniamo che

$$\frac{\mu'\nu - \nu'\mu}{\nu^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu}{\nu} \right) = \frac{B}{x\nu^2}, \quad (5.17)$$

che integrata fornisce

$$\frac{\mu}{\nu} = A + B \int \frac{dx}{x\nu^2}. \quad (5.18)$$

Dunque, usando il fatto che $\nu \equiv J_m(0)$ otteniamo

$$\mu = AJ_m(x) + BJ_m(x) \int \frac{dx}{xJ_m^2(x)} = A'J_m(x) + B'Y_m(x), \quad (5.19)$$

dove $J_m(x)$ e $Y_m(x)$ sono definite come in (5.11) e (5.12). In realtà ν non è per forza un numero naturale dunque esistono delle complesse rappresentazioni in serie che permettono di esprimere consistentemente le funzioni di Bessel.

5.3.3 Operatore Laplaciano in coordinate cilindriche

Per poterlo sfruttare operativamente, definiamo la formula dell'operatore laplaciano applicato ad un vettore generico \mathbf{A} espresso in coordinate cilindriche [37]

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\rho} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\phi} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}, \quad (5.20)$$

dove, a sua volta, posso definire (data una generica funzione f nelle coordinate ρ , ϕ e z)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (5.21)$$

5.3.4 Applicazione ad un solenoide cilindrico

Per ottenere una soluzione concreta al problema della cavità cilindrica si sostituiscono le formule dei campi (2.17) nelle equazioni d'onda mostrate in (2.16) e si risolve l'equazione di Bessel associata nei due diversi casi (campo magnetico ed elettrico).

Campo magnetico Per quanto riguarda il campo magnetico abbiamo una sola componente in direzione $\hat{\phi}$ dunque il calcolo del laplaciano e della derivata temporale si semplifica particolarmente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \psi'_B(\rho) e^{i\omega_a t}) - \psi_B(\rho) e^{i\omega_a t} + \omega_a^2 \psi_B(\rho) e^{i\omega_a t} \\ &= \frac{1}{\rho} \psi'_B(\rho) e^{i\omega_a t} + \psi''_B(\rho) e^{i\omega_a t} - \psi_B(\rho) e^{i\omega_a t} - \frac{\psi_B(\rho) e^{i\omega_a t}}{\rho^2} - g_{a\gamma\gamma} \frac{\partial a}{\partial t} B_0 \delta(\rho - R) \\ &= (\psi''_B(\rho) + \frac{1}{\rho} \psi'_B(\rho) + (\omega_a - \frac{1}{\rho^2}) \psi_B(\rho) + i g_{a\gamma\gamma} \omega_a a_0 B_0) e^{i\omega_a t} = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Notiamo quindi che l'equazione d'onda associata al campo magnetico risulta essere un'equazione di Bessel del secondo ordine che si può riscrivere e riarrangiare come segue, sfruttando la sostituzione introdotta $\rho' = \omega_a \rho$

$$(\partial_{\rho'}^2 + \frac{1}{\rho'} \partial_{\rho'} + (1 - \frac{1}{\rho'^2})) \psi_B = -i g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 \delta(\rho' - \omega_a R) \hat{\phi}, \quad (5.23a)$$

$$(\rho'^2 \partial_{\rho'}^2 + \rho' \partial_{\rho'} + (\rho'^2 - 1)) \psi_B = -i \rho'^2 g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 \delta(\rho' - \omega_a R) \hat{\phi}. \quad (5.23b)$$

A causa della presenza della δ di Dirac, la funzione non risulta essere ben definita e, di conseguenza, la risoluzione integrale dell'equazione d'onda richiede di considerare esclusivamente i punti che non sono sul bordo dell'aloscopio e di tenere in considerazione le condizioni al contorno [30]. In particolare, bisogna richiedere che per $\rho' < \omega_a R$ la soluzione divergente Y_1 sia soppressa, mentre si richiede che per $\rho' > \omega_a R$ la soluzione progressiva uscente¹ sia rappresentata dalla funzione H_1^+ . Così facendo si ottengono proprio le soluzioni (2.18a).

A questo punto si procede con la determinazione della forma esplicita delle espressioni a_B e b_B considerando le richieste di continuità lungo il bordo del campo magnetico e di discontinuità a gradino della derivata del campo magnetico, introdotta dalla δ di Dirac

$$a_B J_1(\omega_a R) = b_B H_1^+(\omega_a R), \quad (5.24a)$$

$$b_B \frac{\partial}{\partial \rho'} H_1^+(\omega_a R) - a_B \frac{\partial}{\partial \rho'} J_1(\omega_a R) = -i g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0. \quad (5.24b)$$

¹Una soluzione entrante non sarebbe matematicamente scorretta, tuttavia implicherebbe che il campo oscillante dell'assione sia soggetto ad un flusso di potenza entrante anziché uscente, come previsto dalle tesi fino ad ora avanzate.

Possiamo quindi rielaborare il sistema di equazioni come segue, indicando con gli apici le apposite derivate e considerando le funzioni come calcolate in $\rho' = \omega_a R$

$$a_B J_1 J_1' - b_B H_1^+ J_1 = 0, \quad (5.25a)$$

$$b_B (H_1^+)' J_1 - a_B J_1' J_1 = -i g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 J_1 \quad (5.25b)$$

ed infine sommare le due equazioni in modo da ottenere una forma conveniente

$$b_B [(H_1^+)' J_1' - J_1' H_1^+] = -i g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 J_1. \quad (5.26)$$

A questo punto è utile sfruttare l'identità di Abel per semplificare il calcolo delle soluzioni finali. In generale, data un'equazione differenziale del secondo ordine definita come (5.27) e il Wronskiano come (5.28)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = 0, \quad (5.27)$$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) \quad x \in I. \quad (5.28)$$

L'identità di Abel è definita come segue

$$W(x) = W(0) \exp \left(- \int_0^x P(\xi) d\xi \right). \quad (5.29)$$

Quindi, in riferimento all'equazione (5.31) si ottiene

$$W(\rho') = W(0) e^{-\log \left(\frac{\rho'}{\omega_a R} \right)} = \frac{2i}{\pi \rho'} \quad (5.30)$$

e sfruttando l'equazione (5.26) si può risalire alla forma esplicita di b_B .

Campo elettrico Per ottenere i risultati relativi al campo elettrico si esegue lo stesso procedimento utilizzato per il campo magnetico, considerando però che il campo elettrico di interesse è esclusivamente quello lungo la direzione \hat{z} e che l'equazione di Bessel di riferimento è la seguente

$$(\partial_{\rho'}^2 + \frac{1}{\rho'} \partial_{\rho'} + 1) \psi_E = \begin{cases} -g_{a\gamma\gamma} a_0 B_0 & \rho' < \omega_a R, \\ 0 & \rho' > \omega_a R. \end{cases} \quad (5.31)$$

In conclusione si ottengono esattamente le soluzioni espresse in (2.19).

5.4 Teorema di Poynting nelle versioni di Abraham e Minkowski

5.4.1 Vettore di Poynting per Minkowski

Secondo la versione introdotta da Minkowski, il vettore di Poynting può essere espresso come fasori nella seguente forma

$$\mathbf{S}_{DB} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{D}_1 \times \mathbf{B}_1^* \quad \mathbf{S}_{DB}^* = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{D}_1^* \times \mathbf{B}_1 \quad (5.32)$$

Se ne calcola dunque la divergenza

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S}_{DB} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{D}_1^* - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_1 \cdot \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1^* \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot j \omega_1 \mathbf{B}_1 - g_{a\gamma\gamma} c \mathbf{B}_1^* \tilde{a} \vec{J}_{e0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_1 \cdot \tilde{J}_{e1} - i \omega_1 \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_1 + i \omega_1 g c \tilde{a} \mathbf{D}_1 \cdot \vec{B}_0 \right) = i \frac{\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* \right) \\ &\quad + i \frac{\omega_1}{2} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} \tilde{a}^* c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1 + i \frac{\omega_1}{2} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1^* - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \cdot \tilde{J}_{e1}^* + \frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} c \tilde{a} \vec{B}_0 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \mathbf{B}_1^* \cdot \vec{J}_0 - i \frac{\omega_a}{2\mu_0} (g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2, \end{aligned} \quad (5.33a)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{S}_{DB}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1 \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{D}_1^* - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_1^* \cdot \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 \right) = i \frac{\omega_1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^* - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1) \\
&\quad - i \frac{\omega_1}{2} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} \tilde{a}^* c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1 - i \frac{\omega_1}{2} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1^* - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \vec{J}_{e1} + \frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} \tilde{a}^* c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{J}_{e1} \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{a\gamma\gamma} \tilde{a}^* \mathbf{B}_1 \cdot \vec{J}_0 + i \frac{\omega_a}{2\mu_0} (g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2.
\end{aligned} \tag{5.33b}$$

È fondamentale notare la presenza in queste due espressioni del termine finale che risulta essere esplicitamente quadratico nella costante di accoppiamento $g_{a\gamma\gamma}$: in alcune pubblicazioni questo termine viene trascurato perché considerato ininfluenza rispetto agli altri, ma si tratta di un errore in quanto anche tutti gli altri termini sono implicitamente quadratici nella costante e a priori non esiste una motivazione valida per escluderne uno rispetto agli altri.

Usando ora le relazioni

$$\operatorname{Re}(\mathbf{S}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_1^*) \quad \operatorname{Im}(\mathbf{S}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_1^*) \tag{5.34}$$

Possiamo ottenere le seguenti espressioni per le divergenze

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \operatorname{Re}(\mathbf{S}_{DB}) &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{DB} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{DB}^*}{2} = \frac{i(\omega_1 - \omega_a)}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* - \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot \\
&\quad \cdot (\tilde{a} \mathbf{J}_{e1}^* - \tilde{a}^* \mathbf{J}_{e1}) - \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} \vec{J}_{e0} \cdot (\tilde{a}^* c \mathbf{B}_1 + \tilde{a} c \mathbf{B}_1^*) - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}),
\end{aligned} \tag{5.35a}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot i\operatorname{Im}(\mathbf{S}_{DB}) &= \frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{DB} - \nabla \cdot \mathbf{S}_{DB}^*}{2} = \frac{i(\omega_1 + \omega_a)}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* + \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot \\
&\quad \cdot (\tilde{a} \mathbf{J}_{e1}^* - \tilde{a}^* \mathbf{J}_{e1}) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} \vec{J}_{e0} \cdot (\tilde{a}^* c \mathbf{B}_1 - \tilde{a} c \mathbf{B}_1^*) - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}) \\
&\quad + \frac{i\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right) - \frac{i\omega_a}{2\mu_0} (g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2.
\end{aligned} \tag{5.35b}$$

A questo punto si applica il teorema della divergenza ottenendo le equazioni cercate

$$\begin{aligned}
\oint \operatorname{Re}(\mathbf{S}_{DB}) \cdot \hat{n} ds &= \int \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{DB} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{DB}^*}{2} \right) = \int \left(\frac{i(\omega_1 - \omega_a)}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* - \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{J}_{e1}^* - \tilde{a}^* \mathbf{J}_{e1}) - \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} \vec{J}_{e0} \cdot (\tilde{a}^* c \mathbf{B}_1 + \tilde{a} c \mathbf{B}_1^*) \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}) \right) dV,
\end{aligned} \tag{5.36a}$$

$$\begin{aligned}
\oint i\operatorname{Im}(\mathbf{S}_{DB}) \cdot \hat{n} ds &= \int \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{DB} - \nabla \cdot \mathbf{S}_{DB}^*}{2} \right) = \int \left(\frac{i(\omega_1 + \omega_a)}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* + \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{J}_{e1}^* - \tilde{a}^* \mathbf{J}_{e1}) + \frac{1}{4} g_{a\gamma\gamma} \vec{J}_{e0} \cdot (\tilde{a}^* c \mathbf{B}_1 - \tilde{a} c \mathbf{B}_1^*) \\
&\quad - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}) + \frac{i\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right) \\
&\quad \left. - \frac{i\omega_a}{2\mu_0} (g_{a\gamma\gamma} \tilde{a} \vec{B}_0)^2 \right) dV.
\end{aligned} \tag{5.36b}$$

5.4.2 Vettore di Poynting per Abraham

Un procedimento del tutto equivalente si utilizza per il vettore di Abraham

$$\mathbf{S}_{EH} = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \quad \mathbf{S}_{EH}^* = \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \times \mathbf{H}_1 \tag{5.37}$$

dove, in questo caso considerato, $\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1$. Di nuovo si calcola la divergenza

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^*) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}_1^*}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{E}_1) - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 (\nabla \times \frac{\mathbf{B}_1^*}{\mu_0}), \tag{5.38a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH}^* = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{E}_1^* \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{E}_1^*) - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* (\nabla \times \frac{\mathbf{B}_1}{\mu_0}). \quad (5.38b)$$

Analizzando le equazioni di Maxwell modificate dall'accoppiamento assionico, si trova che, in questo caso, con un campo magnetico costante creato da una corrente continua \vec{J}_0 , solamente la legge di Ampere viene intaccata, mentre quella di Faraday non subisce variazioni. Ricalcolando i rotori dei vari campi e sostituendoli nelle espressioni del vettore di Poynting si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH} = \frac{i\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right) + \frac{i\omega_a}{2} g_{a\gamma\gamma} \epsilon_0 \tilde{a}^* c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^*, \quad (5.39a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH}^* = \frac{i\omega_1}{2} (\epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1) - \frac{i\omega_a}{2} g_{a\gamma\gamma} \epsilon_0 \tilde{a} c \vec{B}_0 \cdot \mathbf{E}_1^* - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}. \quad (5.39b)$$

Dunque si possono esprimere le espressioni cercate necessarie per fare un confronto effettivo con il vettore di Minkowski

$$\oint \text{Re}(\mathbf{S}_{EH}) \cdot \hat{n} ds = \int \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH} + \nabla \cdot \mathbf{S}_{EH}^*}{2} \right) = \int \left(\frac{i\omega_a}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a}^* \mathbf{E}_1 - \tilde{a} \mathbf{E}_1^*) - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* + \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}) \right) dV, \quad (5.40a)$$

$$\oint i \text{Im}(\mathbf{S}_{EH}) \cdot \hat{n} ds = \int \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{S}_{EH} - \nabla \cdot \mathbf{S}_{EH}^*}{2} \right) = \int \left(\frac{i\omega_a}{4} \epsilon_0 g_{a\gamma\gamma} c \vec{B}_0 \cdot (\tilde{a} \mathbf{E}_1^* + \tilde{a}^* \mathbf{E}_1) - \frac{1}{4} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{e1}^* - \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{J}_{e1}) + \frac{i\omega_1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_1^* \cdot \mathbf{B}_1 - \epsilon_0 \mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_1 \right) \right) dV. \quad (5.40b)$$