

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Spettro di potenza di una particella intrappolata da pinzette ottiche

Relatore

Prof. Marco Baiesi

Laureando

Beatrice Baraldi

Anno Accademico 2021/2022



# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>                               | <b>1</b>  |
| <b>1 Equazione del moto</b>                       | <b>3</b>  |
| 1.1 Intrappolamento ottico . . . . .              | 3         |
| 1.2 Moto browniano . . . . .                      | 5         |
| 1.2.1 Complementi di analisi stocastica . . . . . | 6         |
| 1.2.2 Forza di Langevin . . . . .                 | 8         |
| 1.3 Moto nel caso generale . . . . .              | 10        |
| 1.4 Moto nel regime sovrasmorzato . . . . .       | 11        |
| <b>2 Spettro del segnale posizione</b>            | <b>13</b> |
| 2.1 Complementi di teoria dei segnali . . . . .   | 13        |
| 2.2 Spettro nel caso generale . . . . .           | 14        |
| 2.3 Spettro nel regime sovrasmorzato . . . . .    | 15        |
| 2.4 Confronto tra gli spettri teorici . . . . .   | 15        |
| <b>3 Analisi numerica</b>                         | <b>17</b> |
| 3.1 Dati sperimentali . . . . .                   | 17        |
| 3.2 Spettro del segnale posizione . . . . .       | 18        |



# Introduzione

Gli optical tweezer sono apparati sperimentali che sfruttano la pressione di radiazione di laser altamente focalizzati per controllare la dinamica di oggetti sufficientemente piccoli, come atomi, molecole e persino polimeri organici come il DNA. Nell'esperimento di intrappolamento ottico in esame, una particella di polistirene di dimensioni micrometriche è immersa in un bagno termico di acqua alla temperatura di equilibrio  $T$  e sottoposta alla pressione di radiazione di un laser nel vicino infrarosso altamente focalizzato. Lo scopo di questa tesi è studiare le caratteristiche del moto e dello spettro di potenza di tale particella, per verificare se effettivamente l'optical tweezer del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Padova è stato in grado di confinare la particella in una regione di spazio limitata.

Nel capitolo 1 viene analizzata la dinamica del sistema oggetto di studio, per determinare un'equazione che descriva il moto della particella. Nel capitolo 2 si procede ricavando un'espressione analitica per lo spettro di potenza del segnale posizione nel regime sovrasmorzato e non. Nel capitolo 3, infine, gli spettri teorici vengono messi a confronto con lo spettro ottenuto a partire dai dati sperimentali.



# Capitolo 1

## Equazione del moto

In questo capitolo viene analizzata la dinamica del sistema oggetto di studio, con lo scopo di determinare un'equazione che descriva il moto della particella nel tweezer, punto di partenza per l'analisi spettrale sviluppata nei capitoli successivi. Nella prima sezione vengono illustrati i principi fisici che stanno alla base del fenomeno dell'intrappolamento ottico, arrivando alla conclusione che il tweezer esercita una forza di richiamo elastica sulla particella. Essendo, poi, la particella di dimensioni microscopiche in sospensione in un fluido, è fondamentale tenere in considerazione anche l'effetto degli urti casuali con le molecole di acqua circostanti. Seguendo l'approccio di Langevin, nella seconda sezione si procede riassumendo il contributo di tutte queste collisioni nella somma di due forze: una di attrito viscoso e una avente la proprietà di essere un processo stocastico. Al termine del capitolo si giunge quindi ad un'espressione esplicita per la forza a cui è sottoposta la particella nel tweezer:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{visc}} + \vec{F}_{\text{stoch}} . \quad (1.1)$$

### 1.1 Intrappolamento ottico

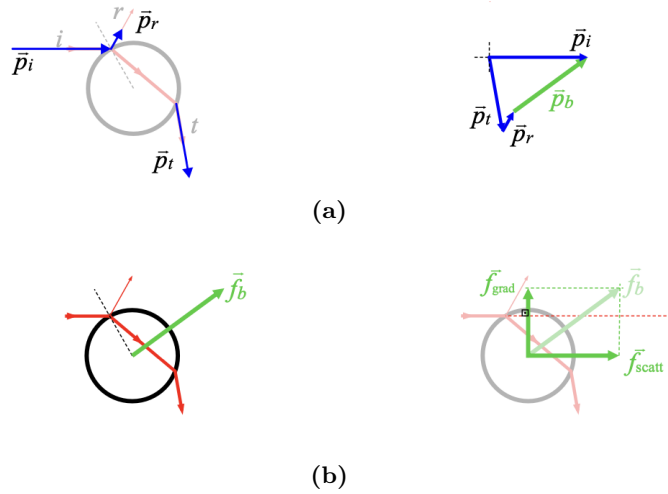
Gli *optical tweezer* sono strumenti che sfruttano la pressione di radiazione di laser altamente focalizzati per intrappolare e manipolare particelle microscopiche, ove per *pressione di radiazione* si intende la pressione a cui è sottoposto un oggetto esposto a radiazione elettromagnetica.

Il funzionamento di questi dispositivi si basa sulla capacità dei fasci di luce coerenti di mettere in moto oggetti sufficientemente piccoli, derivante dal fatto che le onde elettromagnetiche trasportano energia e quantità di moto. Ragionando in termini quantistici, ogni fotone ha energia  $E_\gamma = h\nu$  e momento  $p_\gamma = h\nu/c$ . Pertanto, un fascio di luce di potenza  $P$ , che emette un numero di fotoni per secondo uguale a  $N = P/h\nu$ , trasporta nell'unità di tempo una quantità di moto pari a  $Np_\gamma = P/c$ . Nel caso in cui la luce incida su un oggetto di materiale riflettente, tutti i fotoni vengono riflessi all'indietro e la variazione di momento del fascio per secondo ammonta a  $\Delta p_\gamma = 2Np_\gamma$ . Per la legge di conservazione della quantità di moto, allora, la forza esercitata dal fascio sull'oggetto corrisponde a  $F = 2P/c$ . Normalizzando sull'unità di superficie, si ottiene un'espressione per la pressione di radiazione corrispondente.

Gli effetti della pressione di radiazione sono irrilevanti su oggetti macroscopici, ma diventano significativi quando si illuminano particelle di dimensioni micrometriche [2]. Si consideri, per esempio, un fascio di luce di potenza  $P = 1\text{ W}$ . La forza con cui il fascio incide su una superficie qualsiasi risulta essere  $F \sim 10^{-10}\text{ N}$ , valore trascurabile a livello macroscopico. Se, però, si applica tale forza ad una particella sferica di raggio  $r = 1\text{ }\mu\text{m}$  e densità  $\rho = 1000\text{ Kg/m}^3$ , che possiede una massa di  $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \sim 10^{-15}\text{ Kg}$ , questa viene sottoposta ad un'accelerazione pari a a diecimila volte l'accelerazione di gravità:

$$a = \frac{F}{m} \sim 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (1.2)$$

Ciò dimostra che la pressione di radiazione è in grado di dare luogo ad effetti dinamici rilevanti a livello microscopico. Solo nei primi anni '70 si riuscirono a sfruttare queste predizioni per manipolare sperimentalmente particelle microscopiche. Molti dei risultati più importanti furono ottenuti dal fisico



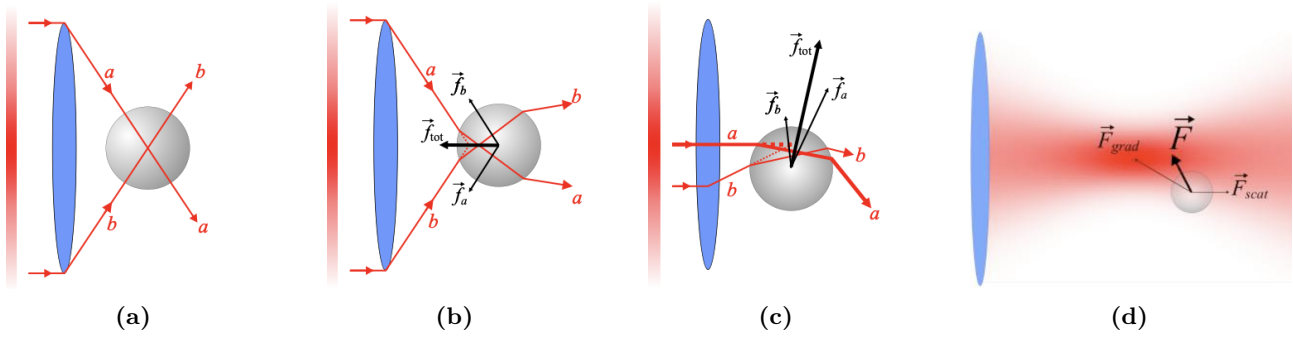
**Figura 1.1:** Interazione tra un raggio di luce e una particella sferica nel regime di Mie. **(a)** Nella figura di sinistra sono rappresentati i momenti lineari associati ai raggi incidente (i), riflesso (r) e trasmesso (t). La figura di destra mostra il contributo di momento trasmesso alla particella, ottenuto per conservazione della quantità di moto. **(b)** A sinistra è disegnata la forza esercitata da un raggio incidente sulla particella, che ha la stessa direzione del momento trasmesso alla particella. Questa forza è scomponibile in due contributi, uno di scattering e uno di gradiente, come evidenziato nell'ultima figura.

Arthur Ashkin, che per primo osservò in laboratorio l'interazione tra raggi laser e piccole biglie sferiche di materiale dielettrico [3]. Le trappole ottiche sono state implementate nel tempo e oggi sono in grado di intrappolare particelle dielettriche di dimensioni micrometriche e di misurare la forza applicata su di esse. Per approfondire il funzionamento di tali misure di forza si veda il paragrafo 2.1.4 di [9].

Ci sono varie teorie in fisica che descrivono l'interazione tra luce e materia, ognuna delle quali corrisponde a precise scale di energie e masse coinvolte nel processo. L'optical tweezer utilizzato nell'esperimento in esame coinvolge interazioni di tipo classico, i.e. spiegabili attraverso le equazioni di Maxwell. Esistono tre approcci possibili per descrivere il principio fisico dell'intrappolamento ottico in regime classico, che dipendono dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  del fascio e dal diametro  $d$  della particella illuminata [19]: nel *regime di Mie*, ove  $d \gg \lambda$ , l'interazione tra la radiazione e la particella è descritta attraverso le leggi dell'ottica geometrica; nel caso opposto ( $d \ll \lambda$ ), il sistema si trova nel cosiddetto *regime di Rayleigh*, nel quale il campo elettromagnetico è considerato uniforme nelle dimensioni della particella e questa viene trattata come un dipolo sferico; infine, nel regime intermedio ( $d \sim \lambda$ ) la descrizione è abbastanza complicata e richiede la risoluzione delle equazioni di Maxwell con particolari condizioni al contorno. In base ai valori riportati in tabella 3.2, il sistema oggetto di studio si trova nel regime intermedio perché verifica la condizione  $d \sim \lambda$ , soddisfatta per lunghezze d'onda  $\lambda \simeq 0,8 - 1,2 \mu\text{m}$  e particelle di dimensioni  $d \simeq 2 - 4 \mu\text{m}$ . In questo regime la particella interagisce con la luce e genera un campo elettromagnetico interno e uno diffuso. Di conseguenza, per calcolare la forza a cui essa è sottoposta, è necessario determinare il campo risultante dopo che la particella ha interagito con il fascio di luce, risolvendo le equazioni di Maxwell con specifiche condizioni al contorno per il campo [8]. Il primo a determinare una soluzione per tale problema fu Mie [14], che calcolò il campo elettromagnetico totale risultante dall'interazione tra una sfera dielettrica e un'onda piana monocromatica. La teoria più generale, conosciuta come Teoria di Lorentz-Mie Generalizzata (GLMT), estende il calcolo di Mie ad onde incidenti arbitrarie [13]. Questo paradigma, però, richiede una caratterizzazione esatta del fascio di luce e della particella dielettrica, pertanto si ricorre spesso ad una determinazione empirica delle forze in gioco. Fortunatamente, per particelle micrometriche sottoposte ad una radiazione nel visibile o nel vicino infrarosso (come nel caso in esame), la trattazione del regime di Mie offre una descrizione soddisfacente degli effetti fisici coinvolti nel processo di intrappolamento ottico [19].

Nel regime di Mie, ove  $d \gg \lambda$ , la diffrazione e le proprietà ondulatorie della luce sono trascurabili e il fenomeno dell'intrappolamento ottico è descrivibile attraverso le leggi dell'ottica geometrica. In questa visuale il fascio di luce è pensato come un insieme di raggi caratterizzati in termini della loro intensità e della loro direzione. Quando un raggio colpisce la superficie di una particella non assorbente





**Figura 1.2:** Intrappolamento ottico con un fascio di luce gaussiano altamente focalizzato. **(a)** Particella centrata nel fuoco. I raggi marginali colpiscono la particella perpendicolarmente alla sua superficie e quindi, per la legge di Snell, non vengono deflessi. Nessuna forza è esercitata sulla particella. **(b)** Particella posizionata sull'asse ottico dopo il fuoco (all'intersezione delle linee tratteggiate). I raggi vengono deviati in modo che si genera solo un contributo di forza di scattering. La particella viene accelerata verso il punto di fuoco. **(c)** Particella non posizionata sull'asse ottico. La differenza di intensità tra i raggi più vicini (raggio  $a$ ) e meno vicini (raggio  $b$ ) all'asse ottico produce una forza gradiente che accelera la particella verso la regione ad intensità maggiore, i.e. l'asse del fascio. **(d)** Caso generale. L'interazione tra un fascio di luce gaussiano altamente focalizzato e una particella sferica dà origine a due forze: una forza di scattering che accelera la particella longitudinalmente (rispetto alla direzione di propagazione del fascio) verso il punto di fuoco e una forza gradiente che accelera la particella ortogonalmente verso la regione ad intensità maggiore.

viene riflesso e rifratto secondo le leggi di Snell; di conseguenza, la quantità di moto iniziale  $\vec{p}_i$  del raggio si scompone nel momento riflesso<sup>1</sup>  $\vec{p}_r$  e quello trasmesso  $\vec{p}_t$ , come raffigurato in figura 1.1a. Per conservazione della quantità di moto, il momento della particella subisce una variazione di

$$\vec{p}_b = \vec{p}_i - (\vec{p}_r + \vec{p}_t). \quad (1.3)$$

Differenziando nel tempo tale quantità, si ottiene la forza esercitata sulla particella dal singolo raggio:

$$\vec{f}_b = \frac{d\vec{p}_b}{dt}. \quad (1.4)$$

Per determinare la forza totale agente sulla particella, occorre sommare tutti i contributi di forza generati dall'interazione tra la particella e i singoli raggi luminosi che compongono il fascio. Il calcolo ovviamente dipende da molti fattori, come l'indice di rifrazione e la forma della particella, l'intensità e il profilo del fascio, etc. In generale, la forza risultante è data dalla somma di due componenti (si veda la figura 1.1b): una diretta lungo la direzione di propagazione della luce, detta *forza di scattering*; una ortogonale alla direzione di propagazione della luce e proporzionale al gradiente dell'intensità del fascio, detta *forza gradiente*. Calibrando questi due contributi si può realizzare una trappola 3D: utilizzando un fascio di luce gaussiano altamente focalizzato, infatti, si è in grado di generare una forza di scattering che riporta la particella nel punto di fuoco e una forza gradiente che la accelera verso l'asse del fascio, come mostrato in figura 1.2. La trappola ottica in questione, quindi, si comporta come un oscillatore armonico, perché la forza netta risultante è proporzionale allo spostamento della particella dal punto di equilibrio del sistema. In conclusione, l'espressione più generale per la forza di richiamo dovuta alla presenza della trappola ottica coincide con quella della forza elastica:

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{x}. \quad (1.5)$$

## 1.2 Moto browniano

Essendo la particella di dimensioni microscopiche immersa in acqua, è necessario considerare anche l'effetto degli urti casuali con le molecole di liquido circostanti: a causa delle continue collisioni, la

<sup>1</sup>Solitamente, per particelle trasparenti o non assorbenti, il fenomeno della componente riflessa è molto più debole rispetto a quello della componente trasmessa e quindi il primo può essere trascurato.

dinamica della particella assume i tratti tipici del cosiddetto moto browniano, un moto perpetuo, apparentemente<sup>2</sup> casuale e senza una fissa posizione di equilibrio. Il termine deriva dal botanico inglese Robert Brown, che per primo (nel 1827) si accorse che granuli di polline in sospensione acquosa eseguivano un moto caotico pressoché perenne. Per avere una spiegazione fisicamente soddisfacente del fenomeno si dovette aspettare fino al 1905, anno in cui Einstein scrisse un'equazione di diffusione in grado di predire la deriva di una particella browniana [6]. Al suo lavoro si affiancò quello di Langevin [12], che fornì un'interpretazione alternativa del fenomeno partendo dall'assunzione che il moto di una particella browniana dipendesse dall'azione di due forze, una di attrito viscoso e una descrivibile in termini di un processo stocastico<sup>3</sup>. Lo scopo di questa sezione è derivare un'espressione esplicita per tali forze, in modo da completare l'equazione del moto per la particella nel tweezer.

La trattazione seguente fa riferimento a [4]. Innanzitutto, si assume che il fluido in cui la particella è immersa sia in uno stato stazionario, di equilibrio termodinamico e meccanico; ciò permette di definire un sistema di riferimento globale coincidente con il liquido, rispetto al quale la velocità della particella  $v(t)$  è misurata. Secondo il modello di Langevin, la forza totale esercitata dal fluido sulla particella browniana può essere scomposta nella somma di due contributi, generati entrambi dalle collisioni con le molecole di liquido: il primo termine dipende dal fatto che la particella ha velocità non nulla; il secondo, invece, è una conseguenza dell'agitazione termica del fluido. In particolare:

- La particella browniana si scontra con un numero maggiore di molecole di liquido nella direzione lungo cui si muove; più alta è la velocità in modulo, maggiore è la sproporzione. Pertanto, la particella risente di una forza di attrito viscoso proporzionale all'opposto della sua velocità  $v(t)$ , con coefficiente di attrito dato dalla legge di Stokes [11]:

$$F_{\text{visc}}(t) = -\gamma v(t), \quad \gamma = 6\pi\mu r, \quad (1.6)$$

dove  $r$  è il raggio della particella e  $\mu$  è la viscosità dinamica del liquido.

- Avendo considerato a parte le collisioni legate al moto della particella, rimane da analizzare l'effetto degli urti causati dall'agitazione termica del fluido. Il contributo di questi può essere riassunto in un termine di rumore, pensato come media delle forze esercitate nelle singole collisioni in un certo istante di tempo e indicato con  $F_{\text{stoch}}(t)$ . Per definizione di rumore,  $F_{\text{stoch}}(t)$  è indipendente dalle variabili cinematiche della particella browniana.

In conclusione, l'equazione più generale che governa la dinamica di una particella browniana, nell'ipotesi in cui su di essa non agiscano forze se non le due appena elencate, è la seguente:

$$m\dot{v}(t) = -\gamma v(t) + F_{\text{stoch}}(t), \quad v(t) = \dot{x}(t). \quad (1.7)$$

Questa equazione, detta *di Langevin*, costituisce un'equazione differenziale stocastica per la presenza del termine  $F_{\text{stoch}}(t)$ , chiamato *forza di Langevin*. Prima di continuare con la trattazione, è necessario introdurre alcune nozioni matematiche utili a comprendere la natura di questo contributo.

### 1.2.1 Complementi di analisi stocastica

In questa sezione vengono illustrate sinteticamente alcune nozioni base di analisi stocastica, necessarie per caratterizzare il termine di rumore  $F_{\text{stoch}}(t)$ . Quanto riportato in seguito fa riferimento a [5] e alle appendici A e B di [4].

Uno *spazio di probabilità* consiste di una terna di tre elementi:

- Lo *spazio campionario*  $\Omega$ , insieme di tutti i possibili esiti di un fenomeno aleatorio.
- La *sigma algebra*  $\mathcal{F}$ , famiglia di sottoinsiemi di  $\Omega$  che racchiude tutti gli eventi che possono essere osservati e verifica le seguenti richieste: (i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ; (ii)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ ; (iii)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$ .

<sup>2</sup>In senso stretto, le collisioni tra le molecole di fluido e la particella browniana non sono casuali, ma sono governate da un'equazione di Liouville deterministica. La percezione di casualità che si ha a livello macroscopico deriva dall'impossibilità di caratterizzare completamente il microstato del fluido, che può essere descritto solo in termini statistici.

<sup>3</sup>Per la definizione di processo stocastico si veda la sezione 1.2.1.

- c. La misura di probabilità  $P$ , mappa da  $\mathcal{F}$  in  $[0, 1]$  che associa all'evento  $A \in \mathcal{F}$  la probabilità  $P(A)$  con le condizioni: (i)  $P(\Omega) = 1$ ; (ii) se  $(A_k)_{k \geq 1}$  è una sequenza di eventi disgiunti in  $\Omega$ , allora  $P(\bigcup_{k \geq 1} A_k) = \sum_{k \geq 1} P(A_k)$ .

Una *variabile casuale unidimensionale* (reale)  $X$  definita su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  è una funzione da  $\Omega$  in  $\mathbb{R}$  che mappa l'esito  $\omega \in \Omega$  nella sua *realizzazione*  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ , con la proprietà che

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Il fatto che, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , l'insieme di tutti gli esiti  $\omega$  le cui realizzazioni  $X(\omega)$  sono minori di  $x$  sia un evento permette di associare alla variabile casuale  $X$  una funzione di ripartizione  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , che se applicata ad un qualsiasi  $x \in \mathbb{R}$  restituisce la probabilità

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x^+} p(x') dx'. \quad (1.9)$$

La densità  $p$  definisce una misura di probabilità su  $\Omega$ : rappresenta la probabilità che la variabile  $X$  valutata su  $\Omega$  prenda valore tra  $x$  e  $x + dx$ . Grazie a tale misura di probabilità è possibile caratterizzare completamente una variabile casuale tramite i suoi valori di aspettazione: si definiscono *momento di ordine  $m$*  il valor medio

$$\mu_m = \langle X^m \rangle = \int x^m p(x) dx \quad (1.10)$$

e  *$m$ -esimo momento centrale* la quantità  $\langle (X - \langle X \rangle)^m \rangle$ . In particolare, il *valor medio* (o *valore di aspettazione*) corrisponde al momento di ordine 1

$$\langle X \rangle = \int x p(x) dx, \quad (1.11)$$

mentre la *varianza* equivale al secondo momento centrale

$$\sigma^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \mu_2 - \mu_1^2. \quad (1.12)$$

La radice di  $\sigma^2$  è chiamata *deviazione standard* e costituisce una tipica misura di dispersione delle realizzazioni di  $X$  attorno al valore di aspettazione  $\langle X \rangle$ .

Siano  $X$  una variabile casuale associata allo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e  $t$  una variabile a valori in un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Una qualsiasi funzione  $f$  su  $I \times \Omega$  definisce un insieme di variabili casuali al variare di  $t$ :

$$Y_X(t) = f(t, X). \quad (1.13)$$

Nel caso in cui  $t$  rappresenti la variabile tempo,  $Y_X(t)$  è detto *processo stocastico*. Considerando una realizzazione di  $X$  si ottiene una realizzazione del processo stesso, che costituisce una funzione del tempo nel senso comune del termine:

$$y(t) = Y_x(t) = f(t, x). \quad (1.14)$$

Di conseguenza, utilizzando la distribuzione di probabilità della variabile  $X$  si può facilmente definire una distribuzione di probabilità per  $Y$ . Dati  $n > 1$  istanti di tempo  $t_1, \dots, t_n$ , la densità di probabilità che il processo  $Y_X(t)$  assuma i valori  $y_1$  al tempo  $t_1$ ,  $y_2$  al tempo  $t_2$  ... e  $y_n$  al tempo  $t_n$  è pari a

$$p_{Y,n}(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) = \int \delta(y_1 - Y_x(t_1)) \delta(y_2 - Y_x(t_2)) \dots \delta(y_n - Y_x(t_n)) p_X(x) dx \quad (1.15)$$

e verifica

$$\int p_Y(t_1, y_1; t_2, y_2; \dots; t_n, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = 1. \quad (1.16)$$

Grazie alla 1.15 è possibile esprimere il *momento di ordine  $n$ -esimo* del processo  $Y_X(t)$  come segue:

$$\langle Y_X(t_1) \dots Y_X(t_n) \rangle = \int y_1 \dots y_n p_Y(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n) dy_1 \dots dy_n, \quad (1.17)$$

ove l'integrale è definito sullo spazio in cui le realizzazioni di  $Y$  assumono valori. In particolare, dalla 1.17 segue che

$$\langle Y_X(t) \rangle = \int y p_{Y,1}(t, y) dy. \quad (1.18)$$

Quindi, il valore di aspettazione di  $Y_X(t)$  è la media su tutte le possibili realizzazioni  $y(t) = Y_x(t)$  al tempo  $t$  fissato, distribuite secondo la densità di probabilità

$$p_{Y,1}(t, y) = \int \delta(y - Y_x(t)) p_X(x) dx, \quad \int p_{Y,1}(t, y) dy = 1. \quad (1.19)$$

Combinando i primi due momenti si ricava la *funzione di autocovarianza*:

$$C(t_1, t_2) = \langle [Y_X(t_1) - \langle Y_X(t_1) \rangle] [Y_X(t_2) - \langle Y_X(t_2) \rangle] \rangle = \langle Y_X(t_1) Y_X(t_2) \rangle - \langle Y_X(t_1) \rangle \langle Y_X(t_2) \rangle. \quad (1.20)$$

In conclusione, la conoscenza di tutte le probabilità  $p_Y(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n)$  del processo  $Y_X(t)$  permette di calcolarne un momento di qualsiasi ordine: ciò significa che per caratterizzare  $Y_X(t)$  non è più necessaria la conoscenza di  $p_X$ . Di conseguenza, da questo momento in poi ogni riferimento alla variabile  $X$  verrà abbandonato: il processo verrà semplicemente denotato con  $Y(t)$  e una sua realizzazione con  $y(t)$ .

Si elencano, infine, due classi di processi stocastici che torneranno utili in seguito.

- Un processo è detto *stazionario* quando tutte le densità di probabilità  $p_Y(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n)$  (e quindi tutti i momenti) sono invarianti per traslazioni temporali:

$$p_Y(t_1 + \Delta t, y_1; \dots; t_n + \Delta t, y_n) = p_Y(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n). \quad (1.21)$$

In particolare, la media  $\langle Y(t) \rangle$  di un processo stazionario è indipendente dal tempo e la sua funzione di autocovarianza  $C(t_1, t_2)$  dipende solo dal valore assoluto dell'intervallo di tempo  $\tau = (t_1 - t_2)$ :

$$C(t_1, t_2) = \langle Y(t_1) Y(t_2) \rangle - \langle Y(t_1) \rangle \langle Y(t_2) \rangle = \langle Y(0) Y(\tau) \rangle - \langle Y \rangle^2 = C(\tau). \quad (1.22)$$

- Se le densità di probabilità  $p_Y(t_1, y_1; \dots; t_n, y_n)$  sono tutte distribuzioni gaussiane, il processo è chiamato *gaussiano*. La funzione generatrice dei momenti associata al processo è data da

$$G_Y[C(t)] = \exp \left( i \int C(t) \langle Y(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \int C(t_1) C(t_2) C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right). \quad (1.23)$$

Pertanto, un processo gaussiano è completamente determinato dalla media  $\langle Y(t) \rangle$  e dalla funzione di autocovarianza  $C(t_1, t_2)$ .

## 1.2.2 Forza di Langevin

Lo scopo di questo paragrafo è ricavare un'espressione esplicita per la forza di Langevin a partire dall'equazione 1.7.

Nella sezione 1.2 si è definita la forza di Langevin come la media delle forze esercitate sulla particella nelle singole collisioni con le molecole di fluido in un certo istante di tempo: il termine  $F_{\text{stoch}}(t)$ , quindi, è funzione del tempo e delle singole forze, che possono essere pensate come le componenti di una variabile casuale multi-dimensionale. Pertanto, la forza di Langevin costituisce un processo stocastico. Facendo ipotesi fisicamente sensate sul sistema, è possibile caratterizzare ulteriormente questo termine sulla base delle nozioni introdotte nel paragrafo precedente.

- L'ipotesi di stazionarietà del fluido si traduce nella richiesta di stazionarietà per la forzante stocastica. Ciò significa che la media del processo  $F_{\text{stoch}}(t)$  deve essere indipendente dal tempo e che la funzione di autocovarianza  $C(t_1, t_2)$  deve essere funzione solo di  $\tau = |t_1 - t_2|$ . Avendo separato il contributo  $-\gamma v(t)$  dal termine di rumore e avendo assunto  $F_{\text{stoch}}(t)$  indipendente dalla velocità della particella, è ragionevole supporre che gli urti casuali con le molecole del liquido

costituiscono un processo simmetrico nello spazio. Pertanto, la media della forzante stocastica è nulla in ogni istante:

$$\langle F_{\text{stoch}}(t) \rangle = \langle F_{\text{stoch}} \rangle = 0 . \quad (1.24)$$

Di conseguenza, la funzione di autocovarianza si semplifica in

$$C(\tau) = \langle F_{\text{stoch}}(0)F_{\text{stoch}}(\tau) \rangle - \langle F_{\text{stoch}} \rangle^2 = \langle F_{\text{stoch}}(0)F_{\text{stoch}}(\tau) \rangle . \quad (1.25)$$

- Il raggio di una particella browniana è dell'ordine del micrometro e, quindi, è largamente superiore a quello delle molecole di fluido in cui è immerso; per questo motivo, il moto della particella provocato dalle collisioni con le molecole di liquido è molto più lento rispetto a quello del fluido. In un sistema colloidale, infatti, ci sono due tipiche scale temporali [15]:  $\tau_s$  e  $\tau_b$ .  $\tau_s \sim 10^{-12}$  s è il tempo che intercorre tra due urti consecutivi, mentre  $\tau_b \simeq \frac{m}{\gamma} \sim 10^{-3}$  s corrisponde al tempo di rilassamento<sup>4</sup> tipico della velocità della particella browniana di massa  $m$ . Naturalmente le osservazioni sperimentali sono spaziate da un intervallo di tempo  $dt$  dell'ordine di grandezza di  $\tau_b$ , solitamente  $dt \sim 10^{-5}$  s. In questo intervallo avvengono all'incirca  $dt/\tau_s \sim 10^7$  collisioni; pertanto, una misura di forza al tempo  $t + dt$  non può avere memoria della misura di forza al tempo  $t$ . A causa delle frequenti collisioni, le forze separate da un tempo  $dt \gg \tau_b$  non sono correlate. Matematicamente ciò si traduce in

$$C(\tau) = \langle F_{\text{stoch}}(0)F_{\text{stoch}}(\tau) \rangle = \sigma^2 \delta(\tau) , \quad \text{per } \tau \gg \tau_b , \quad (1.26)$$

ove  $\sigma$  è una costante.

- Siccome il termine di rumore non è che la media di un largo numero di variabili casuali consistenti nelle forze generate dalle singole collisioni tra la particella e le molecole di liquido, tutte aventi la stessa distribuzione di probabilità, per il teorema del limite centrale<sup>5</sup> si può ipotizzare che il processo  $F_{\text{stoch}}(t)$  sia gaussiano.

Le assunzioni fatte fino a questo punto permettono di caratterizzare completamente la statistica della forzante stocastica. Per determinare, invece, un'espressione esplicita di  $F_{\text{stoch}}(t)$  occorre risolvere l'equazione di Langevin

$$m\dot{V}(t) = -\gamma V(t) + F_{\text{stoch}}(t) . \quad (1.27)$$

La velocità della particella è stata indicata con una lettera maiuscola perché, essendo soluzione di un'equazione differenziale stocastica, costituisce un processo stocastico. Se si considera una realizzazione particolare della forza di Langevin, la 1.27 diventa un'equazione differenziale ordinaria e, secondo il metodo di variazione delle costanti o metodo di Lagrange, una sua soluzione formale è data da

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t ds e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} f_{\text{stoch}}(s) . \quad (1.28)$$

Per definizione, il valore di aspettazione di  $V(t)$  corrisponde alla media su tutte le sue possibili realizzazioni. Considerando solo quelle realizzazioni con dato iniziale  $v_0$ , grazie alla proprietà 1.24 si trova che

$$\langle V(t) \rangle_{v_0} = \langle v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \rangle + \frac{1}{m} \int_0^t ds e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} \langle \cancel{F_{\text{stoch}}(s)} \rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} . \quad (1.29)$$

La velocità media, quindi, decresce esponenzialmente a zero con un tempo caratteristico pari a  $\tau_v = m/\gamma \gg \tau_s$ . Riconoscendo che

$$v(t) = \langle V(t) \rangle_{v_0} + \frac{1}{m} \int_0^t ds e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} F_{\text{stoch}}(s) , \quad (1.30)$$

<sup>4</sup>Tempo necessario affinché la particella browniana perda la velocità acquisita in una singola collisione.

<sup>5</sup>Il teorema del limite centrale vale anche nel caso di processi stocastici. Per approfondire si veda l'appendice B di [4].

è immediato ricavare la varianza della velocità:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{V,v_0}^2(t) &= \langle (V(t) - \langle V(t) \rangle_{v_0})^2 \rangle_{v_0} = \\
 &= \frac{1}{m^2} \int_0^t ds \int_0^t ds' e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s')} \langle F_{\text{stoch}}(s) F_{\text{stoch}}(s') \rangle = \\
 &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{m^2} \int_0^t ds \int_0^t ds' e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s')} \sigma \delta(s-s') = \\
 &= \frac{\sigma^2}{2m\gamma} \left(1 - e^{-\frac{2\gamma}{m}t}\right).
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Nel passaggio (a) si è sfruttata la proprietà 1.26, valida nell'ipotesi in cui  $t \gg \tau_s$ . È importante osservare che il processo a tempi lunghi si “dimentica” della sua origine. Infatti, per  $t \gg \tau_v$ , la velocità ha media nulla e varianza costante e indipendente dal dato iniziale:

$$\sigma_{V,v_0}^2(t) \xrightarrow{t \gg \tau_v} \sigma_V^2(t) = \frac{\sigma^2}{2m\gamma}. \tag{1.32}$$

Siccome per  $t \gg \tau_v$  si ha che  $\sigma_V^2(t) = \langle (V(t) - \langle V(t) \rangle)^2 \rangle = \langle V(t)^2 \rangle$ , allora anche l'energia cinetica media della particella browniana tende ad un valore costante:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} m \langle V^2(t) \rangle \xrightarrow{t \gg \tau_v} \frac{\sigma^2}{4\gamma}. \tag{1.33}$$

Nel limite di tempi lunghi la particella browniana è all'equilibrio con il fluido circostante. Se quest'ultimo, poi, è in equilibrio termodinamico alla temperatura  $T$ , per il teorema di equipartizione dell'energia [10] vale che

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} k_B T \tag{1.34}$$

e di conseguenza

$$\sigma^2 = 2\gamma k_B T. \tag{1.35}$$

A questo punto, si è in possesso di tutte le informazioni necessarie per ricavare un'espressione di  $F_{\text{stoch}}(t)$ . La forma più semplice che la forzante possa assumere, compatibilmente con le assunzioni fatte, è la seguente:

$$F_{\text{stoch}}(t) = \sqrt{2k_B T \gamma} \Phi(t), \tag{1.36}$$

dove  $\Phi(t)$  è un processo stocastico tale che  $\langle \Phi(t) \rangle = 0$  e  $\langle \Phi(t) \Phi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$ . Il termine di Langevin così descritto costituisce un *rumore bianco*, ovvero un processo stocastico con densità spettrale di potenza costante. La definizione di densità spettrale e le proprietà del rumore bianco verranno approfondite nel prossimo capitolo.

### 1.3 Moto nel caso generale

Siccome la dinamica della particella nel tweezer risulta disaccoppiata lungo le tre direzioni, si può studiare il moto della particella lungo un solo asse cartesiano. Pertanto, l'equazione più generale per descrivere la dinamica della particella nel tweezer è

$$m\ddot{X}(t) = -\gamma\dot{X}(t) - kX(t) + \sqrt{2\gamma k_B T} \Phi(t), \tag{1.37}$$

ove  $\Phi(t)$  è un processo stocastico tale che  $\langle \Phi(t) \rangle = 0$  e  $\langle \Phi(t) \Phi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$ . Per semplificare la notazione, conviene riscrivere questa equazione come

$$\ddot{X} = -\alpha\dot{X} - \beta X + A\Phi(t), \tag{1.38}$$

ponendo  $\alpha = \frac{\gamma}{m}$ ,  $\beta = \frac{k}{m}$  e  $A = \frac{\sqrt{2\gamma k_B T}}{m}$ . Con queste informazioni è possibile determinare la statistica del segnale di posizione per la particella nel tweezer, ripercorrendo i passaggi svolti nella sezione 1.2.2.

Secondo il metodo di Lagrange, una soluzione formale della 1.38 a fissata realizzazione del processo  $\Phi(t)$  è data da

$$x(t) = x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} \int_0^t ds \frac{A\phi(s)}{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 s}} + e^{\lambda_2 t} \int_0^t ds \frac{A\phi(s)}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 s}}, \quad (1.39)$$

dove  $x_1$  e  $x_2$  dipendono dalle condizioni iniziali, mentre  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})$  sono le radici dell'omogenea associata. Per determinare il valore di aspettazione della posizione, occorre mediare questa espressione su tutte le possibili realizzazioni del processo  $X(t)$  con dato iniziale  $(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle_{(x_1, x_2)} &= \langle x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t} \rangle + e^{\lambda_1 t} \int_0^t ds \frac{\langle A\phi(s) \rangle}{(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_1 s}} + e^{\lambda_2 t} \int_0^t ds \frac{\langle A\phi(s) \rangle}{(\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_2 s}} = \\ &= x_1 e^{\lambda_1 t} + x_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Siccome  $\lambda_{1,2} < 0$ , per tempi lunghi la posizione media tende a zero. Procedendo come visto nello scorso paragrafo, si può calcolare anche la varianza del processo  $X(t)$ . Tuttavia, i conti risultano lunghi e difficili e non sono utili per lo scopo di questa tesi, perciò non verranno svolti.

## 1.4 Moto nel regime sovrasmorzato

Nel caso in cui la viscosità del fluido sia di molto superiore alla massa della particella nel tweezer ( $\gamma \gg m$ ), il sistema si trova nel cosiddetto *regime sovrasmorzato*. In queste condizioni, la trattazione del problema in esame si semplifica notevolmente. Infatti, riscrivendo l'equazione del moto ?? come

$$\frac{m}{\gamma} \ddot{X} = -\dot{X} - \frac{k}{\gamma} X + \frac{F_{\text{stoch}}(t)}{\gamma} \quad (1.41)$$

e imponendo che il rapporto  $m/\gamma$  tenda a zero, l'equazione differenziale 1.41 passa dal secondo al primo ordine:

$$\dot{X} = -\frac{k}{\gamma} X + \frac{F_{\text{stoch}}(t)}{\gamma} \quad (1.42)$$

Secondo il metodo di variazione delle costanti, una soluzione formale della 1.42 a fissata realizzazione di  $F_{\text{stoch}}(t)$  è data da

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{\gamma} t} + \int_0^t ds e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s)} \frac{f_{\text{stoch}}(s)}{\gamma}, \quad (1.43)$$

dove  $x_0$  rappresenta la posizione al tempo iniziale  $t = 0$ . Mediando questa espressione su tutte le possibili realizzazioni del processo  $X(t)$  con dato iniziale  $x(0) = x_0$ , si ottiene

$$\langle X(t) \rangle_{x_0} = \langle x_0 e^{-\frac{k}{\gamma} t} \rangle + \int_0^t ds e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s)} \frac{\langle F_{\text{stoch}}(s) \rangle}{\gamma} = x_0 e^{-\frac{k}{\gamma} t}. \quad (1.44)$$

La posizione media, quindi, decresce esponenzialmente a zero con un tempo caratteristico pari a  $\tau_x = \gamma/k$ . A questo punto, è immediato ricavare la varianza del processo posizione:

$$\begin{aligned} \sigma_{X, x_0}^2(t) &= \langle (X(t) - \langle X(t) \rangle_{x_0})^2 \rangle_{x_0} = \\ &= \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s_1)} e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s_2)} \frac{\langle F_{\text{stoch}}(s_1) F_{\text{stoch}}(s_2) \rangle}{\gamma} = \\ &= \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s_1)} e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s_2)} \frac{\sigma^2 \delta(s_1 - s_2)}{\gamma} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2k\gamma} \left( 1 - e^{-\frac{2k}{\gamma} t} \right). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Quando il sistema raggiunge la condizione di equilibrio (i.e. per tempi lunghi), il processo perde memoria del dato iniziale, la media tende a zero e la dispersione della posizione della particella nel tweezer diventa costante:

$$\sigma_{X, x_0}^2(t) \xrightarrow{t \gg \tau_x} \sigma_X^2(t) = \langle X^2(t) \rangle = \frac{\sigma^2}{2k\gamma}. \quad (1.46)$$





## Capitolo 2

# Spettro del segnale posizione

Nel capitolo precedente sono state analizzate le proprietà statistiche delle variabili cinematiche della particella nel tweezer; con l'analisi spettrale è possibile fornire una descrizione più accurata della dinamica del sistema in esame, senza dover risolvere analiticamente l'equazione del moto. A tal proposito, in questo capitolo verrà determinato ed esaminato lo spettro del segnale posizione, nell'ipotesi di regime sovrasmorzato e non, partendo da nozioni base di teoria dei segnali.

### 2.1 Complementi di teoria dei segnali

In questa sezione vengono riportati teoremi e definizioni di teoria dei segnali tempo continuo; i segnali tempo discreto, invece, verranno esaminati brevemente nel prossimo capitolo. Un segnale *tempo continuo* è una generica funzione del tempo  $f(t)$  che ha come dominio un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Siccome il valor medio di un qualsiasi processo stocastico  $Y(t)$  costituisce una funzione del tempo nel senso usuale del termine, tutta la trattazione seguente (a meno della definizione di trasformata di Fourier) è valida anche nel caso di processi stocastici con la sostituzione  $f(t) \rightarrow \langle Y(t) \rangle$ .

Come già detto, lavorando con equazioni differenziali stocastiche è conveniente concentrarsi sulla risposta in frequenza dei segnali e ciò richiede la nozione di trasformata di Fourier [1]. Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , la sua *trasformata di Fourier* è definita<sup>1</sup> come segue:

$$\tilde{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) e^{i\omega t} dt \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{f}_T(\omega), \quad (2.1)$$

ove  $\omega$  rappresenta la frequenza espressa in rad/s. Una proprietà della trasformata di Fourier che verrà utilizzata in seguito è il fatto di trasformare le derivate in prodotti [1]:

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(\omega) = i\omega \tilde{f}(\omega). \quad (2.2)$$

La 2.1 può essere applicata anche ad una qualsiasi realizzazione  $y(t)$  di un processo  $Y(t)$ . Allora, è naturale<sup>2</sup> definire la trasformata di Fourier di  $Y(t)$  come il processo stocastico

$$\tilde{Y}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T Y(t) e^{i\omega t} dt \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{Y}_T(\omega). \quad (2.3)$$

I segnali oggetto di studio di questa tesi sono tutti *segnali di potenza* [17], ovvero hanno tutti potenza non nulla e finita, ove con *potenza del segnale*  $f$  si fa riferimento alla grandezza

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>La definizione data non è quella usuale, perché si sta considerando anche il caso in cui  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ .

<sup>2</sup>Per approfondire, si veda la sezione C.3.1 di [4].

Per segnali di questo tipo vale l'*identità di Parseval* [7]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}_T(\omega)|^2 d\omega . \quad (2.5)$$

Chiaramente la relazione 2.5 può essere interpretata come una formula di conservazione dell'energia: la potenza del segnale  $f$  è distribuita lungo l'asse dei tempi con densità  $|f(t)|^2$  e lungo l'asse delle frequenze angolari con densità pari a

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{f}_T(\omega)|^2}{T} . \quad (2.6)$$

Questa grandezza viene chiamata *densità spettrale di potenza*, o *spettro di potenza*. La 2.6, quindi, fornisce un'espressione per la distribuzione della potenza di un segnale nel dominio delle frequenze.

Infine, il *teorema di Wiener-Khintchine* [16] assicura che lo spettro di potenza di un processo stazionario  $Y(t)$  coincide con la trasformata di Fourier della funzione di autocovarianza  $C_Y(t) = \langle Y(t)Y(0) \rangle$ :

$$S_Y(\omega) = \tilde{C}_Y(\omega) . \quad (2.7)$$

In particolare, per segnali a valori reali si ha che

$$S_Y(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dt \cos(\omega t) C_Y(t) . \quad (2.8)$$

Questo teorema permette di ricavare lo spettro di potenza di un processo stazionario senza dover utilizzare la definizione 2.6. Si consideri, ad esempio, il rumore bianco  $\Phi(t)$  introdotto nel capitolo precedente per definire la forzante stocastica  $F_{\text{stoch}}(t)$ . In generale, un processo stocastico  $\xi(t)$  è detto *rumore bianco* se soddisfa le seguenti due condizioni: (i)  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ ; (ii)  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = c\delta(t-s)$ , con  $c$  costante.  $\Phi(t)$ , quindi, costituisce un rumore bianco con  $c = 1$  ed è anche stazionario, in quanto  $F_{\text{stoch}}(t)$  lo è. Di conseguenza, è possibile utilizzare il teorema di Wiener-Khintchine per ricavare il suo spettro di potenza:

$$S_{\Phi}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dt \cos(\omega t) \langle \Phi(t)\Phi(0) \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt \cos(\omega t) \delta(t-0) = 1 . \quad (2.9)$$

## 2.2 Spettro nel caso generale

Lo scopo di questa sezione è derivare analiticamente lo spettro del segnale posizione per la particella nel tweezer, utilizzando la definizione 2.6.

L'equazione più generale che descrivere la dinamica della particella nel tweezer è

$$\ddot{X}(t) = -\alpha\dot{X}(t) - \beta X(t) + A\Phi(t) , \quad (2.10)$$

con  $\alpha = \frac{\gamma}{m}$ ,  $\beta = \frac{k}{m}$  e  $A = \frac{\sqrt{2\gamma k_B T}}{m}$ . Nello spazio di Fourier la 2.10 diventa

$$-\omega^2 \tilde{X}(\omega) = -i\omega\alpha \tilde{X}(\omega) - \beta \tilde{X}(\omega) + A\tilde{\Phi}(\omega) , \quad (2.11)$$

ove  $\tilde{\Phi}(\omega)$  denota la trasformata di Fourier di  $\Phi(t)$ . Di conseguenza, la trasformata del processo  $X(t)$  equivale a

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{A\tilde{\Phi}(\omega)}{\beta - \omega^2 + i\omega\alpha} . \quad (2.12)$$

Per definizione, lo spettro di potenza del segnale posizione per la particella nel tweezer è dato da

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{X}_T(\omega)|^2}{2\pi T} \stackrel{(a)}{=} \left| \frac{A}{\beta - \omega^2 + i\omega\alpha} \right|^2 S_{\Phi}(\omega) \stackrel{1}{=} \frac{2\gamma k_B T}{(k - m\omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} , \quad (2.13)$$

ove in (a) si è usato quanto dimostrato in 2.9.

## 2.3 Spettro nel regime sovrasmorzato

In questa sezione si ricava lo spettro del segnale posizione nell'ipotesi di regime sovrasmorzato, sfruttando<sup>3</sup> il teorema di Wiener-Khintchine per processi stazionari.

Nel capitolo 1 è stato dimostrato che il moto della particella nel tweezer in regime sovrasmorzato è descritto con buona approssimazione dall'equazione

$$\dot{X}(t) = -\frac{k}{\gamma}X(t) + \sqrt{\frac{2k_B T}{\gamma}}\Phi(t). \quad (2.14)$$

Considerando una realizzazione particolare del processo  $\Phi(t)$ , la 2.14 costituisce un'equazione differenziale ordinaria, con soluzione equivalente a

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{k}{\gamma}t} + \int_0^t ds e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s)} \sqrt{\frac{2k_B T}{\gamma}}\phi(s), \quad x(0) = x_0. \quad (2.15)$$

Per definizione, la funzione di autocovarianza del processo  $X(t)$  a fissato dato iniziale è

$$\begin{aligned} C_{X,x_0}(t, t+\tau) &= \langle X(t)X(t+\tau) \rangle_{x_0} - \langle X(t) \rangle_{x_0} \langle X(t+\tau) \rangle_{x_0} = \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{2k_B T}{\gamma} \int_0^t ds \int_0^{t+\tau} ds' e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s)} e^{-\frac{k}{\gamma}(t+\tau-s')} \langle \Phi(s)\Phi(s') \rangle = \\ &= \frac{2k_B T}{\gamma} \int_0^t ds \int_0^{t+\tau} ds' e^{-\frac{k}{\gamma}(t-s)} e^{-\frac{k}{\gamma}(t+\tau-s')} \delta(s-s') = \\ &= \frac{k_B T}{k} \left( e^{-\frac{k}{\gamma}\tau} - e^{-\frac{k}{\gamma}(2t+\tau)} \right), \quad \text{per } \tau > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

In (a) si è usato il fatto che  $\langle F_{\text{stoch}}(t) \rangle = 0$  per ogni  $t$ . Nel limite di tempi lunghi, il sistema raggiunge l'equilibrio e il processo  $X(t)$  diventa stazionario. Infatti, per  $t \rightarrow \infty$ , la media  $\langle X(t) \rangle$  si annulla<sup>4</sup> e la funzione di autocovarianza perde memoria del dato iniziale e diventa una funzione solo di  $\tau$ :

$$C_{X,x_0}(t, t+\tau) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_X(\tau) = \frac{k_B T}{k} e^{-\frac{k}{\gamma}|\tau|}. \quad (2.17)$$

In questo limite, pertanto, è possibile usare il teorema di Wiener-Khintchine per ottenere lo spettro di potenza del segnale posizione in regime sovrasmorzato:

$$S_X(\omega) = \int_{\mathbb{R}} d\tau \cos(\omega\tau) C_X(\tau) = \frac{k_B T}{k} \int_{\mathbb{R}} d\tau \cos(\omega\tau) e^{-\frac{k}{\gamma}|\tau|} = \frac{2\gamma k_B T}{k^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (2.18)$$

## 2.4 Confronto tra gli spettri teorici

Per verificare che lo spettro ricavato nell'ipotesi di regime sovrasmorzato sia compatibile con lo spettro più generale, bisogna valutare se l'espressione 2.13 tende alla 2.18 mandando  $m$  a zero e mantenendo fissi tutti gli altri parametri (tra cui  $\gamma$ ): in questo modo, infatti, si testa se i due spettri coincidono nell'ipotesi in cui  $\gamma \gg m$ . La figura 2.1 mostra i grafici dei due spettri in scala logaritmica, valutati rispetto ai parametri della tabella 2.1 e ai valori di massa riportati nelle legende. Effettivamente, lo spettro più generale combacia con quello del caso sovrasmorzato per  $m \rightarrow 0$ , quindi le predizioni teoriche sono compatibili tra loro.

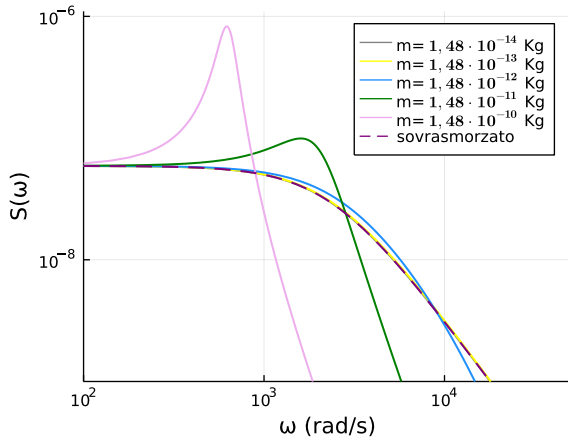
I parametri in tabella 2.1 corrispondono ai dati sperimentali ottenuti dai tre campionamenti effettuati in laboratorio e presentati nella sezione ???. Siccome per i valori di massa riportati nella tabella i grafici delle funzioni 2.13 e 2.18 coincidono tra loro, tutti e tre i campionamenti devono essere riferiti a sistemi in regime sovrasmorzato. Nel prossimo capitolo, quindi, sarà sufficiente mettere a confronto lo spettro ottenuto dai dati sperimentali con lo spettro del caso overdamped.

<sup>3</sup>Si sarebbe potuta utilizzare anche la definizione di spettro, come fatto nella sezione precedente.

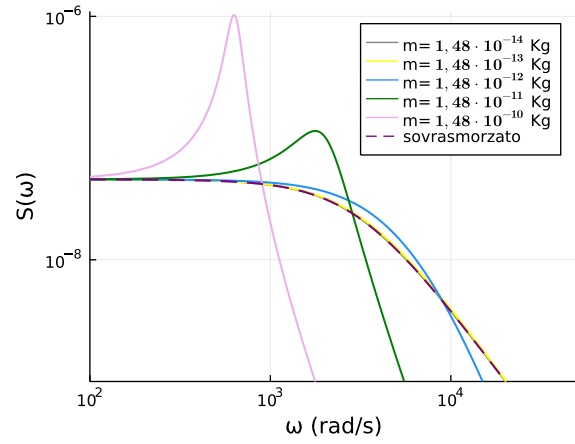
<sup>4</sup>È stato dimostrato nella sezione 1.4.

| Campione | $r$ (m)             | $m$ (kg)              | $T$ (K) | $\gamma$ ( $N \cdot s/m$ ) | $k$ (N/m)             |
|----------|---------------------|-----------------------|---------|----------------------------|-----------------------|
| 1        | $1,5 \cdot 10^{-6}$ | $1,48 \cdot 10^{-14}$ | 298,15  | $2,53 \cdot 10^{-8}$       | $59,35 \cdot 10^{-6}$ |
| 2        | $1,5 \cdot 10^{-6}$ | $1,48 \cdot 10^{-14}$ | 298,15  | $2,53 \cdot 10^{-8}$       | $42,22 \cdot 10^{-6}$ |
| 3        | $3 \cdot 10^{-6}$   | $1,19 \cdot 10^{-13}$ | 298,15  | $5,06 \cdot 10^{-8}$       | $33,79 \cdot 10^{-6}$ |

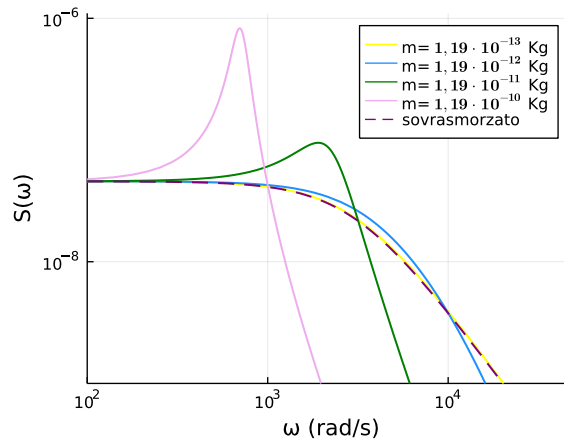
**Tabella 2.1:** Parametri utilizzati per ottenere i grafici in figura 2.1.



(a) Campione 1



(b) Campione 2



(c) Campione 3

**Figura 2.1:** Confronto tra lo spettro del caso sovrasmorzato (la cui espressione è data dalla 2.18) con quello più generale, ottenuto dalla 2.13 al variare di  $m$ . I tre grafici sono stati ricavati a partire dai parametri della tabella 2.1.

# Capitolo 3

## Analisi numerica

In questo capitolo vengono messi a confronto lo spettro di potenza del segnale posizione ottenuto dai dati raccolti in laboratorio e il relativo spettro teorico, la cui espressione è stata derivata al capitolo 2, con lo scopo di verificare che il tweezer lavori effettivamente come una trappola ottica.

### 3.1 Dati sperimentali

Al fine di semplificare la notazione, è conveniente utilizzare un insieme di unità di misura *naturali* per il sistema in esame. Poiché la particella di polistirene ha dimensioni micrometriche, l'unità spaziale viene fissata a  $[L] = 1 \mu\text{m}$ . Per le misure di tempo, invece, si sceglie  $[t] = 1 \text{s}$ . Le forze campionate con il tweezer sono espresse in unità di  $[F] = 1 \text{pN}$ , come d'uso negli esperimenti di intrappolamento ottico. In tabella 3.1 vengono riportate le unità di misura adottate per tutte le grandezze in gioco.

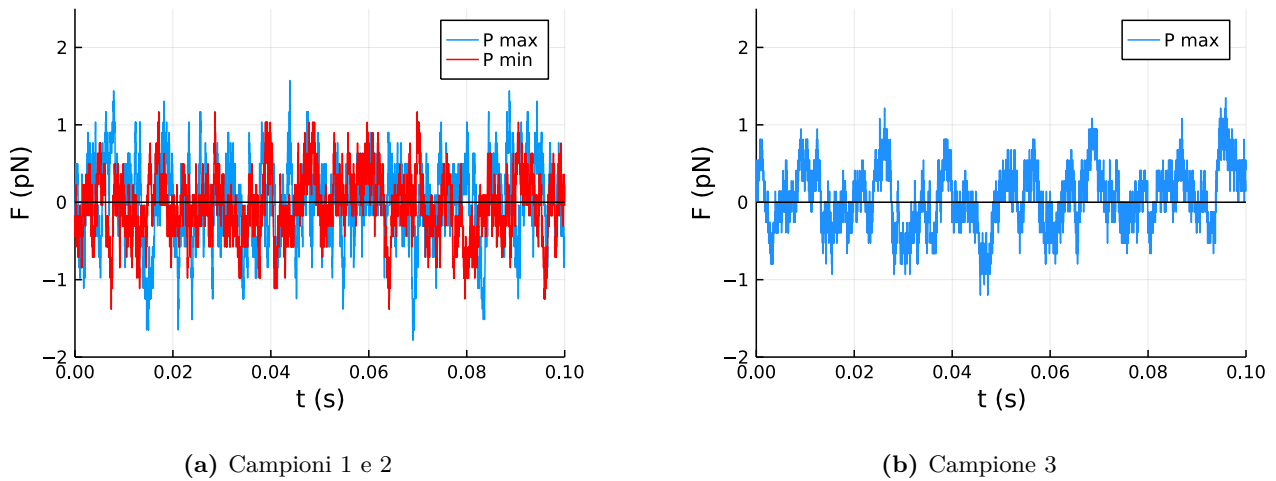
In generale, un mini-tweezer misura le due componenti di forza *di radiazione* nel piano normale alla direzione di propagazione del laser. Detta  $\hat{z}$  tale direzione, i dati sperimentali ottenuti avvalendosi del mini-tweezer dell'Università di Padova consistono in 3 diversi campionamenti di  $10^6$  misure di forza lungo l'asse  $y$  ciascuno, raccolte in  $T_{\text{camp}} = 20 \text{s}$  con una frequenza di  $f_{\text{camp}} = 50 \text{kHz}$ . La trattazione seguente, pertanto, verrà svolta considerando il problema unidimensionale associato alla componente  $y$  della forza agente sulla particella nel tweezer. I primi 2 set di misure sono riferiti ad una particella di raggio  $r_1 = 3 \mu\text{m}$  sottoposta ad una radiazione la cui potenza è stata fatta decrescere da un campionamento all'altro, per studiare gli effetti dell'allargamento della buca di potenziale elastico sul moto della particella. Invece, il terzo set riguarda una particella di raggio  $r_2 = 6 \mu\text{m}$  irradiata da un laser di potenza pari a quella utilizzata nel primo campionamento. In tabella 3.2 sono riportati i valori dei parametri sperimentali per il sistema oggetto di studio.

| Grandezza fisica                | Dimensione                     | U.m. naturale                               | Valore SI                                   |
|---------------------------------|--------------------------------|---|---|
| Tempo                           | $[t]$                          | 1 s   | 1 s   |
| Frequenza                       | $[f]$                          | $1 \text{ } 1/\text{s}$                     | 1 Hz  |
| Temperatura                     | $[T]$                          | 1 k   | 1 k   |
| Lunghezza                       | $[L]$                          | 1 $\mu\text{m}$                             | $10^{-6} \text{ m}$                         |
| Forza                           | $[F]$                          | 1 pN  | $10^{-12} \text{ N}$                        |
| Massa                           | $[m] = [F] \cdot [t]^2/[L]$    | $1 \text{ pN} \cdot \text{s}^2/\mu\text{m}$ | $10^{-6} \text{ kg}$                        |
| Energia                         | $[E] = [F] \cdot [L]$          | $1 \text{ pN} \cdot \mu\text{m}$            | $10^{-18} \text{ J}$                        |
| Viscosità dinamica              | $[\mu] = [F] \cdot [t]/[L]^2$  | $1 \text{ pN} \cdot \text{s}/\mu\text{m}^2$ | $1 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$     |
| Coefficiente di attrito viscoso | $[\gamma] = [F] \cdot [t]/[L]$ | $1 \text{ pN} \cdot \text{s}/\mu\text{m}$   | $10^{-6} \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$ |
| Costante elastica               | $[k] = [F]/[L]$                | $1 \text{ pN}/\mu\text{m}$                  | $10^{-6} \text{ N}/\text{m}$                |

**Tabella 3.1:** Unità di misura naturali per il sistema in esame.

| Parametro                   | Valore in u.m. naturali                         | Valore SI                                 |
|-----------------------------|---|---|
| $T_{\text{camp}}$           | 20 [t]  | 20 s                                      |
| $f_{\text{camp}}$           | $5 \cdot 10^4$ [f]                              | $5 \cdot 10^4$ Hz                         |
| T                           | 298, 15 [T]                                     | 298, 15 k                                 |
| $\lambda_{\text{laser}}$    | $8,05 \cdot 10^{-1}$ [L]                        | $8,05 \cdot 10^{-7}$ m                    |
| $r_1$                       | 1,5 [L]   | $1,5 \cdot 10^{-6}$ m                     |
| $r_2$                       | 3 [L]   | $3 \cdot 10^{-6}$ m                       |
| $\rho_{\text{polistirene}}$ | $1,05 \cdot 10^{-9}$ [m]/[L] <sup>3</sup>       | $1,05 \cdot 10^3$ kg/m <sup>3</sup>       |
| $m_1$                       | $1,48 \cdot 10^{-8}$ [m]                        | $1,48 \cdot 10^{-14}$ kg                  |
| $m_2$                       | $1,19 \cdot 10^{-7}$ [m]                        | $1,19 \cdot 10^{-13}$ kg                  |
| $k_B$                       | $1,38 \cdot 10^{-5}$ [E]/[T]                    | $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/k                 |
| $\mu_{\text{acqua}}$        | $8,94 \cdot 10^{-4}$ [F] · [t]/[L] <sup>2</sup> | $8,94 \cdot 10^{-4}$ N · s/m <sup>2</sup> |
| $\gamma_1$                  | $2,53 \cdot 10^{-2}$ [F] · [t]/[L]              | $2,53 \cdot 10^{-8}$ N · s/m              |
| $\gamma_2$                  | $5,06 \cdot 10^{-2}$ [F] · [t]/[L]              | $5,06 \cdot 10^{-8}$ N · s/m              |

Tabella 3.2: Parametri sperimentali.



**Figura 3.1:** Segnali temporali di forza. **(a)** Forza esercitata sulla particella di raggio  $1,5 \mu\text{m}$  nei primi 0,1 s di acquisizione dei dati, per la potenza massima (in blu) e minima (in rosso) del laser. **(b)** Forza esercitata sulla particella di raggio  $3 \mu\text{m}$  nei primi 0,1 s di acquisizione dei dati, per la potenza massima del laser.

Nei grafici in figura 3.1 sono rappresentate le prime  $5 \cdot 10^3$  misure di forza per la potenza massima (in blu) e minima (in rosso) del laser. L'andamento dei dati rispecchia l'andamento oscillatorio tipico di misure di forza elastica. Si può poi notare che la serie temporale corrispondente alla massima potenza del laser oscilla con un'ampiezza superiore a quella della serie corrispondente alla potenza minima. Giustamente, maggiore è la potenza del laser, maggiori sono gli estremi tra cui la forza oscilla. Da ultimo è importante osservare che, per effetto della scarsa risoluzione del tweezer, sono presenti numerosi plateaux: infatti, lo strumento di misura approssima i dati (espressi in unità di  $[F] = 1 \text{ pN}$ ) alla settima cifra decimale e questo fa sì che misurazioni successive restituiscano lo stesso risultato.

### 3.2 Spettro del segnale posizione

In questa sezione viene descritto il procedimento con cui è possibile ricavare lo spettro del segnale posizione a partire dai dati sperimentali.

Per prima cosa, risulta necessario tradurre i dati di forza in dati di posizione, utilizzando la relazione  $F(t) = -kx(t)$ . Applicando il teorema di equipartizione dell'energia

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}k \langle x^2 \rangle \quad (3.1)$$

| Campione | $\langle F^2 \rangle$ | $k$         |
|----------|-----------------------|-------------|
| 1        | $0,24 [F]^2$          | $59,35 [k]$ |
| 2        | $0,17 [F]^2$          | $42,22 [k]$ |
| 3        | $0,14 [F]^2$          | $33,79 [k]$ |

**Tabella 3.3:** Valori sperimentali di  $\langle F^2 \rangle$  e di  $k$  ottenuti nei tre campionamenti.

e ricordandosi che l'energia potenziale elastica vale

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}, \quad (3.2)$$

si ottiene un'espressione per la costante elastica  $k$  in funzione dei dati sperimentali:

$$k = \frac{\langle F^2 \rangle}{k_B T}. \quad (3.3)$$

In tabella 3.3 vengono riportati i valori di  $\langle F^2 \rangle$  e di  $k$  per tutti e tre i campionamenti. A questo punto, grazie alla relazione  $F(t) = -kx(t)$ , si è in grado di convertire i segnali temporali di forza in segnali temporali di posizione. In figura 3.2 sono rappresentati i valori di posizione corrispondenti alle prime  $5 \cdot 10^3$  misurazioni di forza, per la potenza massima (in blu) e minima (in rosso) del laser. Il segnale in blu ha un'ampiezza minore rispetto al segnale in rosso, esattamente l'opposto di quanto succede per i segnali di forza: ovviamente, maggiore è la forza esercitata sulla particella, minore è lo spazio in cui questa si può muovere. Confrontando tutti i dati a disposizione, si può affermare che la posizione delle particelle nel tweezer è sempre compresa tra  $\pm 0,05 \mu\text{m}$ : le particelle, quindi, oscillano in un intervallo di dimensione notevolmente inferiore rispetto ai loro raggi; ciò significa che il tweezer è effettivamente capace di intrappolare oggetti di dimensioni micrometriche.

I 3 segnali di posizione così ottenuti costituiscono dei segnali tempo discreto, ciascuno dei quali è composto da  $N = 10^6$  misurazioni  $\{x(t_n) = x_n\}_{n=1, \dots, N}$  campionate in  $T = N\Delta t = 20$  s con una frequenza di  $f = 1/\Delta t = 50$  kHz. Per definizione [18], lo spettro di potenza di segnali di questo tipo è dato da

$$S_x(\nu) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi\nu n\Delta t} \right|^2, \quad (3.4)$$

dove si ricorda che la relazione che lega le frequenze  $\nu$  espresse in Hz alle frequenze angolari  $\omega$  espresse in  $\text{rad/s}$  è  $\omega = 2\pi\nu$ . La sommatoria racchiusa all'interno del modulo quadro coincide con la trasformata di Fourier discreta del segnale  $\{x(t_n) = x_n\}_{n=1, \dots, N}$ , ottenuta nella pratica lavorando con la funzione DFT del pacchetto FFTW di Julia. In base alla 3.4, per determinare lo spettro di potenza del segnale posizione a partire dai dati sperimentali occorre: calcolare la trasformata di Fourier del segnale per un alto numero di dati, considerarne il modulo quadro e poi dividerlo per  $N$ .

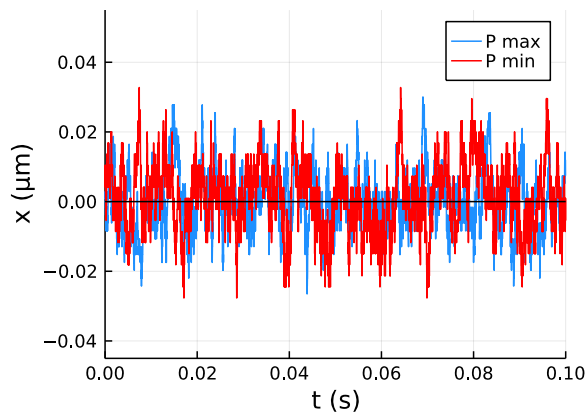
Se, poi, si vuole confrontare lo spettro ricavato dalle misure sperimentali con quello teorico, è necessario convertire il primo in una funzione delle frequenze angolari. Per fare ciò, è necessario imporre che il segnale trasporti sempre la stessa potenza, qualsiasi sia il dominio su cui si valuta il suo spettro:

$$\int_{\mathbb{R}} S_x(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} S_x\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \frac{d\omega}{2\pi} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} S_x(\omega) d\omega. \quad (3.5)$$

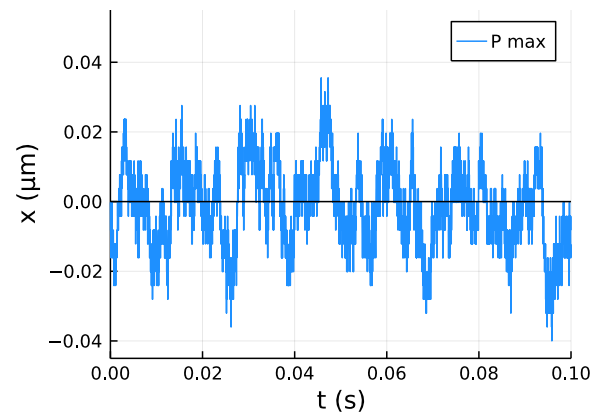
ove in (a) è stato usato il teorema di Parseval [7]. Evidentemente, per ottenere lo spettro desiderato basta esprimere la 3.4 in termini delle frequenze angolari:

$$S_x\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \equiv S_x(\omega). \quad (3.6)$$

In figura 3.3 si mette a confronto lo spettro teorico del regime sovrasmorzato con quello sperimentale. Dato l'elevato numero di misure, si è scelto di raggruppare i punti degli spettri in 300 bin, ove il bin  $i$ -esimo corrisponde alla media dei valori associati ad una frequenza nell'intervallo  $[1 + (i - 1); i]^{300/\Delta t}$ .



(a) Campioni 1 e 2

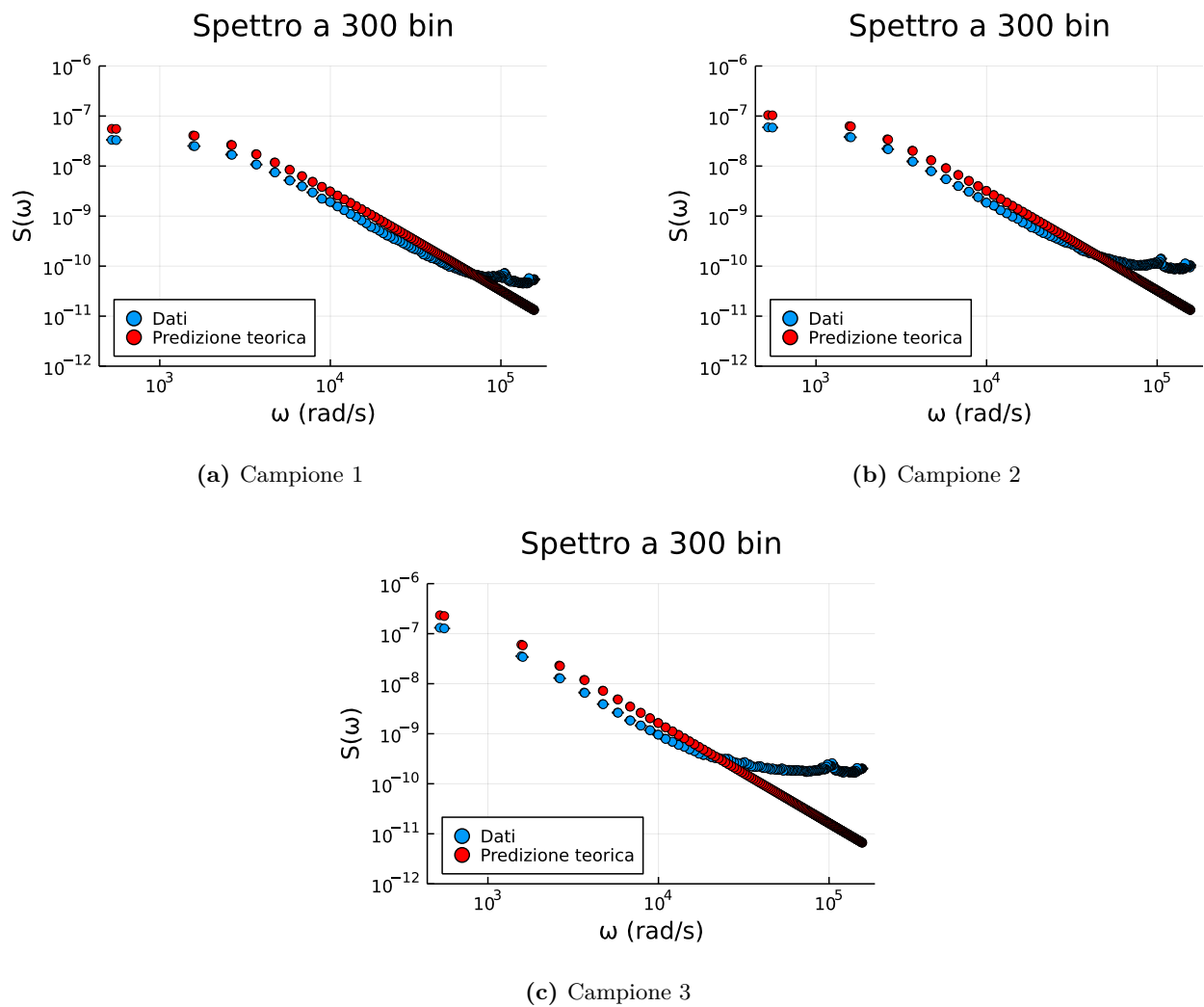


(b) Campione 3

**Figura 3.2:** Segnali temporali di posizione. **(a)** Posizione della particella di raggio  $1,5\ \mu\text{m}$  nei primi  $0,1\ \text{s}$  di acquisizione dei dati, per la potenza massima (in blu) e minima (in rosso) del laser. **(b)** Posizione della particella di raggio  $3\ \mu\text{m}$  nei primi  $0,1\ \text{s}$  di acquisizione dei dati, per la potenza massima del laser.

I due spettri presentano una differenza sostanziale ad alte frequenze: questo effetto è legato alla scarsa risoluzione del tweezer, che fa aumentare il numero di dati presenti nella regione finale del grafico. Escludendo i punti ad alte frequenze, i due spettri presentano lo stesso andamento, quindi la validità delle previsioni teoriche è confermata dall'esperimento.





**Figura 3.3:** Confronto tra lo spettro teorico nel caso sovrasmorzato (in rosso) e quello sperimentale (in blu) per: **(a)** la particella di raggio  $1,5 \mu\text{m}$  e la potenza massima del laser; **(b)** la particella di raggio  $1,5 \mu\text{m}$  e la potenza minima del laser; **(c)** la particella di raggio  $3 \mu\text{m}$  e la potenza massima del laser.



# Bibliografia

- [1] C. Anedda. *La trasformazione di Fourier e la trasformazione di Laplace*. Dispense per il corso di Analisi superiore 1. 2020/2021.
- [2] A. Ashkin. “Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure”. In: *Phys. Rev. Lett.* 24 (4 gen. 1970), pp. 156–159. DOI: 10.1103/PhysRevLett.24.156. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.24.156>.
- [3] A. Ashkin. “Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure”. In: *Phys. Rev. Lett.* 24 (4 gen. 1970), pp. 156–159. DOI: 10.1103/PhysRevLett.24.156. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.24.156>.
- [4] N. Borghini. “Topics in Nonequilibrium Physics”. In: 2012.
- [5] P. Brémaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Vol. 31. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] A. Einstein. “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”. In: *Annalen der Physik* 322.8 (1905), pp. 549–560. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220806>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053220806>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053220806>.
- [7] G. Gaeta. *Trasformata ed anti-trasformata di Fourier*. Appunti del corso di Fisica Matematica 2. 2019/2020.
- [8] G. Gouesbet, B. Maheu e G. Gréhan. “Scattering of a Gaussian Beam by a Sphere Using a Bromwich Formulation : Case of an Arbitrary Location”. In: *Optical Particle Sizing: Theory and Practice*. A cura di G. Gouesbet e G. Gréhan. Boston, MA: Springer US, 1988, pp. 27–42. ISBN: 978-1-4757-1983-3. DOI: 10.1007/978-1-4757-1983-3\_3. URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1983-3\\_3](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1983-3_3).
- [9] J.M. Huguet i Casades. “Statistical and thermodynamic properties of DNA unzipping experiments with optical tweezers”. Tesi di dott. Universitat de Barcelona, 2010.
- [10] W.T. King. *Thermal cantilever calibration. Equipartition theorem and power spectral density fitting*. 2009. URL: [http://www.physics.drexel.edu/~wking/rsrch/papers/cantilever\\_calib/cantilever\\_calib.pdf](http://www.physics.drexel.edu/~wking/rsrch/papers/cantilever_calib/cantilever_calib.pdf).
- [11] Dowling D.R. Kundu P.K. Cohen I.M. *Fluid Mechanics*. 6th Edition. Academic Press, 2015.
- [12] P. Langevin. “Comptes Rendus”. In: 146.530-533 (1908).
- [13] B. Maheu, G. Gouesbet e G. Grehan. “A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrary location of the scatterer in an arbitrary incident profile”. In: *Journal of Optics* 19.2 (mar. 1988), pp. 59–67. DOI: 10.1088/0150-536x/19/2/002. URL: <https://doi.org/10.1088/0150-536x/19/2/002>.
- [14] G. Mie. “Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen”. In: *Annalen der Physik* 330.3 (1908), pp. 377–445. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19083300302>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19083300302>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19083300302>.

- 
- [15] L. Sjögren. “Nonequilibrium processes in physics, chemistry and biology”. In: 2012. URL: <http://physics.gu.se/~frtbm/joomla/media/mydocs/LennartSjogren/kap6.pdf>.
- [16] N.G. Van Kampen. *Stochastic processes in physics and chemistry*. North Holland, 2007.
- [17] L. Verdoliva. *Analisi dei segnali nel dominio del tempo*. Appunti di Teoria dei Segnali. 2010/2011.
- [18] L. Verdoliva. *Analisi dei segnali nel dominio della frequenza*. Appunti di Teoria dei Segnali. 2010/2011.
- [19] C. Zaccaria. “Optical mini-Tweezers: un esperimento di singola molecola”. Tesi di laurea mag. Università degli studi di Padova, 2018. URL: <http://hdl.handle.net/20.500.12608/28316>.