



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Tesi di Laurea in Fisica

La purificazione degli stati quantistici

Relatore: professor Pieralberto Marchetti

Laureando: Dario Spolaor

Anno Accademico: 2013/2014

Indice

<i>Introduzione</i>	2
Prima parte: Basi concettuali	3
1.1 <i>La matrice densità</i>	3
1.2 <i>La sfera di Bloch</i>	5
1.3 <i>La decomposizione di Schmidt</i>	7
Seconda parte: Risultati ed applicazioni	10
2.1 <i>Il teorema GHJW</i>	10
2.2 <i>Misure generalizzate e POVM</i>	12
2.2.1 <i>Esempio: POVM per un qubit</i>	14
2.3 <i>Il teorema di Neumark</i>	15
2.3.1 <i>Esempio: qubit e teorema di Neumark</i>	16
2.4 <i>Misure ortogonali su un prodotto tensore</i>	18
<i>Conclusione</i>	23
Bibliografia	24

Introduzione

Obiettivo della presente tesi è la descrizione del processo di purificazione dal punto di vista della teoria dell'informazione in Meccanica Quantistica. Purificare uno stato significa determinare un raggio vettore, appartenente eventualmente ad uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore di quello in cui lo stato considerato è definito, da cui esso può essere ottenuto attraverso specifiche operazioni. Se lo stato di partenza è una matrice densità allora il teorema GHJW prescrive che è possibile ottenerla attraverso l'esecuzione della traccia a partire da uno stato puro, anche se non in modo univoco. Una situazione analoga si presenta nel caso delle misure. Qualora si abbia a che fare con gli osservabili costituenti un POVM, che descrivono misure generalizzate tramite matrici simili ai proiettori (rappresentanti invece le misure standard ortogonali in Meccanica Quantistica), ma senza la richiesta di idempotenza $P^2 = P$, il teorema di Neumark asserisce che essi possono essere ottenuti eseguendo una misura ortogonale in uno spazio a dimensione più ampia. Come si vede, i risultati matematici che si andranno ad enunciare e dimostrare mettono in pratica con matrici densità e POVM l'idea generale di riuscire ad avere conoscenza massimale solo allargando la visuale da un sottosistema ad uno spazio con dimensione maggiore. Tale concetto evidentemente non ha un analogo classico, in quanto classicamente se non si possiede una conoscenza completa di una parte limitata di un sistema, non si è sicuri che aumentando l'ingrandimento della visione si riesca a raggiungere una completa descrizione dei fenomeni, né altresì si è in grado di pensare un metodo dal quale derivare un generico stato del sottosistema in questione, lavorando nel reservoir che lo contiene. Per poter presentare i risultati descritti in precedenza senza dover appesantire la trattazione con richiami sulle proprietà matematiche degli elementi con cui si lavorerà, si è ritenuto utile dedicare la prima parte dell'elaborato alla descrizione delle basi matematiche necessarie. La seconda parte si occuperà invece della presentazione dei teoremi che riguardano la purificazione degli stati quantistici, mostrando anche un'applicazione con POVM finito dimensionali.

Prima parte: Basi concettuali

1.1 La matrice densità

In questo capitolo si tratteranno le proprietà e gli utilizzi della matrice densità nella teoria dell'informazione quantistica.

Presentando l'argomento in un caso specifico, si consideri lo spazio di due qubit, ovvero di due unità indivisibili portatrici di informazione A e B , che possono essere pensate ai fini pratici come due particelle di spin $\frac{1}{2}$, considerando come grado di libertà solo il loro spin. Lo spazio dei vettori di stato (d'ora in poi "stati") $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, è il prodotto tensore tra due spazi che si distinguono solo per un indice letterale messo a pedice dei vettori. Ciascuno di essi è isomorfo allo spazio dei numeri complessi \mathbb{C}^2 e dunque si possono denotare come basi ortonormali per entrambi le seguenti coppie $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$ e $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$. Tra tutti gli stati possibili dello spazio complessivo, si consideri il seguente

$$|\psi\rangle_{AB} = a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (1.1)$$

con $a, b \in \mathbb{C}$. I due qubit in questo stato sono correlati: difatti qualora si misurasse lo spin del primo proiettando sulla sua base sopra indicata, si troverebbe il primo od il secondo addendo a seconda di quale sia la componente della proiezione scelta. Per ciascuno di essi è possibile ricavare la probabilità con cui si presenta il risultato calcolando il valor medio del prodotto tensore tra il proiettore in questione nello spazio \mathcal{H}_A e la matrice unitaria in \mathcal{H}_B , sullo stato dato. Definito il proiettore $E_A(|0\rangle_A) = |0\rangle_A \langle 0|$, la probabilità di trovare lo stato $|0\rangle_A$ è data da $\text{Prob}(|0\rangle_A) = |a|^2$ e in tal caso lo stato dopo la misura è:

$$|\psi'\rangle_{AB} = E_A(|0\rangle_A) \otimes \mathbf{1}_B |\psi\rangle_{AB} = (a|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \rightarrow |\psi'\rangle_{AB} \equiv |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$$

Analogamente definito $E_A(|1\rangle_A) = |1\rangle_A \langle 1|$ la probabilità di trovare lo stato $|1\rangle_A$ è $\text{Prob}(|1\rangle_A) = |b|^2$; lo stato dopo la misura allora è:

$$|\psi'\rangle_{AB} = E_A(|1\rangle_A) \otimes \mathbf{1}_B |\psi\rangle_{AB} = (b|1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \rightarrow |\psi'\rangle_{AB} \equiv |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad (1.2)$$

Come si può notare, l'operatore di proiezione ha selezionato anche una componente del qubit in \mathcal{H}_B , nonostante su di esso non abbia agito alcun operatore. Dunque si può cercare una espressione per il valor medio di un osservabile in \mathcal{H}_A calcolato sullo stato iniziale in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tramite una matrice densità ρ_A in \mathcal{H}_A desunta da tale stato. Sia dunque M_A un operatore autoaggiunto in \mathcal{H}_A , allora:

$$\begin{aligned} {}_{AB} \langle \psi | M_A \otimes \mathbf{1}_B | \psi \rangle_{AB} &= |a|^2 {}_A \langle 0 | M_A | 0 \rangle_A + |b|^2 {}_A \langle 1 | M_A | 1 \rangle_A = \langle M_A \rangle \equiv \\ \text{tr}(M_A \rho_A) \quad \forall M_A \text{ a. a. in } \mathcal{H}_A &\Rightarrow \rho_A = |a|^2 |0\rangle_A \langle 0| + |b|^2 |1\rangle_A \langle 1| \quad (1.3) \end{aligned}$$

Come si vede dalla sua definizione, ρ_A è hermitiana, ha traccia unitaria (poiché lo stato iniziale era normalizzato) ed è positiva, in quanto lo sono i suoi autovalori, come si può notare facendola agire sui vettori della base di \mathcal{H}_A . Tramite la formula (1.3) si può dare un'interpretazione fisica al concetto di matrice densità: il valor medio dell'osservabile nello spazio \mathcal{H}_A è risultato come la somma di due operazioni di media sugli stati costituiti da un singolo vettore di base, ciascuno pesato per la probabilità di ottenere tale stato singolo effettuando una proiezione ortogonale. Dunque la matrice densità ρ_A è interpretabile come

descrizione di un ensemble dei possibili stati puri assunti dal qubit in \mathcal{H}_A in modo indipendente da come si comporta la particella in \mathcal{H}_B . Per determinare la probabilità del risultato di una misura di qualsiasi osservabile in \mathcal{H}_A nello stato iniziale basta sostituire nella (1.3), il proiettore desiderato $\mathbf{E}_A(a)$, che descrive la misura con risultato a , al posto dell'operatore autoaggiunto \mathbf{M}_A , ottenendo così:

$$\text{Prob}(a) = p_0 \langle 0 | \mathbf{E}_A(a) | 0 \rangle_A + p_1 \langle 1 | \mathbf{E}_A(a) | 1 \rangle_A \quad \text{con } p_0 = |a|^2 \text{ e } p_1 = |b|^2 \quad (1.4)$$

Utilizzando l'analogia tra qubit e spin, si può cercare come si comporta una particella nell'autostato di autovalore $\frac{1}{2}$ della componente x dello spin, che è noto essere $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle)$, ove $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$ denotano gli autostati dello spin lungo z , S_z . Proiettando tale autostato di S_x nella base di autofunzioni della componente z dello spin si ottiene l'uno o l'altro dei due vettori che lo compongono con probabilità $\frac{1}{2}$. Ad ogni modo la probabilità che si presenti un autovalore positivo di S_x , calcolata sullo stato in questione rimane sempre unitaria. Volendo calcolare la matrice densità che si ottiene dopo una misura di S_z nello stato considerato senza conoscerne l'esito, si troverà in base alla (1.3) la metà della matrice unitaria: dal punto di vista fisico, si ottiene l'espressione più uniforme possibile per la matrice densità in quanto non c'è nessuna predilezione nella probabilità di comparsa dei due stati costituenti l'autostato di partenza. Dunque volendo determinare la probabilità di ottenere, dopo una misura di S_z , lo stato $|\uparrow_x\rangle$ si ha:

$$\text{Prob}(|\uparrow_x\rangle) = \text{tr}(|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| \cdot \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \quad (1.5)$$

Ciò è dovuto al fatto che la particella è preparata con uguale probabilità sia in uno stato a spin up che a spin down, e tale caratteristica non dipende da che componente dello spin si abbia in mente, in quanto l'operazione di traccia utilizzata per costruire la matrice densità è slegata dalla base utilizzata per compierla. A conferma di ciò si può calcolare la probabilità di trovare con una misura la componente positiva dello spin in una direzione generica dello spazio. Utilizzando le coordinate sferiche per identificare la direzione e denotando lo stato nella direzione descritta dagli angoli θ, φ come $|\psi(\theta, \varphi)\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow_z\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} |\downarrow_z\rangle$ si ottiene:

$$\text{Prob}(|\psi(\theta, \varphi)\rangle) = \text{tr}(|\psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\psi(\theta, \varphi)| \cdot \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \quad (1.6)$$

Emerge dunque la differenza tra l'autostato di S_x e la matrice densità: il primo può essere interpretato come una caratteristica fisica della particella, ed anche se risultano uguali le probabilità di ottenere un valore a spin up o down lungo l'asse z , l'autostato agisce come un unicum, come si è avuto modo di vedere nel calcolo della probabilità di ottenere un autovalore positivo dell'osservabile S_x . Diversamente, per la matrice densità, lo stato iniziale conta come ensemble probabilistico dei vettori di base, ciascuno dei quali ha un peso differente in base al coefficiente che lo moltiplica. Dunque se tali fattori sono uguali è impossibile scegliere un verso privilegiato dove punta lo spin, e pertanto la probabilità di avere un autovalore positivo dell'operatore S in direzione generica sarà sempre $\frac{1}{2}$. Quanto detto in precedenza per due qubit può essere generalizzato a spazi di Hilbert con dimensione qualsiasi e per stati iniziali che comprendano tutte le possibili combinazioni tra le basi dei due sottospazi. Sia $\{|i\rangle_A, i \in \mathcal{J}\}$ una base su \mathcal{H}_A e $\{|\mu\rangle_B, \mu \in \mathcal{M}\}$ una base su \mathcal{H}_B . Se consideriamo

lo stato $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$ con $\sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1$ allora calcolando il valor medio dell'osservabile \mathbf{M}_A di \mathcal{H}_A si ottiene:

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = {}_{AB} \langle \psi | \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}_B | \psi \rangle_{AB} = \sum_{i,j,\mu} a_{j\mu}^* a_{i\mu} \langle j | \mathbf{M}_A | i \rangle_A = \text{tr}_A(\mathbf{M}_A \rho_A)$$

Ciò implica che la matrice densità corrispondente a $|\psi\rangle_{AB}$ in \mathcal{H}_A è data da:

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB} {}_{AB} \langle \psi|) = \sum_{i,j,\mu} a_{i\mu} a_{j\mu}^* |i\rangle_A \langle j| \quad (1.7)$$

Le proprietà enunciate prima, come era da aspettarsi, rimangono valide anche in questo caso generale.

1. ρ_A è autoaggiunto: $\rho_A^\dagger = \sum_{i,j,\mu} a_{i\mu}^* a_{j\mu} |j\rangle_A \langle i| = \rho_A$;
2. ρ_A è positivo: per qualsiasi $|\psi\rangle_A$, ${}_A \langle \psi | \rho_A | \psi \rangle_A = \sum_{\mu} |\sum_i a_{i\mu} {}_A \langle \psi | i \rangle_A|^2 \geq 0$;
3. $\text{tr}_A(\rho_A) = \sum_{i,\mu} |a_{i\mu}|^2 = 1$ poiché $|\psi\rangle_{AB}$ è normalizzato.

Dalle proprietà appena enunciate segue che la matrice densità può essere diagonalizzata e che la somma dei suoi autovalori è 1. A seconda di quanti termini contenga la matrice densità nella base in cui è diagonalizzata, è possibile capire se lo stato del sottosistema sia puro, ovvero un raggio vettore con informazione massimale, oppure no. Nel primo caso difatti la matrice densità, espressa nella base che la diagonalizza, consta di un solo termine e dunque è pari ad un proiettore ortogonale. Dunque dalle proprietà che soddisfano i proiettori, si vede che in tal caso il quadrato della matrice densità è uguale alla matrice stessa; tale condizione è invece violata da un generico operatore densità. Scrivendo nella base di \mathcal{H}_A $\{|\psi_a\rangle, a \in \mathcal{A}\}$ che la diagonalizza, poiché i vettori sono ortogonali tra loro, il quadrato di $\rho_A = \sum_a p_a |\psi_a\rangle \langle \psi_a|$ (con $0 \leq p_a \leq 1$ e $\sum_a p_a = 1$) risulta essere:

$$\rho_A^2 \neq \rho_A \Rightarrow \text{tr}(\rho_A^2) = \sum_a p_a^2 < \sum_a p_a = 1 \quad (1.8)$$

L'unico modo perché i due operatori ρ_A^2 e ρ_A risultino uguali è che i coefficienti della somma siano 0 od 1; poiché però essi, se addizionati, devono dare l'unità, allora la matrice densità può in realtà essere costituita da un solo proiettore unidimensionale (prodotto ket-bra), visto che i termini nulli non contribuiscono. Oltre a permettere di distinguere tra stato puro e misto, la scrittura della matrice densità nella base che la rende diagonale, è anche utile per dare un'espressione immediata del valor medio di un osservabile \mathbf{M}_A in \mathcal{H}_A :

$$\langle \mathbf{M}_A \rangle = \text{tr}(\mathbf{M}_A \rho_A) = \sum_a p_a \langle \psi_a | \mathbf{M}_A | \psi_a \rangle \quad (1.9)$$

Come si vedrà, il concetto di matrice densità è utile per la comprensione dei teoremi sulla purificazione, ed è trattato in special modo dall'enunciato GHJW, spiegando come può essere ottenuto da uno stato puro.

1.2 La sfera di Bloch

In questo paragrafo si presentano alcune applicazioni della matrice densità nel caso particolare in cui il sistema descritto sia un qubit. Ciò che interessa è valutare come la regione descritta da matrici densità con autovalori 0 ed 1, sia un ben specifico sottoinsieme della sfera di Bloch e, come analizzato nel paragrafo precedente, tali operatori possano essere ottenuti a

partire da stati puri di un sistema più grande. Poiché come anticipato si avrà a che fare con una particella di spin $\frac{1}{2}$, la matrice \mathbf{M} che descrive l'ensemble dei suoi stati quantici sarà 2×2 ; dovendo inoltre rispettare la proprietà di autoaggiuntezza, essa dipenderà da quattro parametri reali e si potrà scrivere come combinazione lineare dell'identità e delle matrici di Pauli. Se $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\dagger$, allora: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & E - iF \\ E + iF & G \end{pmatrix}$; posto $A = x^0 + x^3, G = x^0 - x^3, E = x^1$ e $F = x^2$, ove $x^\mu \in \mathbb{R}^4$, si ha:

$$\mathbf{M} = x^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv x^0 \cdot \mathbf{1} + x^3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 + x^1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + x^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = x^\mu \boldsymbol{\sigma}_\mu \quad \text{con } \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{1} \quad (1.10)$$

Scrivendo tale espansione come combinazione lineare è necessario far rispettare alla matrice densità la proprietà di avere traccia unitaria, dunque essendo le matrici di Pauli prive di traccia, si può anteporre il coefficiente $\frac{1}{2}$ alla combinazione, lasciando la matrice identità priva di un fattore moltiplicativo:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + 2x^1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + 2x^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + 2x^3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

con $\vec{P} = {}^t(2x^1, 2x^2, 2x^3)$. Affinchè si abbia a disposizione una vera matrice densità è necessario far rispettare la proprietà di positività ovvero di avere autovalori non negativi. Essa porrà delle condizioni sui coefficienti delle tre matrici di Pauli. Imponendola si ottiene che gli autovalori di $\boldsymbol{\rho}$ risultano:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[1 \pm |\vec{P}|] \Rightarrow \lambda_{1,2} \geq 0 \Leftrightarrow |\vec{P}| \leq 1 \quad (1.12)$$

ed inoltre $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow |\vec{P}| = 1$.

Se è soddisfatta la condizione appena esaminata, si ha veramente una matrice densità, con traccia unitaria, autovalori non negativi e autoaggiunta. La regione identificata dai coefficienti è pertanto una sfera di raggio unitario, detta sfera di Bloch; interessante è la superficie di tale solido, ove i calcoli precedenti indicano che la matrice densità ha gli autovalori 0 ed 1. Come discusso nel paragrafo precedente, il quadrato dell'operatore densità in tal caso è uguale alla matrice stessa; dunque una rappresentazione alternativa può essere effettuata utilizzando il proiettore unidimensionale di uno stato puro, che è possibile identificare come l'autostato dell'operatore di spin in una direzione parametrizzata da un versore tridimensionale \hat{n} , $|\psi(\hat{n})\rangle$. Tale affermazione è provata nel seguito, utilizzando la proprietà delle matrici di Pauli $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$. Infatti se $\boldsymbol{\rho}(\hat{n}) = |\psi(\hat{n})\rangle\langle\psi(\hat{n})| = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \hat{n} \cdot \vec{\sigma})$ allora:

$$[\boldsymbol{\rho}(\hat{n})]^2 = \frac{1}{4}[\mathbf{1} + 2(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}) + (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2] = \boldsymbol{\rho}(\hat{n}) = |\psi(\hat{n})\rangle\langle\psi(\hat{n})| \quad (1.13)$$

Un vantaggio della rappresentazione dello stato puro con un proiettore unidimensionale è di riuscire ad associare a tutte le grandezze presenti un coerente significato fisico: un raggio vettore, come asserito dal primo assioma della Meccanica Quantistica, è identificato a meno di un fattore. Condizioni di normalizzazione possono imporre il modulo di tale numero, ma lasciano la sua fase ancora indeterminata; dunque uno stato puro può contenere parametri che variano ad arbitrio, pur descrivendo la medesima situazione, ed a cui pertanto non è pensabile di assegnare un ruolo fisico. Per le proprietà del proiettore unidimensionale, tale ambiguità è

rimossa e dunque tutti gli elementi presenti nella definizione (1.13) della matrice densità sono realmente identificabili.

Può essere interessante per concludere calcolare il valor medio dell'osservabile spin in una direzione qualunque per uno stato descritto da una matrice densità con coefficienti appartenenti alla sfera di Bloch: per risolvere tale problema si devono applicare le conclusioni mostrate nel paragrafo precedente, ovvero eseguire la traccia del prodotto tra l'operatore $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$ e la matrice densità $\rho(\vec{P}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \vec{P} \cdot \vec{\sigma})$.

$$\langle \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \rangle_{\vec{P}} = \text{tr}[(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})\rho(\vec{P})] = \sum_{i=1}^3 \hat{n}_i P_i \equiv \hat{n} \cdot \vec{P} \quad (1.14)$$

ove si è utilizzata $\text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{i,j}$.

Calcolare il valor medio dell'osservabile in questione può aiutare a determinare le componenti del vettore dei coefficienti sulla sfera di Bloch. Basterà difatti eseguire tre misurazioni del valor medio della componente di spin lungo tre assi ortogonali ed invertendo la relazione riportata si trovano subito i coefficienti voluti. Quanto presentato in questo secondo paragrafo mirava a chiarire il concetto di matrice densità; nel paragrafo successivo si riprenderà dunque la discussione di tali operatori dal punto di vista più formale, introducendo una notazione che renderà più chiara la parte del teorema GHJW utile ai fini dell'elaborato.

1.3 La decomposizione di Schmidt

Nella sezione 1.1 si è visto come ottenere la matrice densità per un sottosistema con spazio degli stati \mathcal{H}_A da un sistema composto con spazio degli stati $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ eseguendo sullo spazio \mathcal{H}_B la traccia del proiettore unidimensionale corrispondente al vettore stato nello spazio prodotto tensore. Va da sé che è possibile ottenere l'operatore densità nello spazio \mathcal{H}_B eseguendo la traccia in \mathcal{H}_A del medesimo prodotto, come è possibile dimostrare scambiando le lettere nella definizione di matrice densità. La relazione tra i due operatori ottenuti è ben descritta dalla cosiddetta decomposizione di Schmidt, che permette inoltre una scrittura più agile dello stato iniziale, utile per provare alcune conclusioni del teorema GHJW.

Per arrivare al risultato si può tentare di riscrivere lo stato $|\psi\rangle_{AB}$ utilizzato nella sezione 1.1 per la definizione di matrice densità, espandendolo nella base di ρ_A ; denotando con $\{|i\rangle_A, i \in \mathcal{J}\}$ tale base ortonormale, la forma della matrice sarà $\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle_A \langle i|$. Alla base dello spazio \mathcal{H}_B $\{|\mu\rangle_B, \mu \in \mathcal{M}\}$ è richiesta solo l'ortonormalità; essa sarà il punto di partenza per la definizione di una ulteriore base che non ha bisogno di soddisfare tale proprietà. Scriviamo allora:

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i,\mu} a_{i\mu} |i\rangle_A |\mu\rangle_B \equiv \sum_i |i\rangle_A |\tilde{i}\rangle_B \quad \text{con} \quad |\tilde{i}\rangle_B = \sum_{\mu} a_{i\mu} |\mu\rangle_B \quad (1.15)$$

L'operazione eseguita ha ridotto drasticamente il numero dei coefficienti della sommatoria. L'esecuzione della traccia richiede una base ortonormale per la sua effettuazione, ma il suo risultato è indipendente da tale scelta. Dunque usando una base ortonormale $\{|k\rangle_B, k \in \mathcal{K}\}$ di \mathcal{H}_B e la completezza $\sum_k |k\rangle_B \langle k| = \mathbf{1}$ si ottiene:

$$\rho_A = \text{tr}_B (|\psi\rangle_{AB} \langle \psi|) = \sum_{i,j} |i\rangle_A \langle j| \cdot \left(\sum_k \langle k|\tilde{i}\rangle_B \langle \tilde{j}|k\rangle_B \right) = \sum_{i,j} |i\rangle_A \langle j| \cdot \left[\sum_k \langle k|\tilde{i}\rangle_B \langle \tilde{j}|k\rangle_B \right] = \sum_{i,j} \langle \tilde{j}|\tilde{i}\rangle_B (|i\rangle_A \langle j|) \quad (1.16)$$

E' da ricordare che il risultato (1.16) deve soddisfare l'ipotesi di partenza ovvero essere diagonale nella base $|i\rangle_A$ per lo spazio \mathcal{H}_A , e quindi ${}_B\langle j|\tilde{l}\rangle_B = p_i\delta_{i,j}$ con $p_i > 0$ e $\sum_{i \in \mathcal{J}} p_i = 1$. Nella sommatoria precedente i coefficienti risultano dunque vincolati a ben determinati valori e tale conclusione mostra che dopotutto la base ausiliaria scelta per lo spazio \mathcal{H}_B $\{|i\rangle_B, i \in \mathcal{J}\}$ è ortogonale, anche se i vettori non hanno norma unitaria. Tuttavia non risulta difficile rimediare a ciò, introducendo una terza base per lo spazio \mathcal{H}_B i cui elementi siano proporzionali a quelli della seconda; tale introduzione risulta ben posta in quanto i coefficienti di proporzionalità in questione, desunti dai termini della sommatoria precedente, non sono mai nulli.

$$|i'\rangle_B = p_i^{-\frac{1}{2}}|i\rangle_B \Rightarrow |\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i}|i\rangle_A|i'\rangle_B \quad (1.17)$$

Questo procedimento, noto come decomposizione di Schmidt, è diverso a seconda dello stato di partenza considerato, ed è stato esposto solo nel caso di operatori densità con autovalori tutti distinti tra loro. Il vantaggio di tale scrittura emerge subito nel calcolo della matrice densità per lo spazio \mathcal{H}_B , che risulta avere i medesimi autovalori non nulli di quella valutata in \mathcal{H}_A :

$$\rho_B = \text{tr}_A(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \sum_i p_i|i'\rangle_B\langle i'| \quad (1.18)$$

Fino ad ora non si è mai accennato alla dimensione degli spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B : questa non è soggetta ad alcuna limitazione purché si segua la prescrizione seguente. Dato uno stato di partenza si calcola la matrice densità nei due spazi, scegliendo per ciascuno una base che la renda diagonale; se gli autovalori che compaiono nella sommatoria sono distinti tra loro ed i medesimi nei due casi, allora la base scelta per decomporre lo stato iniziale secondo Schmidt consiste di elementi pari al prodotto dei due vettori a cui corrisponde il medesimo autovalore negli spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , in numero dettato da quanti siano i coefficienti presenti nella sommatoria che descrive la diagonalizzazione. Una possibile ambiguità di tale scelta può risiedere come al solito nella fase: poiché si è imposto ad arbitrio di non farla apparire nella forma di Schmidt, ciascun vettore ha fase nulla oppure decisa in modo tale che quella del vettore dello spazio \mathcal{H}_A sia opposta alla fase dell'elemento dello spazio \mathcal{H}_B con cui è accoppiato. Se invece lo stato iniziale, una volta diagonalizzato, ammette almeno un autovalore degenerare, allora l'ambiguità del presente processo di decomposizione risulta amplificata: come esempio si mostra di seguito il caso più sfavorevole possibile, ovvero l'ambiguità connessa ad una matrice proporzionale all'identità in entrambi gli spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , che poniamo avere la stessa dimensione N . Si mostreranno in tal caso tre possibili decomposizioni di Schmidt, nelle quali si sono operati in successione cambiamenti di base per ciascun sottospazio mediante una matrice unitaria \mathbf{U} . Sia $\{|i\rangle_A, i \in \mathcal{J}\}$ una base su \mathcal{H}_A e $\{|i'\rangle_B, i' \in \mathcal{J}'\}$ una base su \mathcal{H}_B ; ponendo $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N|i\rangle_A|i'\rangle_B$ allora:

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \frac{1}{N}\mathbf{1} \quad \text{e} \quad \rho_B = \text{tr}_A(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|) = \frac{1}{N}\mathbf{1} \equiv \rho_A$$

Sia $\{|k\rangle_A, k \in \mathcal{K}\}$ una base su \mathcal{H}_A e $\{|k'\rangle_B, k' \in \mathcal{K}'\}$ una base su \mathcal{H}_B ; ponendo $|\psi'\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N|i\rangle_A|\beta_i\rangle_B := \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j=1}^N|i\rangle_A\mathbf{U}_{ij}|j\rangle_B$ con \mathbf{U} unitaria allora:

$$\rho_A = \text{tr}_B(|\psi'\rangle_{AB}\langle\psi'|) = \frac{1}{N}\sum_{i,j,k,l,m=1}^N(|i\rangle_A\langle l|)\mathbf{U}_{ij}\mathbf{U}_{lm}^* \cdot {}_B\langle k'|j'\rangle_B \cdot {}_B\langle m'|k'\rangle_B =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i,k,l=1}^N (|i\rangle_A \langle l|) \mathbf{U}_{ik} \mathbf{U}_{kl}^\dagger &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |i\rangle_A \langle i| = \frac{1}{N} \mathbf{1} \text{ e} \\ \rho_B &= \text{tr}_A (|\psi'\rangle_{AB} \langle \psi'|) = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k,l,m=1}^N (|j'\rangle_B \langle m'|) \mathbf{U}_{ij} \mathbf{U}_{lm}^* \cdot \langle k|i\rangle_A \cdot \langle l|k\rangle_A = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j,k,m=1}^N (|j'\rangle_B \langle m'|) \mathbf{U}_{mk}^\dagger \mathbf{U}_{kj} = \frac{1}{N} \mathbf{1} \equiv \rho_A \end{aligned}$$

Ponendo $|\psi''\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |\alpha_i\rangle_A |\beta_i\rangle_B := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j,l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^* |j\rangle_A \mathbf{U}_{il} |l'\rangle_B$ allora:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{tr}_B (|\psi''\rangle_{AB} \langle \psi''|) = \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,i,j,k,l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^* \mathbf{U}_{ab} (|j\rangle_A \langle b|) \mathbf{U}_{il} \mathbf{U}_{ac}^* \cdot \langle k'|l'\rangle_B \cdot \\ & \langle c'|k'\rangle_B = \frac{1}{N} \sum_{a,b,i,j,l=1}^N \mathbf{U}_{ij}^* \mathbf{U}_{ab} (|j\rangle_A \langle b|) \mathbf{U}_{il} \mathbf{U}_{la}^\dagger = \frac{1}{N} \sum_{b,i,j=1}^N \mathbf{U}_{ji}^\dagger \mathbf{U}_{ib} (|j\rangle_A \langle b|) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |j\rangle_A \langle j| = \frac{1}{N} \mathbf{1} \text{ e } \rho_B = \text{tr}_A (|\psi''\rangle_{AB} \langle \psi''|) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,b,c,i,j,k,l=1}^N \mathbf{U}_{il} \mathbf{U}_{ac}^* (|l'\rangle_B \langle c'|) \mathbf{U}_{ij}^* \mathbf{U}_{ab} \cdot \langle k|j\rangle_A \cdot \langle b|k\rangle_A = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{a,c,i,k,l=1}^N \mathbf{U}_{il} \mathbf{U}_{ac}^* (|l'\rangle_B \langle c'|) \mathbf{U}_{ak} \mathbf{U}_{ki}^\dagger = \frac{1}{N} \sum_{c,i,l=1}^N \mathbf{U}_{ci}^\dagger \mathbf{U}_{il} (|l'\rangle_B \langle c'|) = \frac{1}{N} \mathbf{1} \equiv \rho_A \quad (1.19) \end{aligned}$$

Per concludere si forniscono alcuni cenni sull'entanglement degli stati puri, basandosi sul concetto di numero di Schmidt, che equivale al numero di autovalori non nulli della matrice densità in \mathcal{H}_A (o in \mathcal{H}_B) e dunque rappresenta quanti termini sono contenuti nella sommatoria che fornisce la decomposizione dello stato iniziale. Se tale numero di Schmidt è 1, lo stato corrispondente verrà detto separabile (o non entangled), altrimenti se il numero di Schmidt eccede l'unità, allora il vettore di stato corrispondente è detto entangled (o non separabile). La matrice densità di uno stato separabile $|\psi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ soddisfa $\rho_A = |\varphi\rangle_A \langle \varphi|$ e $\rho_B = |\chi\rangle_B \langle \chi|$. I due concetti di purezza ed entanglement non vanno confusi: se si vuole valutare la purezza nello spazio prodotto tensore, avendo a disposizione uno stato iniziale descritto da un raggio vettore, questa è sempre verificata trattandosi di un raggio vettore con informazione massimale; invece a seconda del numero di Schmidt, lo stato può risultare separabile, se la sommatoria che ne descrive la decomposizione contiene un solo termine, oppure entangled se gli addendi presenti sono più di uno. Qualora invece si voglia valutare la purezza nei sottospazi \mathcal{H}_A o \mathcal{H}_B , per avere un solo proiettore unidimensionale nella forma che diagonalizza la matrice densità, e che dunque descrive gli stati quantici a disposizione, è necessario come mostrato in precedenza partire da uno stato iniziale separabile, in quanto la sommatoria della decomposizione di Schmidt non deve contenere più di un fattore. L'utilità della scrittura per gli stati presentata in questo paragrafo, come quella della sfera di Bloch e della descrizione delle operazioni di misura tramite l'operatore di densità risulterà subito palese nella seconda parte di questo elaborato in cui, come anticipato nell'introduzione, si mostreranno alcuni risultati più strettamente attinenti alla purificazione degli stati quantistici.

Seconda parte: Risultati ed applicazioni

2.1 Il teorema GHJW

Il primo risultato sulla purificazione degli stati quantistici presentato di seguito è il teorema GHJW: esso mira a ottenere una matrice densità in \mathcal{H}_A che descrive un ensemble di stati puri tramite l'applicazione della traccia sullo spazio \mathcal{H}_B del proiettore unidimensionale associato a uno stato iniziale puro da costruirsi nello spazio prodotto tensore tra \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B . Si mostrerà inoltre come tale stato iniziale non sia univoco e come ciò poteva essere desunto come corollario della decomposizione di Schmidt trattata nel paragrafo 1.3. Si cominci dunque ammettendo di avere a disposizione nel sottospazio \mathcal{H}_A una matrice densità costituita da una combinazione lineare di proiettori che descrivono stati puri in quel sottospazio:

$$\rho_A = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle_A \langle \varphi_i| \quad \text{e} \quad \sum_i p_i = 1 \quad (2.1)$$

In questa scrittura ciascun vettore $|\varphi_i\rangle_A$ è normalizzato in \mathcal{H}_A , ma non è necessario assumere che essi siano mutuamente ortogonali. Per questa scrittura è dunque immediato costruire una purificazione, ovvero associare uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_B di dimensione almeno pari a quella di \mathcal{H}_A , con una sua base ortonormale ed uno stato iniziale nel prodotto tensore tra i due sottospazi, da cui ricavare l'operatore della formula precedente eseguendo una traccia parziale in \mathcal{H}_B . Definendo $|\Phi_1\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle_A \otimes |\alpha_i\rangle_B$ con $\{|\alpha_i\rangle_B, i \in \mathcal{J}\}$ come base ortonormale su \mathcal{H}_B allora:

$$\text{tr}_B \left(|\Phi_1\rangle_{AB} \langle \Phi_1| \right) = \rho_A \quad (2.2)$$

come dimostrato prendendo come base per la traccia proprio $\{|\alpha_i\rangle_B, i \in \mathcal{J}\}$. Con questa scrittura è possibile calcolare la probabilità che un vettore della base di \mathcal{H}_B sia il risultato della misura di proiezione ortogonale su questo sistema (limitandosi agli elementi accoppiati ai vettori della base \mathcal{H}_A se la dimensione dello spazio \mathcal{H}_B è maggiore di quella di \mathcal{H}_A). Difatti, lavorando ad esempio con l' i -esimo elemento di \mathcal{H}_B , una volta costruito l'operatore di proiezione ortogonale corrispondente in \mathcal{H}_B e tensorizzato con la matrice identità in \mathcal{H}_A , il calcolo sullo stato purificato porge come risultato p_i . Lo stato del sistema dopo la misura perde tutti i coefficienti della sommatoria tranne l' i -esimo termine, contenente nella parte \mathcal{H}_B del prodotto tensore il vettore che genera il proiettore ortogonale. Dunque vista dallo spazio \mathcal{H}_A , la matrice densità finale descrive uno stato puro ed è pertanto possibile sfruttare tale meccanismo in due direzioni: in primo luogo si corrobora l'interpretazione probabilistica dell'ensemble densità in \mathcal{H}_A , in quanto esso contiene tutte matrici densità derivanti da uno stato puro, ciascuna desunta in seguito ad una proiezione ortogonale sul sottosistema \mathcal{H}_B , come descritto in precedenza e pesata con la probabilità di tale operazione di misura. In secondo luogo, ripercorrendo i passi del ragionamento in direzione opposta, la misura su \mathcal{H}_B permette l'estrazione di uno stato dall'ensemble descritto inizialmente. Se però l'operatore densità ρ_A in \mathcal{H}_A è scrivibile in altra maniera, ovvero cambiano sia i coefficienti probabilistici che i vettori, rimpiazzati dai $|\psi_\mu\rangle_A$ normalizzati, ma non necessariamente mutuamente ortogonali, presenti nell'espansione, allora va da sé che cambia anche lo stato purificato da cui realizzare la matrice precedente tramite l'esecuzione di una traccia parziale in \mathcal{H}_B . Dunque introducendo una nuova base ortonormale $\{|\beta_\mu\rangle_B, \mu \in \mathcal{M}\}$ nello spazio \mathcal{H}_B e scrivendo $\rho_A = \sum_\mu q_\mu |\psi_\mu\rangle_A \langle \psi_\mu|$ con $\sum_\mu q_\mu = 1$ si ha la purificazione:

$$|\Phi_2\rangle_{AB} = \sum_{\mu} \sqrt{q_{\mu}} |\psi_{\mu}\rangle_A \otimes |\beta_{\mu}\rangle_B \quad (2.3)$$

Resta ora da chiedersi quale sia la relazione tra le due purificazioni presentate: esse conducono al medesimo operatore densità tramite l'esecuzione di una traccia parziale nel sottospazio \mathcal{H}_B e dunque l'operatore che permette il passaggio sarà tale da mantenere inalterata la parte in \mathcal{H}_A e da garantire l'invarianza della traccia in \mathcal{H}_B . Poiché come noto questa non dipende dalla particolare base ortonormale adottata, si ha una certa libertà in questa scelta, e dunque stati di purificazione che differiscono per l'azione di un operatore unitario \mathbf{U}_B sui vettori della parte \mathcal{H}_B sono equivalenti. Tale conclusione è provata in modo più formale come un corollario della decomposizione di Schmidt, discussa nel paragrafo 1.3. Come visto in quell'occasione tale operazione non è univoca per operatori densità $\rho_A \in \mathcal{H}_A$ e $\rho_B \in \mathcal{H}_B$ aventi almeno un autovalore degenere. Limitandosi al solo spazio \mathcal{H}_A si nota una ambiguità amplificata; si supponga difatti di aver decomposto secondo Schmidt lo stato da cui desumere l'operatore densità ρ_A assegnato, ovvero di aver trovato i suoi autovalori λ_k e la corrispondente base di autovettori $\{|k\rangle_A, k \in \mathcal{K}\}$, nella quale l'operatore ρ_A risulta diagonale. L'indipendenza della traccia dalla base ortonormale scelta in \mathcal{H}_B garantisce di avere molti stati iniziali, equivalenti fra loro ai fini di ottenere la matrice densità dopo l'esecuzione della traccia parziale in \mathcal{H}_B del proiettore unidimensionale associato allo stato di partenza. Siano pertanto $\{|k'_1\rangle_B, k'_1 \in \mathcal{K}_1\}$ e $\{|k'_2\rangle_B, k'_2 \in \mathcal{K}_2\}$ basi ortonormali su \mathcal{H}_B , allora le forme di Schmidt $|\Phi_1\rangle_{AB} = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle_A \otimes |k'_1\rangle_B$ e $|\Phi_2\rangle_{AB} = \sum_k \sqrt{\lambda_k} |k\rangle_A \otimes |k'_2\rangle_B$ sono legate da una matrice unitaria \mathbf{U}_B in \mathcal{H}_B tale che:

$$|k'_1\rangle_B = \mathbf{U}_B |k'_2\rangle_B \text{ e } |\Phi_1\rangle_{AB} = (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{U}_B) |\Phi_2\rangle_{AB} \quad (2.4)$$

Applicando tale conclusione allo stato di purificazione $|\Phi_2\rangle_{AB}$, definito in (2.3), si ha la riscrittura di $|\Phi_1\rangle_{AB}$, equivalente a quella presentata prima della (2.2).

$$|\Phi_1\rangle_{AB} = (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{U}_B) |\Phi_2\rangle_{AB} \Rightarrow |\Phi_1\rangle_{AB} = \sum_{\mu} \sqrt{q_{\mu}} |\psi_{\mu}\rangle_A \otimes |\gamma_{\mu}\rangle_B \quad (2.5)$$

con $|\gamma_{\mu}\rangle_B = \mathbf{U}_B |\beta_{\mu}\rangle_B$. Proprio questo è il significato più profondo del teorema GHJW.

Teorema: *sia data una matrice densità ρ_A in \mathcal{H}_A di dimensione N , allora è possibile accoppiare uno spazio \mathcal{H}_B di dimensione almeno pari ad N , sul cui prodotto tensore con il precedente \mathcal{H}_A costruire degli stati puri $|\Phi_i\rangle_{AB}$ tali che:*

- *l'operatore ρ_A è ricavabile per traccia parziale su \mathcal{H}_B del proiettore unidimensionale associato a tali stati ovvero $\rho_A = \text{tr}_B (|\Phi_i\rangle_{AB} \langle \Phi_i|) \forall i$;*
- *a seconda della base di \mathcal{H}_B scelta, si ottengono dopo una proiezione sui suoi elementi di base i vari stati puri generatori dei proiettori unidimensionali presenti in uno degli ensemble che realizzano ρ_A ;*
- *la loro ambiguità è limitata al sistema ortonormale scelto su \mathcal{H}_B , ovvero per $i = 1, 2$ data una matrice unitaria \mathbf{U}_B in \mathcal{H}_B allora $|\Phi_1\rangle_{AB} = (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{U}_B) |\Phi_2\rangle_{AB}$.*

Tale conclusione, fu enunciata in modo più generale quasi contemporaneamente da quattro autori, Gisin, Hughston, Jozsa e Wootters, dalle cui iniziali il teorema prende il nome; visto nel complesso, comunque, il risultato mostra che è possibile ottenere uno stato puro nello spazio prodotto tensore tra \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B anche per una matrice densità in \mathcal{H}_A che descriva una

combinazione statistica di stati quantici puri. Nel paragrafo successivo si avrà cura di presentare l'analogo risultato per gli osservabili costituenti un POVM: il teorema di Neumark asserisce difatti la possibilità di ottenere tali particolari operatori eseguendo determinate proiezioni ortogonali in uno spazio più grande di quello iniziale, dove essi sono definiti.

2.2 Misure generalizzate e POVM

In questo paragrafo si presenteranno gli elementi necessari alla comprensione del secondo risultato cardine per il processo di purificazione degli stati quantistici: saranno cioè descritti in dettaglio gli operatori costituenti un POVM come risultati di un processo di misura tramite proiezione ortogonale in uno spazio di Hilbert allargato. Sia pertanto dato uno spazio di Hilbert ed assegnato per un osservabile il corrispondente set di proiettori ortogonali sugli autospazi unidimensionali; se prima della misura la matrice densità è descritta dal proiettore unidimensionale corrispondente a un raggio vettore, dopo l'operazione di misura, lo stato diventa il vettore risultato del prodotto tra il proiettore ed il ket di partenza. Dunque volendo descrivere tale situazione con un opportuno operatore densità, si dovrà normalizzare il proiettore associato allo stato dopo la misura. Sia $\{\mathbf{E}_a\}$ una famiglia di proiettori ortogonali associati ad un osservabile $\mathbf{M}_A, a \in \sigma(\mathbf{M}_A)$, lo spettro di \mathbf{M}_A , con $\mathbf{E}_a \mathbf{E}_b = \delta_{a,b} \mathbf{E}_a$ e $\sum_a \mathbf{E}_a = \mathbf{1}$, e si consideri $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$; allora dopo una misura che ha dato risultato a lo stato del sistema è descritto da:

$$\rho'_a = \frac{\mathbf{E}_a |\psi\rangle\langle\psi| \mathbf{E}_a}{\langle\psi| \mathbf{E}_a |\psi\rangle} \quad (2.6)$$

Tuttavia tale risultato è ottenibile con una certa probabilità: poiché si è scelto il proiettore per un determinato autovalore a dell'osservabile, la probabilità che la matrice densità finale sia ρ'_a sarà pari alla probabilità di ottenere l'autovalore a eseguendo una misura sullo stato iniziale. Dunque, l'operatore densità che descrive lo stato dopo la misura, senza la conoscenza del risultato, è quello costituito dalla somma delle matrici finali precedentemente trovate pesata con il coefficiente probabilistico appena discusso. Dalle formule precedenti si riesce a ricavare un'espressione finale per la matrice densità, in funzione di quella data inizialmente, mostrando così come un'operazione di misura influenzi lo stato del sistema; poiché la probabilità di ottenere il valore a è data da $\text{Prob}(a) = \langle\psi| \mathbf{E}_a |\psi\rangle$, lo stato finale è dato da:

$$\sum_a \langle\psi| \mathbf{E}_a |\psi\rangle \rho'_a = \sum_a \mathbf{E}_a |\psi\rangle\langle\psi| \mathbf{E}_a = \sum_a \mathbf{E}_a \rho \mathbf{E}_a \quad (2.7)$$

Dalla formula riportata è desumibile come una matrice densità corrispondente a uno stato puro prima della misura, mostri in generale dopo la misura una forma mista; tuttavia è ravvisabile un caso particolare in cui anche lo stato finale è puro. Ciò accade se il vettore iniziale è autostato dell'osservabile misurato: difatti in tal caso applicando i proiettori ortogonali, si trovano tutti risultati nulli, tranne nel caso del proiettore relativo all'autostato iniziale, che fornisce il vettore stesso. Un'altra strada che permette di arrivare allo stesso risultato riguarda le probabilità di ottenere come risultati della misura, operando sullo stato iniziale autostato di \mathbf{M}_A , gli autovalori di \mathbf{M}_A . Per ragioni di ortogonalità, tali probabilità sono tutte nulle, tranne nel caso in cui l'autovalore sia relativo allo stato iniziale. Per costruire la giusta cornice in cui situare il teorema di Neumark è necessario introdurre il concetto di misura generalizzata in uno spazio a dimensione maggiore di quello iniziale: le possibilità immediate sono lavorare nello spazio che risulta dalla somma diretta di quello iniziale e del suo complemento ortogonale nello spazio allargato, oppure costruire uno spazio prodotto tensore con quello di partenza. L'abitudine fisica tenderebbe a privilegiare la seconda opzione (che in effetti sarà trattata nel paragrafo 2.4), ma si preferisce partire con la prima scelta per

ragioni di immediatezza di linguaggio matematico. In questo contesto un operatore che abbia supporto sullo spazio iniziale, non può trasformare vettori appartenenti all'altro addendo della somma diretta e dunque la sua azione su tali elementi è nulla; se \mathbf{M}_A è un osservabile in \mathcal{H}_A e $|\psi^\perp\rangle \in \mathcal{H}_A^\perp$, con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \oplus \mathcal{H}_A^\perp$, allora:

$$\mathbf{M}_A|\psi^\perp\rangle = 0 = \langle\psi^\perp|\mathbf{M}_A \quad (2.8)$$

Si assegni a ciascuno dei due sottospazi una base ortonormale, supponendo di avere una matrice densità con supporto limitato in \mathcal{H}_A . Effettuando una misura nello spazio composto \mathcal{H} dell'osservabile \mathbf{M} l'operatore densità dopo la misura risulterà modificato come descritto in precedenza. Il risultato ottenuto mostra come in realtà la matrice densità finale sia il proiettore riferito all'autovalore ottenuto (nel caso considerato in cui questo sia unidimensionale) moltiplicato per un coefficiente probabilistico esprimibile come segue. Sia \mathbf{E}_a un proiettore in \mathcal{H} , $\mathbf{E}_a = |u_a\rangle\langle u_a|$ relativo a \mathbf{M} ; decomposto il vettore $|u_a\rangle$ nei due sottospazi come $|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ allora la matrice densità dopo una misura che ha ottenuto il risultato a è in \mathcal{H} :

$$\rho_A^a = |u_a\rangle\langle u_a|\rho_A|u_a\rangle\langle u_a| := p_a|u_a\rangle\langle u_a| \text{ ove } p_a = \langle u_a|\rho_A|u_a\rangle = \langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle \quad (2.9)$$

Dal punto di vista di un osservatore immerso nello spazio iniziale \mathcal{H}_A non vi è alcuna distinzione tra il vettore $|u_a\rangle$ appartenente allo spazio più ampio \mathcal{H} , e la sua proiezione $|\tilde{\psi}_a\rangle$ su \mathcal{H}_A , a parte la normalizzazione. Dunque volendo riscrivere la componente della matrice densità finale in questione in funzione di un vettore normalizzato in \mathcal{H}_A , si introduce un vettore $|\psi_a\rangle$ normalizzato, tramite $|\tilde{\psi}_a\rangle = \sqrt{\lambda_a}|\psi_a\rangle$, ove $\sqrt{\lambda_a}$ è la norma di $|\tilde{\psi}_a\rangle$. Allora possiamo rimpiazzare $|u_a\rangle\langle u_a|$ con $|\psi_a\rangle\langle\psi_a|$ e ottenere in \mathcal{H}_A :

$$\rho_A^a = \langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle \cdot |\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (2.10)$$

Tale espressione descrive il risultato visto dal sistema \mathcal{H}_A ; sempre da questa visuale è opportuno chiedersi quale forma debba avere un operatore in \mathcal{H}_A il cui valor medio dia la probabilità del risultato a in \mathcal{H} . Per effettuare tale calcolo si può utilizzare la matrice densità come mostrato nel paragrafo 1.1, e poiché questa ha assunto la forma vista da \mathcal{H}_A basterà riportare il proiettore in \mathcal{H} su tale sottospazio. Nel caso unidimensionale trattato, si dovrà dunque moltiplicare l'osservabile a destra e a sinistra per la matrice identità con supporto in \mathcal{H}_A . Sia difatti \mathbf{E}_A il proiettore in \mathcal{H} che proietta in \mathcal{H}_A ; otterremo l'operatore:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{E}_A\mathbf{E}_a\mathbf{E}_A^\dagger = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a| = \lambda_a|\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (2.11)$$

Utilizziamo ora l'invarianza della traccia; scegliendo come elemento di una base ortonormale il vettore $|\psi_a\rangle$ che compare nella formula e completando la base con i vettori ortonormali $\{|\chi_j^a\rangle, j \in \mathcal{J}\}$, si ottiene:

$$p_a = \langle\tilde{\psi}_a|\rho_A|\tilde{\psi}_a\rangle = \lambda_a\langle\psi_a|\rho_A|\psi_a\rangle = \langle\psi_a|\rho_A\mathbf{F}_a|\psi_a\rangle = \langle\psi_a|\rho_A\mathbf{F}_a|\psi_a\rangle + \sum_j \langle\chi_j^a|\rho_A\mathbf{F}_a|\chi_j^a\rangle = \text{tr}(\rho_A\mathbf{F}_a) \quad (2.12)$$

Per definizione \mathbf{F}_a è un operatore autoaggiunto e positivo e di norma λ_a . Tuttavia \mathbf{F}_a non è un proiettore in quanto viene meno la condizione di idempotenza, a meno che $\lambda_a = 1$. Andando ad eseguire la somma di tali operatori su tutti i risultati possibili $a \in \sigma(\mathbf{M}_A)$ si ottiene:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = \mathbf{E}_A (\sum_a \mathbf{E}_a) \mathbf{E}_A^\dagger = \mathbf{E}_A \mathbf{1} \mathbf{E}_A^\dagger = \mathbf{1}_A \quad (2.13)$$

Dunque si può affermare che gli operatori definiti siano in realtà delle partizioni positive dell'unità; per classificare l'insieme di tali elementi si usa l'acronimo POVM che sta per Positive Operator-Valued Measure. A tale concetto si è arrivati partendo da proiettori unidimensionali; ad ogni modo è possibile ottenere i medesimi risultati in tutta generalità, riuscendo ad esprimere la probabilità di una misura fatta su uno spazio ampio tramite una matrice densità ed un osservabile appartenente ad un POVM, entrambi definiti su un suo sottospazio:

$$\text{Prob}(a) = \text{tr}(\rho_A \mathbf{F}_a) \quad (2.14)$$

E' immediato verificare che la somma delle probabilità è unitaria ricordando alcune proprietà della traccia: essa è lineare e se eseguita su una matrice densità si ottiene 1. E' sensato chiedersi se sia possibile esprimere la matrice densità dopo la misura (ma senza un risultato determinato) vista dallo spazio \mathcal{H}_A in funzione degli osservabili costituenti un POVM prima introdotti. La risposta appare immediata solo nel caso di proiettori unidimensionali, ovvero la matrice densità finale è data da:

$$\rho' = \sum_a |\psi_a\rangle\langle\psi_a| \cdot \lambda_a \langle\psi_a|\rho_A|\psi_a\rangle = \sum_a \sqrt{\mathbf{F}_a} \rho_A \sqrt{\mathbf{F}_a} \quad \text{con} \quad \sqrt{\mathbf{F}_a} = \sqrt{\lambda_a} |\psi_a\rangle\langle\psi_a| \quad (2.15)$$

Come si vede nel caso speciale in cui l'osservabile appartenente al POVM sia anche un proiettore ortogonale e quindi $\lambda_a = 1$, la radice quadrata dell'operatore è pari all'osservabile stesso e dunque si ottiene la formula (2.7). E' infine riscontrabile come le proprietà elencate nel paragrafo 1.1 siano rispettate:

1. $(\rho')^\dagger = \sum_a (\sqrt{\mathbf{F}_a})^\dagger (\rho_A)^\dagger (\sqrt{\mathbf{F}_a})^\dagger = \sum_a \sqrt{\mathbf{F}_a} \rho_A \sqrt{\mathbf{F}_a} = \rho'$;
2. $\langle\varphi|\rho'|\varphi\rangle = \sum_a \langle\varphi|\sqrt{\mathbf{F}_a}|\rho_A|\sqrt{\mathbf{F}_a}|\varphi\rangle \Rightarrow |\omega_a\rangle := \sqrt{\mathbf{F}_a}|\varphi\rangle$ e $\langle\omega_a| = \langle\varphi|\sqrt{\mathbf{F}_a} \Rightarrow \langle\varphi|\rho'|\varphi\rangle = \sum_a \langle\omega_a|\rho_A|\omega_a\rangle \geq 0$;
3. $\text{tr}(\rho') = \sum_a \text{tr}(\sqrt{\mathbf{F}_a} \rho_A \sqrt{\mathbf{F}_a}) = \sum_a \text{tr}(\rho_A \mathbf{F}_a) = \text{tr}(\rho_A) = 1$.

Prima di percorrere il ragionamento in verso opposto, ovvero non più desumere il concetto di POVM da una misura ortogonale, bensì mostrare che per ciascun osservabile appartenente ad un POVM esiste una siffatta operazione di misura da cui può essere desunto, si fornisce un esempio di POVM che non è una famiglia di proiettori nel caso dello spazio di un qubit.

2.2.1 Esempio: POVM per un qubit

Si supponga di avere N versori tridimensionali \hat{n}_a che soddisfano la seguente caratteristica per combinazione lineare:

$$\sum_a \lambda_a \hat{n}_a = \vec{0} \quad \text{con} \quad 0 < \lambda_a < 1 \quad \text{e} \quad \sum_a \lambda_a = 1 \quad (2.16)$$

Essendo gli elementi di un POVM le matrici 2×2 di norma < 1 , si può ricordare il modo in cui si sono parametrizzate tali matrici nel paragrafo 1.2. Scegliendo come coefficienti dell'espansione versori con modulo 1, essi parametrizzano la superficie della sfera di Bloch; dunque come lì dimostrato un elemento di un POVM può essere descritto da un proiettore

unidimensionale associato all'autofunzione $|\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle$ per l'operatore di spin in direzione qualunque moltiplicato per un opportuno coefficiente.

$$\mathbf{F}_a = \lambda_a(\mathbf{1} + \hat{n}_a \cdot \vec{\sigma}) = 2\lambda_a \mathbf{E}_a(\hat{n}_a) \Rightarrow \sum_a \mathbf{F}_a = \mathbf{1} \quad (2.17)$$

ove $\mathbf{E}_a(\hat{n}_a)$ è la matrice densità associata ad uno stato puro $\mathbf{E}_a(\hat{n}_a) = |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle\langle\uparrow_{\hat{n}_a}|$ e nell'implicazione si è usata la (2.16).

Per soddisfare la richiesta originaria (2.16) si può operare pensando tutti i coefficienti λ_a uguali tra loro; lavorando con $N = 3$ versori tridimensionali, è possibile assicurare la nullità della loro somma ragionando da un punto di vista geometrico. Difatti basta far sì che i 3 elementi, giacenti su un piano, siano sfasati di 120° l'un l'altro per garantire che la loro somma effettuata con la regola del parallelogramma si annulli per motivi di simmetria.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3 = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{F}_a = \frac{1}{3}(\mathbf{1} + \hat{n}_a \cdot \vec{\sigma}) = \frac{2}{3}\mathbf{E}_a(\hat{n}_a) \quad (2.18)$$

L'esempio ed i ragionamenti presentati serviranno poi come punto di partenza per valutare una prima applicazione del teorema di Neumark ad una situazione con dimensione finita.

2.3 Il teorema di Neumark

Come anticipato, in questo paragrafo si mostrerà come ogni partizione positiva dell'unità (POVM) possa essere ottenuta allargando l'assegnato spazio di Hilbert ed eseguendo operazioni di proiezione ortogonale nello spazio allargato. Il risultato è noto come teorema di Neumark, o di Naimark, a seconda della grafia con cui viene traslitterato il cognome del matematico ucraino. Per cominciare si consideri di avere a disposizione uno spazio iniziale \mathcal{H}_A di dimensione N ed un POVM $\{\mathbf{F}_a, a \in \mathcal{A}\}$ costituito da un numero n di operatori, maggiore o uguale della dimensione N in questione. Poiché $\mathbf{F}_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a|$ in base alla definizione (2.11) e $\sum_{a=1}^n \mathbf{F}_a = \mathbf{1}$, scrivendo in modo esplicito gli elementi della somma in termini matriciali si ha:

$$\sum_{a=1}^n (\mathbf{F}_a)_{ji} = \sum_{a=1}^n \tilde{\psi}_{ai}^* \tilde{\psi}_{aj} = \delta_{ij} \quad (2.19)$$

La scrittura precedente (2.19) è molto simile a una relazione di ortonormalità, tranne per l'inconveniente rimediabile di avere come indice della sommatoria non quello delle componenti del vettore, bensì uno denotante l'osservabile appartenente al POVM che tale elemento genera; dunque si considera di avere non più n vettori (non normalizzati) su uno spazio N dimensionale \mathcal{H}_A , bensì N elementi ortonormali su uno spazio n dimensionale \mathcal{H} . Come noto è poi possibile completare in modo ortonormale tale base aggiungendo gli $n - N$ vettori mancanti; in una notazione più generica la ortonormalità della base intermedia può essere espressa, ponendo $u_{ai} = \tilde{\psi}_{ai}$ per $i = 1, 2, \dots, N$ come:

$$\sum_{a=1}^n u_{ai}^* u_{aj} = \sum_{a=1}^n u_{ia}^\dagger u_{aj} = \delta_{ij} \quad (2.20)$$

ovvero in forma compatta $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{1}$. E' poi possibile invertire l'ordine dei fattori utilizzando le proprietà del prodotto matriciale ed inserendo una relazione valida per ogni vettore di prova $|\psi\rangle$ n -dimensionale:

$$\mathbf{U}|\psi\rangle = \mathbf{U}(\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U})|\psi\rangle = (\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger)\mathbf{U}|\psi\rangle \Rightarrow \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1} \quad (2.21)$$

Dal punto di vista vettoriale tale riscrittura comporta la scelta delle righe della matrice \mathbf{U} costruita in precedenza come vettori di una base ortonormale $\{|u_a\rangle, a = 1, \dots, n\}$ anziché le colonne, visto che l'indice di sommatoria impone di eseguire il prodotto in tale verso:

$$\sum_{j=1}^n u_{aj} u_{jb}^\dagger = \sum_{j=1}^n u_{aj} u_{bj}^* = \delta_{ab} \quad (2.22)$$

In pratica i nuovi vettori costruiti per completare ortonormalmente la base intermedia distribuiscono i loro coefficienti per costruire una buona base finale nello spazio \mathcal{H} a dimensione n nel modo seguente: l' a -esima componente del primo vettore costruito va nel primo spazio libero dell' a -esimo ket $|\tilde{\psi}_a\rangle$ inizialmente assegnato, e così in ordine per i successivi. Ora definiti $\mathbf{E}_a = |u_a\rangle\langle u_a|$, una proiezione di tali operatori in \mathcal{H}_A riproduce il POVM $\{\mathbf{F}_a, a \in \mathcal{A}\}$. Dunque:

Teorema: *si abbiano n vettori $|\tilde{\psi}_a\rangle$ in uno spazio N -dimensionale \mathcal{H}_A , generatori degli operatori $\mathbf{F}_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle\tilde{\psi}_a|$ costituenti un POVM. A partire da essi è possibile costruire una base ortonormale $\{|u_a\rangle, a \in \mathcal{A}\}$ in uno spazio n -dimensionale \mathcal{H} , con n maggiore o uguale ad N ed operando una misura ortogonale in questo spazio, ricavare il POVM assegnato, definendo $\mathbf{E}_a = |u_a\rangle\langle u_a|$ e denotando con \mathbf{E}_A l'operatore che mappa \mathcal{H} in \mathcal{H}_A , tramite:*

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{E}_A \mathbf{E}_a \mathbf{E}_A^\dagger \quad (2.23)$$

Come emerge si è riusciti a determinare un proiettore ortogonale, dunque proveniente da uno stato puro da cui desumere il set di operatori forniti localizzando l'osservazione sullo spazio di partenza. Si fornirà ora un esempio che descrive la via più veloce con cui attuare il ragionamento esposto.

2.3.1 Esempio: qubit e teorema di Neumark

Siano assegnati 3 osservabili costituenti un POVM in uno spazio a dimensione 2, caratteristico di un singolo qubit. Dal paragrafo 2.2.1, è nota una loro possibile parametrizzazione, una volta scelti tre versori di spin \hat{n}_a giacenti su un piano e sfasati l'un l'altro di 120° .

$$\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3 = \vec{0} \Rightarrow \mathbf{F}_a = \frac{2}{3} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle\langle\uparrow_{\hat{n}_a}| \Rightarrow \\ \left\{ \hat{n}_1 = {}^t(0, 0, 1), \hat{n}_2 = {}^t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right), \hat{n}_3 = {}^t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

Dunque denotando con $|\theta_a, \varphi_a\rangle = {}^t\left(e^{-i\frac{\varphi_a}{2}} \cos \frac{\theta_a}{2}, e^{i\frac{\varphi_a}{2}} \sin \frac{\theta_a}{2}\right)$ l'autofunzione per l'operatore di spin in direzione identificata dal versore \hat{n}_a , i generatori $|\tilde{\psi}_a\rangle$ degli operatori costituenti il POVM divengono $|\tilde{\psi}_a\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\theta_a, \varphi_a\rangle$. Poiché $\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \varphi_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} \theta_2 = \frac{2\pi}{3} \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} \theta_3 = \frac{2\pi}{3} \\ \varphi_3 = \pi \end{cases}$, allora:

$$\left\{ |\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\frac{1}{6}} \\ i\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow |\tilde{\psi}_3\rangle \equiv \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\} \quad (2.24)$$

Secondo il teorema di Neumark è possibile ottenere gli osservabili costituenti il POVM presentato moltiplicando a destra e a sinistra per la matrice identità con supporto nello spazio iniziale un proiettore ortogonale che lavori in uno spazio con dimensioni pari al numero di elementi del POVM. In questo caso basterà dunque completare ortonormalmente i vettori assegnati, trovando per ciascuno la terza componente; di seguito sono presentati i conti in dettaglio, con le necessarie verifiche ed i vettori completati da cui costruire i proiettori ortogonali per l'ottenimento degli operatori appartenenti al POVM. Scriviamo genericamente:

$$\left\{ |u_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, |u_2\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y \end{pmatrix}, |u_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

ed imponiamo $\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ottenendo:

$$\begin{cases} y \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + z \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 0 \\ x \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + y \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - z \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{x = z = -y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sqrt{3}|y| \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Quindi verifichiamo che: $\langle u_1|u_1\rangle = \langle u_2|u_2\rangle = \langle u_3|u_3\rangle = 1$ e $\langle u_1|u_2\rangle = \langle u_1|u_3\rangle = \langle u_2|u_3\rangle = 0$. Costruendo ordinatamente i proiettori unidimensionali associati ai vettori $|u_a\rangle$ ottenuti, moltiplicandoli a destra e a sinistra per l'operatore che proietta vettori tri-dimensionali in altri bi-dimensionali, si ottengono i vari \mathbf{F}_a costituenti il POVM. Ciò è verificabile calcolando i medesimi operatori \mathbf{F}_a in base alla definizione (2.11) a partire dai loro generatori $|\tilde{\psi}_a\rangle$ ricavati nella formula (2.24). La verifica per l'esempio riportato, come era da spettarsi, ha dato esito positivo:

$$\mathbf{E}_1 = |u_1\rangle\langle u_1| = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{E}_A \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_A^\dagger =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{F}_1 = |\tilde{\psi}_1\rangle\langle\tilde{\psi}_1| = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= |u_2\rangle\langle u_2| = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_2 = \\
\mathbf{E}_A \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_A^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{F}_2 = |\tilde{\psi}_2\rangle\langle\tilde{\psi}_2| = \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{E}_3 &= |u_3\rangle\langle u_3| = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{F}_3 &= \mathbf{E}_A \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{e} \mathbf{F}_3 = \\
|\tilde{\psi}_3\rangle\langle\tilde{\psi}_3| &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Un'altra applicazione del fondamentale risultato esposto in questo paragrafo riguarda i procedimenti di misura su uno spazio prodotto tensore, e sarà trattato nel seguito.

2.4 Misure ortogonali su un prodotto tensore

In questo paragrafo si estenderanno alcuni concetti presentati in precedenza al caso in cui lo spazio considerato sia un prodotto tensore; si comincerà con la nozione di misura ortogonale come fatto nel paragrafo 2.2, proseguendo con un'applicazione del teorema di Neumark precedentemente dimostrato. Siano pertanto dati 2 spazi \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B ed un set di proiettori ortogonali $\{\mathbf{E}_a\}$ associato ad un osservabile \mathbf{M}_A , $a \in \sigma(\mathbf{M}_A)$ sul loro prodotto tensore. Le proprietà a cui tali proiettori soddisfano sono di mutua ortogonalità e completezza. Assegnata una matrice densità iniziale $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$, se si esegue una misura relativa ad $\{\mathbf{E}_a\}$, ottenendo con probabilità $\text{Prob}(a) = \text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)]$ il risultato a , la nuova matrice densità risulta:

$$\rho'_{AB}(a) = \frac{\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)\mathbf{E}_a}{\text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)]} \quad (2.27)$$

E' sensato chiedersi come sia visto tale cambiamento da un sottospazio, ad esempio da \mathcal{H}_A : per rispondere basta eseguire la traccia parziale sul sottospazio \mathcal{H}_B della (2.27). Come mostrato nel paragrafo 2.2., tale operazione dovrebbe condurre alla definizione degli operatori

che costituiscono un POVM; tuttavia la presenza iniziale di due spazi tensorizzati richiede più cautela nei conti e l'adozione della notazione tensoriale. Superate le difficoltà tecniche è possibile definire operatori simili a quelli appartenenti al POVM, introdotti nella sezione 2.2, in base alle seguenti formule. La matrice densità dopo la misura con risultato a è data da $\rho'_A(a) = \frac{\text{tr}_B[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)\mathbf{E}_a]}{\text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)]}$. Il risultato si ottiene in \mathcal{H}_A con probabilità $\text{Prob}(a) = \text{tr}_A\{\text{tr}_B[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)]\} \equiv \text{tr}_A(\mathbf{F}_a \rho_A)$. Con l'adozione di indici greci in \mathcal{H}_B e di indici latini in \mathcal{H}_A , si può espandere ottenendo:

$$\text{tr}_A\left\{\sum_{\nu\varrho} \delta_{\nu\varrho} \left[\sum_{i\mu} (\mathbf{E}_a)_{j\nu,i\mu} (\rho_A)_{ik} (\rho_B)_{\mu\varrho}\right]\right\} = \sum_{jk} \delta_{jk} \left[\sum_{i\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{j\nu,i\mu} (\rho_A)_{ik} (\rho_B)_{\mu\nu}\right] \Rightarrow$$

$$\sum_{ij\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{j\nu,i\mu} (\rho_A)_{ij} (\rho_B)_{\mu\nu} = \sum_{ij} (\mathbf{F}_a)_{ji} (\rho_A)_{ij} \quad (2.28)$$

e pertanto $(\mathbf{F}_a)_{ji} = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{j\nu,i\mu} (\rho_B)_{\mu\nu}$.

Dalla definizione si riescono a provare interessanti proprietà: in primo luogo emerge che l'operatore \mathbf{F}_a è hermitiano.

$$(\mathbf{F}_a)_{ji}^\dagger = (\mathbf{F}_a)_{ij}^* = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{i\nu,j\mu}^* (\rho_B)_{\mu\nu}^* = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{j\mu,i\nu}^\dagger (\rho_B)_{\nu\mu}^\dagger = \sum_{\mu\nu} (\mathbf{E}_a)_{j\nu,i\mu} (\rho_B)_{\mu\nu} = (\mathbf{F}_a)_{ji}$$

Si può poi verificarne la positività scegliendo per lo spazio \mathcal{H}_B una base $\{|\mu\rangle_B, \mu \in \mathcal{M}\}$ che diagonalizzi la relativa matrice densità ρ_B ed $\{|i\rangle_A, i \in \mathcal{I}\}$ come base su \mathcal{H}_A . Infatti scrivendo $\rho_B = \sum_{\mu} p_{\mu} |\mu\rangle_B \langle \mu|$ si ottiene:

$$(\mathbf{F}_a)_{ji} = \sum_{\mu} (\mathbf{E}_a)_{j\mu,i\mu} \cdot p_{\mu} = \sum_{\mu} ({}_A\langle j| \otimes {}_B\langle \mu|) \mathbf{E}_a (|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B) \cdot p_{\mu}$$

che $\forall |\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ implica ${}_A\langle \psi | \mathbf{F}_a | \psi \rangle_A = \sum_{\mu} ({}_A\langle \psi | \otimes {}_B\langle \mu|) \mathbf{E}_a (|\psi\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B) \cdot p_{\mu} \geq 0$.

In terzo luogo si ottiene la conferma della completezza degli osservabili $\{\mathbf{F}_a, a \in \mathcal{A}\}$, partendo dalla forma che essi assumono nella base decisa in precedenza per lo spazio \mathcal{H}_B .

$$\sum_a \mathbf{F}_a = \sum_{\mu} {}_B\langle \mu | \sum_a \mathbf{E}_a | \mu \rangle_B \cdot p_{\mu} = \mathbf{1}_A \cdot \left(\sum_{\mu} {}_B\langle \mu | \mathbf{1}_B | \mu \rangle_B \cdot p_{\mu} \right) = \mathbf{1}_A \quad (2.29)$$

usando $\sum_a \mathbf{E}_a = \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{1}_B$. Nonostante le proprietà appena presentate, in generale non è possibile esprimere in maniera semplice la matrice densità dopo la misura $\rho'_A(a)$ vista da \mathcal{H}_A in funzione degli operatori $\{\mathbf{F}_a\}$. Ad ogni modo si può cercare di generalizzare il teorema di Neumark presentato nel paragrafo 2.3 partendo dalla situazione seguente: si supponga che lo spazio \mathcal{H}_A abbia dimensione N ed in esso vi siano n operatori non negativi \mathbf{F}_a che partizionano l'unità. L'obiettivo è mostrare in che modo scegliere uno spazio \mathcal{H}_B , con una matrice densità ρ_{AB} ed un proiettore ortogonale \mathbf{E}_a definiti sul prodotto tensore tra i due sottospazi, in modo tale che la probabilità di ottenere da una misura l'autovalore a , cui si riferisce il proiettore sia esprimibile tramite soli elementi dello spazio \mathcal{H}_A . Questa richiesta prescinde totalmente dalla forma della matrice densità dopo la misura su \mathcal{H}_A : ciò che interessa del procedimento di misura è solamente la probabilità del risultato. Scriviamo:

$$\mathbf{F}_a = |\tilde{\psi}_a\rangle\langle \tilde{\psi}_a| \quad \text{con} \quad \sum_{a=1}^n \mathbf{F}_a = \mathbf{1}_A \quad \text{e} \quad \text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)] = \text{tr}_A(\mathbf{F}_a \rho_A) \quad (2.30)$$

Si inizi applicando il teorema di Neumark per trovare n vettori $|u_a\rangle$ in uno spazio n dimensionale che generino i proiettori ortogonali da cui ricavare gli osservabili costituenti il POVM assegnato limitando l'osservazione al sottosistema \mathcal{H}_A . Mostrando in una somma diretta il completamento $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ del generatore $|\tilde{\psi}_a\rangle$ di \mathbf{F}_a si ottiene:

$$|u_a\rangle = |\tilde{\psi}_a\rangle + |\tilde{\psi}_a^\perp\rangle \quad (2.31)$$

Per proseguire conviene inizialmente supporre che il numero n degli osservabili costituenti il POVM sia un multiplo intero della dimensione N del sottospazio \mathcal{H}_A , ovvero $n = rN$, riservandoci successivamente di rilassare questa ipotesi. Emerge dunque la possibilità di scomporre il complemento ortogonale $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$ del generatore dell'operatore appartenente al POVM nella somma diretta di $r - 1$ vettori $|\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle$ ciascuno con N componenti; in tale notazione può essere riscritta la relazione di ortonormalità tra i vettori completati $|u_a\rangle$ introdotti prima, garantita dal teorema di Neumark. Definiti $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle = |\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle \oplus |\tilde{\psi}_{2,a}^\perp\rangle \oplus \dots \oplus |\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle$ si ha:

$$\delta_{ab} = \langle u_a | u_b \rangle = \langle \tilde{\psi}_a | \tilde{\psi}_b \rangle + \sum_{\mu=1}^{r-1} \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp | \tilde{\psi}_{\mu,b}^\perp \rangle \quad (2.32)$$

Assumiamo che il sottospazio \mathcal{H}_B abbia dimensione r ; in tal modo per determinare una base ortonormale dello spazio prodotto tensore servono $rN = n$ componenti, il giusto numero desumibile dai vettori $|u_a\rangle$ completati inizialmente. La precedente espressione suggerisce inoltre la forma del possibile set ortonormale; sia $\{|\mu\rangle_B, \mu = 0, 1, 2, \dots, r - 1\}$ una base su \mathcal{H}_B , allora una base su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ è:

$$\{|\Phi_a\rangle_{AB} = |\tilde{\psi}_a\rangle_A |0\rangle_B + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A |\mu\rangle_B, a = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.33)$$

Ora resta solo da scegliere una possibile matrice densità in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ per ottenere la relazione voluta (2.30): ciò è reso fattibile facendo il prodotto tensore della data matrice ρ_A in \mathcal{H}_A col proiettore unidimensionale associato al primo vettore di base per lo spazio \mathcal{H}_B (che dunque descrive l'operatore densità ρ_B in \mathcal{H}_B). Difatti nello spazio prodotto tensore è possibile costruire i proiettori unidimensionali associati ai vettori di base $|\Phi_a\rangle_{AB}$ precedentemente introdotti, e dunque eseguendo la traccia su questo spazio mantenendo la medesima base ortonormale si trova che tale scrittura equivale a tracciare in \mathcal{H}_A il prodotto matriciale tra l'osservabile \mathbf{F}_a che appartiene al POVM e l'operatore densità ρ_A . Consideriamo dunque $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|$ e $\mathbf{E}_a = |\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a|$, allora:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(a) &= \text{tr}_{AB} \left[\mathbf{E}_a \left(\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| \right) \right] = \sum_{b=1}^n \delta_{ab} \langle \Phi_a | \left(\rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0| \right) | \Phi_b \rangle_{AB} = \\ &= \left({}_A \langle \tilde{\psi}_a | {}_B \langle 0 | + \sum_{\mu=1}^{r-1} {}_A \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp | {}_B \langle \mu | \right) \left(\rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A \otimes |0\rangle_B \cdot {}_B \langle 0 | 0 \rangle_B \right) = {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A \end{aligned}$$

Introdotta un vettore normalizzato $|\psi_a\rangle_A$, tale che $|\tilde{\psi}_a\rangle_A = \sqrt{\lambda_a} |\psi_a\rangle_A$ ove $\sqrt{\lambda_a}$ è la norma di $|\tilde{\psi}_a\rangle_A$, lo si pone come primo elemento di una base su \mathcal{H}_A . Completandola in modo ortonormale con $\{|j_a\rangle_A, j = 2, 3, \dots, N\}$ allora:

$$\begin{aligned} \text{tr}_A(\mathbf{F}_a \rho_A) &= {}_A \langle \psi_a | \left(\lambda_a |\psi_a\rangle_A {}_A \langle \psi_a | \rho_A \right) | \psi_a \rangle_A + \sum_{j=2}^N {}_A \langle j_a | \left(\lambda_a |\psi_a\rangle_A {}_A \langle \psi_a | \rho_A \right) | j_a \rangle_A = \\ &= {}_A \langle \tilde{\psi}_a | \rho_A | \tilde{\psi}_a \rangle_A = {}_{AB} \langle \Phi_a | \rho_{AB} | \Phi_a \rangle_{AB} \quad (2.34) \end{aligned}$$

Per il calcolo della matrice densità dopo la misura sullo spazio prodotto tensore è possibile utilizzare quanto espresso ad inizio paragrafo nella formula (2.27):

$$\rho'_{AB} = \frac{\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B) \mathbf{E}_a}{\text{tr}_{AB}[\mathbf{E}_a(\rho_A \otimes \rho_B)]} = \frac{|\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a| (\rho_A \otimes \rho_B) |\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a|}{\text{tr}_{AB}[|\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a| (\rho_A \otimes \rho_B)]} = |\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a|$$

Volendo infine descrivere le osservazioni del sottosistema \mathcal{H}_A , è necessario operare una traccia sul sottospazio \mathcal{H}_B dell'operatore ρ'_{AB} ottenuto, scelta $\{|\varrho\rangle_B, \varrho \in \mathcal{P}\}$ come base su \mathcal{H}_B , ottenendo:

$$\begin{aligned} \rho'_A(a) &= \text{tr}_B \left(|\Phi_a\rangle_{AB} \langle \Phi_a| \right) = \sum_{\varrho=0}^{r-1} \langle \varrho| \left(|\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| \cdot |0\rangle_B \langle 0| + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| \cdot \right. \\ &\quad \left. |\mu\rangle_B \langle 0| + \sum_{\nu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\nu,a}^\perp| \cdot |0\rangle_B \langle \nu| + \sum_{\mu,\nu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\nu,a}^\perp| \cdot |\mu\rangle_B \langle \nu| \right) |\varrho\rangle_B = \\ &\quad |\tilde{\psi}_a\rangle_A \langle \tilde{\psi}_a| + \sum_{\mu=1}^{r-1} |\tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp\rangle_A \langle \tilde{\psi}_{\mu,a}^\perp| \quad (2.35) \end{aligned}$$

Volendo ora trattare una situazione più generale, si cerca di ripetere la costruzione per uno spazio in cui il numero n degli osservabili costituenti il POVM non sia multiplo esatto della dimensione N di \mathcal{H}_A , ma $n = rN - c$ con c minore di N . Dato il vettore $|\tilde{\psi}_a\rangle$ che genera un operatore appartenente al POVM, come mostrato prima, è possibile completarlo seguendo le istruzioni date dal teorema di Neumark; volendo esprimere come somma diretta di $r - 1$ vettori ad N componenti la parte aggiunta $|\tilde{\psi}_a^\perp\rangle$, si nota che ora l'ultimo addendo $|\tilde{\psi}_{r-1,a}^\perp\rangle$ avrà nulle le c componenti finali. Ad ogni modo costruendo per lo spazio prodotto tensore il set ortonormale $\{|\Phi_a\rangle_{AB}, a = 1, 2, \dots, n\}$ suggerito in precedenza si ottiene ancora lo stesso risultato, poiché tale procedimento non dipendeva dal valore delle componenti dei vettori. Ora però il prodotto tensore ha dimensione $rN = n + c$, e dunque è necessario implementare la base con i c elementi mancanti normalizzati ed ortogonali a quelli già inseriti. Dunque basterà aggiungere tali gradi di libertà come vettori normalizzati della base canonica $|e_i\rangle_A$, ovvero con una sola componente non nulla, moltiplicati per l'ultimo ket di base $|r-1\rangle_B$ di \mathcal{H}_B , in cui la componente superstite del vettore di \mathcal{H}_A cada ogni volta nei c stati mancanti del sistema.

$$|e_i\rangle_A |r-1\rangle_B \quad \text{con } i = N - c + 1, N - c + 2, \dots, N \quad (2.36)$$

Come applicazione si può riprendere l'esempio del paragrafo 2.3.1, descrivente 3 osservabili costituenti un POVM per un singolo qubit. La forma con cui erano stati presentati ricalcava la possibilità di pensarli come proiettori unidimensionali associati all'autofunzione di spin $|\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A$ in direzioni definite da versori sfasati di 120° l'un l'altro, purchè i coefficienti a fattore di tali osservabili fossero tutti uguali tra loro.

$$\mathbf{F}_a = \frac{2}{3} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A \langle \uparrow_{\hat{n}_a}| \quad \text{e } a = 1, 2, 3 \quad (2.37)$$

Volendo realizzare le previsioni probabilistiche di tali operatori appartenenti al POVM lavorando in uno spazio prodotto tensore, è possibile scegliere come sottospazio \mathcal{H}_B quello di un secondo qubit: difatti in questo caso il numero degli elementi del POVM non è multiplo della dimensione di \mathcal{H}_A , ed è dunque sensato assegnare ad ambedue gli spazi la medesima dimensione 2 e lasciare uno stato libero. Dunque riprendendo i conti svolti nel paragrafo 2.3.1, si vede che l'ultima componente dei vettori completati $|u_a\rangle$ secondo il teorema di Neumark è uguale nei 3 casi, a meno del segno. Questa è una situazione favorevole che può essere sfruttata in modo sensato per scrivere una forma collettiva dei vettori di base $|\Phi_a\rangle_{AB}$ preparati nello spazio tensore: essendo l'operatore appartenente al POVM proporzionale ad un proiettore unidimensionale, si nota come vi sia libertà di fase per il vettore che lo genera,

consentendo dunque di conglobare nella sua definizione un eventuale segno negativo a fattore. Partendo pertanto da questi diversi generatori degli osservabili costituenti il POVM, si ottengono quindi gli stessi vettori completati $|u_a\rangle$ dal teorema di Neumark, con i segni scambiati dove la nuova posizione originaria lo ha imposto. Specializzando al caso in questione, si abbiano come generatori di $\{\mathbf{F}_a, a = 1, 2, 3\}$ presentati nella formula precedente:

$$\left\{ |\tilde{\psi}_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, |\tilde{\psi}_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, |\tilde{\psi}_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

che estesi diventano:

$$\left\{ |u_1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, |u_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, |u_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \right\}$$

Il set ortonormale per il prodotto tensore tra \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B risulta dunque:

$$|\Phi_a\rangle_{AB} = |\tilde{\psi}_a\rangle_A |0\rangle_B + |\tilde{\psi}_{1,a}^\perp\rangle_A |1\rangle_B = \sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}} |0\rangle_A |1\rangle_B \text{ con } a = 1, 2, 3 \text{ e } |\Phi_0\rangle_{AB} = |1\rangle_A |1\rangle_B \quad (2.38)$$

Data una opportuna matrice densità nello spazio tensore è poi possibile verificare l'uguaglianza tra le probabilità ottenute tracciando sul prodotto tensore e su \mathcal{H}_A ; in quest'ultimo si è scelta come base per l'esecuzione di tale operazione quella contenente l'autostato $|\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A$ per l'operatore di spin nella direzione che parametrizza l'elemento del POVM, completata in modo ortonormale dall'altro autovettore $|\downarrow_{\hat{n}_a}\rangle_A$ di tale osservabile, relativo all'autovalore di spin down. Se $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |0\rangle_B \langle 0|$ si ha:

$${}_{AB} \langle \Phi_a | \rho_{AB} | \Phi_a \rangle_{AB} = \text{tr}_A(\mathbf{F}_a \rho_A) = {}_A \langle \uparrow_{\hat{n}_a} | \left(\frac{2}{3} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A \langle \uparrow_{\hat{n}_a}| \rho_A \right) |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A + {}_A \langle \downarrow_{\hat{n}_a} | \left(\frac{2}{3} |\uparrow_{\hat{n}_a}\rangle_A \langle \uparrow_{\hat{n}_a}| \rho_A \right) |\downarrow_{\hat{n}_a}\rangle_A = \frac{2}{3} \cdot {}_A \langle \uparrow_{\hat{n}_a} | \rho_A | \uparrow_{\hat{n}_a} \rangle_A \quad (2.39)$$

Conclusion

La descrizione del processo di misura su uno spazio prodotto tensore ha esteso il sostrato teorico del teorema di Neumark, mostrandone una interessante applicazione. Alla base del ragionamento vi è sempre l'idea di partire da uno stato puro o alternativamente da un insieme di proiettori ortogonali associato ad una misura in uno spazio di Hilbert allargato, ottenendo mediante opportune operazioni rispettivamente una matrice densità ed un POVM nello spazio di Hilbert iniziale. Nella sezione 2.1 si era trattato il primo caso, con l'enunciazione e la dimostrazione del teorema GHJW, in base al quale dati diversi ensemble (contenenti al più n proiettori unidimensionali) che realizzano la medesima matrice densità ρ_A in \mathcal{H}_A , è possibile costruire uno spazio \mathcal{H}_B di dimensione almeno pari ad n e degli stati puri $|\Phi_i\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, tali che $\rho_A = \text{tr}_B \left(|\Phi_i\rangle_{AB} \langle \Phi_i| \right) \forall i$. In base al set ortonormale scelto su \mathcal{H}_B , si ottengono dopo una proiezione ortogonale su tali elementi di base, gli stati puri associati ai proiettori presenti in uno dei vari ensemble che descrivono ρ_A ; tuttavia nonostante la presunta ambiguità tra le diverse forme $|\Phi_i\rangle_{AB}$, è possibile parlare di una singola purificazione per l'operatore densità ρ_A assegnato, in quanto dati due stati $i = 1,2$ essi sono legati tra loro tramite una matrice unitaria \mathbf{U}_B in \mathcal{H}_B , in base a $|\Phi_1\rangle_{AB} = (\mathbf{1}_A \otimes \mathbf{U}_B) |\Phi_2\rangle_{AB}$. Nel contesto trattato nella sezione 2.3 si voleva esaminare invece il secondo caso, ovvero determinare un operatore \mathbf{F}_a appartenente ad un POVM mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per la matrice identità con supporto in \mathcal{H}_A di un proiettore ortogonale generato da uno stato puro $|u_a\rangle$ in uno spazio più ampio, ottenuto completando l'elemento di partenza $|\tilde{\psi}_a\rangle$, generatore di \mathbf{F}_a , nei modi descritti nella sezione citata. Quanto sviluppato in precedenza (sezione 2.4) mira infine a trovare un proiettore ortogonale \mathbf{E}_a su uno spazio prodotto tensore $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, che generi il set di operatori \mathbf{F}_a costituenti il POVM assegnato su \mathcal{H}_A , limitando l'equivalenza alla possibilità di ottenere la medesima probabilità per il risultato di una misura descritta da \mathbf{E}_a o da \mathbf{F}_a a seconda dello spazio inteso. Assegnata cioè una matrice densità ρ_A in \mathcal{H}_A , si deve costruire un operatore densità ρ_B in \mathcal{H}_B (e di conseguenza $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$), nonché uno stato puro $|\Phi_a\rangle_{AB}$ da cui desumere il proiettore ortogonale \mathbf{E}_a sullo spazio prodotto tensore; tracciando su di esso il loro prodotto $\mathbf{E}_a \rho_{AB}$ si deve ottenere il medesimo risultato fornito dalla traccia sul sottospazio \mathcal{H}_A della moltiplicazione tra l'osservabile \mathbf{F}_a appartenente al POVM e l'operatore densità ρ_A di \mathcal{H}_A . In base al sommario appena delineato, si può affermare di aver applicato alle osservabili che descrivono le operazioni di misura, e dunque costituenti un POVM, quanto ottenuto per le matrici che trattano gli stati quantici del sistema, quali l'operatore densità; ovvero si è cercato di ristabilire per lo stato assegnato una forma che ne garantisca la più completa informazione, come lo stato puro, partendo da situazioni ogni volta diverse, tutte compendiabili nella prescrizione di lavorare in uno spazio a dimensione maggiore di quello iniziale.

Bibliografia

*Claude Cohen–Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, **Mécanique Quantique**, Tome 1, Parigi, Hermann, 1973 (New York, John Wiley & Sons, 1977).*

*David J. Griffiths, **Introduction to Quantum Mechanics**, Second Edition, New Jersey, Pearson Education, 2005 (Milano, CEA Casa Editrice Ambrosiana, 2005).*

*John Preskill, **Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation**, Chapters 2 & 3, Caltech – California Institute of Technology, California, 1998, reperibile su <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/#lecture>.*

*Cesare Rossetti, **Metodi Matematici della Fisica**, Torino, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, 2000.*