Università
degli Studi
di Padova

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'indipendenza dell'ipotesi del continuo ed il suo ruolo nella teoria degli insiemi.

Relatrice:
Prof.ssa Cinzia Bonotto

Laureando: Mattia D'Agostini
Matricola: 1227245

Anno Accademico 2023/2024

(19/07/2024)

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è quello di fornire una dimostrazione, tramite l'utilizzo di modelli a valori booleani, dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo all'interno della teoria degli insiemi **ZFC**. All'approccio logico sarà affiancato un approccio di fondamenti della matematica, nel delineare una storicità dell'evoluzione del problema legato all'ipotesi del continuo a partire dal concetto di insieme sviluppato da Cantor e della successiva teoria assiomatica **ZFC**.

Nel primo capitolo si tratterà infatti dell'origine del concetto Cantoriano di insieme, a partire dalle ragioni che portarono Cantor a cercare una definizione formale di insieme, fino ad arrivare alle caratteristiche da esso delineate per descrivere il concetto di insieme ed alle conseguenti contraddizioni e critiche ad esse sollevate.

Il secondo capitolo fornirà una breve descrizioni di una delle teorie insiemistiche più accreditate, ovvero la teoria **ZFC**, sviluppata da Ernst Zermelo e da Abraham Fraenkel, fino a giungere alla formulazione dell'ipotesi del continuo in relazione al tentativo risolvere un problema legato alla gerarchia tra cardinali infiniti.

Il terzo capitolo introdurrà un modello per la teoria **ZFC**, ovvero il modello degli insiemi costruibili. Esso verrà sviluppato formalmente servendosi della metateoria di Kripke-Platek e permetterà di dimostrare l'equivalenza tra la consistenza in **ZF** dell'enunciato $V = L(a)$ e le sue conseguenze, tra cui l'ipotesi del continuo.

Nel quarto capitolo verranno introdotti i modelli a valori booleani come strumento per dimostrare l'indipendenza di proposizioni all'interno di **ZFC**, associando alle proposizioni logiche dei valori di verità non classici, in quanto non binari ma a valori all'interno di un'algebra di Boole. Nel corso del capitolo si dimostrerà la **B**-validità degli assiomi di **ZFC** all'interno di un'algebra di Boole completa, e quindi come $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ sia effettivamente un modello di **ZFC**.

Il quinto ed ultimo capitolo affronterà la dimostrazione dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo utilizzando i modelli a valori Booleani. Si farà inoltre una breve descrizione del concetto di forcing introdotto da Paul Cohen e si dimostrerà l'equivalenza tra la dimostrazione di Cohen riguardo l'indipendenza dell'ipotesi del continuo e la dimostrazione mediante modelli a valori Booleani.

I risultati ottenuti dai lavori di Cohen riguardo il concetto di forcing e le estensioni di modelli per le dimostrazioni di indipendenza risolvono non solo un problema a livello matematico, ma forniscono anche delle risposte su un piano filosofico alla perdita delle certezze causate dalla formulazione del teorema di incompletezza di Gödel. Se da un lato, infatti, l'idea che all'interno di un sistema che ci appare come completo possano esistere delle proposizioni per cui non è possibile stabilire un valore di verità in quanto indipendenti, così come la conseguenza dell'impossibilità dell'esistenza di un sistema completo per descrivere i numeri naturali, sia una fonte di stupore e di perdita delle certezze se confrontata con il desiderio di utilizzare la matematica come uno strumento per descrivere la realtà, dall'altro la soluzione di Cohen, pur cercando di risolvere questo problema, si trova ad operare in un campo profondamente segnato dal teorema di Gödel, riuscendo a formulare una soluzione solamente con un concetto che ancora, se rapportato alla realtà, appare meno concepibile dell'idea che una proposizione non possa essere né vera né falsa, ovvero la dimostrazione dell'esistenza contemporanea di modelli dove essa è vera e dove essa è falsa tramite il forcing.

Questo è stato il fascino che questa scoperta ha avuto per me, ed il motivo per cui ho scelto di renderla oggetto della mia tesi. Cohen non risolve un problema, perché il teorema di incompletezza di Gödel non è un problema da risolvere, è un fatto da accettare, e Cohen lo accetta allargando il campo di conoscenza, appena stravolto dall'apparente assurdo del teorema di incompletezza, operando su mondi difficilmente concepibili concretamente e rapportabili alla realtà, ma che ci dimostrano non solo che ad esistere e a poter essere oggetto di studi non sono solamente le cose di cui possiamo avere una rappresentazione concreta e che ci appaiano come logiche e concepibili, ma anche che lo studio e l'esistenza di tali concetti procedono anche dopo qualsiasi perdita di certezza da parte nostra, e che se vogliamo stare al passo abbiamo bisogno di reinventarci ed accettare che i limiti dell'universo non sono i limiti della nostra percezione.

Capitolo 1

Il concetto Cantoriano di insieme

1.1 Origini

Le ragioni che portarono Cantor a formalizzare il suo concetto di Teoria degli insiemi furono sia di natura matematica, che filosofica. Da un lato, infatti, i problemi legati agli sviluppi ottenuti all'inizio del XIX secolo riguardo l'unicità dell'espansione trigonometrica di una funzione a variabile reale, portarono Dirichlet ad espandere il suo concetto di funzione, anticipando l'idea di funzione come corrispondenza univoca, la quale viene usata dalla matematica moderna. Gli studi di Dirichlet portarono, non solo ai fondamenti della moderna teoria delle funzioni a variabili reale, ma diedero modo a Cantor di familiarizzare con gli stessi concetti che sarebbero poi diventati la base della sua teoria riguardo ordinali e cardinali.

Allo stesso tempo, durante il corso di tutta la sua carriera, Cantor sentì il bisogno di difendere le sue teorie, specialmente quelle riguardanti il concetto di infinito, non solo da un punto di vista matematico, ma anche da uno filosofico. In diverse lettere, in seguito pubblicate da una rivista fichtiana, Cantor rispose a diverse critiche fatte alla sua teoria rispondendo a diversi filosofi e teologi. La connessione tra le Teorie di Cantor e la filosofia è inoltre rafforzata dalla sua concezione Platonica di matematica. In diverse pubblicazioni, Cantor fece riferimento ad opere e concetti di Platone, ed inoltre, come verrà descritto in questo capitolo, lo stesso concetto cantoriano di insieme affonda le sue radici nel Platonismo.

Un evidente esempio del forte legame tra le teorie di Cantor ed il Platonismo si può trovare in una nota al termine di una pubblicazione di Cantor dal titolo "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", quando, parlando del concetto di collezione, Cantor definisce un insieme nel seguente modo.

"Per una "collezione", o "insieme", intendo in generale una moltitudine che possa essere considerata come uno, i.e, ogni totalità di determinati elementi che possa essere raccolta sotto un'unità da una regola."

Per spiegare questo concetto in modo più approfondito, Cantor fece riferimento al Filebo di Platone, affermando che il concetto di insieme da lui presentato fosse fortemente correlato al concetto Platonico di "eìdos", o idea, chiamato da Platone nel Filebo "mikton". Questo concetto è presentato in opposizione al concetto di "apeiron", definito da Cantor "l'infinito inautentico", ed a quello di "peras", ovvero il concetto di limite. Platone, infatti, descrisse il concetto di mikton come una combinazione di entrambi questi due concetti. Questa non è l'unica occasione nella quale Cantor fece diretto riferimento ad un'opera di Platone all'interno di un suo lavoro. Come si vedrà in questo capitolo, infatti, le tre caratteristiche principali del concetto Cantoriano di insieme affondano le loro radici nell'ontologia Platonica.

1.2 Caratteristiche generali

Un'analisi approfondita degli studi di teoria degli insiemi svolti da Cantor permette di identificare tre principali caratteristiche del concetto Cantoriano di insieme.

1. La sua **esistenza** in corrispondenza ad una molteplicità di enti distinti caratterizzabile da una condizione.

2. La sua completa **determinazione** da parte degli elementi che compongono la corrispondente molteplicità.

3. La sua **sostanzialità** nel duplice aspetto di:

   - **Individualità**, ovvero la possibilità, al pari di ogni altro ente individuale, di godere di attributi, ovvero di essere elemento di molteplicità.
   - **Assolutezza** ovvero l'indipendenza dal linguaggio. Ogni insieme e le sue relative proprietà sono indipendenti da ogni possibilità di caratterizzarli da un punto di vista linguistico.

La caratteristica più semplice da descrivere è la seconda. Essa afferma che due insiemi che presentano gli stessi elementi sono uguali.

Questa proprietà si concentra non sulla definizione o sulla struttura dell'insieme, ma sulla sua estensione, ponendo l'attenzione non tanto sulla regola che definisce un insieme, quanto sugli elementi che soddisfano tale regola.

La seconda caratteristica è fortemente connessa alla prima. La prima caratteristica principale, infatti, afferma che ogni volta che si possa definire una molteplicità usando una regola o una condizione, potendo determinare per ogni entità se essa soddisfa o meno la condizione data, allora esiste un insieme che, come indicato dalla seconda caratteristica, contiene tutti e soli gli elementi che soddisfano alla condizione.

Queste due caratteristiche sembrano non presentare alcuna contraddizione, a patto che il concetto di esistenza venga descritto in modo sufficientemente vago.
Il vero cambiamento avviene quando si aggiunge la terza caratteristica, e più precisamente avviene con l'aggiunta della caratteristica di individualità. Questa particolare caratteristica afferma che l'universale presenta le stesse proprietà logiche delle identità individuali. L'unione di 1) e 3a) rappresenta la connessione più forte tra la teoria degli insiemi di Cantor e la logica Platonica. Questa particolare proprietà, la quale afferma che l'universale può essere trattato come sostanza viene frequentemente chiamata "Principio di comprensione", richiamando la connessione fatta da Cantor al concetto Platonico di "mikton",

menzionato nel paragrafo precedente.

Questo principio portò a diverse critiche da parte di intellettuali. Giulio Preti, nel suo libro “Praxis ed empirismo”, argomentò come Cantor ed altri filosofi Platonici tendessero a confondere il concetto di esistenza matematica con il concetto di esistenza empirica. Nel sul lavoro Preti affermò come l’esistenza del numero tre e l’esistenza del suo cane fossero due tipi di esistenza completamente diversi, riferendo come questo fatto venisse riconosciuto anche dai filosofi Platonici, i quali però, a detta di Preti, tendevano a dimenticarsi spesso di queste differenze, finendo per operare sul primo tipo di esistenza come se stessero operando sulla seconda.
Quella presentata come una critica da parte di Preti, è in realtà il punto più importante del concetto Cantoriano di insieme. Attribuendo infatti la stessa esistenza logica al numero 3 ed al cane di Preti, entrambi sono in grado sia di possedere caratteristiche sia di essere parte di una molteplicità. Quella che apparentemente appare come una contraddizione, viene risolta con l’introduzione dell’ultima caratteristica di assolutezza della sostanzialità di un insieme, che descrive questa doppia natura nel dettaglio. È importante ricordare che questa doppia natura di esistenza può esistere esclusivamente se consideriamo l’esistenza logica. L’esistenza fattuale, menzionata da Preti nel suo lavoro, non viene contemplata nel ragionamento di Cantor, poiché non riguardante la teoria degli insiemi.

1.3 L’assolutezza della sostanzialità

Nel paragrafo precedente abbiamo definito l’assolutezza della sostanzialità come

” L’indipendenza dal linguaggio nel senso per cui ogni insieme e le sue relative proprietà sono indipendenti da ogni possibilità di caratterizzarli da un punto di vista linguistico..”.

Questo concetto può essere spiegato meglio, come venne fatto da Cantor nelle sue opere, affermando che l’universale, non solo gode dei caratteri sostanziali primari, ma anche di quelli secondari. Questo significa che, tutte le proprietà di un insieme sono strettamente connesse con l'insieme stesso. Per esempio, la proprietà di un insieme di avere una determinata cardinalità è completamente indipendente dal modo in cui la cardinalità viene calcolata, esiste a priori, e non ha niente a che vedere il modo in cui noi, soggetti esterni, studiamo l'insieme. Un esempio che può essere usato per descrivere questo concetto è quello che coinvolge l'insieme delle parti dell'insieme dei numeri naturali e la sua proprietà di non essere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali. Cominciamo considerando l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N}$, e la proprietà di essere un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. A partire dal principio di comprensione, deriviamo che esiste un insieme che contiene tutti gli insiemi che soddisfano tale particolare condizione, e, usando la caratteristica di determinazione, si può affermare che questo particolare insieme è un insieme, il quale sarà indicato come $\mathcal{P}$. Si consideri ora un'altra condizione, la condizione di non essere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Usando un procedimento analogo a quello precedente, si può definire un insieme che contiene tutti gli insiemi che soddisfano questa condizione, il quale sarà indicato come R. All'interno del suo lavoro, Cantor dimostrò che $\mathcal{P}$ appartiene ad R. Ma questa appartenenza, come menzionato in precedenza, non va considerata come una conseguenza dello studio dell'insieme, ma come un carattere sostanziale secondario degli insiemi. Sia $\mathcal{P}$ che R devono essere considerati come autonomi; essi, infatti, non discendono in alcun modo dal fatto che stanno venendo studiati da una lente esterna e le loro proprietà esistono a priori. La proprietà di $\mathcal{P}$ di appartenere a R è strettamente connessa con l'esistenza di $\mathcal{P}$ e R, ma non è influenzata in alcun modo dal nostro aver dimostrato l'appartenenza o dal nostro averla studiata.

Un' argomentazione analoga a questa si può trovare in un articolo pubblicato da Cantor dal titolo "Über unendlich lineare Punktmannigfaltigkeiten", nel quale, afferma che è possibile intendere l'esistenza dei numeri in due diversi modi. I numeri, infatti, hanno da un lato una natura intra-soggettiva, chiamata anche immanente, e dall'altro una natura transiente. La prima può essere spiegata dal fatto che i numeri sono percepiti dal nostro cervello come oggetti precisi, e sono differenziati da altri enti durante i nostri processi cognitivi. La seconda afferma che i numeri devono essere percepiti anche come una rappresentazione dei processi dal mondo esterno che sono posti in relazione con il cervello. Queste due realtà, per quanto possano apparire opposte ed inconciliabili, sono necessarie l'una all'altra. Un oggetto che presenta una natura immanente, ne presenterà una transiente allo stesso tempo, e viceversa. Nonostante questo problema venga studiato maggiormente dalla metafisica, la distinzione tra natura immanente e transiente risulta molto utile nel risolvere un problema di lunga durata riguardante la natura della matematica.

1.4 Una soluzione ad un problema riguardante la natura della matematica

Dalle considerazioni di Cantor riguardo la duplice natura dei numeri, è possibile dedurre la differenza presente tra la matematica e le altre scienze. La matematica è infatti l'unica scienza a cui è concesso operare osservando esclusivamente la realtà immanente, avendo il privilegio di tralasciare quella transiente. L'approccio di Cantor nell'organizzare la matematica e la teoria degli insiemi rappresenta una soluzione valida ad una serie di problemi che possono essere raccolti e riassunti nell'apparente contraddizione sollevabile a partire dalle seguenti tre affermazioni.

1. La maggior parte dell'ispirazione della matematica giunge dall'osservazione di fenomeni naturali.

2. La matematica definisce i suoi enti senza alcuna pretesa di applicazione pratica.

3. Le teorie matematiche pure, create come un disegno astratto dell'intelletto, trovano quasi sempre un'applicazione nel descrivere il mondo esterno.

1.5 Critiche contro le teorie di Cantor

Le critiche sollevate alle teorie di Cantor possono essere suddivise in due classi distinte: una riguardante le critiche di tipo logico, sollevate con lo scopo di trovare una contraddizione all'interno della teoria, l'altra riguardante le critiche poste da un punto di vista filosofico, le quali ritenevano che il concetto di Cantor di insieme fosse filosoficamente inadeguato nel suo obiettivo di costruire una struttura volta ad interpretare la natura della matematica. Le critiche del primo tipo possono essere riassunte in tre punti principali.

1. La critica riguardo l'inconsistenza del principio di comprensione.

2. La critica riguardo la viziosità circolare del principio di comprensione quando viene ridefinito in modo tale da evitare la prima critica.

3. La critica riguardo l'insostenibilità dell'assolutezza della sostanzialità.

L'obiettivo del prossimo capitolo sarà quello di presentare diverse soluzioni proposte contro le critiche del primo tipo.

Capitolo 2

La teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel

2.1 Contraddizioni logiche e soluzioni proposte

Una delle critiche sollevate contro il concetto di insieme formulato da Cantor era l'apparente incompatibilità tra la prima caratteristica fondamentale di un insieme (la sua esistenza in relazione ad una qualsiasi molteplicità di entità caratterizzate da una condizione definita) con l'assolutezza della sostanzialità. Tale incompatibilità sarebbe stata responsabile di alcune possibili contraddizioni, tra cui, la più conosciuta è sicuramente il paradosso di Russel, il quale afferma quanto segue.

" L'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso."

Proviamo a ripercorrere i passaggi necessari per formulare questa contraddizione. In primo luogo, definiamo una condizione, ovvero la proprietà di non appartenere a sé stesso. La prima caratteristica fondamentale degli insiemi ci assicura l'esistenza di un insieme che contiene tutti e soli gli insiemi che soddisfano questa condizione, ovvero il non appartenere a sé stessi. La seconda caratteristica fondamentale, ovvero la sua completa determinazione da parte degli elementi che compongono la molteplicità, ci permette di considerare l'insieme come un elemento. Infine, l'assolutezza della sostanzialità ci permette di chiederci se tale insieme soddisfi o meno la condizione data. La contraddizione segue usando un approccio di tipo logico.

Infatti, se l'insieme non appartenesse a sé stesso, dovrebbe appartenere a sé stesso, in quanto l'insieme è la collezione di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi. Viceversa, se l'insieme appartenesse a sé stesso, allora esisterebbe un insieme contenuto nell'insieme, ovvero l'insieme stesso, che appartiene a sé stesso, e quindi, non soddisfacendo la condizione, non dovrebbe appartenere all'insieme. La radice della contraddizione si trova nella congiunzione della prima caratteristica fondamentale con l'assolutezza della sostanzialità, ovvero nel principio di comprensione definito nel primo capitolo. La seconda caratteristica, infatti, può essere omessa, in quanto la contraddizione emergerebbe anche nel caso in cui considerassimo "un insieme" e non "l'insieme" di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi.

La scoperta di questa contraddizione portò molti matematici ad abbandonare la teoria di Cantor riguardante il transfinito. Altri, d'altra parte, provarono a cercare delle soluzioni per risolvere il problema sollevatosi e per rimodulare la teoria di Cantor, cercando di porre delle limitazioni al principio di comprensione. È possibile individuare principalmente tre scuole di pensiero. La prima, la quale sarà presentata in questo capitolo, è basata principalmente sui lavori di Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel. Altri matematici che hanno lavorato ad altre possibili soluzioni furono Bertrand Russell, Willard Van Orman Quine e Wilhelm Ackermann.

Nonostante tutti i matematici in questione siano d'accordo nel considerare la radice del problema nella possibilità di rendere sostanza ogni molteplicità, Russell,il primo Quine e Zermelo ritengono che il problema stia nell'ammetter l'esistenza di insiemi in relazione a qualsiasi tipo di condizione, mentre Ackermann e il tardo Quine collocano l'errore nel considerare ogni insieme come sostanza.

Sebbene entrambi ritengano necessario ridurre la possibilità di creare insiemi in relazione ad una condizione, le visioni di Russell e Zermelo sono radicalmente differenti. Russell sostiene infatti che le limitazioni debbano essere sulla natura delle sostanze che sono considerate come elementi all'interno di una molteplicità, idea che svilupperà nella teoria dei tipi. Zermelo, invece, sostiene che il problema siano le regole usate per creare le molteplicità, idea che sarà alla base della teoria assiomatica per gli insiemi passata alla storia come di Zermelo- Fraenkel, la quale sarà oggetto di questo capitolo.

2.2 La teoria di Zermelo-Fraenkel

Ogni teoria matematica poggia le proprie basi nel postulare l'esistenza di determinati oggetti e di relazioni che intercorrono tra loro, nonché di proprietà riguardanti entrambi. Nel caso della teoria di Zermelo- Fraenkel. gli oggetti saranno chiamati insiemi e l'unica relazione fondamentale considerata sarà la relazione di appartenenza (indicata con il simbolo $\in$), la quale, nel caso per esempio della proposizione $x \in y$ si legge " x appartiene ad y", o "x è un elemento di y", o "y contiene x come elemento".

È importante notare come l'essere elemento sia un fatto esclusivamente relazionale, e come tale fatto non comporti una distinzione di tipo naturale tra elementi ed insiemi: gli elementi di un insieme sono insiemi.

Si introduce inoltre il la relazione "essere sottoinsieme", rappresentata dal simbolo $\subseteq$ e definita nel seguente modo

$$x \subseteq y \iff \forall z \in x(z \in y)$$

Vengono riportati di seguito gli assiomi della teoria di Zermelo Fraenkel, che da ora sarà riportata come **ZF** in forma abbreviata. Si noti che con **ZFC** si intende la teoria di Zermelo Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta.

A1 **Assioma di estensionalità**

$$\forall z(z \in x \iff z \in y) \Rightarrow x = y$$

Il segno "=" denota la relazione di uguaglianza, la quale segue le usuali proprietà logiche (riflessività, simmetria, transitività, sostitutività di uguali in ogni contesto).

A2 **Assioma dell'insieme vuoto**

$$\forall x(x \notin \varnothing)$$

L'insieme $\varnothing$ è detto insieme vuoto e non ha alcun elemento. Si noti che $\varnothing \subseteq x$ per ogni x, ovvero $\varnothing$ è il minimo rispetto alla relazione " $\subseteq$ ".

A3 **Assioma della coppia**

$$\forall z(z \in \{x, y\} \iff z = x \vee z = y)$$

$\{x, y\}$ è detta coppia non ordinata di x e y.

A4 **Assioma dell'unione**

$$\forall z(z \in \bigcup_x \iff \exists y \in x(z \in y))$$

$\bigcup_x$ si chiama insieme unione di x, o unione di x.

A5 **Assioma della potenza**

$$\forall z(z \ \in \mathcal{P}(x) \iff z \subseteq x)$$

L'insieme $\mathcal{P}(x)$, univocamente determinato da x, è detto insieme potenza di x o insieme delle parti di x. Si noti che $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing, \}, \mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

A6 **Assioma di separazione**

Per ogni formula $\varphi(z, \ldots)$ con eventuali altri parametri diversi da y

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \iff z \in x \wedge \varphi(z, \ldots))$$

Da A1 e A6 segue che $\forall x \exists ! y$ i cui elementi sono tutti e soli gli $z \in x$ per i quali vale $\varphi(z, \ldots)$; questo insieme sarà denotato con

$$\{z \in x \mid \varphi(z, \ldots)\}$$

e dipende da x e dagli altri eventuali parametri, fissati.

A7 **Assioma di fondazione**

$$x \neq \varnothing \Rightarrow \exists y \in x(y \cap x = \varnothing)$$

L'assioma si chiama di fondazione perché afferma che la relazione $\in$ è ben fondata, ovvero che ogni sottoinsieme non vuoto del campo ha un elemento minimale.

A8 **Assioma dell'esistenza di un insieme ereditario**

$$\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

A9 **Assioma della scelta**

$$x \neq \varnothing \wedge a \subseteq \mathcal{P}((x) - (\varnothing)) \wedge a \neq \varnothing \Rightarrow \exists c(c\colon a \to x \wedge \forall z \in a(c(z) \in z))$$

c si chiama funzione di scelta per a, o per i sottoinsiemi di x se $a = \mathcal{P}(x) - \varnothing$, come nel caso delle applicazioni usuali.

A10 **Assioma di rimpiazzamento**

Per ogni formula $\varphi(x, y, \ldots)$ con eventuali altri parametri diversi da b,

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y, \ldots) \Rightarrow \forall a \exists b \forall y(y \in b \iff \exists x \in a \varphi(x, y, \ldots))$$

L'assioma afferma che, se φ definisce una corrispondenza di tipo funzionale tra insiemi, allora, se la si restringe, o la si applica ad un insieme, esiste un insieme che contiene le immagini mediante φ degli elementi dell'insieme dato.

2.3 Ordinali

Gli ordinali rappresentano un elemento chiave all'interno della teoria degli insiemi, non solo perché possono essere visti come una generalizzazione dei numeri naturali, ma anche perché il loro uso, considerandoli come esempi di insiemi ben ordinati, risulta essere molto utile per approfondire il sistema assiomatico.

Definizione (Insieme totalmente ordinato)

Un insieme totalmente ordinato da una relazione R si dice bene ordinato se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un minimo rispetto a R.

Definizione (Insieme transitivo)

Un insieme x è detto transitivo se

$$y \in x, z \in y \Rightarrow z \in x$$

A partire dal concetto di insieme ben ordinato ed insieme transitivo è possibile dare la definizione di ordinale.

Definizione (Ordinale)

Un ordinale è un insieme α ben ordinato da $\in$ e transitivo. Se α è un ordinale, sarà indicato con $On\alpha$.

Teorema

Se S è un insieme ben ordinato, esiste una sola f ed un solo α tale che $On\alpha$ ed f è una mappa che preserva l'ordine di S in α. Ovvero, S è isomorfo ad un ordinale

Teorema

Se S è un insieme di ordinali, esiste il più piccolo ordinale α tale che $\beta \in S \Rightarrow \beta < \alpha$. Tale ordinale sarà denotato come α= sup S.

Definizione Ordinale successore

Un ordinale si dice successore se $\alpha = s(\beta)$ per un qualche β, dove con $s(y)$ si intende $y \cup \{y\}$. L'ordinale successore β si indicherà anche come $\beta = \alpha + 1$. Se α non è un successore ed inoltre $\alpha \neq \varnothing$ si dice che α è un ordinale limite.

Lemma Di Zorn

Se $\langle a, \leq \rangle$ è un insieme parzialmente ordinato in cui ogni catena ha un maggiorante, allora esiste in a un elemento $\leq$-massimale.

Dimostrazione. Sia c una funzione di scelta per a e sia α un ordinale di cardinalità strettamente maggiore di quella di a. Si definisce per ricorsione su α la seguente funzione

$$f(\beta) = \begin{cases} c(\{x \in a \mid \forall\gamma \in \beta(x > f(\gamma))\}) & \text{se } \{x \in a \mid \forall y \in \beta(x > f(\gamma))\} \neq \varnothing \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia β_0, nel caso in cui esista, il primo ordinale $\in \alpha$ per cui vale $f(\beta_0) = a$. Nel caso in cui non esista si ponga $\beta_0 = \alpha$. La funzione f ristretta a β_0 è iniettiva e strettamente crescente: infatti nel caso in cui $\gamma \in \delta \in \beta_0$ allora $f(\delta)$ è definita secondo la prima clausola e quindi vale $f(\gamma) < f(\delta)$. Ma allora non può essere $\beta_0 = \alpha$ perché altrimenti f sarebbe un'iniezione di α in a contro l'ipotesi sulla cardinalità, e $\beta_0 \in \alpha$. Si ha inoltre che $Im(f \mid_{\beta_0}$ è una catena, e dunque presenta un maggiorante. Questo maggiorante non può essere stretto, ovvero maggiore di tutti gli $f(\gamma)$ per $\gamma \in \beta_0$, altrimenti $f(\beta_0)$ non sarebbe uguale ad a. Quindi il maggiorante è un elemento della catena, e più in particolare un suo massimo. Da questo si deduce che β_0 è un successore, $\beta_0 = s(\beta)$ e $f(\beta)$ è un elemento massimale. □

2.4 Cardinali

La nozione di cardinale può essere introdotta in modo quantitativo definendo $Card(x)$, detto il cardinale di x, come il più piccolo ordinale che sia equipotente con x. Ne esiste sempre uno dal momento che per ogni x, una volta che gli sia associato un buon ordine, risulta essere in corrispondenza biunivoca con un ordinale.

Si può costruire una gerarchia dei cardinali infiniti, enumerandoli senza fine per mezzo degli ordinali stessi, mediante la seguente definizione ricorsiva

$$\begin{cases} \aleph_0 = \aleph \\ \aleph_{s(\alpha)} = \aleph_\alpha^+ \\ \aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha \in \lambda\} \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$$

I cardinali successori sono gli $\aleph_{s(\alpha)}$, i cardinali limite sono gli $\aleph_\lambda$ con λ limite.

Definizione

$\forall x, y$ si dice che $card(x) \leq card(y)$ se esiste una corrispondenza iniettiva da x in y.

Analogamente si dice che $card(x) < card(y)$ se esiste una corrispondenza iniettiva da x in y e non é possibile trovarne una biettiva.

Teorema Cantor, Schröeder, Bernstein $\forall a, b$

$$card(a) \leq card(b) \land card(b) \leq card(a) \Rightarrow card(a) = card(b)$$

Teorema Cantor

$$\forall x \quad card(x) < card(\mathcal{P}(x))$$

Dimostrazione. Sia $f\colon x \to \mathcal{P}(x)$ definita da $f(y) = \{y\}$ per $y \in x$. f definisce una corrispondenza iniettiva da x in $\mathcal{P}(x)$, quindi $card(x) \leq card(\mathcal{P}(x)$.
Sia ora g una generica funzione da x in $\mathcal{P}(x)$ e si definisca B=$\{y \in x \mid x \notin f(x)\}$. Ovviamente $B \in \mathcal{P}(x)$. Si supponga che per assurdo esista $g\colon \mathcal{P}(x) \to x$ biettiva. Dal momento che g è biettiva, g è in particolare suriettiva. Necessariamente dovrà quindi esistere un determinato elemento $y \in x$ tale che $g(y) = B$. A questo punto ci sono due possibili casi: $y \in B$, oppure $y \notin B$. La contraddizione segue tramite il seguente procedimento logico.

$$y \in g(y) \iff y \in B \text{ (Si deriva dall'assunzione che } g(y) = B$$

$$y \in B \iff y \notin g(y) \text{ (Si deriva dalla definizione di B)}$$

□

Il teorema di Cantor fornisce una risposta ad una domanda che Cantor stesso si era posto più volte durante lo studio dei cardinali, ovvero se fosse possibile l'esistenza di cardinali arbitrariamente grandi. Sia c l'insieme $\mathcal{P}(\omega)$. Dal teorema di Cantor sappiamo che c è un insieme non numerabile. Il problema in cui si imbatté Cantor fu tentare di determinare la posizione di c nella successione transfinita di tutti gli $\aleph_\alpha$. Visto che $Card(c) > \aleph_0$, dove con $\aleph_0$ si indica la cardinalità di ω la congettura più semplice è quella passata alla storia come

Ipotesi del continuo di Cantor

$$Card(c) = \aleph_1$$

La quale, con un approccio più generalizzato si può presentare nella seguente versione

Ipotesi generalizzata del continuo

$$Card(\mathcal{P}(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+1}$$

La congettura ed i successivi problemi ad essa legati saranno l'oggetto di studio dei prossimi capitoli.

Capitolo 3

Insiemi costruibili

3.1 La metateoria di Kripke-Platek

Nel corso di questo capitolo si farà riferimento più volte alla metateoria di Kripke-Platek. La metateoria di Kripke-Platek è una teoria degli insiemi sviluppata da Saul Kripke e Richard Platek la quale si concentra principalmente sugli assiomi necessari per costruire insiemi all'interno di una gerarchia cumulativa. Il suo uso, come si vedrà, è particolarmente utile per lo studio degli insiemi costruibili, grazie all'esclusione di alcuni assiomi di **ZF** come l'assioma dell'insieme potenza e all'utilizzo di classi di formule come la classe Δ_0.
Al fine di rendere più agevole la comprensione dei concetti delineati nel corso del capitolo si riporta di seguito un breve riassunto delle caratteristiche più importanti della teoria e della sua notazione.

3.1.1 Gerarchia delle formule

Definizione

1. La classe delle Δ_0 formule è la più piccola classe F tale che:
   - F contiene le formule prive di quantificatori
   - Se φ è in F anche $\exists y \in x\, \varphi$ e $\forall y \in x\, \varphi$ sono in F
2. La classe delle Σ_1-formule è la più piccola classe F tale che

- F contiene le Δ_0 formule
- Se φ è una Δ_0-formula, $\exists x\, \varphi$ è in F

3. La classe delle Π_1-formule, è la più piccola classe F tale che
    - F contiene le Δ_0-formule
    - Se φ è una Δ_0-formula, $\forall x\, \varphi$ è in F
4. La classe delle Σ_n-formule è la più piccola classe F tale che
    - F contiene le Π_{n-1}-formule
    - Se ϕ è una Π_{n-1}-formula, $\exists x\, \varphi$ è in F
5. La classe delle Π_n-formule è la più piccola classe F tale che
    - F contiene le Σ_{n-1}-formule
    - Se ϕ è una Σ_{n-1}-formula, $\forall x\, \varphi$ è in F

3.1.2 Assiomi di base

Gli assiomi utilizzati nella teoria di Kripke-Platek +Infinito, la quale verrà indicata di qui in avanti con **KPI**, presentati con una formalizzazione analoga a quella proposta nel capitolo precedente sono:

1. Assioma di estensionalità
2. Assioma della coppia
3. Assioma dell'unione
4. Schema di separazione
5. Schema di rimpiazzamento
6. Schema di fondazione
7. Assioma dell'infinito

Alle formule degli schemi di assiomi 4 e 5 si applica la restrizione di dover essere Δ_0-formule.

3.1.3 KP come metateoria sintattica

Per utilizzare **KP** come metataoria sintattica è necessario formalizzare in **KP** i simboli del linguaggio $\mathcal{L}$.

Tale formalizzazione viene eseguita in **KP** tramite l'uso delle n-uple ordinate definite nel seguente modo

$$C(x) \leftrightarrow y, z \in TC(x)(x = \langle y, z \rangle)$$

Il quale può essere scritto analogamente

$$C(x) \leftrightarrow \langle pr_1(x), pr_2(x) \rangle$$

e

$$C(x, y) \leftrightarrow N(y) \wedge ((y = 2 \wedge C(x) \vee (2 \in y \wedge C(x) \wedge C(pr_1(x), y_1)))$$

La lunghezza $l(x)$ di una n-upla ordinata è data da

$$l(x) = y \leftrightarrow \begin{cases} y = \{0\} & \text{se } \neg C(x) \\ y = 2 & \text{se } C(x) \wedge \neg C(\mathrm{pr}_1(x)) \\ C(x, y) \wedge l(\mathrm{pr}_1(x)) = y - 1 & \text{se } C(x) \wedge C(\mathrm{pr}_1(x)) \end{cases}$$

E le operazioni di proiezione da

$$pr(z, x) = y \leftrightarrow \begin{cases} y = x & \text{se } \neg C(x) \\ y = pr_3(x) & \text{se } C(x) \wedge z = l(x) \\ y = pr_1(x) & \text{se } C(x) \wedge l(x) = 2 \wedge z = 1 \\ y = pr(z, pr_1(x)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dove con $TC(x)$ si indica la chiusura transitiva di x. I termini chiusi di **KP** che fungono da simboli del linguaggio sono

$$\langle 0, 0 \rangle,\ \langle 0, 1 \rangle,\ \langle 0, 2 \rangle,\ \langle 0, 3 \rangle,\ \langle 1, 0 \rangle$$
$$\langle 2, 0 \rangle,\ \langle 2, 1 \rangle,\ ...$$

I quali verranno indicati con la notazione

$$\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner\vee\urcorner, \ulcorner\exists\urcorner, \ulcorner=\urcorner, \ulcorner\in\urcorner,$$

$$\ulcorner v_0\urcorner, \ulcorner v_1\urcorner, ,...$$

I simboli con una tale formattazione sono detti i "godeliani" del rispettivo simbolo logico a cui fanno riferimento.

3.2 Modelli Interni

L'uso dei modelli interni, la cui definizione verrà data in questo paragrafo, è estremamente utile al fine di ottenere dimostrazioni di non contraddittorietà, o coerenza, relative.

Definizione (Relativizzazione di una formula)

Se $\psi(x, u_i)$ è una formula contenente la variabile x libera, si definisce la relativizzazione di una formula φ a ψ, la quale verrà in seguito indicata come $\varphi^{(\psi)}$, nel seguente modo:

- Se φ è priva di quantificatori, $\varphi^{(\psi)}$ è φ
- Se φ è $\neg\chi$, $\varphi^{(\psi)}$ è $\neg(\chi^{(\psi)})$
- Se φ è $\chi_1 \vee \chi_2$, $\varphi^{(\psi)}$ è $\chi_1^{(\psi)} \vee \chi_2^{(\psi)}$
- Se φ è $\exists y\, \chi$, ϕ è $\exists y\, (\psi(y, u_i) \wedge \chi^{(\psi)})$

Sia $\psi(x, u_i)$ una formula di $\mathcal{L}$ con u_i parametri e variabile x libera.

Definizione (Modello interno)

Data una teoria $\mathbf{T}$, si dice che ψ è un modello interno di $\mathbf{T}$ se $\forall\varphi$, dove φ è un assioma di $\mathbf{T}$, si ha $\mathbf{T} \vdash \varphi^{(\psi)}$. In seguito si indicherà con $\mathbf{T}^{(\psi)}$ l'insieme delle relativizzazioni a ψ degli assiomi di $\mathbf{T}$.

Lemma 3.1.1

Se $\mathbf{T} \vdash \varphi(v_0, ..., v_n)$, allora $\mathbf{T}^{(\psi)} \vdash \psi(v_0, u_i) \wedge ... \wedge \psi(v_n, u_i) \rightarrow \varphi^{(\psi)}(v_0, ..., v_n)$.

Si può giustificare l'uso dei modelli interni al fine di ottenere dimostrazioni di coerenza o non contraddittorietà relative sfruttando il seguente

Lemma 3.1.2

Se $\mathbf{T}$ è una teoria coerente, ψ un modello interno di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T} \vdash \varphi^{(\psi)}$, allora la teoria $\mathbf{T} + \varphi$, ottenuta aggiungendo φ agli assiomi della teoria $\mathbf{T}$, è a sua volta coerente.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che $\mathbf{T} + \varphi$ dia luogo a contraddizioni, e dunque, che al suo interno si possa dimostrare qualsiasi enunciato. Sia χ l'enunciato $\forall x(x \neq x)$ e sia $\mathbf{T} + \varphi \vdash \chi$. Il lemma enunciato precedentemente ci garantisce che $\mathbf{T}^{(\psi)} \vdash \varphi^{(\psi)} \to \chi^{(\psi)}$, ed esiste un numero finito di assiomi di $\mathbf{T}$, siano $\varphi_1, ..., \varphi_n$ tali che $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \to \chi^{(\psi)}$. L'antecedente di questa implicazione è dimostrabile in $\mathbf{T}$ per via delle ipotesi iniziali, quindi $\mathbf{T} \vdash \chi^{(\psi)}$. Ma, $\chi^{(\psi)}$ è la formula $\forall x(\psi(x, u_i) \to x \neq x)$, la quale implica $\forall x \neg\psi(x, u_i)$, ovvero $\mathbf{T}$ è contraddittoria. $\square$

In alcuni casi è possibile formulare la condizione $\mathbf{T} \vdash \varphi^{(\psi)}$ in un altro modo equivalente, descritto dal seguente

Lemma 3.1.3

Se ψ è un modello interno di $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T} \vdash (\forall x\, \psi(x, u_i))^{(\psi)}$, allora $\mathbf{T} \vdash \varphi^{(\psi)}$ se e solo se $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \psi(x, u_i) \to \varphi$ per ogni enunciato φ.

Dimostrazione. " $\Rightarrow$ " Segue dal fatto che $\forall x\, \psi(x, u_i) \to (\varphi^{(\psi)} \iff \varphi)$, il quale deriva dalla definizione di relativizzazione di una formula. Viceversa, si supponga che $\mathbf{T} \vdash \forall x\, \psi(x, u_i) \to \varphi$. Allora $\mathbf{T}^{(\psi)} \vdash (\forall x\, \psi(x, u_i))^{(\psi)} \to \varphi^{(\psi)}$; ma allora, siccome tutti gli assiomi di $\mathbf{T}^{(\psi)}$ sono teoremi di $\mathbf{T}$ e per l'ipotesi data, si ha $\mathbf{T} \vdash \varphi^{(\psi)}$. $\square$

3.3 Insiemi costruibili

In questo paragrafo si definirà la classe degli insiemi costruibili, la quale, come si dimostrerà nel prossimo paragrafo, è un modello interno di **ZF**. La nozione tramite la quale si definirà la classe degli insiemi costruibili è quella di costruibilità relativa.

Per arrivare a tale definizione, è necessario aggiungere all'alfabeto semantico di **KPI** un elemento $\langle 1,1\rangle$, il quale rappresenta un simbolo predicativo monadico. La definizione di soddisfazione, quindi, sarà ora data per strutture del tipo $\langle x,\in,z\rangle$, con $z \subseteq x$ e dovrà tradurre il fatto che il simbolo $\langle 1,1\rangle$ dovrà essere interpretato sul sottoinsieme z di x.

Per ottenere tale risultato sarà necessario introdurre la clausola

$$y = \langle\langle 1,1\rangle, pr_2(y)\rangle \Rightarrow (f \in Sod(y,\langle x,\in,z\rangle) \iff f(pr_2(y)) \in z)$$

Si indicherà con $Sod(f,y,\langle x,\in,z\rangle)$ la formula di soddisfazione così modificata.

Definizione (Insieme dei sottoinsiemi di x definibili parametricamente)

Sia a una variabile fissata. L'insieme dei sottoinsiemi di x definibili parametricamente in $\langle x,\in,x\cap a\rangle$ è l'insieme

$$Def_a(x) = \{u : u \subseteq x \wedge \exists y, f\,(Form(f) \wedge \ulcorner v_0 \urcorner \in vl(y) \wedge (f\colon (vl(y) - \{\ulcorner v_0 \urcorner\}) \to x) \wedge$$
$$\wedge \forall z(z \in u \iff z \in x \wedge Sod(f \cup \{\langle \ulcorner v_0 \urcorner, z\rangle\}, y, \langle x,\in,x\cap a\rangle))))\}$$

Se $x = \varnothing$, si ponga $Def_a(x) = \{x\}$.

Dalla definizione si possono derivare i seguenti lemmi, utili per dimostrare che $Def_a(x)$ è un insieme.

Lemma 3.2.1

KPI $\vdash \forall a,\, x\exists!\, z\,(z = Def_a(x))$ e l'operazione $Def_a(x)$ è $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$.

Dimostrazione. Definiamo il $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-predicato "y è una formula con n variabili libere" come

$$\mathrm{Form}^{(n)}(y) \iff Form(y) \wedge im(I(y)) = n$$

dove $I(y)$ è la biezione tra $vl(y)$ e un numero naturale.

All'interno di **KPI**, $\mathrm{Form}^{(n)}$ è un insieme, quindi $\forall n \in \omega$ e $\forall y \in Form^{(n+1)}$, con $\ulcorner v_0 \urcorner \in vl(y)$ e $\forall f$ interpretazione di $vl(y) - \{\ulcorner v_0 \urcorner\}$ in x, si ha

$$\exists u \forall z(z \in u \iff z \in x \wedge Sod(f \cup \{\langle \ulcorner v_0 \urcorner, z\rangle\}, y, \langle x,\in,x\cap a\rangle))$$

Ma allora $\forall n \in \omega$ and $\forall y$, $\exists u$ tale che $\forall f : (vl(y) - \{\ulcorner v \urcorner\}) \to x$

$$\forall z (z \in u \Rightarrow z \in x \wedge Sod(f \cup \{\langle \ulcorner v_0 \urcorner, z \rangle\}, y, \langle x, \in, x \cap a \rangle))$$

$Def_a(x)$ è la riunione, rispetto a $n \in \omega$ di tutti questi u. La conclusione segue dal fatto che essa esiste per il $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-rimpiazzamento ed è $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$.

$\square$

Lemma 3.2.2

Se H è un modello interno transitivo di **KPI** e $a, x, z \in H$ allora

$$z = Def_a(x) \iff (z = Def_a(x))^{(H)}$$

In seguito l'uso della formula Sod sarà abbreviato, utilizzando la notazione della semantica intuitiva. Si scriverà infatti $\langle x, \in, x \cap a \rangle \models y(b)$ per

$$\exists i (N(i) \wedge vl(y) = \{\ulcorner v_i \urcorner\} \wedge Sod(\{\langle \ulcorner v_i \urcorner, b \rangle\}, y, \langle x, \in, x \cap a \rangle)$$

Nel caso in cui si considerino solo strutture del tipo $\langle x, \in, x \cap a \rangle$, con a fissato, si scriverà esclusivamente $y \models y(b)$.

A partire da questa notazione, la definizione della classe degli insiemi costruibili è la seguente.

Definizione

La classe degli insiemi costruibili relativamente ad a, o costruiti a partire da a, è la riunione dell'immagine della seguente operazione

- $L_0(a) = \varnothing$
- $L_{\alpha+1}(a) = Def_a(L_\alpha(a))$
- $L_\lambda(a) = \bigcup \{L_\alpha(a) : \alpha \in \lambda\}$ se λ è limite.

Si dice classe degli insiemi costruibili, la classe degli insiemi costruibili da $\varnothing$.

In seguito si indicherà con $x \in L(a)$ la formula $\exists \alpha (x \in L_\alpha(a))$. Sopprimendo a in tutte le notazioni, si indicherà con $x \in L$ la formula $\exists \alpha (x \in L_\alpha)$. Se $x \in L$ si dirà che x è costruibile, e se $x \in L(a)$ che è costruibile da a.

Definizione (**Ordine di x relativamente ad a**)

Se $x \in L(a)$, si definisce l'ordine di x relativamente ad a nel seguente modo

$$od_a(x) = \mu\alpha(x \in L_\alpha(a))$$

I seguenti lemmi sono funzionali a dimostrare che $L(a)$ è una gerarchia. Si ricorda che la definizione di gerarchia in **KPI** è la seguente.

Definizione (Gerarchia)

Se H_α è un'operazione definita su ordinali, H è una gerarchia se valgono le seguenti proposizioni

- $\forall\, \alpha Trans(H_\alpha)$
- $\alpha \in \beta \rightarrow H_\alpha \subseteq H_\beta$
- $H_\lambda = \bigcup\{H_\alpha : \alpha \in \lambda\}$ se λ è ordinale limite.

Di seguito si indicherà con $H(x)$ la formula $\exists\alpha(x \in H_\alpha)$.

Lemma 3.2.3

$$\mathbf{KPI} \vdash Trans(L_\alpha)$$

Dimostrazione. Il lemma si dimostra per induzione sulla variabile α. E' sufficiente limitarsi al caso del successore, dato che la riunione di insiemi transitivi è a sua volta transitiva. Si supponga che $v_i \in x \in L_{\alpha+1}(a)$, allora $x \subseteq L_\alpha$ e $v_i \in L_\alpha$. Per ipotesi induttiva si ha $Trans(L_\alpha)$, $v_i \subseteq L_\alpha$, ma v_i è definibile in L_α dalla formula $\ulcorner v_0 \in v_i \urcorner$, la quale presenta come parametro $v_i \in L_\alpha$, per cui $v_i \in L_{\alpha+1}(a)$. Infatti si ha

$$v_0 \in v_i \iff (v_0 \in v_i)^{(L_\alpha)} \iff L_\alpha \models \ulcorner v_0 \in v_i \urcorner(v_0, v_i)$$

da cui segue la conclusione. $\square$

Corollario

$$\mathbf{KPI} \vdash Trans(L_\alpha)$$

Lemma 3.2.4

$$\mathbf{KPI} \vdash L_\alpha \in L_{\alpha+1}(a)$$

Dimostrazione. L_α è definibile in L_α con la formula $\ulcorner v_0 = v_0 \urcorner$. □

Corollario

$$\mathbf{KPI} \vdash L_\alpha \in L(a)$$

Dalla transitività di $L(a)$ e di L_α si ricava che se $\alpha \in \beta$ allora $L_\alpha \subseteq L_\beta(a)$. Questo fatto è sufficiente a dimostrare il seguente

Teorema 3.1.1

$$\mathbf{KPI} \vdash Ger(L(a)).$$

In analogia con l'uso della notazione $x \in L(a)$, possiamo estendere ad $L(a)$ le notazioni delle usuali operazioni insiemistiche.

Lemma 3.2.5

$$\mathbf{ZF} \vdash L(a) = L(a \cap L(a))$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $L_\alpha = L_\alpha(a \cap L(a))$ per induzione su α. Consideriamo il caso di un ordinale successore. Se $x \in L_{\alpha+1}(a)$, x è definibile in L_α da una formula, precisamente dalla struttura $\langle L_\alpha, \in, L_\alpha \cap a \rangle$. Tale struttura è, per ipotesi induttiva, proprio $\langle L_\alpha(a \cap L(a)), \in, L_\alpha(a \cap L(a)) \cap a \rangle$ e quindi lo è anche $\langle L_\alpha(a \cap L(a)), \in, L_\alpha(a \cap L(a)) \cap (a \cap L(a)) \rangle$. La stessa formula definisce x come sottoinsieme di questa struttura. Analogamente si verifica il viceversa. □

Lemma 3.2.6

$$\mathbf{KPI} \vdash a \subseteq L(a) \Rightarrow a \in L(a)$$

Il seguente lemma è una conseguenza diretta del lemma precedente.

Lemma 3.2.7

$$\mathbf{ZF} \vdash a \cap L(a) \in L(a)$$

Dimostrazione. $a \cap L(a) \subseteq L(a) = L(a \cap L(a))$, quindi, grazie al lemma precedente, segue la conclusione

$$a \cap L(a) \in L(a \cap L(a)) = L(a)$$

□

A partire da questi lemmi sarà possibile assumere in seguito, se necessario, $a \in L(a)$.
Si dimostra infine che $L(a)$ contiene tutti gli ordinali.

Lemma 3.2.8

$$\mathbf{KPI} \vdash \mathbf{V}_\omega = \mathbf{L}_\omega(a)$$

Dimostrazione. Vale $\mathbf{V}_n = \mathbf{L}_n(a)\ \forall n$ in quanto tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{V}_n$ sono definiti da Δ_0-formule le quali presentano parametri in $\mathbf{V}_n$. □

Nel prossimo paragrafo si dimostrerà che $L(a)$ è un modello interno di **KPI** e **ZFC**.

3.4 Il modello interno degli insiemi costruibili

Teorema 3.3.1

Per ogni assioma φ di **KPI**

$$\mathbf{KPI} \vdash \varphi^{L(a)}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per tutti gli assiomi non banali.
Il principale approccio che si cercherà di relativizzare, a partire dall'assioma stesso, ogni assioma ad $L(a)$. Nel caso dell'assioma di separazione si farà uso della proprietà di assolutezza delle Δ_0-formule, motivo per cui la dimostrazione dovrà essere modificata per adattarla in seguito alla teoria **ZF**.

Assioma di estensionalità

Segue dalla transitività di $L(a)$, dal momento che ogni insieme transitivo è estensionale.

Assioma della coppia

Se $x, yinL(a)$, sia $\alpha = \max(od_\alpha(x), od_\alpha(y))$. Allora $x, y \in L(a)$ e L_α soddisfa l'assioma della coppia: $\forall x, y \in L(a)\, \exists z \in L(a)\, (x \in z \wedge y \in z)$.

I casi successivi sono tutti casi particolari del seguente

Lemma 3.3.1

Se $\varphi(v_0, \ldots, v_n)$ è una Δ_0-formula, allora

$$KP \vdash Trans_x(\psi(x, u_i)) \wedge \psi(v_0, u) \wedge \ldots \wedge \psi(v_n, u) \to (\varphi(v_0, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi^\psi(v_0, \ldots, v_n)).$$

Dimostrazione. Tramite induzione sulla complessità di φ, con ψ fissata. Consideriamo solo il caso che φ sia $\exists v_{n+1} \in v_j \wedge \chi$, essendo gli altri sono banali. Se $\psi(v_j, u_i)$, φ implica che $\exists v_{n+1}(\psi(v_{n+1}, u_i) \wedge v_{n+1} \in v_j \wedge \chi^\psi)$, che è appunto φ^ψ. Per ipotesi induttiva, $\exists v_{n+1}(\psi(v_{n+1}, u_i) \wedge v_{n+1} \in v_j \wedge \chi^\psi)$, che è appunto φ^ψ. Il viceversa è evidente.

□

Assioma dell'unione

Se $x \in L_\alpha$ e $Trans(L_\alpha)$, da cui che segue $L_\alpha \in L(a)$ soddisfa l'assioma dell'unione relativizzato a $L(a)$.

Assioma dell'infinito

$\omega \in L(a)$ e ω soddisfa le definizione di insieme infinito relativizzata a $L(a)$:

$$\varnothing \in \omega \wedge \forall x \in L(a)\, (x \in \omega \to x \cup \{x\} \in \omega)$$

Assioma di fondazione

Supponiamo $\exists x \in L(a)(\varphi^{L(a)}(x, u_i))$ e che $u_i \in L(a)$. E' necessario dimostrare che

$$\exists x \in L(a)(\varphi^{L(a)}(x, u_i)) \wedge \forall y \in L(a)(y \in x \to \neg\varphi^{L(a)}(y, u_i))$$

Applicando l'assioma di fondazione di **KPI** alla formula $\forall x \in L(a) \wedge \varphi^{L(a)}(x, u)$, la quale per ipotesi è soddisfatta da almeno un x, si ottiene

$$\exists\, x(x \in L(a) \wedge \varphi^{L(a)}(x, u_i) \wedge \forall\, y \in x\, \neg(y \in L(a) \wedge \varphi^{L(a)}(y, u_i)))$$

Per la transitività di $L(a)$ se $y \in x$ allora $y \in L(a)$, ovvero

$$\forall y \in L(a)(y \in x \to \neg\varphi^{L(a)}(y, u_i))$$

Assioma di rimpiazzamento

Supponiamo che

$$\forall y \in L(a)(y \in x \to \exists z \in L(a)(\varphi^{L(a)}(x, y, z, u_i)))$$

e che $u_i \in L(a)$ e $x \in L(a)$, dove φ è una Δ_0-formula. Da questo fatto segue che

$$\forall y \in x\, \exists\alpha(\exists z \in L_\alpha(\varphi^{L(a)}))$$

dove $\exists z \in L_\alpha(\varphi^{L(a)})$ è una Σ_1^{KP}-formula. Per il rimpiazzamento di **KPI** allora

$$\exists\beta\, \forall y \in x\, \exists z \in L_\beta(a)(\varphi^{L(a)})$$

e quindi $\exists u \in L(a)\forall y \in x\exists z \in u(\varphi^{L(a)})$ che, tenendo conto sempre della transitività di $L(a)$, è proprio la relativizzazione del rimpiazzamento a $L(a)$.

Assioma di separazione

E' necessario dimostrare che $\forall\varphi$ tale che φ è una Δ_0-formula.

Assumendo che $u_i \in L(a)$, vale

$$\forall x \in L(a)\exists y \in L(a)\forall z \in L(a)(z \in y \iff z \in x \wedge \varphi^{L(a)}(z, x, u_i))$$

Per il lemma introdotto all'inizio della dimostrazione, segue che se α è il massimo degli ordini di x e u_i, si ha

$$z \in x \wedge \varphi^{L(a)}(z, x, u_i) \iff z \in x \wedge \varphi^{L_\alpha(a)}(z, x, u_i) \iff z \in x \wedge L_\alpha(a) \models \ulcorner\varphi\urcorner(z, x, u_i)$$

Segue che l'insieme $y = \{z \in x : L_\alpha \vDash \ulcorner\varphi\urcorner(z, x, u_i)\}$, la cui esistenza si dimostra applicando l'assioma di separazione alla formula $L_\alpha \vDash \ulcorner\varphi\urcorner(z, x, u_i)$, appartiene a $L_{\alpha+1}(a)$ e quindi a L_α. Dal momento che esso soddisfa l'assioma di separazione per φ relativizzato a $L(a)$ si conclude. $\square$

Teorema 3.3.2

Per ogni assioma φ di **ZF**

$$\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{(L(a))}$$

Dimostrazione. E' sufficiente analizzare l'assioma di separazione e di potenza, poiché per gli altri valgono i risultati dimostrati con il teorema precedente.

Assioma di Separazione

E' necessario dimostrare che $\forall\varphi$, dove φ è una formula, se $u_i \in la$ si ha

$$\forall x \in L(a) \exists y \in L(a) \forall z \in L(a)(z \in y \iff z \in x \wedge \varphi^{L(a)}(z, x, u_i))$$

Si consideri l'insieme $y = \{z \in x : \varphi^{L(a)}(z, x, u_i)\}$, la cui esistenza è dimostrabile in **ZF**. Sia α il massimo degli ordini di x e u_i. Non è possibile dimostrare che $y = \{z \in x : \varphi^{L_\alpha}(z, x, u_i)\}$ se φ non è una Δ_0-formula. Il principio di riflessione, garantisce tuttavia l'esistenza di β tale che $\alpha \in \beta$ e

$$z \in x \wedge \varphi^{L(a)}(z, x, u_i) \iff z \in x \wedge \varphi^{L_\beta(a)}(z, x, u_i)$$

quindi $y = \{z \in x : L_\beta(a) \vDash \ulcorner\varphi\urcorner(z, x, u_i)\}$. Allora $y \in L_{\beta+1}(a)$ e y soddisfa l'assioma di separazione per φ relativizzato a $L(a)$.

E' importante notare come il principio di riflessione non dia alcuna valutazione della grandezza di β. Questo problema sarà alla base delle complicazioni nel calcolo della cardinalità della potenza di x.

Assioma della potenza

Bisogna dimostrare che se $x \in L(a) \Rightarrow \exists y \in L(a) \forall z \in L(a)(z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$. Gli z da considerare sono elementi di $\mathcal{P}(x) \cap L(a)$, ovvero dell'insieme rappresentante la potenza di x relativizzata ad $L(a)$. Per ogni $z \in \mathcal{P}(x) \cap L(a)\, \exists\alpha$ tale che $z \in L_\alpha$. Allora esiste per il rimpiazzamento un β tale che $\forall\ z \in \mathcal{P}(x) \cap L(a)$ si ha $z \in L_\beta(a)$, e $L_\beta(a)$ soddisfa l'assioma della potenza relativizzato a $L(a)$.

$\square$

A partire dal risultato appena dimostrato è possibile introdurre i seguenti lemmi, al fine di dimostrare un importante risultato di **KPI**.

Lemma 3.3.3

Se $F(x, u_i)$ è una $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-operazione totale si ha

$$\mathbf{KPI} \vdash u_i \in L(a) \Rightarrow \forall x \in L(a) \exists y \in L(a)(y = F(x, u_i))$$

Dimostrazione. Affermare che F è una $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-operazione totale equivale a dire

$$\mathbf{KPI} \vdash \forall x \exists y(y = F(x, u_i)) \text{ e } y = F(x, u_i) \text{ è una } \Delta_1^{\mathbf{KPI}}\text{-formula}$$

Ma allora, dai risultati sulla teoria dei modelli interni del primo paragrafo, segue

$$\mathbf{KPI} \vdash \forall x \in L(a) \exists y \in L(a)(y = F(x, u_i)^{L(a)})$$

ed inoltre

$$\mathbf{KPI} \vdash x, y, u_i \in L(a) \Rightarrow (y = F(x, u_i) \iff y = F(x, u_i)^{L(a)})$$

da cui segue la conclusione. □

Le operazioni di coppia, unione, ed ω figurano come casi particolari di questo lemma. Nel caso in cui F non sia totale, ma $dom(F)$, relativamente alla variabile x, sia contenuto in $L(a)$, vale

$$\forall x \in dom(F)\, \exists y \in L(a)\, (y = F(x, u_i))$$

Tale risultato si può formalizzare nel seguente

Lemma 3.3.2

Se $F(x, u_i)$ è una $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-operazione, allora

$$\mathbf{KPI} \vdash u_i \in L(a) \wedge Dom(F) \subseteq L(a) \Rightarrow \bigcup im(F) \subseteq L(a).$$

Dimostrazione. $z \in \bigcup im(F) \iff \exists x \in dom(F)\, \exists y\, (y = F(x, u_i) \wedge z \in y)$. Questo implica che $\exists y \in L(a)(y = F(x, u_i) \wedge z \in y)$, da cui si conclude, per la transitività di $L(a)$ che $z \in L(a)$. □

A partire da questi risultati possiamo dimostrare il seguente fondamentale

Teorema 3.3.3

$$\mathbf{KPI} \vdash L \subseteq L(a)$$

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema segue dal fatto che L è la riunione dell'immagine dell'operazione L_α. Utilizzando il lemma precedente si conclude. $\square$

3.5 L'assioma di costruibilità

In questo breve paragrafo si dimostrerà la coerenza degli assiomi di costruibilità relativamente alle teorie **KPI** e **ZF**. L'assioma di costruibilità relativa ad a è l'assioma di restrizione a $L(a)$, il quale, pur essendo spesso riportato nella sua scrittura $V = L(a)$, presenta la seguente forma estesa

$$\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$$

L'assioma di costruibilità è l'enunciato

$$V = L$$

Teorema 3.4.1

$$\mathbf{KPI} \vdash a \in L(a) \Rightarrow (V = L(a))^{L(a)}$$

Dimostrazione. E' necessario dimostrare che, se $a \in L(a)$, allora

$$\forall x \in L(a)\, \exists \alpha (x \in L_\alpha(a))^{L(a)}$$

dove $x \in L_\alpha$ è una $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-formula. Se $a \in L(a)$, l'operazione L_α soddisfa le ipotesi dei lemmi **3.3.2** e **3.3.3** da cui segue

$$x \in L_\alpha(a) \iff \exists y (y = L_\alpha(a) \wedge x \in y) \iff$$
$$\iff \exists y \in L(a)(y = L_\alpha(a) \wedge x \in y) \iff$$
$$\iff \exists y \in L(a)((y = L_\alpha(a))^{L(a)} \wedge x \in y) \iff (x \in L_\alpha(a))^{L(a)}$$

da cui si deriva la conclusione. $\square$

Teorema 3.4.2

$$\mathbf{ZF} \vdash (V = L(a))^{L(a)}$$

Dimostrazione. Se $a \notin L(a)$, possiamo sostituire a con $a \cap L(a)$. Segue che $a \cap L(a) \in L(a \cap L(a)) = L(a)$, ed inoltre $L_\alpha(a \cap L(a)) = L_\alpha$. E' possibile dunque effettuare un ragionamento analogo per $L(a \cap L(a))$. $\square$

L'enunciato si può esprimere equivalentemente affermando che $V = L(a)$ vale in $L(a)$. Le conseguenze di $V = L(a)$ sono consistenti con **ZF**, ed il loro studio sarà alla base di questo e dei prossimi capitoli, ponendo una particolare attenzione ai problemi del continuo.

Capitolo 4

Modelli a valori booleani

4.1 Algebra di Boole e realizzazioni Booleane

Definizione(Reticolo): Un reticolo è un insieme non vuoto parzialmente ordinato all'interno del quale ogni coppia di elementi $\{x, y\}$ ammette estremo superiore ed estremo inferiore. Si indicherà sup $\{x, y\}$ con $x \vee y$, ed analogamente inf $\{x, y\}$ con $x \wedge y$.

Definizione (Reticolo distributivo): Un reticolo è detto distributivo quando, in modo equivalente, vale una delle seguenti condizioni.

- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Definizione (Reticolo limitato): Un reticolo è detto limitato quando esistono massimo 1 e minimo 0, con $1 \neq 0$.

Definizione (Reticolo complementato): Un reticolo è detto complementato quando $\forall a \in B\, \exists b \in B\, (a \wedge b = 0 \,\&\, a \vee b = 1)$, dove b viene detto complemento di a.

Definizione (Algebra di Boole): Un reticolo distribuivo, limitato e complementato è detto Algebra di Boole.

A partire da un'algebra di Boole è possibile definire il concetto di realizzazione booleana.

Definizione (Realizzazione Booleana): Sia $\mathcal{L}_r$ un linguaggio con un solo simbolo predicativo r. Una realizzazione booleana $\mathcal{M}^B$ per $\mathcal{L}_r$ è una struttura $< M, R >$ dove M è un insieme e R un'applicazione da M^2 in B.
A partire dalla definizione, è possibile definire una valutazione delle formule di $\mathcal{L}_r$ in $\mathcal{M}^B$ nel seguente modo: si ampli il linguaggio $\mathcal{L}_r$ aggiungendo un simbolo, qui denotato come c, per ogni elemento di M. Ad ogni enunciato φ del linguaggio ottenuto, il quale verrà indicato come $\mathcal{L}_r^+$, si associ un elemento $[\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}}$ di B mediante l'uso della seguente definizione induttiva:

- Se φ è $r(c_1, c_2) \longrightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = \mathrm{R}(c_1, c_2)$
- se φ è $\neg\psi \longrightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = [\![\psi]\!]'_{\mathbf{B}}$
- se φ è $\psi \vee \chi \longrightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = [\![\psi]\!]_{\mathbf{B}} \vee [\![\chi]\!]_{\mathbf{B}}$
- se φ è $\exists x\, \psi(x) \longrightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = \sup\{[\![\psi(c)]\!]_{\mathbf{B}} : c \in M\}$

Diremo che φ è valido in $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$, dove φ è un enunciato di $\mathcal{L}_r^+$, se $[\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}}$. Data una teoria **T** diremo che $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$ è un modello di tale teoria se per ogni assioma di **T** esso è valido in $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$. Da questa definizione si può derivare come tutti i teoremi di **T** siano $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$-validi, ovvero le regole di derivazione sono conservate dalla valutazione booleana.
È possibile generalizzare quanto mostrato fino ad ora a linguaggi qualunque. È necessario però porre attenzione sulla scelta dell'interpretazione dei simboli predicativi del linguaggio, soprattutto se tra questi è presente l'identità.

4.2 La classe $\mathcal{V}^{\mathbf{B}}$

Premessa: nel corso di questo e dei successivi capitoli, nel caso in cui non ci sia pericolo di ambiguità, verrà omesso l'indice **B** per lo zero e per l'uno. Allo stesso modo si scriverà $[\![\varphi]\!]$ invece di $[\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}}$. Analogamente ci si comporterà con le operazioni, le quali presenteranno l'indice **B** solamente nei caso in cui siano considerate contemporaneamente due algebre

$\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}'$. Tutte le definizioni, i teoremi ed i lemmi in cui compare $\mathbf{B}$ sottointendono la premessa che $\mathbf{B}$ sia un'algebra di Boole.

Definiamo in **ZFC** una classe $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ sugli ordinali tramite ricorsione nel seguente modo:

- $\mathcal{V}_0^{(\mathbf{B})} = \varnothing$
- $\mathcal{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B})} = \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} : \alpha \in \lambda\}$ se λ è un ordinale limite
- $\mathcal{V}_\lambda^{(\mathbf{B})} = \{f : Fn(f) \wedge dom(f) \subseteq \mathcal{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} \wedge im(f) \subseteq \mathbf{B}\}$

Definiamo inoltre $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}(x) \iff \exists\alpha(x \in \mathcal{V}_\alpha^{(\mathbf{B})})$ e $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})} = \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha^{(\mathbf{B})} : Ord(\alpha)\}$. In seguito si useranno le lettere u, v, w, z, t come variabili per gli elementi di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, quindi, ad esempio, $\varphi(u)$ indicherà $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}(u) \wedge \varphi(u)$.

Si definiranno ora due importanti operazioni, le quali associano a coppie di elementi di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, elementi di $\mathbf{B}$; si indicheranno tali operazioni rispettivamente con $[\![u = v]\!]_{\mathbf{B}}$ e $[\![u \in v]\!]_{\mathbf{B}}$. Tali operazioni saranno necessarie per una valutazione booleana delle formule di $\mathcal{L}$. Volendo ottenere la validità di tutti gli assiomi di **ZFC**, tali operazioni dovranno essere definite in modo opportuno. In particolare esse verranno definite in modo tale da rispettare l'assioma di estensionalità e le leggi dell'identità.

Di seguito l'operazione $\Rightarrow$ rappresenterà l'operazione Booleana definita nel seguente modo: $b_1 \Rightarrow b_2 = b_1' \vee b_2$. L'operazione $\iff$ rappresenterà l'operazione Booleana definita nel seguente modo: $b_1 \iff b_2 = (b_1 \Rightarrow b_2) \wedge (b_2 \Rightarrow b_1)$. Inoltre $b_1 \Rightarrow b_2 = 1$ se e solo se $b_1 \leq_{\mathbf{B}} b_2$, dove $\leq_{\mathbf{B}}$ rappresenta la relazione di minore uguale booelana definita su $\mathbf{B}$.

Possiamo a questo punto procedere con la definizione delle operazioni.

Definizione: $\forall\, u, v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

- $[\![u \in v]\!]_{\mathbf{B}} = \sup\,\{v(w) \wedge [\![u = w]\!]_{\mathbf{B}} : w \in dom(v)\}$
- $[\![u = v]\!]_{\mathbf{B}} = \inf\,\{u(w) \Rightarrow [\![w \in v]\!]_{\mathbf{B}} : w \in dom(u)\} \wedge$

$$\wedge \inf\{v(w) \Rightarrow [\![w \in u]\!]_{\mathbf{B}} : w \in dom(v)\}$$

Il motivo per cui la definizione di queste operazioni viene effettuata tramite ricorsione è il seguente. Si definisca tra le coppie $\langle u, v\rangle$ e $\langle u', v'\rangle$ una relazione di equivalenza, la quale vale se e solo se $r(u) = r(u')$ e $r(v) = r(v')$. A partire dalle classi di equivalenza di questa relazione, si definisce un ordine rispetto al rango, ponendo che $\langle u, v\rangle$ precende $\langle u', v'\rangle$ se $r(u) < r(u')$ o, in alternativa, $r(v) < r(v')$. Tale ordine, come si può facilmente dimostrare, è un buon ordine e la definizione per ricorsione si basa su di esso.
Il significato della definizione di $[\![u \in v]\!]_{\mathbf{B}}$ e $[\![u = v]\!]_{\mathbf{B}}$ si può spiegare nel seguente modo. Il valore booleano $v(w)$ di $w \in dom(v)$ può essere inteso come una prima approssimazione del valore booleano di $w \in v$, ovvero una stima iniziale della probabilità che $w \in v$. La probabilità effettiva va calcolata considerando anche la misura in cui w coincide con altri elementi che appartengono a v. Analogamente per w quando non appartenga a $dom(v)$.
Si può ora definire la valutazione booleana delle formule.

Definizione Per ogni formula $\varphi(v_1, ..., v_n)$ di $\mathcal{L}$ e per ogni $u_1, ..., u_n \in \mathcal{V}^{\mathbf{B}}$, $[\![\varphi(v_1, ..., v_n)]\!]_{\mathbf{B}}$ è l'elemento di $\mathbf{B}$ definito tramite ricorsione nel seguente modo:

- se $\varphi(u_i)$ è $u \in v$ o $u = v$, $[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}}$=$[\![u \in v]\!]_{\mathbf{B}}$ oppure $[\![u = v]\!]_{\mathbf{B}}$
- se $\varphi(u_i)$ è $\neg\psi(u_i)$, $[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}}$= $[\![\psi(u_i)]\!]'_{\mathbf{B}}$
- se $\varphi(u_i)$ è $\psi(u_i) \vee \chi(u_i)$, $[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}}$=$[\![\psi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}} \vee [\![\chi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}}$
- se $\varphi(u_i)$ è $\exists x\, \psi(x, u_i)$, $[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}}$= sup $\{[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}} : c \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}\}$

Sia φ un enunciato di $\mathcal{L}$. Diremo che φ è $\mathbf{B}$-valido se $[\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}}$. Diremo inoltre che una formula $\varphi(u_i)$ è $\mathbf{B}$-valida se per ogni $u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si ha $[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}}$.
Teorema 4.2.1
Ogni assioma del calcolo dei predicati con identità su $\mathcal{L}$ è $\mathbf{B}$-valido.

A partire da questo teorema è possibile derivare le seguenti leggi distributive, valide per un'algebra di Boole completa.

Lemma 4.2.1

Se $\mathbf{B}$ è un'algebra di Boole completa $S \subseteq \mathbf{B}$, allora

- $b \vee inf\, S \;=\; inf\{b \vee s \,:\, s \in S\}$
- $b \wedge sup\, S \;=\; su\{b \wedge s \,:\, s \in S\}$

Esaminiamo ora la $\mathbf{B}$-validità degli assiomi di identità.

Lemma 4.2.2

per ogni $u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ e $v \in dom(u)$ si ha:

- $[\![u = u]\!]_{\mathbf{B}} = 1$
- $u(v) \leq [\![v \in u]\!]_{\mathbf{B}}$

Lemma 4.2.3

$$[\![u = v]\!] \;=\; [\![v = u]\!]$$

Lemma 4.2.4

Per ogni $u, v, w \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

- $[\![u = v]\!] \wedge [\![u \in w]\!] \leq [\![v \in w]\!]$
- $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!]$
- $[\![u = v]\!] \wedge [\![w \in u]\!] \leq [\![w \in v]\!]$

Lemma 4.2.5

Per ogni formula $\varphi(v_0, v_i)$ di $\mathcal{L}$ e per ogni $v.u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u, u_i)]\!] \leq [\![\varphi(u, u_i)]\!]$$

Corollario al Lemma 4.2.5

Per ogni formula φ di $\mathcal{L}$ e per ogni $u, u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si ha

$$[\![\varphi(u, u_i)]\!] = \sup\{[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(v, u_i]\!] \,:\, v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}\}$$

Teorema 4.2.2

Se φ è un teorema del calcolo dei predicati con identità, allora $[\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = 1$ per ogni algebra $\mathbf{B}$.

Lemma 4.2.6

Per ogni formula φ di $\mathcal{L}$ e ogni $u, u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si ha

- $[\![\exists v \in u\, \varphi(v, u_i)]\!] \,=\, sup\{u(v) \wedge [\![\varphi(v, u_i) : v \in dom(u)]\!]\}$
- $[\![\forall v \in u\, \varphi(v, u_i)]\!] \,=\, inf\{u(v) \Rightarrow [\![\varphi(v, u_i)]\!] : v \in dom(u)\}$

Lemma 4.2.7

Per ogni formula φ di $\mathcal{L}$ si ha:

$$\forall u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}\, (\forall v \in dom(u)\, \varphi(v) \Rightarrow \varphi(u)) \,\Rightarrow\, \forall u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}\, \varphi(u)$$

Prima di esaminare la $\mathbf{B}-$validità degli assiomi di **ZFC**, è utile considerare più nel dettaglio la struttura delle classi $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$. In questo capitolo ci si concentrerà sulle relazioni tra $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ diversi, al variare di $\mathbf{B}$, a partire dalle sottoalgebre.

Definizione (Sottoalgebra regolare)

Un'algebra $\mathbf{B}'$ si dice sottoalgebra regolare di $\mathbf{B}$ se e solo se è una sottoalgebra di $\mathbf{B}$, è completa, e per $S \subseteq \mathbf{B}'$ $\sup\limits_{\mathbf{B}'} S = \sup\limits_{\mathbf{B}} S$.
Da questa definizione deriva il seguente teorema.

Teorema 4.2.3

Se $\mathbf{B}'$ è una sottoalgebra regolare di $\mathbf{B}$ allora $\mathcal{V}^{(\mathbf{B}')} \subseteq \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ e per ogni $u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B}')}$ e ogni Δ_0-formula φ di $\mathcal{L}$ si ha

$$[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}'} = [\![\varphi(u_i]\!]_{\mathbf{B}}$$

Corollario al Teorema 4.2.3

Se $\mathbf{B}'$ è una sottoalgebra regolare di $\mathbf{B}$, φ una Σ_1 formula e $u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B}')}$ allora

$$[\![\varphi(u_i)]\!]_{\mathbf{B}'} \leq [\![\varphi(u_i]\!]_{\mathbf{B}}$$

4.3 $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ come modello di ZFC

In questa sezione si dimostrerà come gli assiomi di **ZFC** siano **B**-validi per ogni **B** completa.

Teorema 4.3.1

Per ogni assioma φ di **ZFC** si ha

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{"}\mathbf{B} \text{ è un'algebra di Boole completa"} \Rightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}})$$

Dimostrazione. Segue la dimostrazione separata per ogni assioma di **ZFC**.

Assioma di estensionalità

Segue dalla definizione di $[\![u = v]\!]$ e dal lemma sui quantificatori limitati.

Assioma della coppia

Siano $u, v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, allora $v, b \in \mathcal{V}_{\alpha}^{(\mathbf{B})}$. Sia $z \in \mathcal{V}_{\alpha+1}^{(\mathbf{B})}$ tale che $dom(z) = \{u, v\} \subseteq \mathcal{V}_{\alpha}^{(\mathbf{B})}$ e $z(u) = z(v) = 1$. Segue che

$$[\![\forall x(x \in z \iff x = u \vee x = v)]\!] = 1$$

e quindi l'assioma della coppia, il cui valore è

$$\inf_{u,v} \left\{ \sup_{z} \{[\![\forall x(x \in z \iff x = u \vee x = v)]\!]\} \right\}$$

è **B**-valido.

Assioma dell'unione

Dato $u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si consideri $v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che

$$dom(v) = \bigcup\{dom(w) : w \in dom(u)\}$$

dove $v(w) = [\![\exists x \in u(w \in x)]\!]$ per $w \in dom(v)$ Affermare che v rende **B**-valido l'assioma dell'unione equivale ad affermare che

$$[\![\forall x(x \in v \iff \exists y \in u(x \in y))]\!] = 1$$

A partire dalla definizione di v si dimostra che

$$[\![\inf_{w \in dom(v)} \left\{ v(w) \Rightarrow \sup_{t \in dom(u)} \{u(t) \cap [\![w \in t]\!]\} \right\}]\!] = 1$$

dal momento che $\forall w \in dom(v)$, esso si riduce a $v(w) \Rightarrow v(w)$, che vale ovviamente 1.

Per concludere la dimostrazione è necessario dimostrare che, dato w qualunque, si ha

$$sup\{u(t) \cap [\![w \in t]\!]\} \leq [\![w \in t]\!]$$

dove il secondo membro della disuguaglianza è equivalente a

$$\sup_{z \in dom(v)} \left\{ \sup_{t \in dom(u)} \{u(t) \cap [\![z \in t]\!] \cap [\![z = w]\!]\} \right\}$$

Per w generico, $\sup\limits_{t \in dom(u)} \{u(t) \cap [\![w \in t]\!]\}$ si può scrivere come

$$\sup_{t \in dom(u)} \left\{ \sup_{y \in dom(t)} \{u(t) \cap t(y) \cap [\![w = y]\!]\} \right\} \leq$$
$$\leq \sup_{t \in dom(u)} \left\{ \sup_{y \in dom(t)} \{u(t) \cap [\![y \in t]\!] \cap [\![w = y]\!]\} \right\}$$

ma $(y \in dom(t) \wedge t \in dom(u)) \Rightarrow y \in dom(v)$, per cui è possibile continuare con la maggiorazione

$$\leq \sup_{t \in dom(u)} \left\{ \sup_{y \in dom(v)} \{u(t) \cap [\![y \in t]\!] \cap [\![w = y]\!]\} \right\}$$

che permette di concludere avendo raggiunto il risultato desiderato.

Assioma di separazione

Sia data la formula $\varphi(v_0, v_i)$ di $\mathcal{L}$, dove $u, u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$. Si consideri v tale che $dom(v) = dom(u)$ e $\forall w \in dom(v)$ si ha

$$v(w) = u(w) \cap [\![\varphi(w, u_i)]\!]$$

Ma allora

$$[\![\forall x (x \in v \iff x \in u \wedge \varphi(x, u_i))]\!] = 1$$

Infatti, un lato dell'implicazione si dimostra a partire dal fatto che

$$\inf_{w \in dom(v)} \{v(w) \Rightarrow ([\![w \in u]\!] \cap [\![\varphi(w, u_i)]\!])\} = 1$$

dal momento che $u(w) \leq [\![w \in u]\!]$ e quindi $v(w) \leq [\![w \in v]\!] \cap [\![\varphi(w, u_i)]\!]$.

Il lato opposto dell'implicazione, ovvero

$$\inf_{w \in dom(u)} \{u(w) \cap [\![\varphi(w, u_i)]\!]) \Rightarrow [\![w \in v]\!]\}$$

si dimostra valere 1 utilizzando il lemma sui quantificatori limitati, dal momento che $v(w) \leq [\![w \in v]\!]$.

Assioma di rimpiazzamento

Si supponga che

$$[\![\forall y \in u \, \exists z \, \varphi(y, z, u_i)]\!] = b \in \mathbf{B}$$

con $u_i, v_i \in V$ e, per dimostrare la **B**-validità dell'assioma di rimpiazzamento, dimostriamo che

$$[\![\exists w \, \forall y \in u \, \exists z \in w \, \varphi(y, z, u_i)]\!] \geq b$$

Per ogni $y \in dom(u)$, sia $b_y = sup\{u(y) \Rightarrow [\![\varphi(y, z, u_i)]\!]\} \geq b$. Siccome **B** è un insieme, si può ottenere tale sup considerando non la totalità di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, ma solo un insisme di z, che si indicherà come $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha y}$. Sia α il sup degli ordinali α_y per $y \in dom(u)$. Allora $\forall y \in dom(u)$ si ha

$$\sup\{u(y) \Rightarrow [\![\varphi(y, z, u_i)]\!] : z \in V^{(\mathbf{B})}_{\alpha}\} \geq b$$

Sia ora w l'elemento tale che $dom(w) = \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}_{\alpha}$ con valore costante 1. Si ottiene dunque

$$\inf_{y \in dom(u)} \{ \sup_{z \in dom(w)} \{u(y) \Rightarrow [\![\varphi(y, z, u_i)]\!]\}\} \geq b$$

che è proprio la conclusione cercata.

Assioma di fondazione

Si supponga che

$$[\![\forall x (\forall y \in x \, \varphi(y, u_i) \to \varphi(x, u_i))]\!] = b$$

per dimostrare la **B**-validità dell'assioma di fondazione sarà necessario dimostrare che $[\![\forall x \, \varphi(x, u_i)]\!] \geq b$ o anche che, $\forall u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si ha $[\![\varphi(u, u_i)]\!] \geq b$. Eseguiamo la dimostrazione tramite induzione su u.

Si supponga che $\forall v \in dom(u)$ sia $[\![\varphi(v, u_i)]\!] \geq b$. Ma allora

$$\inf_{v \in dom(u)} \{u(v) \Rightarrow [\![\varphi(v, u_i)]\!]\} \geq b,$$

e per l'ipotesi si deve avere $[\![\varphi(u, u_i)]\!] \geq b$.

Assioma della potenza

Dato $u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, sia v l'elemento di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che $dom(v) = dom(u)$ e $\forall w \in dom(v)$ si ha $v(w) = [\![w \subseteq u]\!]$. Allora v soddisfa l'assioma della potenza, è la potenza booleana di u. Mostriamo che v contiene tutti i sottoinsiemi di u. Sia $w \subseteq u$. Allora si ha

$$w \subseteq u \Rightarrow [\![w \subseteq u]\!] = 1 \Rightarrow v(w) = 1, \text{ per la definizione di v.}$$

Se invece $w \nsubseteq u$ si ha

$$w \nsubseteq u \Rightarrow [\![w \subseteq u]\!] = 0 \Rightarrow v(w) = 0 \text{ per la definizione di v.}$$

Si conclude dunque, dopo aver dimostrato che v soddisfa l'assioma della potenza, e dunque esso è **B**-valido.

Assioma dell'infinito

Si consideri l'assioma formulato nel seguente modo:

$$\exists x \, (\exists y \, (y \in x) \wedge \forall y \in x \, \exists z \in x \, (y \in z))$$

La condizione su x è data da una Δ_0-formula, ed ω la soddisfa. Ma allora si ha

$$[\![\exists y (y \in \check{\omega}) \wedge \forall y \in \check{\omega} \, \exists z \in \check{\omega} (y \in z)]\!] = 1$$

dove si ricorda che l'elemento $\check{\omega}$ è definito nel seguente modo

Definizione

Per ogni $a \in V$, si definisce in modo ricorsivo l'elemento $\check{a} \in V^{(2)}$ come l'elemento con le seguenti caratteristiche

- $dom(\check{a}) = \{\check{b} : b \in a\}$
- $\check{a}(x) = 1 \ \forall x \in dom(\check{a})$

si ha quindi che $\check{\omega}$ rende **B**-valido l'assioma dell'infinito. Inoltre tutte le proprietà di ω sono **B**-valide anche per $\check{\omega}$.

Assioma della scelta

La dimostrazione della **B**-validità dell'assioma della scelta viene omessa per non appesantire la dimostrazione della **B**-validità degli assiomi di **ZFC** in quanto estremamente lunga. Per la lettura della dimostrazione si rimanda a "Lolli (1977)". □

Corollario al Teorema 4.3.1

Se φ è un teorema di **ZFC**, allora

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{"}\mathbf{B} \text{ è un'algebra di Boole completa"} \Rightarrow (\llbracket\varphi\rrbracket_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}})$$

Corollario al Teorema 4.3.1

$$\text{Se } \mathbf{ZFC} \vdash \mathbf{B}(\text{"}\mathbf{B} \text{ è un'algebra di Boole completa } \wedge \llbracket\varphi\rrbracket_{\mathbf{B}} \neq 1_{\mathbf{B}})$$

Allora φ non è un teorema, di **ZFC**, ovvero è indipendente da **ZFC**.

Per i singoli enunciati sarà necessario trovare algebre opportune. Nella maggior parte dei casi interessanti, come ad esempio l'assioma di costruibilità o l'ipotesi del continuo, quando è già nota la consistenza di queste proposizioni con **ZFC** e ci si chiede se siano anche dimostrabili, non è possibile escludere che lo siano. L'unica strada per mostrare l'indipendenza sarebbe esibire l'esistenza di insiemi non costruibili, oppure di altri sottoinsiemi di ω: ciò parrebbe possibile solamente allargando l'universo, concetto che potrebbe sembrare assurdo ad un primo approccio. Invece, con i modelli booleani, questo processo è reso possibile dal fatto che i modelli booleani sono classi definibili contenute in V, ma tali che è possibile definire una Δ_0-immersione di V stesso in esse. Essi sono un'estensione definibile dell'universo, rispetto ad una nozione non classica di verità.

4.4 Il principio del massimo ed ordinali in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

4.4.1 Il principio del massimo

Nel corso della dimostrazione della **B**-validità degli assiomi di **ZFC**, per ogni assioma che afferma l'esistenza di un particolare insieme z tale che $\varphi(z, u_i)$, abbiamo esibito un elemento $v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che $\llbracket\varphi(v, u_i)\rrbracket = 1$. Basandosi sulla valutazione Booleana della formula, sarebbe stato sufficiente dimostrare che $\sup\{\llbracket\varphi(v, u_i)\rrbracket\} = 1$, la quale rappresenta una richiesta meno forte, in quanto il sup potrebbe essere raggiunto da un elemento non appartenente a $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, ovvero potrebbe non essere un massimo. Nel caso degli assiomi di **ZFC** si verifica che i sup sono massimi, ed è possibile dimostrare un risultato più generale. E' possibile dimostrare, infatti, che in ogni algebra di Boole completa, ogni sup S, dove S sia l'insieme dei valori $[\![\varphi(v)]\!]_{\mathbf{B}}$ per una data formula φ e per $v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, tale sup è il massimo dell'insieme S. Tale affermazione si formalizza nel seguente

Teorema 4.4.1.1

Per ogni formula φ di $\mathcal{L}$, si ha

$$\mathbf{ZFC} \vdash u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})} \Rightarrow \exists\, v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}([\![\exists\, x\, \varphi(x, u_i)]\!]_{\mathbf{B}} = [\![\varphi(v, u_i)]\!]_{\mathbf{B}}).$$

Dimostrazione. $[\![\exists x \varphi(x, u_i)]\!] = \sup\{[\![\varphi(v, u_i)]\!] : v \in V^{(\mathbf{B})}\}$ è uguale, come nel caso della dimostrazione della $\mathbf{B}$-validità dell'assioma di rimpiazzamento, al sup esteso ad un insieme contenuto in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, il quale verrà indicato come $\mathcal{V}_\beta^{(\mathbf{B})}$. Sia $\{v_\xi : \xi \in \alpha\}$ un buon ordinamento di $\mathcal{V}_\beta^{(\mathbf{B})}$ in modo tale che valga la seguente

$$[\![\exists x\, \varphi(x, u_i)]\!] = \sup_{\xi \in \alpha}\{[\![\varphi(v_\xi, u_i)]\!]\} = b.$$

si ponga $a_\xi = [\![\varphi(v_\xi, u_i)]\!]$ e $b_\xi = a_\xi \cap \inf_{\zeta \in \xi}\{a'_\zeta\}$, ricordando che $b_\xi \cap b_\eta = 0$ per $\xi \neq \eta$ e $\sup_{\xi \in \alpha}\{b_\xi\} = b$. Sia allora v tale che

$$dom(v) = \bigcup\{dom(v_\xi) : \xi \in \alpha\} \text{ e}$$
$$v(t) = \sup_{\xi \in \alpha}\{b_\xi \cap [\![t \in v_\xi]\!]\}.$$

Affermando che $\forall\, \xi \in \alpha$ si ha $b_\xi \leq [\![v_\xi = v]\!]$, segue $b_\xi \leq [\![\varphi(v_\xi, u_i)]\!] \cap [\![v_\xi = v]\!] \leq [\![\varphi(v, u_i)]\!]$, e quindi $b \leq [\![\varphi(v, u_i)]\!]$. Confrontando questo risultato con l'ovvia disuguaglianza inversa, si ottiene il risultato. Resta dunque da dimostrare $b_\xi \leq [\![v_\xi = v]\!]$, ovvero

$$b_\xi \leq \inf_{t \in dom(v_\xi)}\{v_\xi(t) \Rightarrow [\![t \in v]\!]\}$$

ciò equivale a dimostrare che $\forall t \in dom(v_\xi)$ si ha

$$b_\xi \leq v_\xi(t) \Rightarrow [\![t \in v]\!]$$

ovvero

$$b_\xi \cap v_\xi(t) \le [\![t \in v]\!]$$

$$b_\xi \cap v_\xi(t) \le \sup_{y \in dom(v)} \{v(y) \cap [\![t = y]\!]\}$$

$$b_\xi \cap v_\xi(t) \le \sup_{y \in dom(v)} \{[\![t = y]\!] \cap \sup_{\eta \in \alpha}\{b_\eta \cap [\![y \in v_\eta]\!]\}\}$$

ma, per $y = t$ e $\xi = \eta$ si ha

$$b_\xi \cap v_\xi(t) \le b_\eta \cap [\![t \in v_\eta]\!]$$

da cui la conclusione.

Resta quindi da dimostrare che

$$b_\xi \le \inf_{t \in dom(v)} \{v(t) \Rightarrow [\![t \in v_\xi]\!]\}$$

e per questo è sufficiente che $\forall t \in dom(v)$ si abbia

$$b_\xi \cap v(t) \le [\![t \in v_\xi]\!]$$

ovvero

$$\sup_{\eta \in \alpha}\{b_\xi \cap b_\eta \cap [\![t \in v_\eta]\!]\} \le [\![t \in v_\xi]\!]$$

ma all'interno del sup è diverso da 0 solo il termine che corrisponde a $\xi = \eta$, per cui resta

$$b_\xi \cap [\![t \in v_\xi]\!] \le [\![t \in v_\xi]\!]$$

il quale è vero. $\square$

Corollario al teorema 4.4.1.1

Se $dom(u)$ è bene ordinato, allora esiste un v tale che

$$[\![\exists x \in u \varphi(x, u_i)]\!] = [\![\varphi(v, u_i)]\!]$$

4.4.2 Ordinali in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

Nei precedenti paragrafi si è fatto uso del fatto che $[\![Ord(\check{\alpha}]\!] = 1$. Possono esistere in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, tuttavia, anche elementi diversi da $\check{\alpha}$ e che danno un valore diverso da 0 alla proprietà di essere un ordinale. Dal principio del massimo segue, per esempio

$$[\![\exists x(Ord(x) \wedge \varphi(x))]\!] = [\![Ord(v)]\!] \cap [\![\varphi(v)]\!]$$

per un qualche v. Ma se tale v viene costruito come nella dimostrazione del teorema presentato nel paragrafo precedente, tale v non è $\check{\alpha}$ per nessun α. La considerazione di ordinali non standard diventa agevole grazie al seguente

Lemma 4.4.2.1

In **ZF** $\forall u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ $[\![Ord(u)]\!] = \sup\{[\![u = \check{\alpha}]\!] : \alpha \in Ord\}$

Dimostrazione. Per ogni α si ha

$$[\![u = \check{\alpha}]\!] = [\![u = \check{\alpha}]\!] \cap [\![Ord(\check{\alpha})]\!] \leq [\![Ord(u)]\!]$$

da cui deriva

$$\sup\{[\![u = \check{\alpha}]\!] : \alpha \in Ord\} \leq [\![Ord(u)]\!]$$

Per dimostrare il viceversa è sufficiente provare che $\forall u \, \exists \alpha$ tale che

$$[\![Ord(u)]\!] \leq [\![u \in \check{\alpha}]\!]$$

in tal caso, essendo $[\![u \in \check{\alpha}]\!] = \sup\limits_{\beta \in \alpha} [\![u = \check{\beta}]\!]$ segue

$$[\![Ord(u)]\!] \leq \sup\{[\![u = \check{\beta}]\!] : \beta \in Ord\}$$

Si supponga, per ipotesi induttiva, che per ogni $v \in dom(u)$ esista un ordinale, β_ν tale che

$$[\![Ord(v)]\!] \geq [\![v \in \check{\beta}_v]\!]$$

Se β è l'estremo superiore di questi β_v, allora $\forall v \in dom(u)$ si ha $[\![Ord(v)]\!] \leq [\![v \in \check{\beta}]\!]$, poichè da $[\![Ord(\check{\beta}]\!] = 1$ segue $[\![Trans(\check{\beta})]\!] = 1$. Dal momento che $Ord(u) \Rightarrow \forall v \in u \, Ord(v)$ è un teorema, segue

$$[\![Ord(u)]\!] \leq \inf_{v \in dom(u)}\{u(v) \Rightarrow [\![v \in \check{\beta}]\!]\}$$

Ma anche $Ord(u) \wedge Ord(w) \wedge \forall v \in u(v \in w) \ \Rightarrow \ (u \in w \vee u = w)$, e si ha

$$[\![Ord(u)]\!] \leq ([\![u \in \check{\beta}]\!] \cup [\![u = \check{\beta}]\!]) \leq [\![u \in (\beta \check{+} 1)]\!]$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario al Lemma 4.4.2.1

Per ogni φ formula di $\mathcal{L}$ e $u_i \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ si ha

$$[\![\exists x(Ord(x) \wedge \varphi(x, u_i))]\!] = \sup\{[\![\varphi(\check{\alpha}, u_i)]\!] : \alpha \in Ord\}$$

Il risultato del corollario afferma che non è possibile dimostrare l'esistenza di un β tale che $[\![\exists x(Ord(x) \wedge \varphi(x, u_i)]\!] = [\![\varphi(\check{\beta}, u_i)]\!]$. Un risultato aggiuntivo è dato dal seguente

Lemma 4.4.2.2

Per ogni φ formula di $\mathcal{L}$ $\exists v \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che

$$[\![\exists x(Ord(x) \wedge \varphi(x, u_i))]\!] = [\![\varphi(v, u_i)]\!]$$

4.5 Insiemi costruibili in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

E' possibile provare un risultato analogo a quello sugli ordinali riguardante gli insiemi costruibili

Teorema 4.5.1

$$\mathbf{ZF} \vdash \forall u \in V^{(\mathbb{B})}([\![u \in L]\!] = \sup\{[\![u = \check{x}]\!]\})$$

Dimostrazione. Si noti che $x \in L$ non è una formula atomica, ma la $\Sigma_1^{\mathbf{KPI}}$-formula $\exists\alpha(x \in L_\alpha)$ è una $\Delta_1^{\mathbf{KPI}}$-formula con due variabili libere. Segue che se $\varphi(x, y)$ è una $\Delta_1^{\mathbf{ZF}}$-formula, allora $\forall x, y$ si ha $\varphi(x, y) \iff ([\![\varphi(\check{x}, \check{y})]\!] = 1)$, per ogni $\mathbf{B}$ algebra completa. Allora, se $x \in L$, esiste α tale che $x \in L_\alpha$. Segue $[\![\check{x} \in L_{\check{\alpha}}]\!] = 1$ e $[\![\check{x} \in L]\!] = 1$.

Sia ora $u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$, se $x \in L$ si ha

$$[\![u = \check{x}]\!] = [\![u = \check{x}]\!] \cap [\![\check{x} \in L]\!] \leq [\![u \in L]\!], \text{ da cui}$$

$$\sup_{x \in L}\{[\![u = \check{x}]\!]\} \leq [\![u \in L]\!]$$

Il viceversa si dimostra nel seguente modo: si ammetta che $\forall u \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ e $\forall\alpha$ si abbia

$$[\![u \in L_{\check{\alpha}}]\!] \leq [\![u \in (\check{L_\alpha})]\!] \tag{1}$$

Se (1) vale allora segue la conclusione, in quanto

$$\begin{aligned}
[\![u \in L]\!] &= \sup_{\alpha}\{[\![u \in L_{\check{\alpha}}]\!]\} \quad \text{per il Corollario 4.4.2.1} \\
&\leq \sup_{\alpha}\{[\![u \in (\check{L_{\alpha}})]\!]\} \text{ per la (1)} \\
&\leq \sup_{\alpha} \sup_{x \in L_{\alpha}}\{[\![u = \check{x}]\!]\} = \sup_{x \in L}\{[\![u = \check{x}]\!]\}
\end{aligned}$$

La (1) è valida per il seguente motivo. Il membro di destra è una $\Delta_1^{\mathbf{ZF}}$-formula, mentre il membro di destra è una formula atomica valutata per gli elementi u e $L_{\check{\alpha}}$, entrambi appartenenti a $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$. Se $y = L_{\alpha}$, allora $[\![\check{y} = L_{\check{\alpha}}]\!] = 1$ e quindi $[\![(\check{L_{\alpha}}) = L_{\check{\alpha}}]\!] = 1$, da cui segue

$$\begin{aligned}
[\![u \in L_{\check{\alpha}}]\!] = [\![\exists z(u \in z \wedge z = L_{\check{\alpha}})]\!] &= \sup_{v}\{[\![u \in v]\!] \cap [\![v = L_{\check{\alpha}}]\!]\} = \\
&= \sup_{v}\{[\![u \in v]\!] \cap [\![v = L_{\check{\alpha}}]\!] \cap [\![(\check{L_{\alpha}}) = L_{\check{\alpha}}]\!]\} \leq \\
&\leq \sup_{v}\{[\![u \in v]\!] \cap [\![v = (\check{L_{\alpha}})]\!]\}
\end{aligned}$$

dal momento che la funzionalità dell'operazione L_{α} è un teorema di **ZF**, da cui segue, per le leggi dell'identità, la conclusione della dimostrazione

$$\leq \sup\{[\![u \in (\check{L_{\alpha}})]\!]\} = [\![u \in (\check{L_{\alpha}})]\!]$$

$\square$

Capitolo 5

L'indipendenza dell'ipotesi del continuo

5.1 Condizione della k-catena e cardinali in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$

L'argomento dei cardinali, come si vedrà nel corso di questo capitolo, non è indipendente dall'algebra **B** sulla quale si sceglie di operare. Sia $Card(x)$ la formula che definisce i cardinali. Dal momento che $Card(x)$ è una $\Pi_1^{\mathbf{ZF}}$-formula si ha

$$\neg Card(\alpha) \to ([\![\neg Card(\check{\alpha})]\!] = 1)$$

per ogni algebra $\mathbb{B}$. Analogamente,

$$cof(\alpha) \leq \beta \to ([\![cof(\check{\alpha}) \leq \check{\beta}]\!] = 1).$$

Il viceversa vale esclusivamente per algebre che soddisfano una certa proprietà.

Definizione

Si dice che un'algebra **B** soddisfa la condizione della k-catena, dove k è un cardinale regolare, se ogni famiglia di elementi di **B** a due a due disgiunti, cioè tali che il loro prodotto Booleano vale 0, ha cardinalità minore di k.

Si dice inoltre che un'algebra **B** soddisfa la condizione della catena numerabile se **B** soddisfa la condizione della $\aleph_1$-catena.

Teorema 5.1.1

Se **B** soddisfa la condizione della k-catena allora per ogni cardinale $h \geq k$ si ha $[\![Card(\check{(h)})]\!] = 1$ e, se $cof(h) = \beta \geq k$, allora $[\![cof(\check{h}) = \check{\beta}]\!] = 1$.

Dimostrazione. Sia h un cardinale maggiore uguale a k. E' necessario dimostrare

$$[\![\neg(\exists f \exists \beta \in \check{h}((f : \beta \Rightarrow \check{h}) \wedge im(f) = \check{h}))]\!] = 1$$

Dimostriamo innanzitutto che $\forall\, f \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ e $\forall \beta \in h$ si ha

$$[\![(f : \check{\beta} \rightarrow \check{h}) \wedge im(f) = \check{h}]\!] = 0$$

Si supponga, per assurdo, che il valore dell'ultima formula sia $b \neq 0$. La proposizione di cui b è il valore implica

$$b \leq \inf_{\eta \in h} \left\{ \sup_{\xi \in \beta} [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \right\}$$

Sia ora, $\forall \eta \in h$, $\xi_n \in \beta$ il più piccolo ordinale tale che

$$b \cap [\![f(\xi_\eta) = \eta]\!] \neq 0$$

Ma allora, dal momento che h è un cardinale e $\beta \in h$, deve esistere un ξ tale che l'insieme degli η tali per cui $\xi_n = \xi$ ha cardinalità h. Ma per $\eta_1 \neq \eta_2$ si ha

$$b \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_1]\!] \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_2]\!] \leq [\![\check{\eta}_1 = \check{\eta}_2]\!] = 0$$

dal momento che b è il valore dell'affermazione che f è una funzione. Allora $b \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_1]\!]$ e $b \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_2]\!]$ sono disgiunti e abbiamo una contraddizione, dal momento che si viene a formare una famiglia di cardinalità $h \geq k$.

Per il risultato sulla cofinalità, si dimostri che, se $cof(h) = \beta \geq k$, allora $[\![cof(\check{h}) \leq \beta]\!] = 1$. Si supponga per assurdo che $[\![cof(\check{h}) < \beta]\!] = b \neq 0$. Allora esiste $\alpha \in \beta$ e $f \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tali che

$$[\![(f\colon \check{\alpha} \rightarrow \check{h}) \wedge \bigcup \mathrm{im}(f) = \check{h}]\!] = c \neq 0$$

Per ogni $\xi \in \alpha$, sia η_ξ il sup degli ordinali $\eta \in h$ tali che $c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \neq 0$. Se η_1 ed η_2 sono entrambi tali che $c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_1]\!] \neq 0$ e $c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_2]\!] \neq 0$, allora questi due ultimi valori sono disgiunti in quanto

$$c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_1]\!] \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}_2]\!] \leq [\![\check{\eta}_1 = \check{\eta}_2]\!]$$

Allora, per la condizione della k-catena, $\forall \xi \in \alpha$ esistono meno di k ordinali η per cui $c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \neq 0$, ed η_ξ è minore di h, dal momento che $cof(h) \geq k$. Si consideri ora η^*, il sup degli η_ξ per $\xi \in \alpha$. Dal momento che $\alpha < cof(h)$, segue che $\eta^* < h$. Ma allora, per gli η esistenti tra $\eta^* < h$ e h, i quali esistono poiché h è limite, si ha $\sup_{\xi \in \alpha} \left\{ c \cap [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \right\} = 0$, mentre

$$c \leq [\![\bigcup im(f) = \check{h}]\!] = \inf_{\eta \in h} \left\{ \sup_{\xi \in \alpha} [\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!] \right\}$$

e quindi $\forall \eta \in h$ si dovrebbe avere $c \cap \sup_{\xi \in \alpha} \{[\![f(\check{\xi}) = \check{\eta}]\!]\} = c \neq 0$, da cui l'assurdo. $\square$

Corollario al Teorema 5.1.1

Se **B** soddisfa la condizione della catena numerabile, allora per ogni ordinale α e β si ha

$$Card(\alpha) \iff ([\![Card(\check{\alpha})]\!] = 1) \text{ e}$$

$$Card(\alpha) \leftrightarrow ([\![Card(\check{\alpha})]\!] = 1)$$

5.2 Contrazione di cardinali

E' possibile trovare diversi esempi di algebre complete le quali, pur essendo di cardinalità maggiore del numerabile, soddisfano la condizione della catena numerabile. Un esempio di queste è il seguente. Sia X uno spazio topologico soddisfante la condizione della catena numerabile per gli aperti, ovvero ogni famiglia di aperti a due a due disgiunti ha al più cardinalità $\aleph_0$, allora l'algebra degli aperti dello spazio X soddisfa la condizione della catena numerabile.

Un esempio di algebra che soddisfa la condizione della $\aleph_2$-catena ma non quella della catena numerabile è il seguente. Si consideri X, lo spazio topologico ${}^{\aleph_1}\aleph_0$ con la topologia prodotto. Si consideri la topologia discreta su $\aleph_1$, e sia **B** l'algebra degli aperti regolari di X. Fissato $n \in \omega$, gli insiemi $A^n_\xi = \{g \in^{\aleph_1} \aleph_0 : g(n) = \xi$ dove $\xi \in \omega_1$ sono aperti regolari a due a due disgiunti. Quindi **B** non soddisfa la condizione della catena numerabile, ma siccome gli aperti della base sono $\aleph_1$, allora soddisfa la condizione della $\aleph_2$-catena.

A partire da questa algebra si può generare il fenomeno della contrazione di $\aleph_1$, il quale viene spiegato dal

Teorema 5.2.1

$$\exists f([\![(f:\check{\omega}\to\check{\omega_1})\wedge \check{im}(f)=\check{\omega_1}]\!])_{\mathbb{B}}=1_{\mathbb{B}}$$

Dimostrazione. Per eseguire la dimostrazione si esibirà una f tale che $[\![(f:\check{\omega}\to\check{\omega_1})\wedge \check{im}(f)=\check{\omega_1}]\!]=1.$. Sia $f\in\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che

$$dom(f)=\{\langle\check{n},\check{\xi}\rangle^{\mathbb{B}}:n\in\omega,\xi\in\omega_1\}$$
$$f(\langle\check{n},\check{\xi}\rangle^{\mathbb{B}})=\left\{g\in\check{\omega}^{\check{\omega_1}}:g(n)=\xi\right\}$$

Innanzitutto, dal fatto che $\forall n\in\omega$ e $\forall\xi,\eta\in\omega_1$ si ha

$$[\![f(\check{n})=\check{\xi}]\!]\cap[\![f(\check{n})=\check{\eta}]\!]=\{g\in\check{\omega}^{\check{\omega_1}}:g(n)=\xi\}\cap\{g\in\check{\omega}^{\check{\omega_1}}:g(n)=\eta\}=0$$

che ci permette di permette di dedurre che $[\![Fn(f)]\!]=1$.
La suriettività di f segue considerando il seguente fatto. $\forall\xi\in\omega_1\ \sup\limits_{n\in\omega}[\![f(\check{n})=\check{\xi}]\!]=1$, perché il sup, nell'algebra degli aperti regolari, è rappresentato dall'interno della chiusura dell'unione degli insiemi $\{g\in^{\aleph_1}\aleph_0:g(n)=\check{\xi}\}$, rispetto a n, la quale è ${}^{\aleph_1}\aleph_0$. Analogamente si dimostra che $[\![dom(f)=\check{\omega}]\!]=1$. Si ha quindi $[\![$"ω_1 è numerabile"$]\!]=1$, da cui $[\![\neg Card(\omega_1)]\!]=1$. □

Corollario al Teorema 5.2.1 Se B è l'algebra del teorema precedente si ha

$$[\![V=L]\!]_{\mathbf{B}}\neq 1_{\mathbf{B}}$$

Dimostrazione. Sia f definito in modo analogo alla dimostrazione precedente. Poniamo $f\in L=0$. Se così non fosse, infatti, si avrebbe che $\exists\, x\in L$ tale che $[\![f=\check{x}]\!]=b\neq 0$. Ma questo comporterebbe, $\forall n\in\omega$ e $\forall\xi\in\omega_1\ \langle n,\xi\rangle\in x$. Ma siccome $[\![Fn(f)]\!]=1$ allora si ha

$$[\![Fn(f)]\!]\cap[\![f=\check{f}]\!]\leq[\![Fn(\check{f})]\!]$$

che implica $[\![Fn(\check{(x)})]\!]=1$ e $Fn(x)$. Ciò è un assurdo, in quanto allora x sarebbe una funzione con dominio uguale a ω e immagine uguale a ω_1. □

5.3 Indipendenza dell'ipotesi del continuo

La conservazione dei cardinali, nel caso in cui l'algebra **B** a cui si fa riferimento rispetti la condizione della catena numerabile, si può esprimere equivalentemente nel seguente modo

$$\forall\, \alpha\, [\![(\check{\aleph}_\alpha) = \aleph_{\check{\alpha}}]\!] = 1$$

In aggiunta a questo, in alcuni casi è possibile dimostrare che anche l'esponenziazione dei cardinali è assoluta, ovvero che vale

$$[\![2^{\aleph_{\check{\alpha}}} = (2^{\check{\aleph}_\alpha})]\!] = 1$$

E' possibile formulare esattamente questo risultato grazie al

Teorema 5.3.1

Se **B** soddisfa la condizione della catena numerabile e ha cardinalità minore o uguale a $2^{\aleph_0}$, allora $[\![IGC]\!]_{\mathbf{B}} = 1_{\mathbf{B}}$.

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione si mostrerà quanto illustrato prima dell'e-nunciazione del teorema ovvero che $\forall \alpha$

$$[\![2^{\aleph_{\check{\alpha}}} = (2^{\check{\aleph}_\alpha})]\!] = 1$$

da cui segue che se $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, cioè se assumiamo l'ipotesi generalizzata del continuo allora

$$[\![2^{\check{\aleph}_\alpha} = \check{\aleph}_{\alpha+1}]\!] = 1, \text{ ovvero}$$
$$[\![2^{\aleph_{\check{\alpha}}} = \aleph_{(\alpha\check{+}1)}]\!] = 1$$

E' necessario intendere tale affermazione nel senso in cui, la cardinalità della potenza di $\aleph_{\check{\alpha}}$ è $\aleph_{\alpha\check{+}1}$ in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$. Nel corso della dimostrazione si mostrerà che per ogni α la cardinalità della potenza di $\aleph_{\check{\alpha}}$ è $2^{\check{\aleph}_\alpha}$.

Dal momento che **B** soddisfa la condizione della catena numerabile, è possibile discutere la cardinalità dell'insieme potenza di $\check{\aleph}_\alpha$; tale potenza è rappresentata dall'elemento di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ il cui dominio è l'insieme ${}^{dom(\check{\aleph}_\alpha)}\mathbf{B}$ e i cui valori $\forall t \in {}^{dom(\check{\aleph}_\alpha)}\,\mathbf{B}$ sono $[\![t \subseteq \check{\aleph}_\alpha]\!] = 1$.

Se $\mathbf{B}$ ha cardinalità $\leq 2^{\aleph_0}$, l'insieme ${}^{\mathrm{dom}(\check{\aleph}_\alpha)}\mathbf{B}$ ha cardinalità $2^{\aleph_\alpha}$. Allora esiste in V un'applicazione g suriettiva da $2^{\aleph_\alpha}$ su ${}^{dom(\check{\aleph}_\alpha)}\mathbf{B}$, e quindi anche una, che indicheremo sempre con g, da $dom((2^{\check{\aleph_\alpha}}))$ su ${}^{dom(\check{\aleph}_\alpha)}\mathbf{B} = dom(\mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\aleph}_\alpha))$.
Si consideri l'elemento f di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ definito nel seguente modo

$$\mathrm{dom}(f) = \{\langle\check{\beta}, u\rangle^{\mathbf{B}} : \beta \in 2^{\aleph_\alpha} \wedge u \in^{dom(\check{\aleph}_\alpha)} \mathbf{B} \wedge g(\check{\beta}) = u\}$$

$$f(\langle\check{\beta}, u\rangle^{\mathbf{B}}) = 1$$

Da questa definizione segue

$$[\![f : (2^{\aleph_\alpha}) \rightarrow \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\aleph}_\alpha)]\!] = 1$$

ed inoltre

$$[\![Im(f) = \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\aleph}_\alpha)]\!] = 1$$

che permette di concludere

$$[\![Card(\mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\aleph}_\alpha)) \leq (2^{\check{\aleph}_\alpha})]\!] = 1$$

Dal momento che $[\![u \in \mathcal{P}(\check{\aleph}_\alpha)]\!]$ è sempre minore o uguale a $[\![u \in \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\aleph}_\alpha)]\!]$, è possibile concludere che tale cardinalità è anche, in senso booleano, maggiore o uguale a $(2^{\check{\aleph}_\alpha})$, concludendo in questo modo la dimostrazione. □

Corollario al Teorema 5.3.1

$$V = L \text{ è indipendente da } IGC$$

Dimostrazione. In $\mathbf{ZF} + (V = L)$, la quale è non contraddittoria se $\mathbf{ZF}$ non lo è, si ha che, se $\mathbf{B}$ è l'algebra degli aperti regolari dello spazio ${}^{\omega}2$, allora

$$[\![V \neq L \wedge IGC]\!] = 1$$

□

La condizione posta sull'algebra degli aperti regolari dello spazio ${}^{\omega}2$, ovvero che abbia cardinalità $\leq 2^{\aleph_0}$ deriva dal seguente risultato

Definizione Si dice che un algebra di Boole completa $\mathbf{B}$ è k-separabile se esiste un sottoinsieme di $\mathbf{B}$ di cardinalità k che è denso in $\mathbf{B}$.

Lemma 5.3.1

Se $\mathbf{B}$ soddisfa la condizione della k-catena ed è h-separabile allora vale

$$card(\mathbf{B}) \leq h^k$$

Dimostrazione. E' sufficiente dimostrare che esiste un'applicazione f iniettiva da $\mathbf{B} - \{0\}$ in $\bigcup\{{}^{\alpha}S : \alpha \in k\}$, dove S è un sottoinsieme denso di cardinalità h. Per ogni $b \neq 0$, un sottoinsieme A massimale disgiunto di S formato da elementi $leqb$ è tale che il suo sup è b stesso, e ha cardinalità minore di k. Infatti, se il sup di A fosse $c < b$ allora $b \cap c' \neq 0$ ed esisterebbe $d \in S$, $d < b \cap c'$. In tal caso d sarebbe minore di b e disgiunto dagli elementi di A, contro la massimalità di quest'ultimo. Ma allora ad ogni $b \neq 0$ è possibile associare un sottoinsieme distinto di S di cardinalità minore di k e quindi anche un'applicazione da un certo $\alpha \in k$ in S. $\square$

Corollario al Lemma 5.3.1

Se $\mathbf{B}$ è l'algebra degli aperti regolari dello spazio ${}^{\omega}2$, allora

$$card(\mathbf{B}) \leq 2^{\aleph_0}$$

Dimostrazione. Dal momento che ${}^{\omega}2$ è uno spazio separabile, si ha che $\mathbf{B}$ soddisfa la condizione della catena numerabile, ed è $\aleph - 0$-separabile poiché un sottoinsieme denso è dato dagli aperti della base. In tal caso $card(\mathbf{B}) \leq \aleph_0^{\aleph_1}$. $\square$

Per dimostrare risultati di indipendenza tramite la condizione della k-catena o della catena numerabile, è necessario utilizzare delle algebre per le quali la verifica di tale condizione sia agevole. Una delle algebre più utilizzate è quella del prodotto di spazi di Hausdorff separabili, il cui studio è stato effettuato principalmente da Marczewski. Per una tale algebra è infatti possibile dimostrare il seguente

Lemma 5.3.2

Se $S = \prod_{i \in I} S_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi di Haussdorff separabili qualunque, sui quali è definita la topologia prodotto, allora S soddisfa la condizione della catena numerabile per gli aperti di tale prodotto.

La separabilità dello spazio, cioè l'esistenza di un insieme denso numerabile implica la condizione della catena numerabile per gli aperti. Analogamente la k-separabilità di uno spazio implica la condizione della k^+-catena per gli aperti. Le due condizioni però non sono equivalenti. Infatti è possibile avere la condizione della catena numerabile senza avere la separabilità dello spazio.

Tramite l'uso dell'algebra degli aperti regolari dello spazio ${}^{\omega}2$ si otteneva una situazione tale per cui $\exists u \in V$ tale che $[\![u \in (\check{\mathcal{P}(\omega)})]\!] = 0$ mentre $[\![u \in \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\omega)]\!] = 1$. Tale fatto si può esprimere affermando che è stato introdotto un nuovo sottoinsieme di $\breve{\omega}$ in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$. Al fine di rendere falsa l'ipotesi del continuo, necessario per dimostrare la sua indipendenza da ZFC, è necessario introdurre più di $\aleph_1$ nuovi sottoinsiemi di $\breve{\omega}$. Per questo motivo appare naturale la scelta dell'algebra degli aperti naturali di uno spazio ${}^{\omega\times I}2$, dove I funge da insieme di parametri. Infatti $\forall\, i \in I$, l'algebra degli aperti regolari dello spazio ${}^{\omega\times\{i\}}2$ introduce un nuovo sottoinsieme di $\breve{\omega}$. Inoltre questa algebra soddisfa la condizione della catena numerabile e quindi conserva i cardinali. Ciò è molto importante per poter falsificare in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ l'ipotesi del continuo. Se infatti l'algebra $\mathbf{B}$ producesse il fenomeno della contrazione dei cardinali, si potrebbe ottenere, anche a partire da un insieme I tale che $card(I) > \aleph_1$, una famiglia di sottoinsiemi di $\breve{\omega}$ in $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ di cardinalità minore, rendendo vano il tentativo di falsificare l'ipotesi del continuo.

Dopo aver effettuato queste scelte preliminari è possibile dimostrare il seguente

Teorema 5.3.2

Sia $\mathbf{B}$ l'algebra degli aperti regolari dello spazio $X =^{\omega\times I} 2$, dove I è un insieme qualunque di cardinalità maggiore di $2^{\aleph_0}$. Allora $[\![IC]\!]_{\mathbf{B}} \neq 1_{\mathbf{B}}$

Dimostrazione.

Per ogni $i \in I$, sia u_i l'elemento di $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ definito le seguente modo

$$dom(u_i) = dom(\breve{w}) \text{ e, } \forall n \in w$$

$$u_i(\check{n}) = \{f \in X : f(n,i) = 1\}$$

Per ogni $i \in I$ si ha $[\![u_i \subseteq om\breve{e}ga]\!] = 1$ e, per $i \neq j$

$$[\![u_i = u_j]\!] = \inf_{n\in\omega}\{u_i(\check{n}) \iff u_j(\check{n})\}$$

tale valore è uguale all'interno della chiusura dell'insieme

$$A = \{f \in X : \forall n \in \omega(f(n,i) = f(n,j))\}$$

ed è lo 0 dell'algebra dal momento che A non contiene alcun elemento della base di X. Inoltre per ogni $i \in I$ si ha $[\![u_i \in \check{\mathcal{P}(\omega)}]\!] = 0$.

Ciò segue dal fatto che per ogni $s \subseteq \omega$ il valore $[\![u_i = \check{s}]\!]$, identificando s con la sua funzione caratteristica, diventa

$$[\![u_i = \check{s}]\!] = \inf_{n\in\omega}\{u_i(\check{n}) \leftrightarrow s(n)\} = \text{interno della chiusura di}$$
$$\{f \in X : \forall n \in \omega(f(n,i) = s(n))\} = 0.$$

Ma allora gli u_i rappresentano tutti nuovi sottoinsiemi distinti di $\check{\omega}$. Si supponga ora che

$$[\![\exists f((f : \check{\omega}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\omega})) \wedge \mathrm{im}(f) = \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\omega}))]\!] \neq 1, \text{ da cui segue}$$
$$[\![\mathrm{card}(\mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\omega})) \leq \check{\omega}_1]\!] \neq 1$$

Si supponga per assurdo che esista $f \in \mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ tale che

$$[\![(f : \check{\omega}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\omega})) \wedge Im(f) = \mathcal{P}^{(\mathbf{B})}(\check{\omega})]\!] = 1$$

Allora per ogni $i \in I$ si ha

$$[\![\exists \xi \in \check{\omega}_1(f(\xi) = u_i)]\!] = 1$$

da cui segue che se $c \neq 0$ allora deve esistere un $\xi \in \omega_1$ tale che

$$[\![f(\check{\xi}) = u_i]\!] \geq c$$

Sia g la funzione la quale associa ad i $g(i) =$ il più piccolo $\xi \in \omega_1$ tale che $[\![f(\check{\xi}) = u_i]\!] \geq c$. Dal momento che $card(I) > 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ esiste un ξ^* tale che $\{i \in I : g(i) = \xi^*\}$ è più che numerabile ed anzi ha cardinalità $card(I)$. Per ognuno di questi indici i si ha

$$[\![f(\check{\xi^*}) = u_i]\!] \geq c > 0$$
$$\text{mentre, se } i \neq j,$$
$$[\![f(\check{\xi^*}) = u_i]\!] \cap [\![f(\check{\xi^*}) = u_j]\!] \leq [\![u_i = u_j]\!] = 0$$

Abbiamo quindi una famiglia più che numerabile di elementi di $\mathbf{B}$ a due a due disgiunti, contraddicendo la condizione della catena numerabile. $\square$

5.4 Forcing

Il concetto di forcing é una tecnica matematica utilizzata per effettuare dimostrazioni di consistenza ed indipendenza, sviluppata da Paul Cohen nel 1963 per dimostrare l'indipendenza dell'assioma della scelta e dell'ipotesi del continuo all'interno della teoria di Zermelo-Fraenkel. L'idea alla base del concetto di forcing é quella di espandere l'universo degli insiemi V al fine di ottenere un universo espanso in grado di soddisfare determinate proprietà, come ad esempio il violare l'ipotesi del continuo.

Nel corso di questo paragrafo verrà brevemente illustrato il metodo di Forcing utilizzato da Cohen in "Cohen (1966)", ed in seguito si dimostrerà l'equivalenza di questo metodo all'uso di modelli a valori booleani per la dimostrazione dell'indipendenza dell'ipotesi del continuo in **ZF**.

5.4.1 Il modello di Cohen

Il metodo originario di forcing prevede, dato il modello minimale L_α di **ZFC** e un $u \notin L_\alpha$, di costruire un'estensione transitiva $\mathcal{N}$ modello di **ZFC** con gli stessi ordinali di L_α, e di conseguenza con gli stessi insiemi costruibili, ma tale che $u \in N$. L'insieme u non è da considerarsi come un insieme definibile, ma come un qualsiasi insieme soddisfacente a determinate condizioni, come ad esempio un'applicazione di ω su $\omega_1^{L_\alpha}$ o un sottoinsieme di ω non appartenente a L_α.

I passaggi che seguono possono essere riassunti nel seguente schema

1. Si definisce in L_α una classe $S \subseteq L_\alpha$ detta classe dei simboli. Gli elementi di tale classe sono un insieme $\bar{a}$, simbolo di un insieme a da definire, e un insieme $\bar{c}$ per ogni elemento $c \in L_\alpha(a)$. Per dare un esempio, è possibile costruire questo insieme fissando la variabile v_0 e ponendo $\bar{a} = \langle v_0 \rangle$ e $\bar{c} = \langle c \rangle$ per ogni $c \in L_\alpha(v_0)$. La

descrizione viene qui riportata in modo schematico, per una trattazione puntuale si veda "Cohen (1966)".

2. Si sceglie un opportuno insieme parzialmente ordinato in L_α, il quale verrà denotato come $\langle C, \leq \rangle$ ed i cui elementi verranno indicati con $p, q, \ldots$

3. Si introduce un linguaggio ramificato di ordine α sugli elementi di S, definendo $\forall \xi \in \alpha$ i simboli $\forall_\xi$ ed $\exists_\xi$ rappresentanti i quantificatori ristretti a $L_\xi(v_0)$. Per ogni formula φ con n variabili libere di tale linguaggio si definisce in L_α una relazione in $C \times S^n$ detta relazione di forcing forte la quale è esprimibile tramite la frase "p forza $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$. Tale definizione è formalmente analoga ad una definizione di soddisfazione ed ha lo scopo di definire in L_α un'approssimazione della nozione di soddisfazione definita su $L_\alpha(a)$. Nei vari livelli costruibili la validità delle formule sarà stabilità utilizzando il linguaggio ramificato.

4. Per ogni enunciato $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ di questo linguaggio, sia D_φ l'insieme dei $p \in C$ tali che "p forza $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$. Si definisce una successione di elementi di C detta generica se $\forall \varphi \, \exists p_n \in C$ tale che p_n appartiene a D_φ o a $D_{\neg\varphi}$. La dimostrazione dell'esistenza di una successione generica F viene dimostrata con una variante per insiemi parzialmente ordinati C del lemma di Rasiowa-Sikorski.

5. Si pone $a = F$ o ad un insieme definibile a partire da F. Nel caso in cui lo scopo sia quello di ottenere un $a \subseteq \omega$ tale che $L_\alpha(a)$ sia modello di **ZF**, allora si prende come $\langle C, \leq \rangle$ l'insieme delle applicazioni da un sottoinsieme finito di ω in 2 con la relazione $\supseteq$ e nella relazione di forcing per gli enunciati atomici si pone "p forza $\bar{n} \in \bar{a} \iff p(n) = 1$. Data la successione generica F si definisce quindi

$$a = \{n \in \omega : \exists m \in \omega (p_\omega \in F \wedge \text{"}p_m \text{ forza } \bar{n} \in \bar{a}\text{"})\}$$

Si conclude osservando che $L_\alpha(a)$ è il modello cercato.

L'idea di Cohen è quindi di creare un'estensione $L_\alpha(a)$ tale che sia un modello di **ZF**. Per costruirla si definisce prima in L_α una classe di sottoinsiemi in corrispondenza biunivoca con $L_\alpha(v_0)$ e una nozione di soddisfazione valida per tutte le formule con le seguenti caratteristiche: non avendo ancora scelto l'elemento a la relazione di forcing "p forza φ" esprime il fatto che φ vale in tutti gli $L_\alpha(a)$ con a che estende p, di cui p è un'approssimazione finita. Si verifica che "p forza $\neg\neg\varphi$" equivale a "φ vale in tutti gli $L_\alpha(a)$ tali che a estende p e a è generico", nel senso in cui a è collegato ad una successione generica. Scelta una successione generica F, la quale in generale non appartiene a $L_\alpha(a)$ si ha che in $L_\alpha(a)$ sono veri tutti gli enunciati forzati da qualche elemento di F, ed in particolare lo sono tutti gli assiomi di **ZFC**.

Diamo ora le definizioni formali di forcing e C-filtro per un modello transitivo numerabile $\mathcal{M}$, le quali ci serviranno per dimostrare l'equivalenza del modello di Cohen con quello dei modelli a valori Booleani.

Definizioni

- Una nozione di forcing in $\mathcal{M}$ è un insieme parzialmente ordinato $\langle C, \leq\rangle \in M$.
- Un sottoinsieme $D \subseteq C$ è detto denso se $\forall c \in C\, \exists d \in D$ tale che $d \leq c$.
- Un C-filtro è un sottoinsieme non vuoto $F \subseteq C$ tale che
  1. se $c \in F$ e $d \geq c$ allora $d \in F$
  2. se $c, d \in F$ allora $\exists b \in F$ tale che $b \leq c$ e $b \leq d$.
- Un C-filtro è detto $\mathcal{M}$-generico se F ha intersezione non vuota con ogni $D \subseteq C$ denso che appartiene ad M.

Il problema da risolvere, il quale viene affrontato da Cohen con la costruzione brevemente riassunta sopra, è il seguente:

Problema

Definire, se esiste, il più piccolo modello transitivo $\mathcal{N}$ di **ZFC** il quale contiene M come sottoinsieme, ha gli stessi ordinali di $\mathcal{M}$ ed è tale che $F \in N$.

5.4.2 Confronto con i modelli booleani

Esistono due modi per approcciare il problema: il primo consiste nell'utilizzare una classe $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ sugli ordinali, l'altro prevede l'utilizzo della classe $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$, dove $\mathcal{M}$ è un modello transitivo numerabile di **ZFC**. In entrambi i casi non è necessario assumere l'assioma $V = L$. Nel caso in cui si scelga di operare con $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$ i passaggi sono i seguenti

1. Si sceglie un'algebra di Boole completa $\mathbf{B}$
2. Si definisce a partire da essa $\mathcal{V}^{(\mathbf{B})}$
3. Tramite una teoria in cui sia possibile definire la valutazione booleana $Val(f_n, x, \mathbf{B})$ si passa ad una sotto struttura elementare booleana $\mathcal{M}$ numerabile.
4. Si dimostra l'esistenza di un filtro $\mathcal{M}$-generico e quoziente della sotto struttura mediante il filtro.

Nel caso in cui si scelga di partire da un modello transitivo numerabile $\mathcal{M}$ si dovranno seguire i seguenti passaggi:

1. Scelta di un'algebra di Boole $\mathbf{B} \in M$ tale che essa sia $\mathcal{M}$-completa.
2. Definizione a partire da essa di $\mathcal{M}^{\mathbf{B}}$
3. Dimostrazione dell'esistenza di un filtro $\mathcal{M}$-generico F in $\mathbf{B}$
4. Definizione di $\langle M^{\mathbf{B}}_{|h}, E\rangle$ e contrazione a $\mathcal{M}[\mathrm{F}]$.

L'equivalenza segue dalla dimostrazione dei seguenti due teoremi.

Lemma 5.4.2.1

Ad ogni nozione di forcing$\langle C, \leq\rangle \in M$ si può associare un'algebra di Boole $\mathbf{B}$ la quale è completa in $\mathcal{M}$ e tale che $\mathbf{B} \in M$, con un'applicazione biunivoca e idem-potente tra i C-filtri $\mathcal{M}$-generici e i filtri $\mathcal{M}$-generici in $\mathbf{B}$.

Dimostrazione. Per ogni $c \in C$ sia $U_c = \{d \in C \mid d \leq c\}$. Sia $\mathbf{B}$ l'algebra degli aperti regolari della topologia che ha gli U_c per $c \in C$ come aperti della base. $\mathbf{B}$ appartiene ad

M ed è completa in $\mathcal{M}$. Allora $d \in \bar{U}_c$, dove con $\bar{U}$ si indica la chiusura di U, se e solo es esiste un b tale che $b \leq d$ e $b \leq c$ e $d \in Int(\bar{U}_c)$ se e solo se $U_d \subseteq U_c$, ovvero se e solo se $\forall b \leq d \, \exists e \leq b$ tale che $e \leq c$.

Sia ora $f \colon C \to \mathbf{B}$ l'applicazione $f(c) = Int(\bar{U}_c)$. Si vede facilmente che f è un omomorfismo di insiemi parzialmente ordinati ed inoltre vale $f(c) = f(d)$ se e solo U_c e U_d sono mutualmente cofinali, ovvero se $\forall b \leq c \, \exists e \leq d$ tale che $e \leq b$ e $\forall b \leq d \, \exists e \leq c$ tale che $e \leq b$.

Ad ogni C-filtro F_1 si associ ora il filtro F_2 in $\mathbf{B}$ generato da $f(F_1)$; se F_1 è $\mathcal{M}$-generico, allora F_2 è $\mathcal{M}$-generico; infatti, se $D \subseteq \mathbb{B}$ è denso, anche l'insieme degli $Int(\bar{U}_c)$ che sono contenuti in qualche elemento di D è denso e la riunione delle contro immagini, per tutti questi c, è un sottoinsieme denso di C; dato un qualunque $a \in C$, esiste un elemento di D minore o uguale a $Int(\bar{U}_c)$ e quindi uno di tali $Int(\bar{U}_c)$, e $c \leq a$. Se $c \in F_1$ appartiene a questo sottoinsieme denso di C, allora $Int(\bar{U}_c) \in F_2$ e F_2 interseca D.

Viceversa, se F_2 è un filtro $\mathcal{M}$-generico in $\mathbf{B}$, sia F_1 l'insieme dei $c \in C$ tali che $Int(\bar{U}_c) \in F_2$. Si noti che dal momento che F_2 è $\mathcal{M}$-generico ed ogni elemento dell'algebra è il sup di una famiglia di elementi del tipo $Int(\bar{U}_c)$, allora esistono in F_2 elementi del tipo $Int(\bar{U}_c)$.

Mostriamo che che F_1 è un C-filtro $\mathcal{M}$-generico: è chiaro che, se $c \in F_1$ e $c \leq d$, allora $Int(\bar{U}_c) \subseteq Int(\bar{U}_d)$, $Int(\bar{U}_d) \in F_2$, e $d \in F_1$. Se c e d appartengono a F_1, allora $Int(\bar{U}_c) \cap Int(\bar{U}_d) \in F_2$, quindi esiste un e tale che $Int(\bar{U}_e) \subseteq Int(\bar{U}_c) \cap Int(\bar{U}_d)$ e $e \leq c$ ed $e \leq d$. Se D è denso in C, è subito visto che l'insieme degli $Int(\bar{U}_c)$ è denso in $\mathbf{B}$ e quindi F_1 interseca D. La dimostrazione dell'idem-potenza è omessa per non appesantire la trattazione dell'argomento. □

Teorema 5.4.2.1

Sia $\langle C, \leq \rangle \in M$ una nozione di forcing e F un C-filtro $\mathcal{M}$-generico; esiste un più piccolo modello transitivo di **ZFC**, detto $\mathcal{N}$, che ha gli stessi ordinali di $\mathcal{M}$ ed è tale che $M \subseteq N$ e $F \in N$.

Dimostrazione. Dato $\langle C, \leq \rangle$ si definisca $\mathbf{B}$ come nel lemma precedente e sia G il filtro $\mathcal{M}$-generico in $\mathbf{B}$ corrispondente a F. Sia $\mathcal{N} = \mathcal{M}[G]$. Dico che $\mathcal{N}$ è il modello cercato; resta solo da far vedere che $F \in N$ e che $\mathcal{N}$ è il più piccolo modello. Ma $G \in N$ e se $G \in N$

anche $F \in N$ dal momento che la corrispondenza tra F e G è definibile solo in termini di $\langle C, \leq \rangle$. Se $\mathcal{H}$ è un altro modello di questo tipo tale che $F \in H$ allora anche $G \in H$ e dunque $N \subseteq H$. $\square$

Il lemma mostra non solo come risolvere il problema delle estensioni generiche con il metodo dei modelli booleani, ma evidenzia inoltre l'affinità dei due metodi nei passaggi della costruzione. E' possibile inoltre ottenere un risultato analogo interpretando tramite l'utilizzo di modelli booleani anche il forcing non ramificato sviluppato da Shoenfield, il quale opera una costruzione parallela a quella dei modelli booleani senza passare esplicitamente a $\mathbf{B}$ ma utilizzando sempre la nozione di forcing C.

Bibliografia

1. Ettore Casari, **Questioni di filosofia della matematica**, Feltrinelli Editore, Milano , 1972, ISBN 978-8807650062

2. Paul J. Cohen, **La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo**, Feltrinelli Editore, Milano, 1973, ISBN 978-8807620102

3. Gabriele Lolli, **Dagli insiemi ai numeri**, Bollati Boringhieri, Torino, 1994, ISBN 9788833908380

4. Gabriele Lolli, **Teoria assiomatica degli insiemi**, Bollati Boringhieri, Torino, 1977, ISBN 978-8833952604

5. Alberto Zanardo, **Francesco Ciraulo, Metodo Assiomatico e Teoria degli insiemi: dispense di Metodo Assiomatico**, 2021