



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea magistrale in Ingegneria Aerospaziale

TESI DI LAUREA

# **Instabilità di travi e piastre in presenza di carico eccentrico**

Laureando:  
Casarin Francesco

Matr.  
1035220

Relatore:  
Prof. Zaccariotto Mirco

Correlatore:  
Prof. Galvanetto Ugo



*Ai miei genitori*



# Indice

ABSTRACT

INTRODUZIONE I

CAPITOLO 1:  
INSTABILITÀ PRIMARIA 1

1.1 CONCETTO DI STABILITÀ	1
1.2 INSTABILITÀ PRIMARIA: TEORIA DI EULERO PER LE TRAVI	3
1.3 METODI APPROSSIMATI PER IL CALCOLO DI $P_{cr}$ : METODO DI RITZ	5
1.4 FORMULAZIONE DI RANKINE-GORDON	10
1.5 CARICO CRITICO DELLA TRAVE A SBALZO	12
1.6 TRAVE SEMPLICEMENTE APPOGGIATA	23
1.7 EFFETTO DI IMPERFEZIONI INIZIALI	24
1.8 ECCENTRICITÀ DEL CARICO ASSIALE APPLICATO	29
1.9 CONSIDERAZIONI SUL SIGNIFICATO DI VALORE CRITICO	35
1.10 EFFETTO DEI VINCOLI SUL CARICO CRITICO	37

CAPITOLO 2:  
INSTABILITÀ SECONDARIA 43

2.1 STABILITÀ DELLE PIASTRE	43
2.2 BUCKLING DI PIASTRE SOTTILI ISOTROPE	43
2.3 DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DI $P_{cr}$ PER UNA PIASTRA SOTTILE	49
2.4 INSTABILITÀ LOCALE	49
2.5 INSTABILITÀ LOCALE PER UN ELEMENTO APPARTENENTE AD UNA SEZIONE IN PARETE SOTTILE	52
2.6 CILINDRO IN MATERIALE ISOTROPO: DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEL CARICO AMMISSIBILE	56

CAPITOLO 3:  
INSTABILITÀ PRIMARIA PER CARICO ECCENTRICO, ANALISI SPERIMENTALE 59

3.1 MACCHINARIO INSTABILITÀ PRIMARIA PER CARICO ECCENTRICO	59
3.2 SIMULAZIONI FEM INSTABILITÀ PRIMARIA	63

CAPITOLO 4:  
INSTABILITÀ SECONDARIA DI SEZIONI IN PARETE SOTTILE PER CARICO ECCENTRICO, ANALISI SPERIMENTALE 69

4.1 MACCHINA DI PROVA DYNO	69
4.2 SCELTA DEI MODELLI IN PARETE SOTTILE	71
4.3 PROVINO ALETTATO	75
4.4 LATTINA IN LEGA DI ALLUMINIO	83

CONCLUSIONI 105

BIBLIOGRAFIA



# Abstract

Il presente elaborato si presuppone di analizzare il fenomeno dell'instabilità primaria e secondaria di travi e sezioni in parete sottile sottoposte a condizioni di carico eccentrico.

Il primo capitolo è dedicato ai modelli teorici sviluppati per descrivere il comportamento di travi e colonne snelle caricate di punta. In esso vengono trattati anche gli effetti di imperfezioni iniziali nella geometria del modello o eccentricità nelle configurazioni di carico. Particolare risalto viene posto sull'effetto delle diverse modalità di vincolo.

Nel secondo capitolo, invece, viene presentato il fenomeno del *buckling* secondario che interessa le sezioni in parete sottile. A partire dalla teoria della piastra di Kirhhoff, vengono poi descritte le metodologie di calcolo sperimentali per il carico critico di instabilità secondaria.

Gli ultimi due capitoli infine comprendono le attività di analisi numerica e sperimentale sui modelli più significativi. Per quanto concerne il *buckling* primario è stato progettato un macchinario apposito che permettesse di testare delle colonne di sezione rettangolare con diversi valori di eccentricità del carico applicato. Tale modello di trave è stato analizzato con delle simulazioni ad elementi finiti per prevederne il comportamento reale.

L'analisi numerica sull'instabilità secondaria ha interessato un provino alettato di sezione quadrata e delle lattine di Alluminio. Su quest'ultime sono state fatte delle prove sperimentali con il macchinario a compressione della EASYDUR® e i dati raccolti sono stati confrontati con quelli ottenuti dalle simulazioni FEM.



# Introduzione

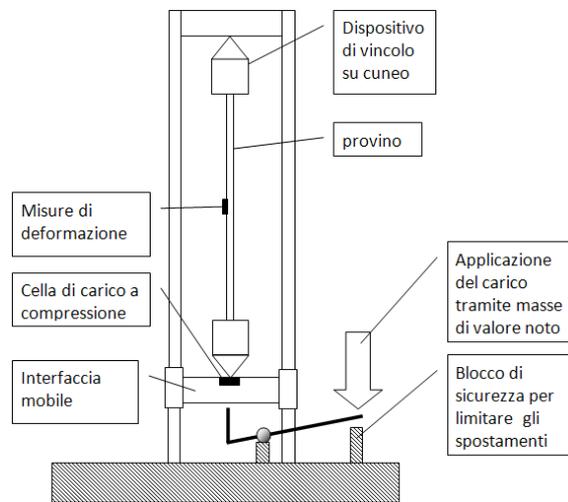
Con la seguente tesi di laurea sperimentale ci si è proposti di analizzare il fenomeno del *buckling* effettuando, in particolare, due esperienze relative ai fenomeni di instabilità di travi e piastre compresse per evidenziare le principali peculiarità dei fenomeni di instabilità primaria e secondaria.

La scelta del tema è legata all'interesse per l'argomento trattato e alla possibilità di poter verificare praticamente i risultati attesi dalle simulazioni e dalla teoria. Inoltre il problema dell'instabilità delle strutture in parete sottile è molto attuale e d'importanza cruciale in ambito aeronautico in quanto esso può comportare il malfunzionamento o peggio la rottura catastrofica dell'aereo. Pertanto, nonostante la bibliografia non sia per nulla trascurabile, si ricerca tutt'oggi di carpirne meglio le caratteristiche ed il comportamento così da prevenire e conoscere qualsiasi problematica ad esso legata. Una gran parte della struttura di un aereo, infatti, comprende "ragnatele sottili" irrigidite da longheroni o traverse soggetti a rottura per instabilità a carico di punta, o tensione critica, che è spesso al di sopra della tensione di snervamento del materiale. Chiaramente, per questo tipo di struttura, l'instabilità è la modalità più critica di guasto cosicché la previsione del comportamento a *buckling* di colonne, lastre sottili e pannelli irrigiditi è estremamente importante nella progettazione degli aeromobili.

La finalità del primo esperimento è quella di stimare il valore del carico di instabilità primaria di una trave caricata di punta sia in condizioni di carico assiale che in presenza di una eccentricità nell'applicazione del carico stesso.

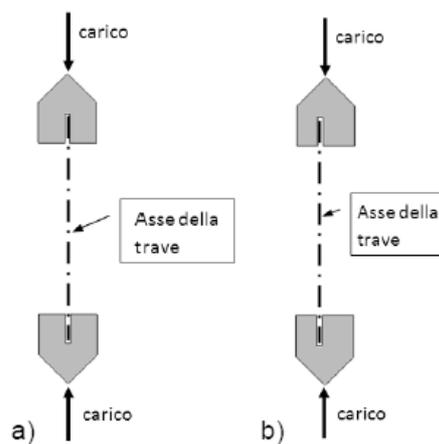
Per la realizzazione del test è stato progettato e disegnato con Solid Works® un macchinario sulla base di disegni persistenti. In particolare una barra di sezione rettangolare (con dimensioni approssimativamente pari a  $20 \times 1.5 \times 350$  [mm] e di materiale omogeneo isotropo, acciaio) è stata analizzata ad con un software ad elementi finiti al fine di determinare il carico critico di instabilità per diverse configurazioni. Queste simulazioni hanno reso possibile la predizione del comportamento della trave che, se sottoposta, durante una prova sperimentale, ad un carico di compressione di valore crescente sino a giungere alla condizione attesa di *buckling* (per carichi assiali di circa 200 [N]) permette di visualizzare il fenomeno. Grazie all'applicazione di alcuni estensimetri nella

mezzeria della stessa si può poi fornire una stima delle deformazioni conseguenti agli spostamenti trasversali avvenuti in funzione del carico.



**Fig. 1:** Schema del macchinario usato per lo studio dell'instabilità primaria

In un secondo momento, nei modelli FEM, viene introdotta un'eccentricità nel vincolo di base del supporto, realizzando così una condizione di carico composta, e vengono valutate le deformazioni conseguenti. Queste configurazioni sono realizzabili in sede di test attraverso l'utilizzo dei diversi coltelli di serraggio progettati per il macchinario.

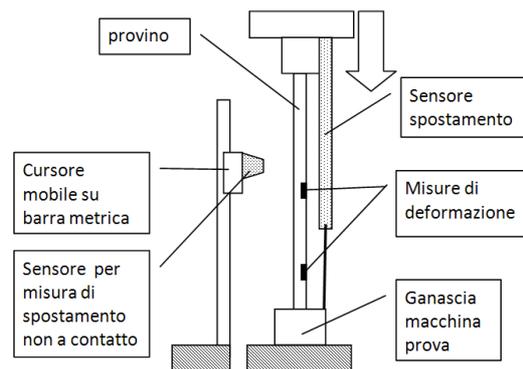


**Fig. 2:** Configurazioni dei diversi coltelli per variare l'eccentricità: il vincolo indicato nello schema a) non introduce eccentricità nel carico assiale, mentre l'eccentricità è introdotta, nel caso illustrato dallo schema b), impiegando dei vincoli con l'alloggiamento per la trave che si discosta dalla direzione di applicazione del carico

In assenza di eccentricità il carico di *buckling* (per travi snelle) è quello previsto dalla teoria di Eulero ma, all'aumentare della stessa si manifestano spostamenti (e quindi deformazioni) in direzione trasversale anche per carichi di punta inferiori a quello critico euleriano.

E' prevista inoltre, sul macchinario progettato, la presenza di una cella di carico a compressione per la stima della forza assiale applicata al provino.

Il secondo esperimento invece è focalizzato sui fenomeni di instabilità secondaria, in particolare, analizzando l'andamento del carico in funzione dello spostamento assiale applicato da una macchina di prova per test di compressione (modello Dyno 29015 prodotto da Easydur®), evidenziando la variazione delle proprietà meccaniche di vari modelli nella zona di *post-buckling*.

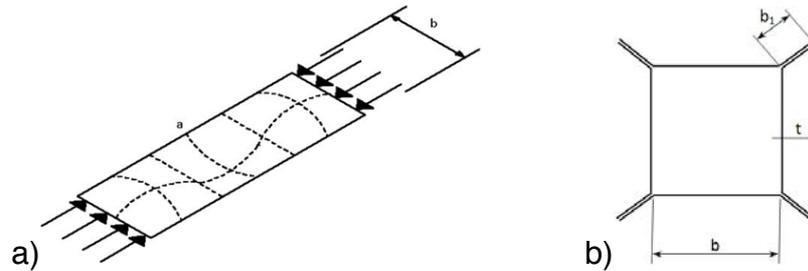


**Fig. 3:** Schema del macchinario usato per lo studio dell'instabilità secondaria

Il lavoro svolto, è stato suddiviso in una prima fase di simulazioni ad elementi finiti per scegliere le sezioni idonee alla sperimentazione sia in termini di forma che di caratteristiche geometriche (spessore, dimensioni etc...), alla quale è seguita la fase analisi sui provini scelti. L'indagine sperimentale è stata svolta su provini simili a quello riportato in **Fig. 4** (le dimensioni scelte sono  $b = 80 [mm]$ ,  $b_1 = 15 [mm]$ ,  $t = 0.4 [mm]$ ,  $l = 350 [mm]$  ed è composto di un materiale omogeneo isotropo, lega di Alluminio AA 2024) e su lattine in Alluminio per uso alimentare.

Queste strutture tubolare vengono portate in condizioni di *buckling* secondario e se ne osserva il fenomeno sia da un punto di vista numerico che sperimentale. Ad esempio la configurazione geometrica scelta per il provino alettato, tale per

cui l'instabilità si realizzi nelle piastre che costituiscono la sezione quadrata con la formazione di una deformata dal profilo sinusoidale lungo la lunghezza della trave, porta al conseguente sviluppo di circa 5 sinusoidi. La presenza delle nervature di rinforzo negli angoli della sezione, permette di affrontare un caso più complesso rispetto ad una semplice sezione tubolare quadrata, evidenziando il contributo di irrigidimento delle nervature stesse.



**Fig. 4:** La figura a) rappresenta un tipico andamento della deformata presente su uno dei lati del tubo caricato di punta (la dimensione "a" è parallela alla lunghezza del tubo) mentre la figura b) rappresenta un dettaglio della sezione trasversale considerata.



**Fig. 5:** Modello di lattina utilizzato per le analisi

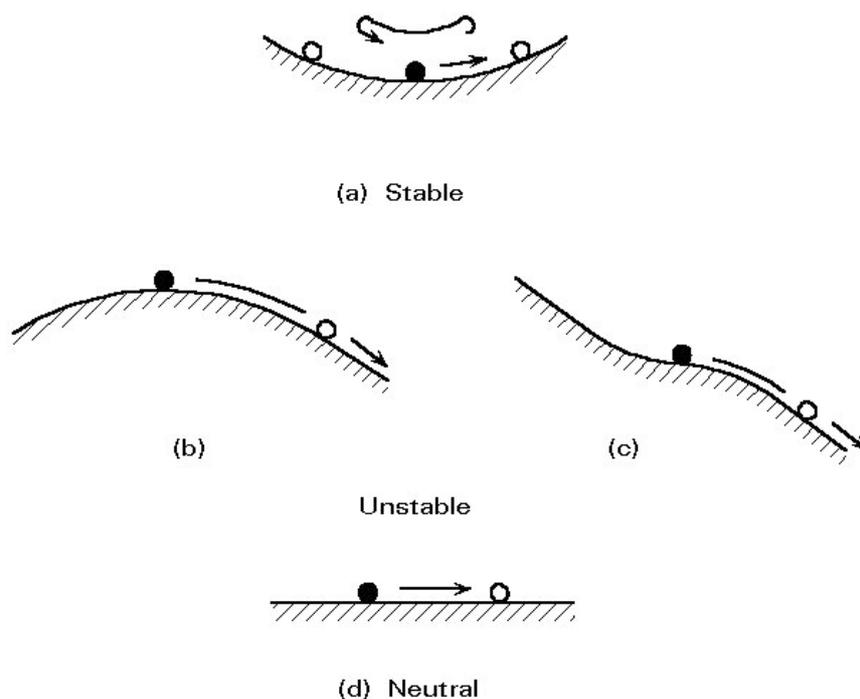
Questa esperienza di tesi ci ha permesso non solo il confronto con le problematiche teoriche ma ci ha introdotto nella sperimentazione dell'apparato tecnico di misurazione, favorendoci nella relazione con delle aziende per la produzione di alcuni pezzi. Infine, dato il ruolo significativo giocato dalla non-linearità delle problematiche strutturali, sono state drasticamente ridotte alcune difficoltà di comprensione che possono incorrere durante lo studio teorico poiché, abbiamo potuto vedere coi nostri occhi come tale fenomeno si sviluppi nella realtà. Ovviamente la bontà dei risultati ottenuti è stata valutata in modo critico e cosciente delle approssimazioni utilizzate e dei non trascurabili errori possibili riguardanti la misurazione.

# Capitolo 1: Instabilità Primaria

## 1.1 Concetto di stabilità

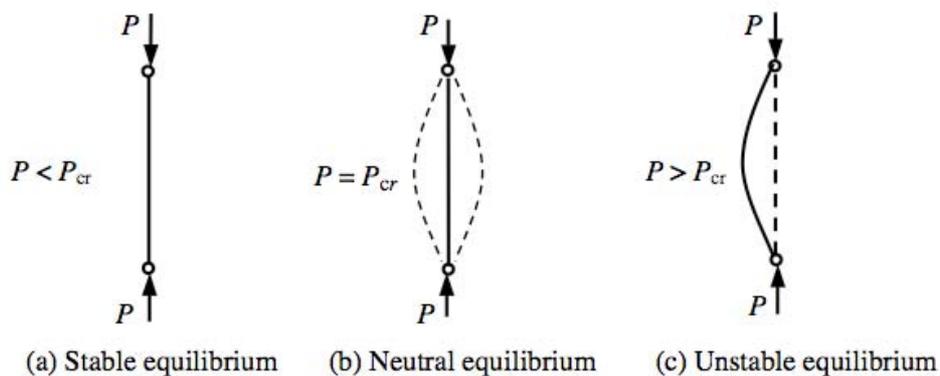
La questione circa la stabilità delle varie forme di equilibrio di una barra compressa, può essere studiata utilizzando la stessa teoria usata per analizzare la stabilità delle configurazioni di equilibrio di un corpo rigido o di sistemi di corpi rigidi.

Consideriamo i tre casi di equilibrio della sfera mostrata in **Fig. 1.1**. Si può affermare che la sfera sulla superficie concava (**Fig. 1.1a**) è in uno stato di equilibrio stabile, mentre quella sul piano orizzontale (**Fig. 1.1d**) è in equilibrio indifferente o neutro. Infine le sfere, rispettivamente sulla superficie convessa e su quella ondulata (**Fig. 1.1b e Fig. 1.1c**), sono definite in condizione di equilibrio instabile.



**Fig. 1.1:** Condizioni di equilibrio [54]

La barra compressa assialmente mostrata in **Fig. 1.2** può essere considerata in modo analogo a quanto visto precedentemente per le sfere. Nello stato di equilibrio stabile, se la colonna è sottoposta a qualsiasi piccolo disturbo o influenza esterna, essa, dopo la rimozione del disturbo, torna alla forma non deflessa. Per definizione, lo stato di equilibrio neutro è quello in cui viene raggiunto il limite di stabilità elastica del materiale che compone la trave. In questo stato, se alla colonna viene imposto un piccolo spostamento, essa mantiene la forma deflessa anche dopo che questo è stato rimosso. Se non è in alcuna delle condizioni precedenti, la colonna è definita in equilibrio instabile, cioè quando anche il più piccolo disturbo porta ad una nuova condizione deflessa diversa da quella precedentemente assunta.

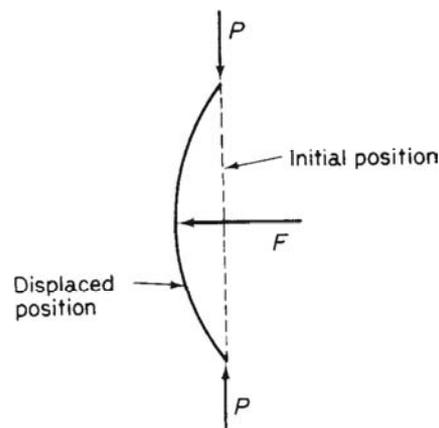


**Fig. 1.2:** Condizioni di equilibrio per una trave caricata assialmente [9]

Come specificheremo meglio in seguito le condizioni di equilibrio assunte dalla colonna dipendono dal valore del carico applicato. In particolare vi è un particolare valore del carico, detto carico critico, che è funge da discriminante per le varie configurazioni: se  $P < P_{cr}$  allora la trave non subisce alcuna deflessione permanente e si mantiene in condizione di equilibrio stabile tornando alla sua condizione indeformata iniziale alla rimozione del carico; viceversa se  $P \geq P_{cr}$  allora la colonna si deflette e subisce il fenomeno del *buckling*, cioè sperimenta una condizione di instabilità.

## 1.2 Instabilità primaria: teoria di Eulero per le travi

Il primo contributo importante alla teoria dell'instabilità al carico di punta, è stato dato da Eulero che, nel XVIII secolo, ha indagato il comportamento di colonne snelle in condizioni di vincolo ben definite.



**Fig. 1.3:** Trave sottoposta a carico di punta [19]

Se analizziamo una trave sottoposta a carico di punta di compressione come quella rappresentata in **Fig. 1.2** e definiamo lo spostamento  $v$  lungo la direzione ortogonale all'asse della trave, possiamo trovare attraverso la teoria della flessione semplice, l'equazione che descrive la trave, cioè:

$$\frac{M}{E \cdot I} = -v'' \quad \text{con} \quad v'' = -\frac{d^2 v}{dz^2}$$

ove  $M$  è il momento flettente,  $E \cdot I$  è la rigidità flessionale. Se scriviamo l'equazione di equilibrio nella configurazione deformata così da ottenere un momento flettente generato dal carico  $P$  non nullo (nella configurazione indeformata esso è nullo), otteniamo:

$$P v = E I \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Riscrivendo ora il problema, considerando le condizioni al contorno per la nostra trave incernierata su di un lato e appoggiata sull'altro, otteniamo il sistema di equazioni seguente:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{EI} v = 0 \\ v = 0 \quad \text{per } z = 0 \text{ e } z = l \end{cases}$$

il quale presenta due soluzioni:

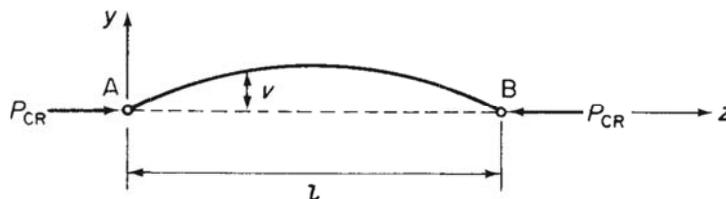
1.  $v = 0$  quando il carico  $P$  comprime la trave senza che vi sia alcuna inflessione della stessa
2.  $v \neq 0$  quando il carico  $P$  porta la trave ad inflettersi e raggiunge il valore critico

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 E I}{l^2}$$

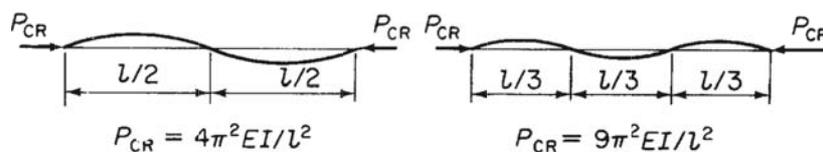
con  $n$  il numero di semi-lunghezze d'onda che presenta la trave deformata. Il più piccolo valore del carico critico si ottiene per  $n = 1$  ed è proprio il carico critico di Eulero

$$P_{cr,E} = \frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

In particolare si ha che se  $P < P_{cr}$  la deformata della trave è rettilinea, viceversa se  $P \geq P_{cr}$  iniziano a presentarsi delle deformate che hanno una o più semi-onde a seconda del valore del parametro  $n$ .



**Fig. 1.4:** Determinazione del carico critico di Eulero per una trave caricata di punta ( $n=1$ ) [19]



**Fig. 1.5:** Rappresentazione delle deformate della trave con due semionde ( $n=2$ ) e tre semionde ( $n=3$ ) [19]

Il valore della tensione corrispondente al carico critico si ottiene come:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{r}\right)^2}$$

con  $r$  il raggio di curvatura della sezione trasversale della trave. Il termine  $l/r$  è conosciuto come snellezza della trave. Per una trave che non è doppiamente simmetrica,  $r$  è il minimo raggio di curvatura della sezione trasversale poiché la trave si piega attorno ad un asse attorno al quale la rigidezza flessionale  $EI$  è minima. In alternativa, se il carico di punta è impedito in tutti i piani tranne uno, allora  $EI$  è la rigidezza flessionale in detto piano.

### 1.3 Metodi approssimati per il calcolo di $P_{cr}$ : Metodo di Ritz

Le configurazioni di equilibrio della trave di Eulero possono essere ricercate anche attraverso un approccio energetico. La trave infatti, accumula energia quando viene caricata deformandosi sia in termini elastici sia in termini di spostamento del vincolo (cioè l'appoggio) e le configurazioni di equilibrio possono essere trovate minimizzando la funzione che descrive l'energia potenziale totale del sistema considerato.

Infatti, il fatto che l'energia potenziale totale di un corpo elastico possieda un valore fisso in uno stato di equilibrio, può essere usato per studiare le condizioni di stabilità per una colonna deformata. In particolare, il metodo energetico è estremamente utile quando la forma della colonna deformata è sconosciuta e deve essere "intuita".

Consideriamo, inizialmente la trave semplicemente appoggiata di **Fig. 1.6**.

L'energia interna  $U$  della colonna si presume essere prodotta dall'azione della sola flessione e si può calcolare con la nota espressione:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz$$

o in maniera analoga:

$$U = \frac{E I}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz$$

con  $M = -E I d^2 v/dz^2$ .

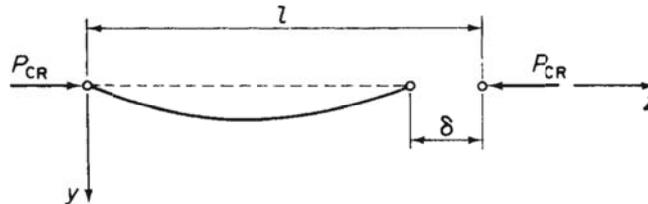


Fig. 1.6: Accorciamento di una trave dovuto al fenomeno del *buckling* [28]

L'energia potenziale  $V$  dovuta al carico critico di *buckling*  $P_{cr}$  riferita alla posizione dritta della trave come dato è :

$$V = -P_{cr} \delta$$

dove  $\delta$  lo spostamento assiale di  $P_{cr}$  dovuto alla flessione della trave dalla sua condizione iniziale dritta. Tale spostamento può essere definito come:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz$$

pertanto si ottiene una nuova espressione per l'energia potenziale:

$$V = -\frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz$$

L'energia potenziale complessiva della trave nella sua condizione di equilibrio dovuto al fenomeno del *buckling* è pertanto ottenibile come:

$$U + V = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (1.1)$$

o utilizzando una forma alternativa per  $U$  si ha:

$$U + V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 dz \quad (2.1)$$

Se consideriamo la trave, finora discussa, semplicemente appoggiata possiamo ipotizzare per essa una deformata del tipo:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi z}{l} \quad (3.1)$$

che soddisfa le condizioni al contorno:

$$v_{z=0} = v_{z=l} = 0 \quad \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0} = \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=l} = 0$$

ed è inoltre in grado, entro i limiti per la quale è valida e se i valori adatti per i coefficienti costanti  $A_n$  sono stati scelti opportunamente, di rappresentare qualsiasi curva continua. Siamo quindi in grado di trovare esattamente il valore del carico critico  $P_{cr}$ . Sostituendo quindi tale deformata nell'Eq. (2.1) otteniamo:

$$U + V = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n \pi z}{l} \right)^2 dz - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{n \pi z}{l} \right)^2 dz$$

Il prodotto presente in entrambi gli integrali sparisce durante i passaggi d'integrazione e si arriva all'espressione seguente:

$$U + V = \frac{\pi^4 EI}{4 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 A_n^2 - \frac{\pi^2 P_{cr}}{4 l} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2$$

Assegnando un valore fisso all'energia potenziale totale rispetto a ciascun coefficiente  $A_n$  a turno e prendendo poi  $A_n$  come variabile, abbiamo:

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial A_n} = \frac{\pi^4 EI n^4 A_n}{2 l^3} - \frac{\pi^2 P_{cr} n^2 A_n}{2 l} = 0$$

dalla quale si ottiene:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I n^2}{l^2}$$

come già specificato precedentemente.

Vediamo che ogni termine presente nell'Eq. (3.1) rappresenta una particolare forma deviata della trave con un corrispondente valore carico critico. Per esempio, il primo termine rappresenta la deformazione della trave con un'unica semi-onda, con  $P_{cr} = \pi^2 E I / l^2$ , il secondo e il terzo termine corrispondono alle forme con rispettivamente due o tre semi-onde, avendo carichi critici di  $P_{cr} = 4 \pi^2 E I / l^2$  e  $P_{cr} = 9 \pi^2 E I / l^2$  e così via. Chiaramente la trave è costretta in una forma innaturale e quindi più rigida grazie alla maggiore resistenza alla deformazione data dai vincoli, come si osserva dai valori crescenti del carico critico.

Se la forma deviata della trave è nota, è ininfluente quale delle equazioni definite per l'energia potenziale totale viene utilizzata. Tuttavia, quando soltanto una soluzione approssimata è possibile, è preferibile utilizzare l'Eq. (1.1) poiché l'integrale coinvolge il momento flettente che dipende dalla precisione della forma assunta da  $v$ , mentre il termine corrispondente nell'Eq. (2.1) dipende dalla precisione del rapporto  $d^2v/dz^2$  generalmente ottenuto in modo meno accurato.

Supponiamo che la curva di deflessione di una particolare trave sia sconosciuta o estremamente complicato da calcolare. Dobbiamo quindi assumere una forma ragionevole che soddisfi, per quanto possibile, le condizioni al contorno e il modello della forma deflessa (metodo di Rayleigh-Ritz). Generalmente, la curva di deflessione è nella forma di una serie finita, che coinvolge molteplici costanti sconosciute e funzioni note di  $z$ . Supponiamo che  $v$  sia data da:

$$v = A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z) + A_3 f_3(z)$$

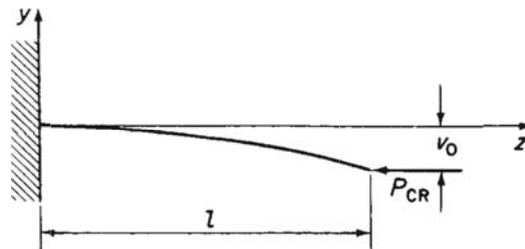
La sostituzione di tale espressione nell'Eq. (3.1) si traduce in una forma per l'energia potenziale totale in termini di carico critico e di coefficienti  $A_1$ ,  $A_2$  ed  $A_3$ , cioè le incognite. Assegnando dei valori fissi all'energia potenziale totale

rispetto ad  $A_1$ ,  $A_2$  ed  $A_3$ , a sua volta, produce tre equazioni simultanee dalle quali si possono determinare i rapporti  $A_1/A_2$ ,  $A_1/A_3$  ed il carico critico. I valori assoluti dei coefficienti non sono calcolabili in quanto le deformazioni della trave nel suo stato di equilibrio neutro deformato sono indeterminati.

Come una semplice illustrazione, consideriamo la trave mostrata nel suo stato deformato in **Fig. 11**. Una forma approssimativa della sua forma inflessa si può dedurre dalla forma deviata di una mensola caricata di punta. Così:

$$v = \frac{v_0 z^2}{2 l^3} (3 l - z)$$

Questa formulazione soddisfa le condizioni finali di deflessione per la trave, ovvero,  $v = 0$  per  $z = 0$  e  $v = v_0$  per  $z = l$ . Inoltre essa soddisfa la condizione che la pendenza della trave sia nulla all'incastro e che il momento flettente, espresso da  $d^2v/dz^2$ , sia nullo all'estremità libera.



**Fig.1.7:** Carico critico per una mensola caricata di punta [16]

Il momento flettente per ogni sezione della trave è:

$$M = P_{cr}(v_0 - v)$$

perciò sostituendo le espressioni appena definite per  $M$  e  $v$  nell'Eq. (3.1) si ha:

$$U + V = \frac{P_{cr}^2 v_0^2}{2EI} \int_0^l \left( 1 - \frac{3z^2}{2l^2} + \frac{z^3}{2l^3} \right)^2 dz - \frac{P_{cr}}{2} \int_0^l \left( \frac{3v_0}{2l^3} \right)^3 z^2 (2l - z)^2 dz$$

Integrando e sostituendo i limiti, abbiamo:

$$U + V = \frac{17 P_{cr}^2 v_0^2 l}{35 2EI} - \frac{3}{5} P_{cr} \frac{v_0^2}{l} = 0$$

Quindi:

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial v_0} = \frac{17 P_{cr}^2 v_0 l}{35 EI} - \frac{6 P_{cr} v_0}{5 l} = 0$$

da cui:

$$P_{cr} = \frac{42 EI}{17 l^2} = 2.471 \frac{EI}{l^2}$$

Questo valore del carico critico può essere confrontato con quello esatto di  $\pi^2 EI/4 l^2 = 2.467 EI/l^2$  e si può osservare, come l'errore commesso sia molto contenuto. I valori approssimativi di carico critico ottenuti con il metodo energetico, sono sempre superiori a quelli esatti e la spiegazione di ciò sta nel fatto che una presunta forma deflessa implica la presenza di vincoli per forzare la trave ad assumere una tale forma artificiale. Questo, come abbiamo visto, ha l'effetto di irrigidire la trave con un conseguente aumento del carico critico.

Si osserva che la soluzione ottenuta per l'esempio precedente, può essere raggiunta semplicemente equiparando l'aumento di energia interna ( $U$ ) con il lavoro svolto dal carico critico esterno ( $-V$ ). Questo è un procedimento che viene impiegato quando la forma deviata assunta, contiene un singolo coefficiente sconosciuto, come  $v_0$  nell'esempio precedente.

## 1.4 Formulazione di Rankine-Gordon

Le previsioni ottenute per il valore del carico di punta con la formula di Eulero, sono ragionevoli solo per travi o colonne molto lunghe e sottili che presentino piccole imperfezioni geometriche. Nella pratica, tuttavia, la maggior parte delle travi soffrono il collasso plastico ed i carichi di punta sperimentalmente ottenuti sono molto inferiori rispetto alle previsioni di Eulero.

Una formula semi-empirica che risulta particolarmente fedele nel caso di un puntello (struttura formata da una trave concepita per resistere a sforzi assiali longitudinali) è la formula di Rankine-Gordon la quale tiene conto della

resistenza alla compressione del materiale, il suo modulo di Young e il suo rapporto di snellezza, cioè  $L/k$ , dove  $L$  è la lunghezza del puntello,  $k$  è il raggio d'inerzia della sezione trasversale del puntone,  $P_c$  il carico di rottura definito come  $P_c = \sigma_c A$  con  $A$  area della sezione trasversale e  $\sigma_c$  la tensione di rottura. Quindi:

$$\frac{1}{P_{RG}} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_c}$$

ove  $P_{RG}$  è il carico di *buckling* di Rankine-Gordon e  $P_e$  è il carico critico di Eulero (pari a  $\pi^2 EI/L^2$  per una trave semplicemente appoggiata).

Sostituendo:

$$\frac{1}{P_{RG}} = \frac{L_0^2}{\pi^2 EI} + \frac{1}{\sigma_c A} = \frac{L_0^2}{\pi^2 EA k^2} + \frac{1}{\sigma_c A} = \frac{L_0^2 \sigma_c + \pi^2 E k^2}{\pi^2 EA k^2 \sigma_c}$$

o in alternativa:

$$P_{RG} = \frac{\pi^2 EA k^2 \sigma_c}{L_0^2 \sigma_c + \pi^2 E k^2} = \frac{\sigma_c}{L_0^2 \sigma_c / \pi^2 EA k^2 + \pi^2 E k^2 / \pi^2 EA k^2} = \frac{\sigma_c A}{(\sigma_c / \pi^2 E)(L_0/k)^2 + 1}$$

Se definiamo la costante  $a$  al denominatore, la quale dipende solo dalle condizioni al contorno e dalle proprietà del materiale:

$$a = \frac{\sigma_c}{\pi^2 E}$$

otteniamo la formula di Rankine-Gordon per il calcolo del carico di *buckling*:

$$P_{RG} = \frac{\sigma_c A}{1 + a(L_0/k)^2}$$

Possiamo confrontare la formula appena trovata con quella di Eulero nel caso di un puntello perfetto come si osserva in **Fig. 10**. Di seguito vengono riportati alcuni valori tipici per il coefficiente  $1/a$  e per la tensione  $\sigma_c$ .

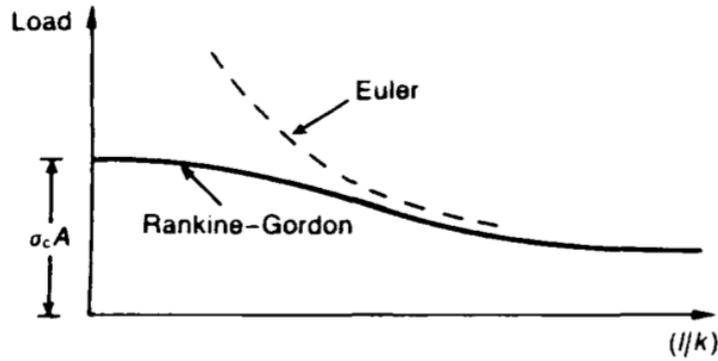


Fig. 1.8: Carico di buckling di Eulero a confronto con quello di Rankine-Gordon [31]

Materiale	$1/a$	$\sigma_c$
Acciaio dolce	7500	300
Ferro battuto	8000	250
Ghisa	18000	560
Legno	1000	35

Tab. 1: Costanti di rankine-Gordon

## 1.5 Carico critico della trave a sbalzo

Per semplificare il nostro problema consideriamo una trave a sbalzo lunga  $L$  (una mensola) che abbia la sua massa non distribuita lungo di essa bensì concentrata ad una delle sue estremità e che sia pari ad  $M$  (Fig. 1.9).

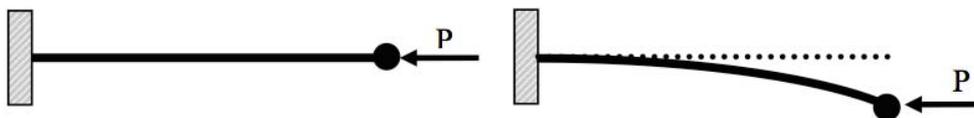
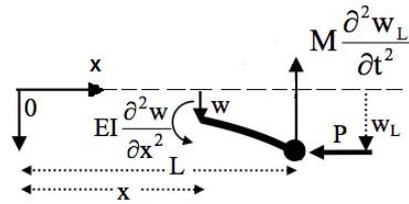


Fig. 1.9: Mensola caricata assialmente con massa concentrata [16]

L'equazione dell'equilibrio dei momenti rispetto ad un polo a distanza  $x$  dall'incastro si scrive come:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(w_L - w) - M \frac{\partial^2 w_L}{\partial t^2} (L - x)$$



**Fig. 1.10:** Equilibrio dei momenti rispetto ad un polo distante  $x$  dall'incastro [23]

A questa espressione vanno associate le condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} x = 0 : w = 0 ; \partial w / \partial x = 0 \\ x = L : w = w_L \end{cases}$$

Ricercando la soluzione dell'equazione differenziale nella forma:

$$w = X(x)e^{st}$$

essa si riscrive come:

$$EI \ddot{X} + P X = P X_L - M s^2 X_L(L - x)$$

Ovvero:

$$\ddot{X} + p^2 X = p^2 X_L - \lambda^2(1 - \xi) X_L \quad (4.1)$$

dove si è posto:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad p^2 = \frac{P L^2}{EI} \quad \lambda^2 = -\frac{M L^3 s^2}{EI} \quad (5.1)$$

L'integrale generale si scrive come:

$$X = c_1 \sin(p\xi) + c_2 \cos(p\xi) + X_L - (\lambda/p)^2(1 - \xi) X_L$$

le cui costanti di integrazione  $c_1$ ,  $c_2$  e  $X_L$  si trovano dalle condizioni agli estremi con annesse le sostituzioni (5.1):

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 \\ \dot{\xi} = 0 & \dot{X} = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 + [1 - (\lambda/p)^2] X_L = 0 \\ p c_1 + (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ c_1 \sin p + c_2 \cos p + X_L = X_L \end{cases}$$

Ovvero in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 - (\lambda/p)^2 \\ p & 0 & (\lambda/p)^2 \\ \sin p & \cos p & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \end{Bmatrix} = 0$$

Tale sistema ammette soluzione non banale se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti, cioè:

$$\left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 \sin p + p \cos p \left[1 - \left(\frac{\lambda}{p}\right)^2\right] = 0$$

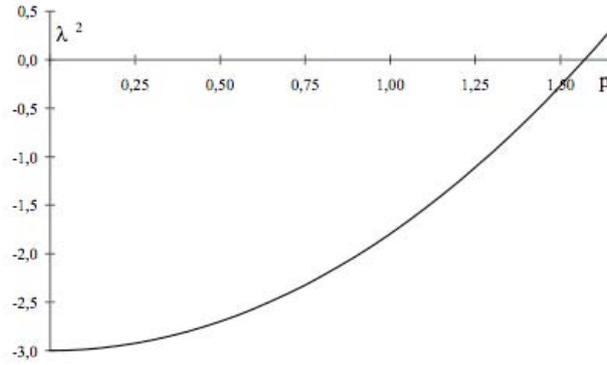
da cui si ottiene:

$$\lambda^2 = -\frac{p^3 \cos p}{\sin p - p \cos p} \quad (6.1)$$

Al variare del parametro  $p$  varia l'andamento di  $\lambda^2$  secondo il grafico seguente (**Fig. 1.11**).

In particolare si presentano i seguenti casi:

- per  $p = 0$  si ha  $\lambda^2 = -3$  ( $\lambda$  è quindi immaginario) e si annulla per  $\cos p = 0$  ovvero  $p = \pi/2$
- per  $p < \pi/2$  si ha  $\lambda = \pm j\omega$  (quindi è ancora immaginario e il moto risulta stabile)
- per  $p > \pi/2$  si ha  $\lambda = \pm \zeta$  (quindi è reale e il moto risulta instabile)

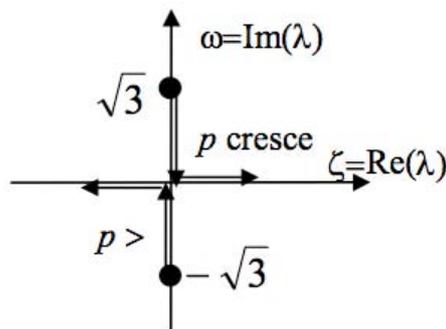


**Fig. 1.11:** Andamento del parametro  $\lambda^2$  in funzione  $p$  per una mensola con carico orizzontale [24]

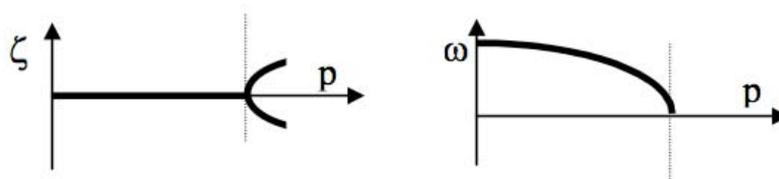
Pertanto il valore del carico critico si ha per  $p = \pi/2$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4 L^2}$$

Per completezza riportiamo anche i seguenti andamenti di  $\lambda$ ,  $\omega$  e  $\zeta$  in funzione del carico  $p$



**Fig. 1.12:** Andamento di  $\lambda$  in funzione del carico  $p$  [23]



**Fig. 1.13:** Andamento di  $\zeta$  ed  $\omega$  in funzione del carico  $p$  [28]

Come si può notare il valore del carico critico si ottiene per  $\lambda = 0$ , cioè quando le forze d'inerzia si annullano. In altri termini, le forze d'inerzia non incidono

sulla determinazione di  $P_{cr}$  e quindi, ai fini della determinazione della criticità del sistema è inutile tenerne conto.

Per  $p = 0$ , il problema si riduce a quello di trovare la frequenza di vibrazione del sistema in esame. In tal caso l'equazione risoltrice diviene per integrazioni successive:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= -\lambda^2(1 - \xi) X_L \\ \dot{X} &= -\lambda^2 \left( \xi - \frac{\xi^2}{2} \right) X_L + a \\ X &= -\lambda^2 \left( \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right) X_L + a \xi + b\end{aligned}$$

le cui costanti di integrazione  $a$ ,  $b$  e  $X_L$  si trovano imponendo le condizioni all'estremità:

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 \\ \xi = 0 & \dot{X} = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \\ \lambda^2 = -3 \rightarrow \lambda = \pm j\sqrt{3} \end{cases}$$

Come già affermato sopra possiamo allora ricondurre il nostro problema al caso statico ponendo  $\lambda = 0$  nell'Eq. (.1) ottenendo la seguente soluzione dell'integrale generale:

$$X = c_1 \sin p\xi + c_2 \cos p\xi + X_L$$

Imponendo le condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 \\ \xi = 0 & \dot{X} = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = -X_L \\ c_1 = 0 \\ (p \cos p) X_L = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica (3) diviene:

$$p^3 \cos p = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$p_0 = 0 \quad p_1 = \frac{\pi}{2} \quad p_2 = \frac{3\pi}{2} \quad \dots$$

cui corrispondono i modi di deformazione:

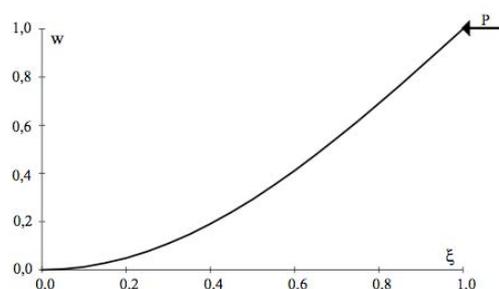
$$X = X_L(1 - \cos p\xi)$$

Poiché per  $p = 0$  si ha una soluzione banale,  $X(\xi) = 0$ , il valore più basso di  $p$  per il quale si ha una soluzione non nulla è  $p_{cr} = \pi/2$  cui corrisponde il modo di deformazione critico:

$$X = c \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2} \xi \right)$$

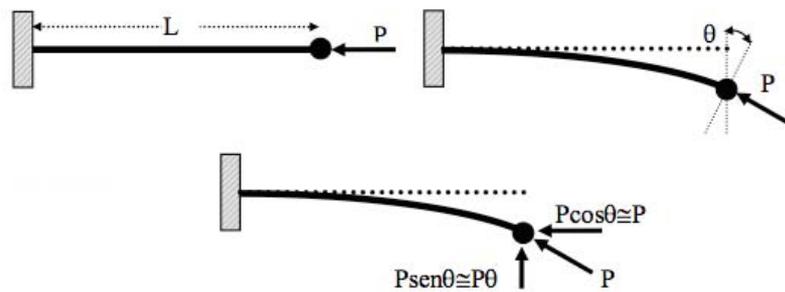
Nel caso in esame (sistema conservativo) il metodo statico appena visto dà lo stesso risultato di quello dinamico precedentemente trattato. Per  $p = p_{cr}$ ,  $w \neq 0$  e definito a meno di una costante, quindi la posizione di equilibrio  $w = 0$  non è più conservata.

Di seguito si riporta l'andamento del parametro  $\xi$  in funzione dello spostamento osservando che valori del carico superiori a  $p_1$ , pur matematicamente possibili, non solo non hanno interesse pratico, ma non sono neppure fisicamente corretti. Infatti la possibilità di uno spostamento non nullo definito a meno di una costante e quindi genericamente grande, non garantisce la validità del modello matematico finora utilizzato.



**Fig. 1.14:** Andamento di  $\xi$  in funzione dello spostamento per il caso statico [27]

Riprendiamo in esame la stessa mensola appena studiata variandone le condizioni di carico. In particolare consideriamo un carico  $P$  che non abbia direzione orizzontale immutata bensì che ruoti in modo da risultare tangente alla trave nell'estremità libera (**Fig. 1.14**). Possiamo scomporre il carico in una componente orizzontale ed una verticale rispettivamente pari a  $P \cos \vartheta \cong P$  e  $P \sin \vartheta \cong P \vartheta$ , in ipotesi di piccoli angoli.



**Fig. 1.15:** Mensola con carico tangente all'estremità libera [16]

Come per il caso precedente possiamo scrivere l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto ad un polo posto a distanza  $x$  dall'incastro, ottenendo:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = P(w_L - w) - P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_L (L - x) - M \frac{\partial^2 w_L}{\partial t^2} (L - x)$$

cui vanno associate le condizioni agli estremi:

$$\begin{cases} x = 0 : w = 0 ; \partial w / \partial x = 0 \\ x = L : w = w_L ; \partial w / \partial x = (\partial w / \partial x)_L \end{cases}$$

Ricercando la soluzione dell'equazione differenziale nella forma:

$$w = X(x)e^{st}$$

essa si riscrive come:

$$EI \ddot{X} + P X = P X_L - P \dot{X}_L (L - x) - M s^2 X_L (L - x)$$

Ovvero:

$$\ddot{X} + p^2 X = p^2 X_L - p^2 \dot{X}_L(1 - \xi) - \lambda^2(1 - \xi) X_L \quad (7.1)$$

L'integrale generale si scrive come:

$$X = c_1 \sin(p\xi) + c_2 \cos(p\xi) + X_L - \dot{X}_L(1 - \xi) - (\lambda/p)^2(1 - \xi) X_L$$

le cui costanti di integrazione  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $X_L$  e  $\dot{X}_L$  si trovano da:

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 \\ \xi = 0 & \dot{X} = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L \\ \xi = 1 & \dot{X} = \dot{X}_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 + X_L - \dot{X}_L - (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ p c_1 + \dot{X}_L + (\lambda/p)^2 X_L = 0 \\ c_1 \sin p + c_2 \cos p + X_L = X_L \\ p c_1 \cos p - p c_2 \sin p + \dot{X}_L + (\lambda/p)^2 X_L = \dot{X}_L \end{cases}$$

Ovvero in forma matriciale:

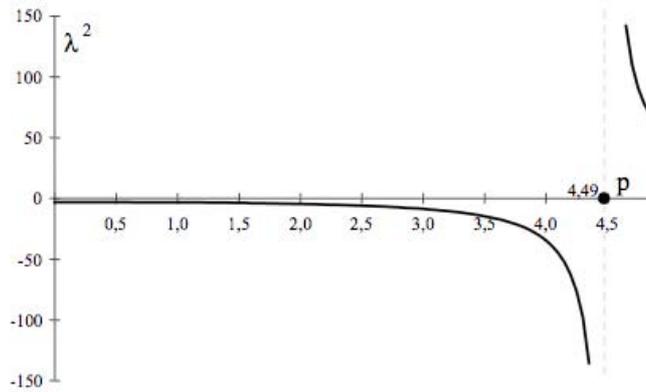
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 - (\lambda/p)^2 & -1 \\ p & 0 & (\lambda/p)^2 & 1 \\ \sin p & \cos p & 0 & 0 \\ p \cos p & -p \sin p & (\lambda/p)^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \\ \dot{X}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tale sistema ammette soluzione non banale se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti, cioè se:

$$\lambda^2 = -\frac{p^3}{\sin p - p \cos p}$$

Al variare del parametro  $p$  varia l'andamento di  $\lambda^2$  secondo il grafico seguente (**Fig. 1.16**). In particolare si presentano i seguenti casi:

- per  $p < 4.49$  si ha  $\lambda = \pm j\omega$  ( $\lambda$  è quindi immaginario e il moto è stabile)
- per  $p = 4.49$  si ha  $\sin p = p \cos p$ , perciò  $\lambda = \pm \infty$
- per  $p > 4.49$  si ha  $\lambda = \pm \zeta$  (quindi è reale e il moto è instabile)

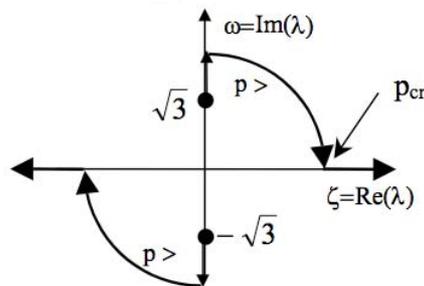


**Fig. 1.16:** Andamento del parametro  $\lambda^2$  in funzione  $p$  per una mensola con carico tangente [16]

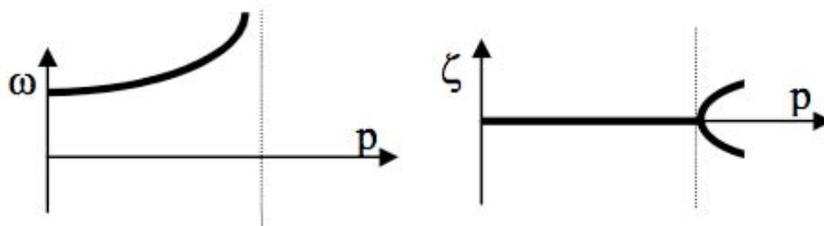
Pertanto il valore del carico critico si ha per  $p = 4.49$

$$P_{cr} = \frac{2.05 \pi^2 EI}{L^2}$$

Per completezza riportiamo anche i seguenti andamenti di  $\lambda$ ,  $\omega$  e  $\zeta$  in funzione del carico  $p$



**Fig. 1.17:** Andamento di  $\lambda$  in funzione del carico  $p$  [14]

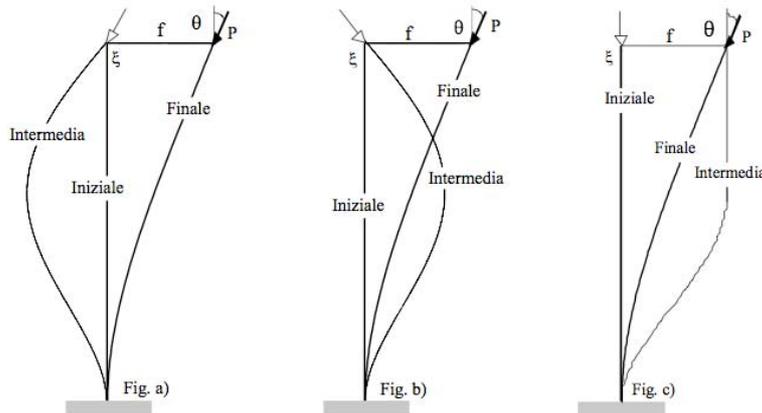


**Fig. 1.18:** Andamento di  $\zeta$  ed  $\omega$  in funzione del carico  $p$  [14]

Come si vede il valore critico del carico si ha per  $\lambda \neq 0$  e quindi quando le forze d'inerzia non risultano nulle.

Il perché di tutto questo risiede nel fatto che ora il carico  $P$ , a differenza del caso di una mensola caricata assialmente, è non conservativo. Infatti il lavoro compiuto da  $P$  è diverso a seconda del percorso seguito per passare dalla posizione iniziale  $w = 0$  a quella finale.

Si considerino infatti i tre diversi modi seguiti per passare dalla posizione iniziale a quella finale riportati nella seguente figura:



**Fig. 1.19:** Mensola caricata di punta con tre diverse strategie per passare dalla configurazione iniziale a quella finale: nel caso a) l'estremo libero prima ruota di  $\vartheta$  e poi trasla di  $f$ ; nel caso b) l'estremo libero prima ruota di  $-\vartheta$ , poi trasla di  $f$  ed infine ruota di  $2\vartheta$ ; nel caso c) l'estremo libero prima trasla di  $f$  e poi ruota di  $\vartheta$  [29]

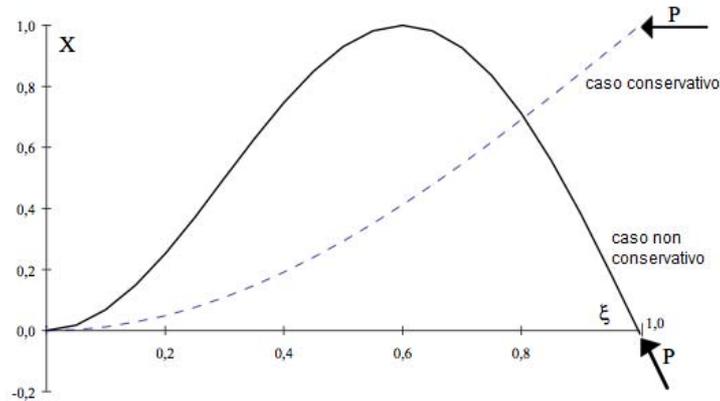
Come si può osservare i casi considerati si diversificano tra loro per il valore del lavoro compiuto dalla componente orizzontale del carico  $P$ : nel caso a) il lavoro è negativo, nel caso b) il lavoro è positivo ed infine nel caso c) il lavoro è nullo. Quindi a meno del lavoro, comune in tutti e tre i casi, conseguente all'abbassamento verticale, si hanno tra diversi valori del lavoro compiuto dalla componente orizzontale.

Il modo critico, normalizzato in modo che sia unitario per  $\xi = 1$ , risulta:

$$X = 0.733[(\cos p_{cr}\xi - 1) \tan p_{cr} + (\sin p_{cr}\xi - p_{cr}\xi)]$$

Nella figura seguente sono riportati i modi relativi al caso conservativo (forze d'inerzia nulle) e al caso non conservativo (forze d'inerzia non nulle). Si noti come nel primo caso la deformata critica si annulli solo in corrispondenza dell'incastro, mentre nel secondo essa si annulli anche per  $\xi \cong 1$ .

E' intuitivo capire come, nel caso non conservativo, sia necessario un carico di compressione maggiore di quello necessario nell'altro caso, pertanto è naturale che il carico critico abbia un valore maggiore.



**Fig. 1.20:** Deformate del caso conservativo e non conservativo per una mensola [41]

In generale, nel caso di presenza di forze non conservative il  $P_{CR}$  dipende dalle forze d'inerzia. Pertanto quando sono presenti forze non conservative, le forze d'inerzia devono essere considerate per valutare correttamente il  $P_{CR}$ . L'impiego del metodo statico, su di un sistema in cui è presente una forza di natura non conservativa, porta ad un risultato sbagliato.

Si voglia, infatti, utilizzare (erroneamente) il metodo statico ovvero non si tenga conto delle forze d'inerzia per cui la (?) diviene:

$$\ddot{X} + p^2 X = p^2 X_L - p^2 \dot{X}_L (1 - \xi)$$

il cui integrale generale risulta:

$$X = c_1 \sin(p\xi) + c_2 \cos(p\xi) + X_L - \dot{X}_L (1 - \xi) - (\lambda/p)^2 (1 - \xi) X_L$$

Imponendo le condizioni agli estremi si ottiene:

$$\begin{cases} \xi = 0 & X = 0 \\ \xi = 0 & \dot{X} = 0 \\ \xi = 1 & X = X_L \\ \xi = 1 & \dot{X} = \dot{X}_L \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 + X_L - \dot{X}_L = 0 \\ p c_1 + \dot{X}_L = 0 \\ c_1 \sin p + c_2 \cos p = 0 \\ p c_1 \cos p - p c_2 \sin p = 0 \end{cases}$$

Ovvero in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ p & 0 & 0 & 1 \\ \sin p & \cos p & 0 & 0 \\ \cos p & -\sin p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ X_L \\ \dot{X}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

il cui determinante dei coefficienti risulta:

$$-(\sin^2 p + \cos^2 p) \neq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Poiché tale determinante è sempre diverso da zero per qualsiasi valore del carico  $p$ , l'unica soluzione ammissibile è quella banale. In termini fisici ciò significherebbe che la trave risulterebbe stabile per qualsiasi carico applicato. Ovviamente, il risultato ottenuto, non corrisponde alla realtà e la ragione sta nel fatto che abbiamo impiegato il metodo statico in presenza di un sistema non conservativo.

## 1.6 Trave semplicemente appoggiata

Nel caso di trave semplicemente appoggiata il sistema da risolvere risulta:

$$w^{IV} + p^2 w'' = 0 \quad \begin{cases} w(0) = w(1) = 0 \\ w''(0) = w''(1) = 0 \end{cases}$$

Considerando la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$w = c_1 \cos(p\xi) + c_2 \sin(p\xi) + c_3 \xi + c_4 \quad (8.1)$$

e imponendovi le condizioni agli estremi si ottiene:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w''(0) = 0 \\ w(1) = 0 \\ w''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_4 = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_2 \sin p + c_3 = 0 \\ c_2 \sin p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_4 = 0 \\ c_3 = 0; p = n\pi; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

E' evidente che per  $n = 0$   $w$  è identicamente nulla. Il valore più piccolo del carico per cui si ha una soluzione non banale è  $n = 1$  ( $p = \pi$ ) e per tale valore si ha il seguente carico critico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

cui corrisponde, essendo  $c_2$  indeterminato, il modo:

$$w(\xi) = c_2 \sin \pi \xi$$

## 1.7 Effetto di imperfezioni iniziali

E' intuitivo capire che nella pratica è impossibile ottenere una trave perfettamente dritta e che essa venga caricata esattamente lungo il proprio asse. Una trave reale, può quindi presentare delle curvature anche impercettibili, che comportano la presenza di un carico eccentrico e non più perfettamente assiale. Tali imperfezioni, influenzano in larga misura il comportamento della trave che, a differenza di quella perfetta, inizia a piegarsi immediatamente appena viene applicato il carico assiale.

Supponiamo che, una trave, inizialmente piegata, venga sottoposta ad un carico assiale crescente  $P$  come indicato in **Fig. 1.21**.

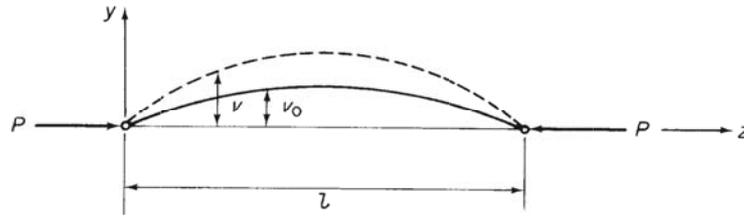
In questo caso, il momento flettente è, in qualsiasi punto, proporzionale alla variazione di curvatura della trave rispetto alla sua posizione iniziale. Pertanto

$$EI \frac{d^2 v}{dz^2} - EI \frac{d^2 v_0}{dz^2} = P v$$

che, con alcune semplificazioni, porge

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = \frac{d^2 v_0}{dz^2} \quad (8.1)$$

con  $\lambda^2 = P/E \cdot I$ .


**Fig. 1.21:** Trave inizialmente piegata [16]

La deformata finale della trave,  $v$ , dipende dalla condizione indeformata  $v_0$ .  
Assumendo che

$$v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi z}{l}$$

e sostituendo tale espressione nell'Eq. (1.1) si ottiene:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 v = -\frac{\pi^2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin \frac{n \pi z}{l}$$

La soluzione generica a tale espressione è:

$$v = B \cos \lambda z + D \sin \lambda z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n \pi z}{l}$$

ove  $B$  e  $D$  sono delle costanti di integrazione e  $\alpha = \lambda^2 l^2 / \pi^2$ . Considerando le condizioni al contorno, che nel nostro caso sono:

$$v = 0 \quad \text{per } z = 0 \text{ e } z = l$$

si ottengono i valori delle costanti pari a:

$$B = D = 0$$

dalle quali si ha:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n \pi z}{l}$$

Si noti il fatto che, in contrasto con quanto accade per la trave perfetta, siamo ora in grado di ottenere una soluzione non banale per la deflessione. Ciò lo si deve attendere finché la trave è in equilibrio stabile nella sua posizione flessa per qualsiasi valore del carico  $P$ .

Una scrittura alternativa per il parametro  $\alpha$  è la seguente:

$$\alpha = \frac{P l^2}{\pi^2 E I} = \frac{P}{P_{cr}}$$

Così facendo il parametro  $\alpha$  risulta essere sempre minore dell'unità e si avvicina al valore unitario, quando il carico applicato si avvicina al carico critico per la trave. Una buona approssimazione, pertanto, per la deformata nel caso in cui il carico applicato sia prossimo a quello critico è la seguente:

$$v = \frac{A_1}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi z}{l}$$

o per la mezzera della trave, dove  $z = l/2$

$$v = \frac{A_1}{1 - P/P_{cr}} \quad (9.1)$$

con  $A_1$  vista come la deformata centrale iniziale.

Se le deviazioni centrali  $\delta$  ( $= v - A_1$ ) sono misurate dalla posizione iniziale di curvatura della trave allora dall'Eq. (2.1) si ricava:

$$\frac{A_1}{1 - P/P_{cr}} - A_1 = \delta$$

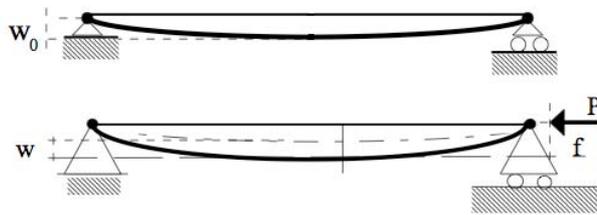
la quale dopo alcuni arrangiamenti porge:

$$\delta = P_{cr} \frac{\delta}{P} - A_1$$

Se volessimo, rappresentare graficamente, l'andamento del parametro  $\delta$  in funzione del rapporto  $\delta/P$  osserveremmo una pendenza in corrispondenza del carico critico e una intercetta pari al valore della deformata centrale iniziale.

Un ulteriore approccio può essere il seguente.

Consideriamo sempre una trave inizialmente piegata prima dell'applicazione del carico e indichiamo con  $w_0(x)$  la deformata iniziale e con  $f(\xi)$  la deformata rispetto all'orizzontale (**Fig. 1.22**).



**Fig. 1.22:** Trave inizialmente piegata con le deformate iniziali [20]

Lo spostamento elastico conseguente al carico risulta:

$$w(\xi) = f(\xi) - w_0(\xi)$$

L'equazione di equilibrio e le relative condizioni agli estremi si scrivono:

$$w^{IV} + p^2(w'' + w_0'') = 0 \quad (10.1)$$

$$w(0) = w''(0) = w(1) = w''(1) = 0$$

Assumendo:

$$w = \sum_{m=1}^M a_m \sin m\pi\xi \quad w_0'' = \sum_{m=1}^M w_{0m} \sin m\pi\xi$$

le condizioni agli estremi sono soddisfatte.

Sostituendo queste due ultime espressioni nell'Eq. (10.1)

$$[(m \pi)^2 - p^2]a_m = p^2 w_{0m} \quad m = 1,2,3 \dots$$

Perciò

$$a_m = \frac{p^2 w_{0m}}{(m \pi)^2 - p^2}$$

Indicando  $p_m = m \pi$ , lo spostamento risulta:

$$w = \sum_{m=1}^M \frac{p^2 w_{0m}}{(m \pi)^2 - p^2} \sin m\pi\xi$$

La deformata massima si ha in mezzeria e tende ad infinito per  $p = p_m$ . La struttura non è certo in grado di sopportare uno spostamento infinito perciò il valore più basso del carico per cui questo avviene è sicuramente il valore critico. In particolare se  $w_{0,1} \neq 0$  risulta  $p_{cr} = \pi$ . Il grafico sottostante (**Fig. 1.23a**) riporta il valore dello spostamento in mezzeria al variare del carico per tre diversi valori di  $w_{0,1}$  e  $w_{0,m \neq 1} = 0$  ( $w \rightarrow \infty$  per  $p_{cr} \rightarrow \pi$ ).

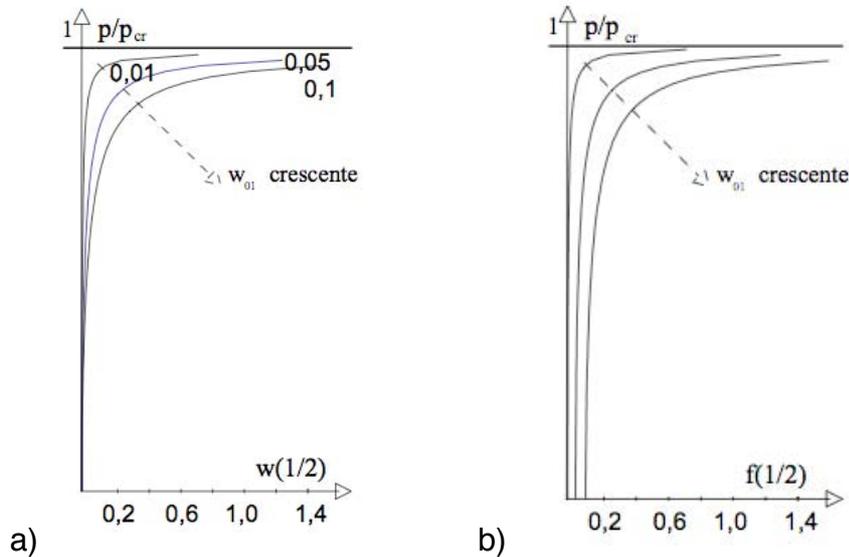
Ovviamente, invece che assumere come incognita del problema lo spostamento  $w$  avremmo potuto scegliere lo spostamento  $f$  ottenendo così il nuovo sistema:

$$\begin{aligned} f^{IV} + p^2 f^{II} &= w_0^{IV} \\ f(0) = f^{II}(0) = f^{II}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Procedendo in maniera del tutto analoga a quanto fatto precedentemente si ottiene:

$$f = \sum_{m=1}^M \frac{p_n^2 w_{0,m}}{p_m^2 - p^2} \sin m\pi\xi$$

In particolare se  $w_{0,m} = 0$  per  $m > 1$ , il grafico di seguito riporta il valore dello spostamento di mezzeria al variare del carico per tre valori di  $w_{0,1}$  (**Fig. 1.22b**).



**Fig.1.23:** Spostamento in funzione del carico: caso a) per lo spostamento  $w$  e caso b) per lo spostamento rispetto all'orizzontale  $f$  [41]

## 1.8 Eccentricità del carico assiale applicato

Consideriamo ora, il caso in cui la trave sia perfettamente diritta ma sia caricata in modo eccentrico, cioè che il carico applicato non risulti centrato ma spostato di una quantità  $e$ . Osservando la **Fig. 1.24** e determinando la condizione d'equilibrio dei momenti in una generica posizione  $x$  si ottiene:

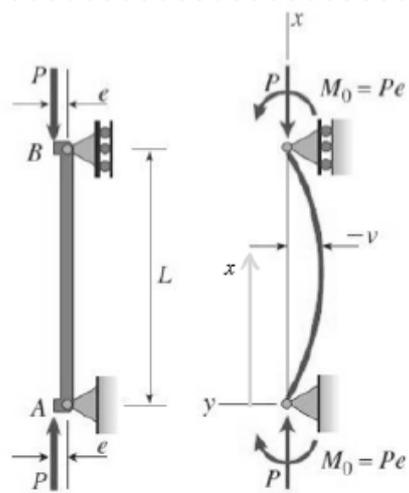
$$M(x) = P e - P v(x) = P(e - v)$$

cioè

$$EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = P(e - v) \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v = k^2 e$$

con

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



**Fig. 1.24:** Trave in doppio appoggio con carico eccentrico [20]

La soluzione generale si ottiene immediatamente come:

$$v(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + e$$

Considerando le condizioni al contorno tipiche della trave in doppio appoggio:

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2 = e \\ c_1 = -e \tan \frac{kL}{2} \end{cases}$$

Così facendo possiamo scrivere la soluzione dell'equazione per tale sistema nella forma:

$$v(x) = -e \left( \tan \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right)$$

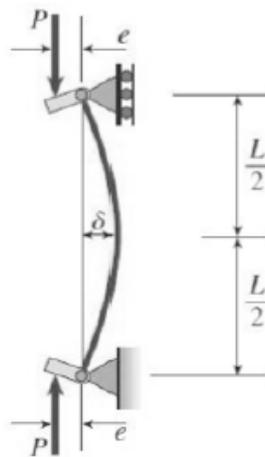
Tale soluzione è sempre finita qualunque sia il carico ad essa applicato.

Esaminiamo ora il valore massimo dello spostamento trasversale che si verifica in mezzeria (**Fig. 1.24**):

$$\delta = -v\left(\frac{L}{2}\right) = e \left( \tan \frac{kL}{2} \sin \frac{kL}{2} + \cos \frac{kL}{2} - 1 \right) = e \left( \sec \frac{kL}{2} - 1 \right)$$

Ricordando le espressioni di  $k$  e di  $P_{cr}$  per una trave in doppio appoggio otteniamo una relazione, ove compare esplicitamente, il rapporto tra il carico applicato e quello critico ad eccentricità nulla:

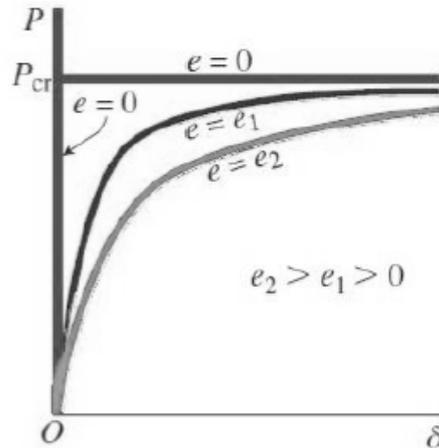
$$\delta = e \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$



**Fig. 1.25:** Spostamento in mezzeria di una trave caricata eccentricamente [20]

L'espressione finale scritta precedentemente si annulla quando  $e = 0$  e tende ad infinito per  $P = P_{cr}$ .

Se osserviamo il grafico di **Fig. 1.25** possiamo sottolineare che, al crescere dell'eccentricità, le curve traslano verso destra in maniera ad essa proporzionale mantenendo come riferimento il caso con  $P = P_{cr}$ . Quando si assiste ad una deflessione troppo elevata la soluzione perde di significato perché si esce dalle ipotesi fatte (piccoli spostamenti).



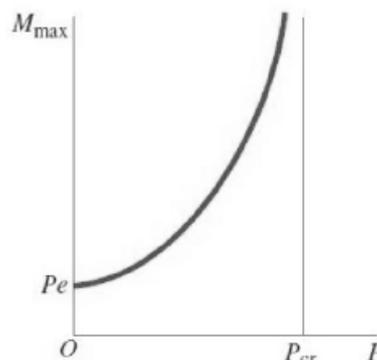
**Fig. 1.26:** Andamento del carico rispetto allo spostamento trasversale della mezzeria con diversi valori di eccentricità [16]

E' opportuno evidenziare che, pur avendo svolto tutti i calcoli in regime di piccoli spostamenti ed elasticità lineare del materiale, la deflessione massima non risulta proporzionale al carico applicato. Questa non linearità, è indotta dal fatto che la deformabilità flessionale, agisce nel senso di modificare il carico applicato andando ad incrementare il braccio della forza  $P$  (aumentando quindi anche il momento da essa generato).

Infine determiniamo l'espressione del momento massimo in mezzeria della trave:

$$M_{max} = P(e + \delta) = P e \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

Questo parametro, come si può osservare dalla **Fig. 1.27** varia in modo non lineare rispetto al carico applicato.



**Fig. 1.27:** Andamento del momento massimo rispetto al carico applicato [14]

Un'ulteriore procedura nel trattare un carico di natura eccentrica, è quella presentata nel Sarafin nel quale viene distinta la trattazione per colonne e travi.

**Colonne caricate eccentricamente:**

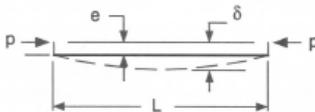
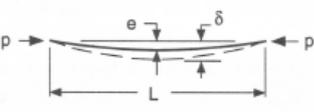
Per una colonna sottoposta ad un carico disallineato di compressione,  $p$ , vale l'espressione:

$$M = p \delta$$

ove  $M$  è il momento flettente di picco che agisce sulla sezione della colonna, e  $\delta$  è la deflessione laterale della colonna, la quale, tiene conto anche dell'eccentricità del carico,  $e$ , cioè la distanza dall'asse di azione del carico e l'asse del centroide indeformato della colonna stessa. In questa trattazione, si assume che l'eccentricità, sia nella direzione che provoca un momento flettente unicamente su uno degli assi principali della parte di curvatura. Il picco della tensione totale,  $f_c$ , eguaglia la somma tra lo stress assiale e il picco dello stress flessionale:

$$f_c = \frac{p}{A} + \frac{p e c (\delta/e)}{I}$$

dove  $A$  è l'area della sezione,  $c$  è la distanza tra l'asse neutro e lo spigolo più esterno della sezione ed  $I$  è il momento d'inerzia. La tabella seguente, specifica i valori del rapporto  $\delta/e$  per due tipologie di eccentricità, l'una legata al carico e l'altra alla geometria della colonna. Queste espressioni, sono valide e anche lo stress è superiore al limite di proporzionalità del materiale, fintanto che il carico critico  $P_{cr}$  viene calcolato con un appropriato metodo inelastico.

Straight column, offset load	Initially bowed column
	
$\frac{\delta}{e} = \frac{1 + 0.23 (p/P_{cr})}{1 - p/(P_{cr})}$	$\frac{\delta}{e} = \frac{1}{1 - p/(P_{cr})}$

**Tab. 2:** Colonne caricate eccentricamente, espressioni per il calcolo del rapporto  $\delta/e$

Quando l'eccentricità è asimmetrica rispetto agli assi principali della sezione,  $y - y$  e  $z - z$ , possiamo scomporla in due componenti  $e_y$  ed  $e_z$  e usare la seguente espressione:

$$f_c = \frac{p}{A} + \frac{p e_z c_z (\delta_z / e_z)}{I_y} + \frac{p e_y c_y (\delta_y / e_y)}{I_z}$$

ove  $I_y$  e  $I_z$  sono i momenti d'inerzia rispetto ai due assi principali corrispondenti  $y$  e  $z$ ;  $\delta_z$  e  $\delta_y$  sono i picchi delle deflessioni laterali che tengono conto anche delle rispettive eccentricità lungo i rispettivi assi  $y$  e  $z$ ;  $c_z$  e  $c_y$  sono le distanze dagli assi neutri e gli spigoli della sezione lungo gli assi  $y$  e  $z$ .

Per determinare il margine di sicurezza  $MS_u$ , per un colonna caricata eccentricamente, computiamo il carico di compressione ammissibile,  $P_{cu}$ , il quale è il valore di  $p$  che si traduce in una sollecitazione pari alla sollecitazione di compressione ammissibile (inferiore al limite di proporzionalità per un analisi elastica,  $F_{pl}$ ). Pertanto:

$$MS_u = \frac{P_{cu}}{P_u} - 1$$

ove  $P_u$  è il carico ultimo a compressione risultante designato.

### Colonne-travi:

Una colonna-trave è un membro strutturale sottoposto simultaneamente a carico laterale e di compressione. In tali condizioni di sollecitazione, il contributo del carico assiale al momento flettente dovuto alla presenza di un'eccentricità, causa una deflessione della struttura. Così, il picco di tensione totale,  $f_c$ , è maggiore di quanto predetto in teoria (aggiungendo semplicemente la componente della tensione assiale a quella flessionale causata dal carico laterale). Invece:

$$f_c = \frac{p}{A} + \frac{M' c}{I}$$

ove  $M'$  è il picco attuale del momento flettente. Roark e Young [1975] hanno trovato un'espressione per  $M'$  e gli spostamenti per una serie di tipologie di carico e condizioni al contorno.

Per dei calcoli preliminari, una semplice ed approssimata equazione che può essere utilizzata per un elemento colonna-trave può essere la seguente:

$$M' = \frac{M}{1 - p/P_{cr}}$$

ove  $M$  è il massimo valore del momento flettente causato dal carico laterale. Questa espressione risulta accurata entro circa il 3% per una colonna-trave semplicemente appoggiata con un carico laterale uniforme lungo tutta la sua lunghezza. Per una colonna-trave semplicemente appoggiata sottoposta ad un carico laterale concentrato in mezzzeria essa risulta conservativa, con un errore di circa il 20% o superiore. Anche per queste tipologie di strutture Roark e Young hanno determinato delle espressioni empiriche appropriate.

## 1.9 Considerazioni sul significato di valore critico

Sulla base degli esempi esaminati possiamo trarre alcune conclusioni:

1. La ricerca del carico critico, equivale a trovare quel carico sotto il quale la struttura è in equilibrio statico ma la posizione di equilibrio è instabile. In altri termini se perturbata, la struttura si allontana indefinitamente da tale posizione.
2. Se tutte le forze in gioco sono di natura conservativa, la stabilità del sistema può essere valutata senza tenere in conto le forze d'inerzia, ovvero senza studiarne il comportamento dinamico.
3. Se una o più forze in gioco sono di natura non-conservativa è necessario tenere in conto le forze d'inerzia. Questo non significa, che necessariamente il valore critico si abbia sempre e comunque solo per forze d'inerzia diverse da zero, ma che questo, non può essere affermato a priori come invece si può fare nel caso di sistemi conservativi.
4. Nel caso di **sistemi conservativi** l'analisi può essere effettuata

staticamente impostando il problema come:

- un problema lineare di autovalori in cui il carico è inteso come autovalore. Poiché il sistema risulta omogeneo, per il generico valore di  $P$  che non sia un autovalore, l'unica soluzione possibile è quella banale ovvero la posizione di equilibrio. Quando  $P$  assume un valore tale che il sistema ammette soluzione non banale, questa è definita a meno di una costante arbitraria (autofunzione o modo). La soluzione è quindi indeterminata (non infinita) ma potendo scegliere la costante arbitrariamente, la possiamo pensare sufficientemente elevata da allontanarci dalla posizione di equilibrio iniziale. Si definisce carico critico  $P_{cr}$  il valore più piccolo tra tutti i possibili autovalori del problema.
- un problema lineare di risposta in cui la non omogeneità del modello matematico può derivare da imperfezioni, ulteriori carichi applicati, ... In questo caso si valuta la deformata della struttura al variare del carico  $P$  e si interpreta il  $P_{cr}$  come quel valore del carico, per cui la deformata tende a diventare infinita.  
In generale, questa metodologia è più laboriosa della prima, ma da, anche maggiori informazioni dal punto di vista progettuale. Infatti mentre nel problema ad autovalori si determina il *modo* (definito a meno di una costante), nel problema di risposta si determina la deformata (definita in modo univoco) e questo consente di valutare se la struttura è realmente in grado di sopportare le deformazioni e gli sforzi conseguenti.

Può così succedere che già per valori di  $P < P_{cr}$  gli spostamenti siano tali che nella realtà la struttura collassi prima di raggiungere il carico critico teorico come sopra definito.

5. Nel caso di sistemi **non-conservativi** deve essere condotta una analisi dinamica impostando il problema come:

- un problema lineare di autovalori in cui come autovalore viene considerato il parametro  $\lambda$  che definisce la componente temporale del moto e che dipende dal valore di  $P$ . Fissato un valore di  $P$  si può determinare il corrispondente valore di  $\lambda$  ed il corrispondente

modo. Si definisce  $P_{cr}$  il più piccolo valore di  $P$  per cui  $\lambda$  presenta parte reale positiva, perché ad esso corrisponde il primo modo di deformazione instabile.

- un problema lineare di risposta dinamica in cui la non omogeneità del modello matematico può derivare da imperfezioni, ulteriori carichi applicati, loro eccentricità etc... In questo caso, si valuta il moto della struttura al variare del carico  $P$  e si interpreta il  $P_{cr}$  come quel valore del carico per cui il moto tende a crescere indefinitamente.

Il problema di risposta statica consente, anche nel caso di forze non-conservative, di valutare la deformata della struttura, ma non consente di trarre conclusioni sulla stabilità della posizione d'equilibrio e pertanto non è sufficiente a garantire l'integrità della struttura.

## 1.10 Effetto dei vincoli sul carico critico

Come abbiamo visto nel paragrafo 1.1, se consideriamo una trave perfettamente uniforme e dritta con le estremità libere di ruotare composta da un materiale lineare elastico, possiamo definire il valore del carico di compressione per il quale essa diventa instabile, cioè il carico critico di Eulero:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

ove  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $I$  il momento d'inerzia della sezione della trave,  $EI$  la rigidezza flessionale della trave (ovviamente si intende quella più piccola fra tutte quelle tra gli assi baricentrici della sezione) ed  $L$  è la lunghezza della trave.

Molto spesso, risulta più semplice, calcolare lo *stress* corrispondente a tale carico dividendo l'espressione per l'area  $A$  e sostituendo il raggio d'inerzia

$$\rho = \sqrt{I/A} :$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/\rho)^2}$$

Quando la trave va in *buckling* si piega improvvisamente, presentando delle deflessioni laterali,  $\delta$ , e il suo centro subisce un momento flettente  $M = P_{cr} \delta$  combinato al carico assiale di compressione. Solitamente questo momento eccede il limite di compressione proporzionale del materiale, portando la trave a piegarsi ulteriormente finché essa non collassa.

Abbiamo già detto che l'espressione sopra riportata è utilizzabile solo per una trave semplicemente appoggiata in ambo le estremità. Nel caso in cui le condizioni al contorno siano diverse si sostituisce alla lunghezza  $L$  la lunghezza effettiva  $L'$  definita come:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{c}}$$

ove  $c$  è un coefficiente fissato che dipende dalle condizioni agli estremi e, nel solo caso in cui la forza sia non conservativa, dalla distribuzione di massa.

Così facendo l'espressione per la tensione diviene:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L'/\rho)^2}$$

con  $L'/\rho = \lambda$ , snellezza della trave.

Column Shape and End Fixity		End Fixity Coefficient	Column Shape and End Fixity		End Fixity Coefficient
	Uniform Column, Axially Loaded, Pinned Ends	$c = 1$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 1$		Uniform Column, Distributed Axis Loaded, One End Fixed, One End Free	$c = 0.794$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 1.12$
	Uniform Column, Axially Loaded, Fixed Ends	$c = 4$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 0.5$		Uniform Column, Distributed Axis Loaded, Pinned Ends	$c = 1.87$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 0.732$
	Uniform Column, Axially Loaded, One End Fixed, One End Pinned	$c = 2.05$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 0.7$		Uniform Column, Distributed Axis Loaded, Fixed Ends	$c = 7.5$ (Approx.) $\frac{1}{\sqrt{c}} = 0.365$
	Uniform Column, Axially Loaded, One End Fixed, One End Free	$c = 0.25$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 2$		Uniform Column, Distributed Axis Loaded, One End Fixed, One End Pinned	$c = 6.08$ $\frac{1}{\sqrt{c}} = 0.406$

**Tab. 3:** Coefficienti  $c$  e lunghezze effettive per varie condizioni al contorno

In particolare il  $\sigma_{cr}$  a parità di materiale dipende dal rapporto di snellezza ed è tanto più basso quanto più la trave è snella. Un carico di compressione può quindi comportare il collasso quando:

- a. Il carico induce uno stato di sforzo  $\sigma$  tale da superare il limite di proporzionalità  $\sigma^*$  della curva sforzo-deformazione. Superato questo limite di resistenza del materiale il comportamento non è più elastico. In questo caso la trave va quindi progettata a resistenza:  $\sigma < \sigma^*$
- b. Il carico è tale da provocare una flessione elastica ovvero instabilità. In questo caso la trave va quindi progettata a *buckling*:  $\sigma < \sigma_{cr}$ .

Notiamo che tutte le precedenti formule che definiscono il  $P_{cr}$  sono state ottenute nell'ipotesi di rimanere in campo elastico-lineare in cui valgono le leggi di Hooke. Per i materiali metallici come limite di validità, può essere considerato lo sforzo di snervamento  $\sigma^*$ .

Nel caso di due materiali dalle seguenti caratteristiche:

Tipo di materiale	$E = \frac{GN}{m^2}$	$\sigma^* = \frac{MN}{m^2}$
Materiale 1	200	250
Materiale 2	68	230

Tab. 4: Esempi di materiali definiti  $E$  e  $\sigma^*$

Il legame tra carico critico euleriano e carico di snervamento è riportato nella figura seguente (**Fig. 1.27**). Da essa si osserva che per il materiale 1 il limite più basso del rapporto di snellezza per cui  $\sigma_{cr} < \sigma$  è  $\lambda = 54$ . Per rapporti di snellezza minori le leggi di Hooke non sono più valide ed occorrono criteri differenti rispetto a quelli visti finora per la trave (ad esempio se si entra in campo plastico possono essere impiegati i moduli elastici secante, tangente o una loro combinazione per definire un modulo elastico ridotto).

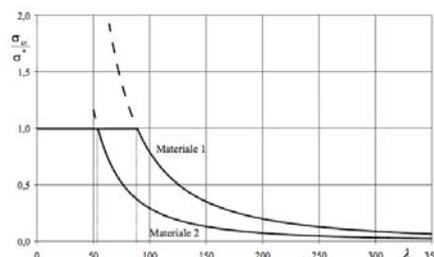


Fig. 1.28: Confronto tra due materiali con rapporti di snellezza diversi [33]

Limitandoci a considerare il caso di carico critico  $P$  conservativo, valutiamo l'effetto dei vincoli agli estremi del carico critico della trave, considerando come caso generale quello in **Fig. 1.29** a cui i vincoli più tradizionali possono essere ricondotti.



**Fig. 1.29:** Trave con vincoli generalizzati composti da molla e smorzatore [36]

All'integrale generale ottenuto per una trave semplicemente appoggiata (Eq. 8.1) vanno imposte le condizioni agli estremi seguenti:

$$\xi = 0 \rightarrow \begin{cases} EI w'' = C_1 L w' \\ EI w'' + pL^2 w' = -K_1 L^3 w \end{cases}$$

$$\xi = 1 \rightarrow \begin{cases} EI w'' = -C_2 L w' \\ EI w'' + pL^2 w' = K_2 L^3 w \end{cases}$$

Indicando con:

$$p^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad h_1 = \frac{LC_1}{EI} \quad k_1 = \frac{K_1 L^3}{EI} \quad h_2 = \frac{LC_2}{EI} \quad k_2 = \frac{K_2 L^3}{EI}$$

e imponendo l'annullarsi del determinante della matrice dei coefficienti si ottiene la seguente espressione:

$$\{-p^5(k_1 + k_2) + p^3[h_1 h_2(k_1 + k_2) + k_1 k_2] + p k_1 k_2(h_1 + h_2 - h_1 h_2)\} \sin p + \{p^4(k_1 + k_2)(h_1 + h_2) - p^2 k_1 k_2(h_1 + h_2) - 2k_1 k_2 h_1 h_2\} \cos p + 2k_1 k_2 h_1 h_2 = 0$$

Per valori di  $h, k = 0$  o  $h, k = \infty$  si hanno i valori riportati nella seguente tabella:

Tipo di vincolo	$h_1$	$k_1$	$h_2$	$k_2$	$P_{cr}$	Modo
Appoggio-Appoggio	0	$\infty$	0	$\infty$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\sin \pi \xi$
Incastro-Libera	$\infty$	$\infty$	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$1 - \cos \frac{\pi \xi}{2}$
Incastro-Incastro	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$1 - \cos 2\pi \xi$
Incastro-Glifo	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$1 - \cos \pi \xi$
Incastro-Appoggio	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$P_{cr} = \frac{2.05\pi^2 EI}{L^2}$	–
Appoggio-Glifo	0	$\infty$	$\infty$	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\sin \pi \xi$
Appoggio-Libero	0	$\infty$	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\sin \pi \xi$
Libero-Libero	0	0	0	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\sin \pi \xi$
Libero-Glifo	0	0	$\infty$	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$\sin \frac{\pi \xi}{2}$
Glifo-Glifo	$\infty$	0	$\infty$	0	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$\cos \pi \xi$

Tab. 5: Valori dei parametri  $h$ ,  $k$ ,  $P_{cr}$  e i modi per diversi vincoli

Molti dei valori di  $P_{cr}$  considerati nella tabella soprastante possono essere ottenuti per similitudine dal valore del carico critico nel caso di Incastro-Libera.

Consideriamo ad esempio i seguenti casi:

1. Appoggio-Appoggio, come si può osservare dalla **Fig. 1.29** per simmetria ogni metà della trave appoggiata si comporta come una trave a sbalzo (per  $\xi = 1/2$  risulta  $w = w^l = 0$ ). In altri termini il  $P_{cr}$  della mensola è uguale a quello di una trave appoggiata che abbia lunghezza doppia. E' pertanto sufficiente sostituire nell'espressione del  $P_{cr}$  della trave Incastro-Libera alla lunghezza  $L$ , la lunghezza effettiva  $L/2$  per avere il carico critico della trave A-A:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

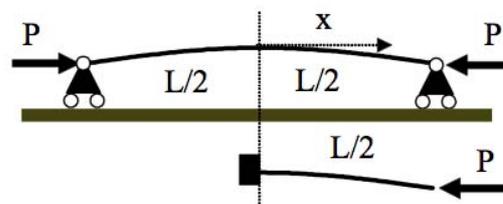
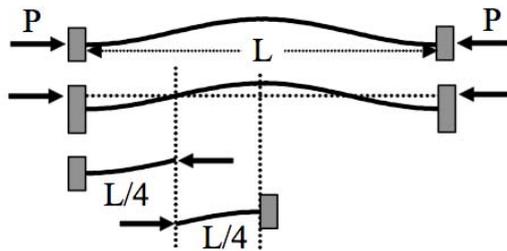


Fig. 1.30: Trave in doppio appoggio [36]

2. Incastro-Incastro, ogni incastro induce un momento di reazione che impedisce la rotazione del relativo estremo. Tali momenti ed il carico applicato, sono equivalenti ad un carico  $P$  applicato eccentricamente. I punti di inflessione della deformata corrispondono alle intersezioni con la linea di azione di  $P$ . E' evidente dalla **Fig. 1.30** che ogni quarto della trave con doppio incastro si comporta come una trave a sbalzo. Il  $P_{cr}$  dell'asta in doppio incastro è quindi uguale a quella di una trave Incastro-Libera che abbia lunghezza quattro volte superiore. E' pertanto sufficiente sostituire la lunghezza effettiva  $L/4$ , ad  $L$  per ottenere il carico critico per il doppio incastro:

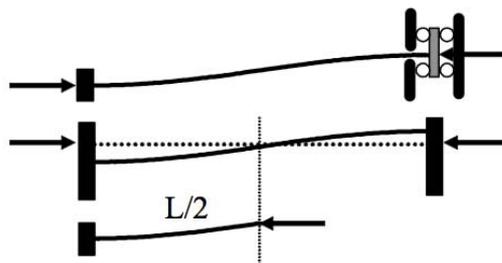
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



**Fig. 1.31:** Trave in doppio incastro [36]

3. Incastro-Glifo, il glifo è simile ad un incastro salvo consentire la traslazione, quindi la deformata presenta un punto di inflessione in mezzeria dove il momento si annulla. I momenti di reazione ed il carico applicato sono equivalenti ad un carico  $P$  applicato eccentricamente. Il carico critico si ottiene sostituendo  $L/2$  ad  $L$  nella espressione del  $P_{cr}$  della trave Incastro-Libera per ottenere lo stesso valore:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



**Fig. 1.32:** Trave con incastro e glifo [36]

# Capitolo 2:

## Instabilità Secondaria

### 2.1 Stabilità delle piastre

Molti componenti strutturali dei velivoli possono essere considerati elementi “piastra”. Fanno parte di questa categoria il rivestimento, le pareti dei longheroni, il pavimento etc... La definizione dei carichi per cui la struttura si deforma formando dei “bozzi” è fondamentale, non solo per garantire i necessari requisiti di robustezza ma, specialmente per i componenti con finalità portanti, anche per garantire il mantenimento della forma aerodinamica del profilo.

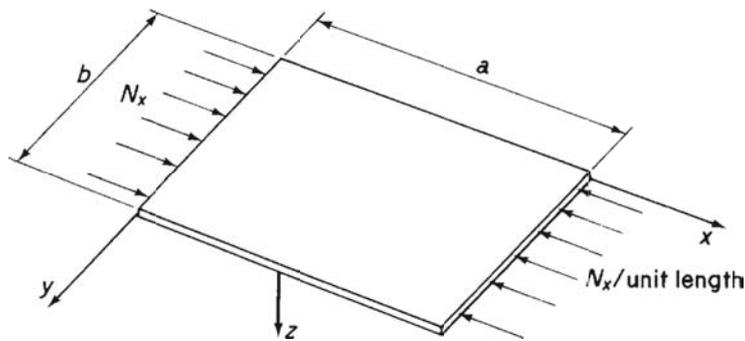
Anche in questo caso i metodi generali visti nello studio della stabilità, trovano vasto impiego nello studio del *buckling* e *post-buckling*: metodo degli autovalori, delle imperfezioni, di Rayleigh-Ritz etc...

Lo studio del carico critico delle piastre è più complicato di quello delle travi non solo per la bidimensionalità del problema e per la maggiore varietà di vincoli al contorno, ma anche per la diversità dei tipi di carico possibili, come ad esempio forze nel piano di compressione, sforzi di taglio, momenti flettenti etc...

### 2.2 Buckling di piastre sottili isotrope

Una lastra sottile può deformarsi in modalità diverse a seconda delle dimensioni, della tipologia di carico e del vincolo. Solitamente, tuttavia, i carichi di punta che possono provocare guasti nel materiale della piastra sono di entità inferiore rispetto a quelli che si verificano nelle travi. La forma più semplice di instabilità sorge quando dei carichi di compressione vengono applicati ai bordi opposti semplicemente appoggiati ed i bordi liberi della piastra sono scarichi, come mostrato in **Fig. 2.1**.

Una piastra sottile in questa configurazione si comporta esattamente nello stesso modo di una colonna semplicemente appoggiata e il carico critico è quello previsto dalla teoria di Eulero. Una volta raggiunto tale carico critico la piastra è incapace di supportare qualsiasi ulteriore carico. Questo non accade, tuttavia, quando i bordi scarichi sono vincolati in modo che sia nullo lo spostamento fuori dal piano  $xy$ . L'instabilità, per delle piastre così vincolate, assume la forma di un rigonfiamento nella regione centrale mentre le parti adiacenti ai bordi vincolati rimangono diritte e indeformate. Queste parti permettono alla piastra di resistere a carichi più elevati, e ciò risulta un fattore importante nella progettazione degli aeromobili.



**Fig. 2.1:** Buckling per una piastra sottile compressa sui lati appoggiati [28]

In questa fase, cerchiamo di effettuare un'analisi atta a determinare il valore del carico critico, che porta alla formazione del rigonfiamento nella zona centrale della piastra. A tal fine, si può utilizzare il metodo energetico, dal momento che possiamo ottenere facilmente le espressioni derivate per lo sforzo e l'energia potenziale corrispondente a varie configurazioni di carico e di sostegno. In queste espressioni, ipotizziamo che lo spostamento della piastra comprenda anche eventuali deflessioni dovute a piegatura a patto che queste siano piccole rispetto allo spessore della piastra.

Inizialmente consideriamo il caso, relativamente semplice, della piastra sottile di **Fig. 2.1**, caricata come mostrato, ma semplicemente appoggiata lungo i quattro bordi. Si può dimostrare che la sua vera forma deviata può essere rappresentata dalla doppia serie trigonometrica infinita:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

L'energia potenziale totale invece può essere espressa come:

$$U + V = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} - N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy$$

Integrando questa equazione e sostituendovi l'espressione trovata per  $w$  si ottiene:

$$U + V = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2$$

L'energia potenziale della piastra presenta un valore stazionario nello stato di deflessione in equilibrio neutro ( $N_x = N_{x,cr}$ ). Pertanto differenziando l'espressione appena trovata per l'energia potenziale totale rispetto al termine  $A_{mn}$  otteniamo:

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial A_{mn}} = \frac{\pi^4 abD}{8} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) - \frac{\pi^2 b}{8a} N_{x,cr} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 A_{mn}^2 = 0$$

della quale, una soluzione non banale è:

$$N_{x,cr} = \pi^2 a^2 D \frac{1}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

Possiamo osservare, da quest'ultima espressione, che ogni termine delle serie infinite per gli spostamenti, corrisponde, come nel caso della trave, ad un diverso valore del carico critico. Il minore dei valori di quest'ultimo, nasce da una combinazione dei parametri  $m$  ed  $n$ , cioè il numero di semionde nelle direzioni  $x$  ed  $y$ , e delle dimensioni della piastra. Chiaramente per  $n = 1$  si ha un valore minimo a prescindere dai valori di  $m$ ,  $a$  e  $b$  (dimensioni geometriche) e la piastra presenta una semi-onda sinusoidale nella direzione  $y$ .

In questo modo possiamo riscrivere l'espressione come:

$$N_{x,cr} = \pi^2 a^2 D \frac{1}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{k \pi^2 D}{b^2}$$

dove il coefficiente di *buckling*  $k$  per la piastra è dato dal minimo valore di:

$$k = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$$

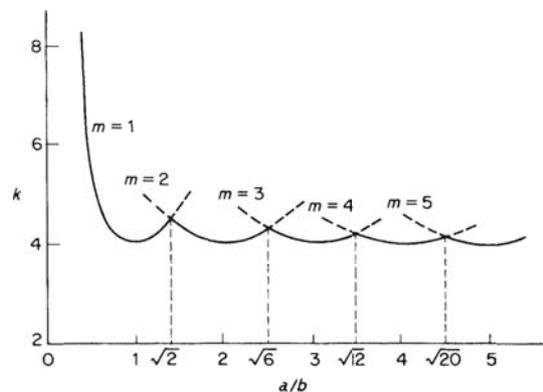
per un dato rapporto  $a/b$ . Per determinare il minimo di  $k$  possiamo analizzare il suo andamento in funzione del rapporto  $a/b$  per diversi valori del parametro  $m$ , come è mostrato in **Fig. 2.2**, e ottenerlo dall'involuppo delle curve. E' possibile osservare che  $m$  varia con il rapporto  $a/b$  e che  $k$  e il carico critico sono minimi quando  $k = 4$  per  $a/b = 1, 2, 3 \dots$ . Per valori crescenti di  $a/b$ ,  $k \rightarrow 4$  in modo che le piastre sottili e lunghe tendono a deformarsi in una serie di quadrati.

La transizione da un modo di deformarsi all'altro può essere trovata eguagliando il valore di  $k$  per la curva con  $m$  e quella successiva con  $m + 1$

$$\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} = \frac{(m+1)b}{a} + \frac{a}{(m+1)b}$$

Ottenendo:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{m(m+1)}$$



**Fig. 2.2:** Coefficiente di buckling  $k$  per piastre semplicemente appoggiate [28]

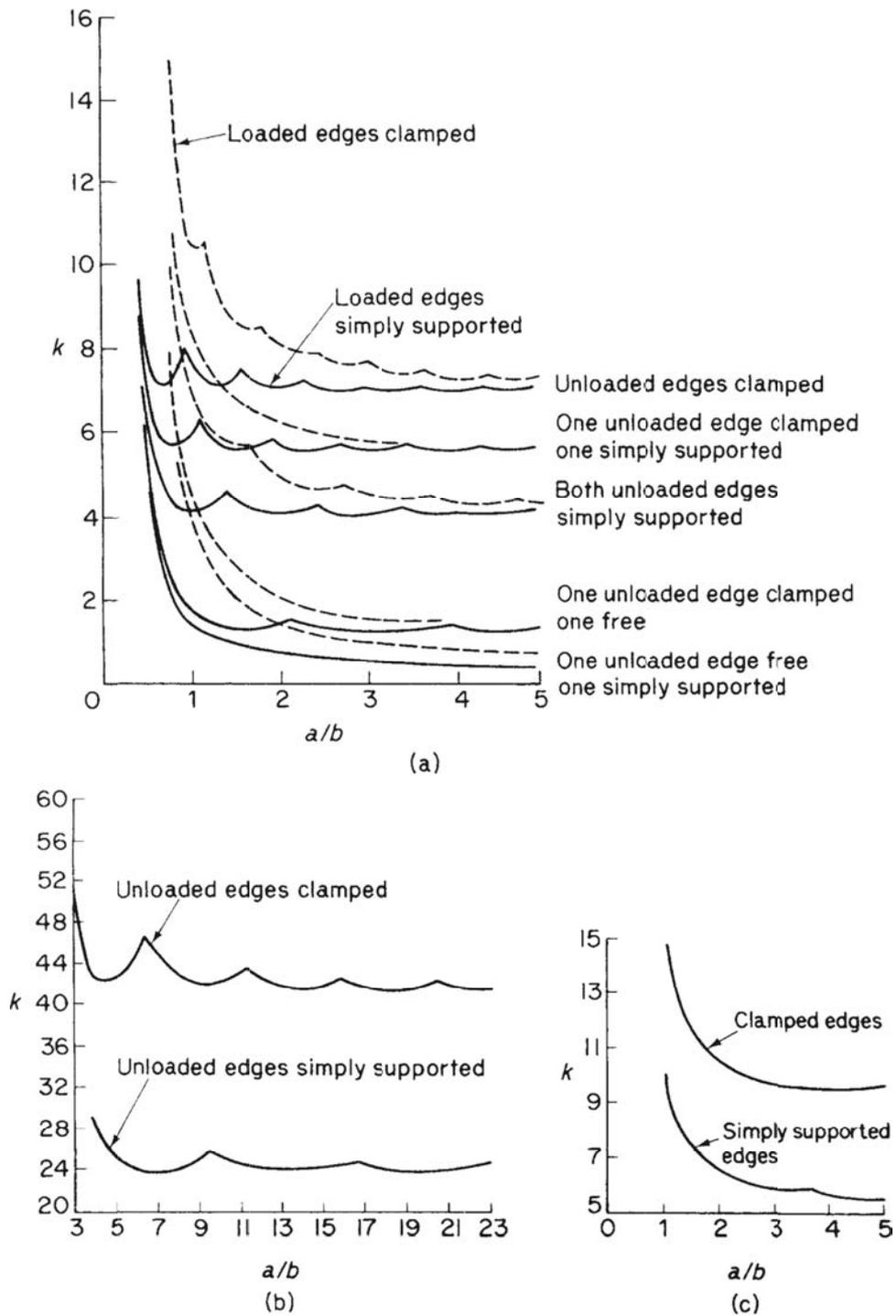
Sostituendo ad esempio  $m = 1$  otteniamo  $a/b = \sqrt{2}$ , per  $m = 2$  otteniamo  $a/b = \sqrt{6}$ , per  $m = 3$  otteniamo  $a/b = \sqrt{12}$ , per  $m = 4$  otteniamo  $a/b = \sqrt{20}$  e così via.

Per un dato valore del rapporto  $a/b$ , la tensione critica  $\sigma_{cr} = N_{x,cr}/t$  ( $t$  è lo spessore della piastra), vale:

$$\sigma_{cr} = \frac{k\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

In generale, la tensione critica per una piastra uniforme rettangolare, con diversi vincoli e caricata da forze nel piano costanti o variabili linearmente ( $N_x, N_y$ ) o forze costanti di taglio lungo i bordi ( $n_{xy}$ ), è data dall'equazione appena trovata. Il valore di  $k$  rimane una funzione di  $a/b$  ma dipende anche dal tipo di carico e di vincolo. Soluzioni per problemi di diversa natura sono state ottenute risolvendo l'equazione differenziale appropriata oppure utilizzando il metodo energetico approssimato (Rayleigh-Ritz).

Valori di  $k$  per una varietà di condizioni di carico e di supporto sono mostrati in **Fig. 2.3** (nella **Fig. 2.3 (c)**, dove  $k$  diventa il coefficiente di instabilità di taglio,  $b$  è sempre la più piccola dimensione della piastra): nella figura (a) si osserva l'andamento dei coefficienti di *buckling* per una piastra sottile in compressione; nella figura (b) si osserva l'andamento dei coefficienti di *buckling* per una piastra sottile sottoposta a momento flettente ed infine nella figura (c) vi sono gli andamenti dei coefficienti di *buckling* per una piastra sottile sottoposta a taglio lungo i suoi bordi. Da tale figura si nota che  $k$  è quasi costante per valori di  $a/b > 3$ . Questo fatto è particolarmente importante soprattutto nelle strutture aeronautiche, dove vengono utilizzati irrigidimenti longitudinali per dividere la pelle in pannelli sottili (aventi piccoli valori di  $b$ ), aumentando così il carico di punta massimo sostenibile dalla pelle stessa.



**Fig. 2.3:** (a) Coefficienti di buckling per piastre sottili in compressione;  
 (b) Coefficienti di buckling per piastre sottili sottoposte a momento flettente;  
 (c) Coefficienti di buckling per piastre sottili sottoposte a taglio [28]

## 2.3 Determinazione sperimentale di $P_{cr}$ per una piastra sottile

Lo spostamento di una piastra inizialmente curva dalla posizione di carico nullo si può dimostrare essere:

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

con:

$$B_{mn} = \frac{A_{mn} N_x}{\frac{\pi^2 D}{a^2} \left( m + \frac{n^2 a^2}{mb^2} \right)^2 - N_x}$$

Possiamo osservare come il coefficiente  $B_{mn}$  aumenta all'aumentare d'intensità del carico di compressione  $N_x$ ; ne segue che, quando  $N_x \rightarrow N_{x,cr}$ , il termine che nelle serie corrisponde alla forma deflessa della piastra diventa sempre più significativo. Per una piastra quadrata, la condizione di  $n = 1$  ed  $m = 1$  porge un valore minimo del carico critico, cosicché al centro della piastra si assiste ad uno spostamento

$$w_1 = \frac{A_{11} N_x}{N_{x,cr} - N_x} = N_{x,cr} \frac{w_1}{N_x} - A_{11}$$

Quindi se trasformiamo graficamente l'andamento di  $w_1$  rispetto al rapporto  $w_1/N_x$ , osserviamo una pendenza nella regione del carico critico, equivalente a  $N_{x,cr}$ .

## 2.4 Instabilità locale

L'instabilità secondaria è una forma di carico di punta che di solito si verifica nelle flange e nelle travi in parete sottile con un rapporto di snellezza efficace,  $l_e/r < 20$ . Per  $l_e/r > 80$  questo tipo di travi è sensibile all'instabilità primaria.

Nella fascia intermedia,  $20 < l_e/r < 80$ , il *buckling* avviene con una combinazione di modi sia primari che secondari.

Colonne in parete sottile, si incontrano nelle strutture degli aeromobili nella forma di irrigidimenti longitudinali, i quali sono normalmente fabbricati con processi di estrusione o di formatura da un foglio piano. Sono impiegate una varietà di sezioni trasversali benché ciascuna sia di solito composta da elementi piatti disposti a formare una sezione a “Z”, canale, o sezioni “top hat”, come mostrato in **Fig. 2.4**.

Possiamo osservare che, gli elementi piastra si dividono in due categorie distinte: flange se hanno un bordo libero scarico e nervature se sono supportate da elementi di lamiera adiacenti su entrambi i bordi scarichi.

In caso di instabilità locale, le flange e le nervature deflettono come delle piastre con conseguente variazione della sezione trasversale della trave. La lunghezza d'onda della deformata è dell'ordine delle larghezze degli elementi piastra e la corrispondente tensione critica, è generalmente indipendente dalla lunghezza della trave quando questa lunghezza è uguale o superiore a tre volte la larghezza del più grande elemento piastra nella sezione trasversale della trave.

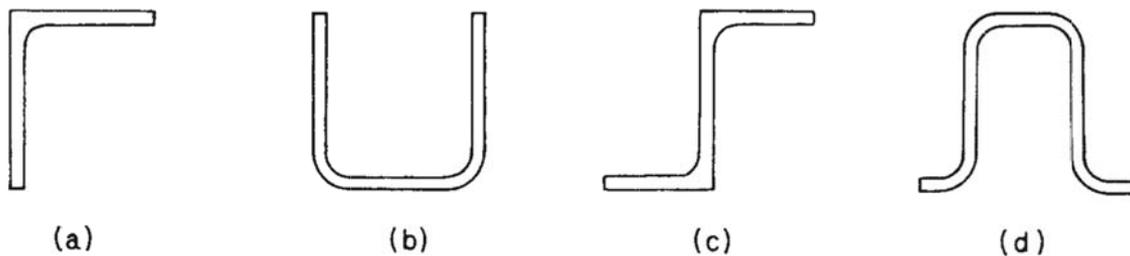
Il fenomeno dell'instabilità si verifica quando, l'elemento piastra più debole, di solito una flangia, raggiunge la tensione critica, anche se in alcuni casi, possono essere tutti gli elementi a raggiungere le loro sollecitazioni critiche contemporaneamente. Quando ciò si verifica, il vincolo rotazionale fornito dagli elementi adiacenti scompare e questi si comportano come se fossero semplicemente appoggiati lungo i loro bordi comuni. Questi casi, sono i più semplici da analizzare e si trovano ad esempio nella sezione trasversale a “T”, o cruciforme o per un tubo quadrato di spessore costante. I valori di tensione critica locale per le travi che possiedono questo tipo di sezione, possono essere trovati utilizzando la seguente equazione ed un appropriato valore di  $k$  ( $\eta$  è un fattore di correzione plastica che tiene conto del fatto che lo *stress* critico possa eccedere il limite elastico del materiale):

$$\sigma_{cr} = \frac{\eta k \pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

Ad esempio  $k$  per una trave a sezione cruciforme è ottenuto da **Fig. 2.4 (a)** nel caso di una piastra semplicemente appoggiata su tre lati con un bordo libero e che presenti  $a/b > 3$ . In questo caso otteniamo  $k = 0,43$ ; e se la sezione deflette elasticamente,  $\eta = 1$  e

$$\sigma_{cr} = 0.388 E \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (v = 0.3)$$

Occorre prendere coscienza che il calcolo delle sollecitazioni d'instabilità locale è generalmente complicato senza che vi sia alcun metodo particolare per ottenere dei risultati universalmente accettati, ma sono presenti molte informazioni disponibili di origine sperimentale.



**Fig. 2.4:** Varie tipologie di sezioni per travi in parete sottile:  
 (a) Sezione ad angolo estruso; (b) Sezione a canale;  
 (c) Sezione a "Z"; (d) Sezione a "top hat" [28]

L'*Aeronautical Structure Manual* [NASA,1976] e Bruhn [1973] ha stabilito il valore del fattore di riduzione nel caso di fogli e/o piastre di Alluminio rivestito e quello del parametro  $k$  rispetto al rapporto  $a/b$  per varie condizioni al contorno (poiché le piastre di lunghezza importante hanno delle deformate ondulate il rapporto  $a/b$  influenza il parametro  $k$  solo nel caso di piastre corte). Così per piastre relativamente lunghe, possiamo semplificare l'espressione già scritta per il carico critico come:

$$F_{cr} = k' E \left( \frac{t}{b} \right)^2$$

dove  $k'$  è una costante che dipende unicamente dalle condizioni di vincolo della piastra scarica.

Nella seguente tabella si riportano i valori del parametro  $k'$  rispetto alle condizioni, al contorno con un errore percentuale trascurabile e per un materiale che presenti un modulo di *Poisson* compreso tra  $0.27 \leq \nu \leq 0.37$ .

L'espressione appena scritta risulta molto accurata per valori di  $a/b > 1$  con le estremità della piastra caricate semplicemente appoggiate o per valori di  $a/b > 4$  con le estremità della piastra caricate incastrate; per valori inferiori del rapporto  $a/b$  tale espressione si mantiene comunque conservativa.

Case					
$k'$	0.375	1.18	3.71	5.04	6.42

**Tab. 6:** Valori della costante  $k'$  per una piastra metallica relativamente lunga sottoposta a compressione con varie condizioni di vincolo [16]

## 2.5 Instabilità locale per un elemento appartenente ad una sezione in parete sottile

Analizzando una trave in parete sottile, si osserva che la trattazione fatta da Eulero (vedi Cap. 1) non tiene in alcun modo conto della sezione caratteristica dell'elemento analizzato. Nella realtà, infatti, si osserva che l'instabilità può avvenire per tensioni inferiori rispetto a quella critica di Eulero e può presentarsi in zone localizzate della sezione. Per ciascuna delle sezioni più diffuse si possono distinguere in ciascuna le flangie (*flange*), cioè le piastre che hanno un bordo libero, e le nervature (*web*), cioè quelle piastre che non presentano alcun bordo libero. La trave nel suo complesso viene considerata "esplosa" e, a favore di sicurezza, si suppone che i bordi comuni di ogni piastra abbiano condizioni di vincolo di semplice appoggio (nella realtà la condizione di vincolo è intermedia tra quella di semplice appoggio e quella di un incastro completo) trascurando così la pur presente capacità di resistere alle rotazioni.

Per ognuna delle sezioni più comuni si può determinare il valore della tensione di *buckling* secondario con delle espressioni simili alla seguente per una sezione ad "I" [Sarafin Cap. 8.4]:

$$\sigma_{cr,min} = k_w \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{t_w}{b_w} \right)^2$$

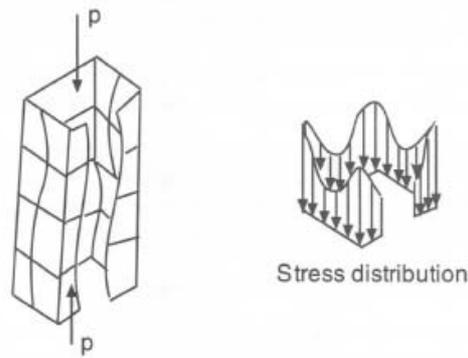
con le costanti scritte definite dai grafici annessi.

Una volta che la sezione ha raggiunto il valore di tensione critica per il *buckling* secondario possono seguire due cose:

- L'instabilità secondaria comporta il raggiungimento della tensione critica tipica del *buckling* primario poiché si assiste ad un abbassamento della soglia di tensione critica del materiale (variando la sezione localmente variano anche le sue caratteristiche inerziali);
- L'instabilità secondaria non comporta il verificarsi del *buckling* primario ed è quindi possibile calcolare la tensione di crippling caratteristica della particolare piastra che raggiunge la condizione deformata e quella della sezione complessiva con la seguente espressione:

$$\sigma_{cc,sez} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i t_i \sigma_{cc,i}}{\sum_{i=1}^n b_i t_i}$$

Abbiamo appena parlato di tensione di crippling e per capire meglio a cosa essa si riferisce, consideriamo una piastra compressa lungo i suoi lati più corti e vincolata sugli altri due. Se uno dei lati scarichi, presenta un vincolo che ne impedisce gli spostamenti lungo la direzione z (direzione ortogonale alla superficie maggiore della piastra), si assiste al verificarsi di una instabilità che presenta una deformata stabile e le tensioni aumentano via via che ci si avvicina al bordo scarico e vincolato all'aumentare del carico di compressione  $N_x$  fino a che si raggiunge la tensione di snervamento locale. A questo punto si considera che sia stato raggiunto il limite di resistenza del materiale e si calcola la tensione media massima raggiunta, detta appunto tensione di crippling, la quale è rappresentativa della tensione media massima che può sopportare la piastra, ossia la sua ultima riserva di carico (**Fig. 2.5**).



**Fig. 2.5:** Buckling locale per elementi di sezione e distribuzione di tensioni lungo la sezione del pezzo [16]

Questa tensione, può essere calcolata con diverse strategie, delle quali si riportano le seguenti:

1. *Aeronautical Manual:*

$$\sigma_{cc} = 10^x \sigma_{snerv}$$

espressione utilizzabile per tutti i materiali in caso di *buckling* elastico. Il valore del parametro  $x$  dipende dalle condizioni al contorno e per brevità si riportano solo i seguenti casi:

- Un lato libero ed uno appoggiato:

$$x = -0.25 - 0.81 \log \left[ \left( \frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{\sigma_{snerv}}{E}} \right]$$

- Tutti e due i lati semplicemente appoggiati:

$$x = -0.14 - 0.81 \log \left[ \left( \frac{b}{t} \right) \sqrt{\frac{\sigma_{snerv}}{E}} \right]$$

## 2. Clark &amp; Jomcock:

$$\sigma_{cc} = k_2 \frac{\sqrt{B_p E}}{\lambda_p}$$

espressione valida per le sole leghe di Alluminio e purché sia verificata la condizione che, la snellezza della trave sia maggiore della costante definita dall'espressione empirica ( $\lambda_p > C_p$ ). Per quanto concerne la costante  $k_2$  essa assume dei valori specifici in base alle lavorazioni subite dalla lega di Alluminio:

- $k_2 = 2.04$  per stati di lavorazione -H, -T1, -T2, -T3, -T4
- $k_2 = 2.27$  per stati di lavorazione -T5, -T6, -T7, -T8, -T9

Per concludere, utilizzando i grafici presentati nel Sarafin, si può determinare quale piastra, flangia o nervatura, sperimenta per prima il fenomeno del *buckling* locale. Una volta stabilita tale piastra si prosegue al calcolo della tensione di crippling definendo correttamente le snellezze:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}}$$

per la piastra che sperimenta l'instabilità; mentre per le piastre che non la sperimentano si definisce la snellezza come:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{1}{k'_i} \left( \frac{b_i}{t_i} \right)}$$

con  $k'_i$  parametro funzione delle condizioni al contorno sui lati scarichi della piastra.

Quanto appena visto è il procedimento canonico che viene utilizzato nel caso in cui il fenomeno di *buckling*, sia supposto elastico; viceversa se esso è inelastico, non si possono usare le formule appena viste ma ne servono altre che non riportiamo poiché estranee alla nostra trattazione [Sarafin Cap. 8.4].

## 2.6 Cilindro in materiale isotropo: determinazione sperimentale del carico ammissibile

Il fenomeno del *buckling* è definito per una struttura snella, come una modalità di *failure* caratterizzata da una forma di instabilità, a causa della presenza di un momento flettente, dovuta inizialmente all'applicazione di un carico di compressione. Il carico di *buckling* è solitamente determinato, come quel particolare carico che porta ad una singolarità nella matrice rigidezza del materiale che compone il campione. Per seguire il percorso post-critico del componente vengono di solito seguite tre diverse metodologie:

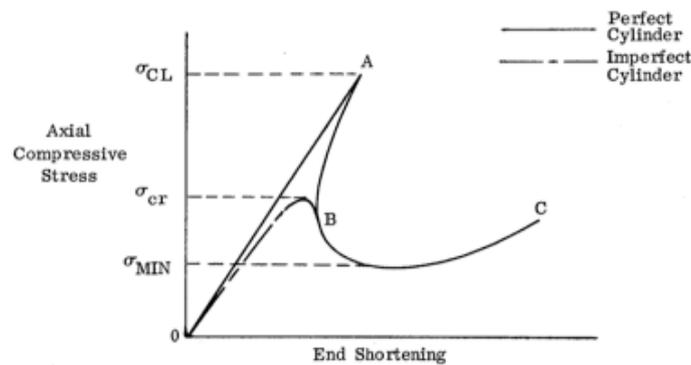
- Carico controllato in flessione, che consiste nell'aggiungere forze nodali puntuali per indurre un'asimmetria nel problema. Questo metodo, tuttavia, richiede, prima della sua applicazione, la conoscenza dei modi d'instabilità del campione e ciò risulta possibile solo per casi molto semplici.
- Metodi numerici, basati sulla determinazione, intorno a un punto di biforcazione, delle direzioni tangenti alla curva di equilibrio e degli autovettori della matrice di rigidezza. Il vantaggio principale di questi metodi è quello di fornire la determinazione completa delle soluzioni di *post-buckling*; tuttavia il loro svantaggio principale è connesso alla loro scarsa applicabilità.
- Approcci basati sulla modellazione di reali imperfezioni fisiche (come ad esempio geometrica, incertezze sui carichi, variabilità spaziale delle proprietà del materiale a causa di processi di produzione etc...) che portano al verificarsi dell'instabilità.

La scelta dell'una o dell'altra strategia è rimessa allo studio che si vuole effettuare e agli obiettivi preposti.

Come già affermato nel capitolo precedente, nel caso di un cilindro in parete sottile compresso lungo la direzione del suo asse e composto da un materiale isotropo, i test hanno esaustivamente dimostrato che il carico di "*failure*" è molto inferiore rispetto alla predizione effettuata con le simulazioni ad elementi finiti. Queste discrepanze di risultati sono da attribuire principalmente a:

- l'andamento della deformata *post-buckling* associata alla presenza di imperfezioni iniziali di tipo geometrico o nel materiale o anomalie durante il processo di fabbricazione o nell'applicazione del carico
- il fatto che la teoria classica in ipotesi di piccole deformazioni, non tenga conto delle discontinuità che comporta il fenomeno del *buckling* in corrispondenza dei vincoli

Non considerando le distorsioni dovute alla discontinuità la curva di equilibrio per un tubo perfetto sottoposto a carico assiale ha la forma della seguente figura:



**Fig. 2.6:** Curve di equilibrio per un cilindro circolare compresso assialmente [47]

Quando si aumenta il carico, prima che il cilindro raggiunga il punto A, quello di picco, la deformazione è relativamente omogenea e quella principale è in direzione assiale. In teoria, essa dovrebbe mantenersi completamente omogenea, se non fosse per le imperfezioni geometriche e nell'applicazione del carico, le quali non possono essere mai completamente eliminate. Si sottolinea inoltre che, la pendenza della curva prima del punto di picco è molto vicino alla linearità.

La direzione della curva dipende dal modo in cui è controllata l'applicazione del carico. Se è controllato il carico, al punto A segue un rapido aumento nello spostamento; viceversa se è controllato lo spostamento, segue un rapido calo del carico assiale.

La posizione del punto di *snap through* può dipendere fortemente dalle imperfezioni presenti nella struttura, in grado di abbassare il carico critico significativamente. Ciò è dovuto alla natura delle deformate *post-buckling*, che

richiedono solo una piccola quantità d'energia affinché possano presentarsi, e dal fatto che le imperfezioni stesse fungono da innesco per il carico di punta. Dopo aver raggiunto il punto di *snap through*, la deformazione cambia rapidamente ed inizia la modalità post-critico, la quale si presenta sempre come una combinazione di onde assiali e circonferenziali, il numero di ciascuna delle quali dipende dal tipo di cilindro.

Come appena affermato l'instabilità generale si presenta quando il cilindro elastico ed isotropo sperimenta una tensione  $\sigma_{CL}$ , pari a quella prevista dalle teoria di piccole deflessioni cioè:

$$\sigma_{CL} = \frac{E t}{R \sqrt{3(1 - \nu_c^3)}}$$

ove  $E$  è il modulo di Young del materiale,  $t$  lo spessore del cilindro,  $R$  il raggio del cilindro e  $\nu_c$  il modulo di Poisson.

Nel caso in cui il cilindro presenti delle imperfezioni iniziali, si considerano le distorsioni conseguenti al fenomeno di instabilità e il suo comportamento cambia radicalmente, venendo descritto dall'andamento della curva B ove il *buckling* avviene in corrispondenza della tensione critica  $\sigma_{cr}$ . Il rapporto  $\sigma_{cr}/\sigma_{CL}$  dipende dalla dimensione delle imperfezioni iniziali presenti nel cilindro.

Poiché solitamente questa informazione non è disponibile, si rende necessario stabilirne il valore con uno dei seguenti metodi pratici:

- i. Definire il valore ammissibile di tensione di compressione  $\sigma_{cr}$  pari a  $\sigma_{MIN}$ , specificato in **Fig. 2.6**
- ii. Utilizzare il valore fornito dalla teoria per la tensione  $\sigma_{CL}$  insieme ad un appropriato *knock-down factor*  $\gamma_c$  che risulti da un ampio database di test effettuati; in questo modo la tensione di compressione ammissibile  $\sigma_{cr}$  risulta ottenibile come:

$$\sigma_{cr} = \gamma_c \sigma_{CL}$$

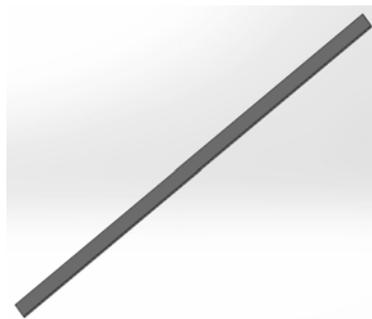
Nel caso di un cilindro isotropo è buona norma seguire la seconda metodologia appena descritta e, i dati dei test svolti dimostrano che il *knock-down factor*  $\gamma_c$  è funzione del rapporto tra il raggio e lo spessore del cilindro,  $R/t$ .

## Capitolo 3: Instabilità Primaria per Carico Eccentrico, Analisi Sperimentale

In questa sezione, è presentato il macchinario progettato nel dettaglio dal collega Marco Thiene per simulare il comportamento di una semplice trave in acciaio di sezione rettangolare, sottoposta a carico di compressione assiale ed eventualmente eccentrico. L'attività di ricerca è stata quella di rivedere tutti i disegni preliminari effettuati in SolidWorks® e apporvi le modifiche necessarie affinché si potesse procedere all'ordinazione dell'apparecchiatura.

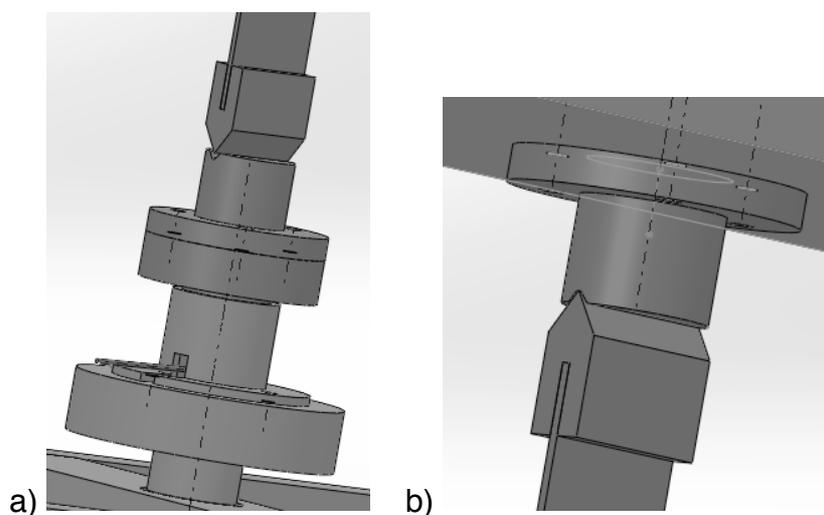
### 3.1 Macchinario instabilità primaria per carico eccentrico

Il meccanismo progettato, consta di semplici parti in materiale metallico che, attraverso un sistema di pesi, leve meccaniche e coltelli, permette di sollecitare una trave con diverse condizioni di carico (**Fig. 3.1**). La trave in esame presenta le seguenti caratteristiche: dimensione maggiore  $L = 350 [mm]$ , sezione rettangolare con dimensioni di  $20 \times 1.5 [mm]$  e materiale costituente acciaio AISI 304. Una siffatta geometria, conferisce alla trave una considerevole snellezza, la quale favorisce l'insorgere del fenomeno che si vuole studiare.

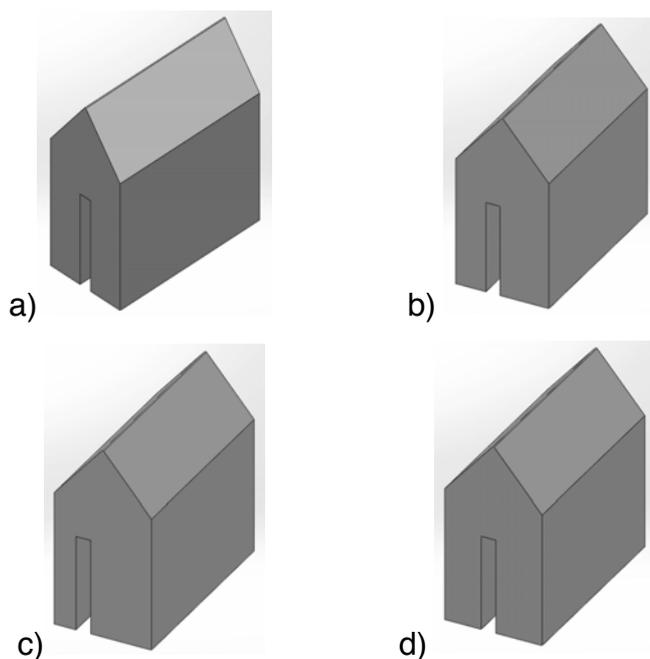


**Fig. 3.1:** Trave di sezione rettangolare, provino sul quale effettuare i test di *buckling* primario

Il componente, viene tenuto in sede da una coppia di coltelli che permette di trasferire la sollecitazione di compressione, la quale proviene dal punzone collegato al braccio di carico: a seconda della coppia di coltelli scelta, cambia la configurazione e si assiste alla presenza di un diverso valore di eccentricità (**Fig. 3.2 e 3.3**). Questo semplice sistema di carico, mantiene la trave “vincolata” alla struttura e ne permette le rotazioni libere delle estremità; inoltre, fa sì che la colonna venga sottoposta ad una sollecitazione assiale e a momento flettente, così da ricreare le condizioni tipiche dell’instabilità primaria.

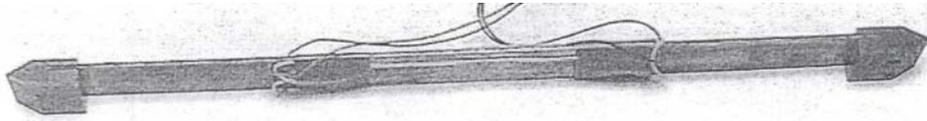


**Fig. 3.2:** Particolare dei coltelli inferiore (a) e superiore (b)



**Fig. 3.3:** Configurazioni possibili di coltelli con diversi valori di eccentricità a seconda della posizione dell’intaglio

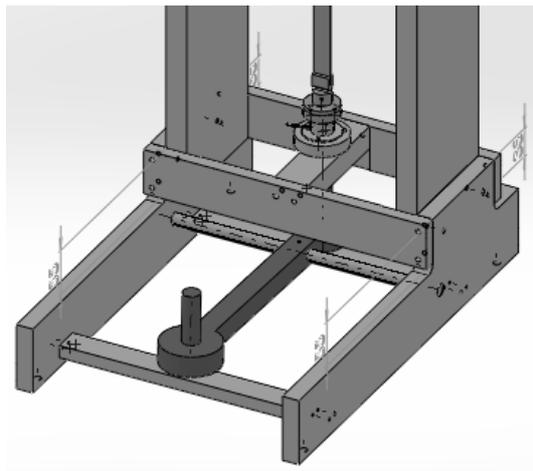
Le deflessioni di questo modello sono difficili da misurare meccanicamente senza alterarne il suo comportamento, pertanto si possono utilizzare 4 estensimetri, la cui resistenza aumenta (o diminuisce) quando vengono stirati (o compressi), da applicare sulla trave (vedi **Fig. 3.4**).



**Fig. 3.4:** Posizionamento della barra estensimetrica sulla trave

Gli estensimetri, dall'altra parte della struttura vengono collegati ad un circuito elettrico di alimentazione (chiamato ponte di Wheatstone); questo ci permette di misurare le differenze in termini di resistenza elettrica. Il ponte è cablato in modo tale, da porgere direttamente una lettura proporzionale alla deflessione laterale della struttura.

Il braccio di carico è una leva meccanica, la quale presenta ad una estremità un invito per posizionare i pesi e dall'altra, è vincolata con un perno alla struttura in modo che possa ruotare ortogonalmente al proprio asse di simmetria e trasferire così la coppia risultante dall'applicazione del peso apposito. Lo scorrimento del braccio è impedito dalla ghiera di tenuta e dall'interfaccia del coltello inferiore.



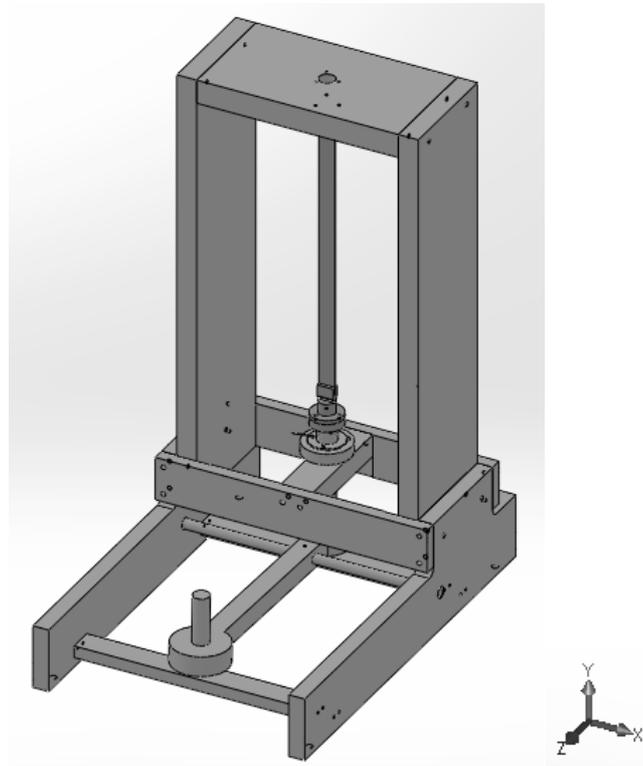
**Fig. 3.5:** Particolare del braccio di carico sul quale vengono appoggiati i pesi

L'intero macchinario, è concepito come una struttura indeformabile composta di staffe ed irrigidimenti che garantiscono stabilità e sostegno durante le prove. Se così non fosse, eventuali deformazioni e/o spostamenti dell'apparecchio

renderebbero impossibile la riuscita del test e la comparsa del fenomeno del *buckling*. Con il meccanismo presentato è possibile effettuare test di instabilità primaria unicamente per travi e sezioni che presentino una geometria analoga a quella progettata.

Durante i test è possibile, attraverso una cella di carico interposta tra il coltello e il punzone inferiore, registrare l'effettivo valore di forza applicata al componente così da incrementare la precisione e le possibilità di riuscita del test. Tale componente permette quindi di memorizzare il profilo di forza che ha portato al manifestarsi del fenomeno di instabilità, così da poter confrontare in modo più accurato i dati ottenuti durante l'attività sperimentale, con quelli previsti dalla teoria e dall'analisi ad elementi finiti.

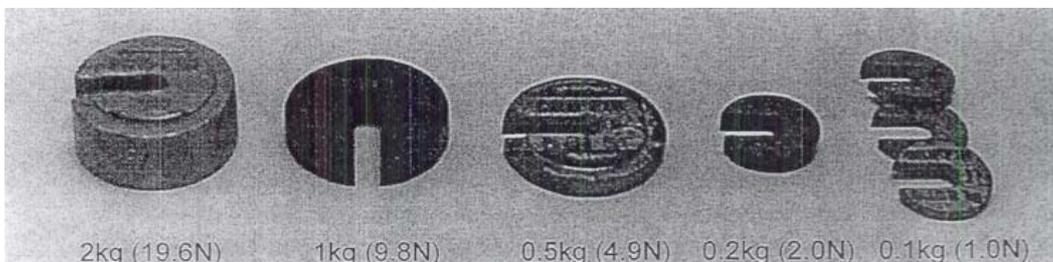
L'ingombro della macchina è  $354.5 \times 709 \times 500$  [mm], rispettivamente lungo le direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$  descritte nella figura sottostante. Gli spessori delle piastre in acciaio della struttura sono variabili dai 15 [mm] degli irrigidimenti inferiori fino ai 30 [mm] della staffa superiore.



**Fig. 3.6:** Macchinario a compressione, vista d'assieme

### Procedura del test

- Selezionare i coltelli e posizionare la trave in modo che le estremità coincidano perfettamente con le superfici dei coltelli
- Posizionare ed alimentare con un voltmetro digitale (DVM) la barra estensimetrica e la cella di carico
- Alzare il braccio di carico così da facilitare l'inserimento del modello nella struttura
- Azzerare la lettura sull'alimentatore per i sistemi di misura e segnare il valore del precarico sulla cella dovuto al braccio
- Applicare le masse apposite (**Fig. 3.7**) sulla struttura così da ottenere un incremento di 5 [N] o inferiore, in base alle esigenze
- Registrare i valori ottenuti ad ogni passo; eventualmente calcolare se necessario la deformazione teorica  $\varepsilon_t$  e la differenza percentuale con quella ottenuta sperimentalmente
- Ripetere questa procedura per ogni configurazione di carico voluta ed infine inserire i dati ottenuti in un grafico

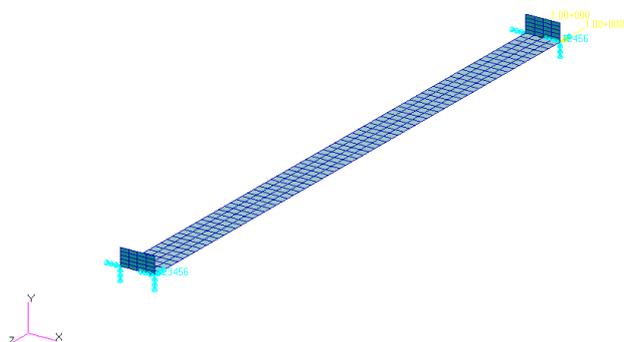


**Fig. 3.7:** Masse disponibili da applicare sul macchinario

## 3.2 Simulazioni FEM instabilità primaria

Sulla trave da testare, con il macchinario appena descritto, abbiamo effettuato delle analisi agli elementi finiti con il software Patran® della MSC Software. L'obiettivo di tali analisi, è stato quello di stabilire il valore del carico critico così da poterlo poi confrontare con quello ottenuto sperimentalmente.

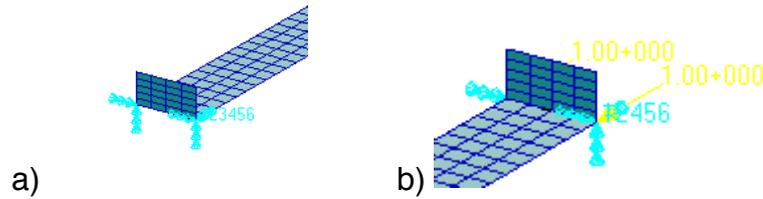
La geometria del componente, è stata definita nel programma FEM attraverso un'unica superficie alla quale è stata associata una proprietà *shell* con lo spessore e le caratteristiche del materiale (acciaio). A questa superficie, è stata associata una *mesh* con elementi QUAD 4, i quali, presentando quattro nodi, risultano più accurati degli elementi TRIA. Affinché si ottenessero dei risultati esaustivi, sono stati sufficienti un totale di 280 elementi sulla superficie: una *mesh* più raffinata, non ha mostrato particolari vantaggi descrittivi se non un tempo maggiore di calcolo.



**Fig. 3.8:** Modello trave agli elementi finiti (elementi shell Quad 4)

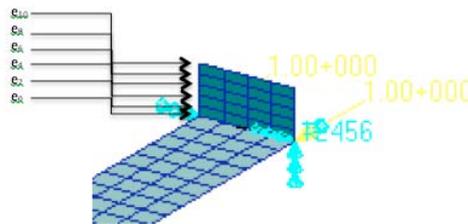
Le condizioni di carico, con diversa eccentricità, sono state applicate alla geometria appena descritta, considerando che la forzante fosse applicata non sulla sezione della trave, ma in punti a distanza prestabilita da essa che appartenessero ad una superficie supplementare estremamente rigida (essa è stata modellata appositamente con un materiale avente modulo di elasticità molto più elevato di quello della trave).

In sostanza, è stata riprodotta la condizione di carico eccentrico descritta nel Sarafin (**Tab. 2**): una delle superfici di estremità è stata sollecitata con un carico unitario e vincolata in modo che fosse permessa la sola traslazione assiale lungo i nodi a distanza  $e$  di volta in volta diversa (**Fig. 3.9b**), mentre l'altra estremità scarica è stata vincolata completamente, impedendo qualsiasi rotazione e/o traslazione, lungo i nodi corrispondenti posti alla stessa distanza  $e$  di applicazione della forza unitaria (**Fig. 3.9a**).



**Fig. 3.9:** Vincoli e superfici rigide applicate al modello per simulare il carico eccentrico: a) incastro e b) carrello e forzante unitaria

I casi analizzati sono stati i seguenti:  $e = 0$  [mm],  $e = 2$  [mm],  $e = 4$  [mm],  $e = 6$  [mm],  $e = 8$  [mm],  $e = 10$  [mm] (nei quali i numeri descrivono la distanza del punto di applicazione del carico in direzione  $y$ , direzione del lato inferiore della sezione della trave, rispetto all'asse di simmetria della trave stessa), rappresentati nella figura seguente:

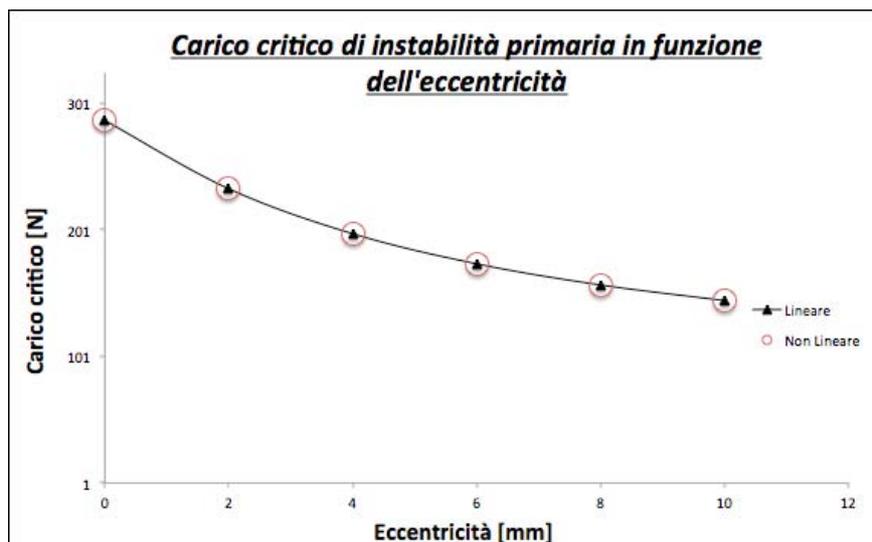


**Fig. 3.10:** Nodi di applicazione dei carichi con diversa eccentricità

Per ognuno dei casi descritti, è stata effettuata un'analisi lineare ed una non lineare di *buckling* così da confrontare le soluzioni ottenute, rispettivamente con il solutore Nastran® e quello non lineare Marc®.

I risultati dei carichi critici ottenuti per ognuna delle simulazioni, sono stati riportati in un grafico in funzione del valore di eccentricità corrispondente.

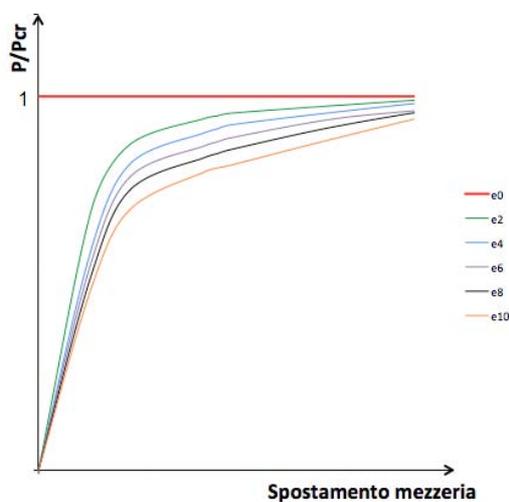
Come si può osservare, i dati ottenuti dalle analisi coincidono con quanto previsto dalla teoria, poiché il valore del carico critico di instabilità primaria cala all'aumentare del valore dell'eccentricità. Questo comportamento, come si è già evidenziato nel cap.1, è dovuto al fatto che il carico agente modifica la risposta della trave sollecitandola di volta in volta oltre che in direzione assiale anche con un momento flettente. Un ulteriore aspetto da mettere in risalto, è la grande analogia tra i risultati ottenuti con il solutore lineare e quello non lineare, dovuta al fatto che la geometria considerata è molto semplice.



**Fig. 3.11:** Grafico che descrive l'andamento del carico critico di instabilità primaria in funzione dell'eccentricità del carico applicato

Per quanto concerne gli spostamenti della sezione di mezzeria (quella che subisce le maggiori deflessioni in questa particolare condizione di carico), si sono ottenuti dei valori che sono dello stesso ordine di grandezza della lunghezza della trave (n.b. centimetro). Questo comportamento, è in perfetto accordo con quanto previsto dalla teoria, in quanto il *buckling* primario è una forma di instabilità che interessa la dimensione maggiore del componente.

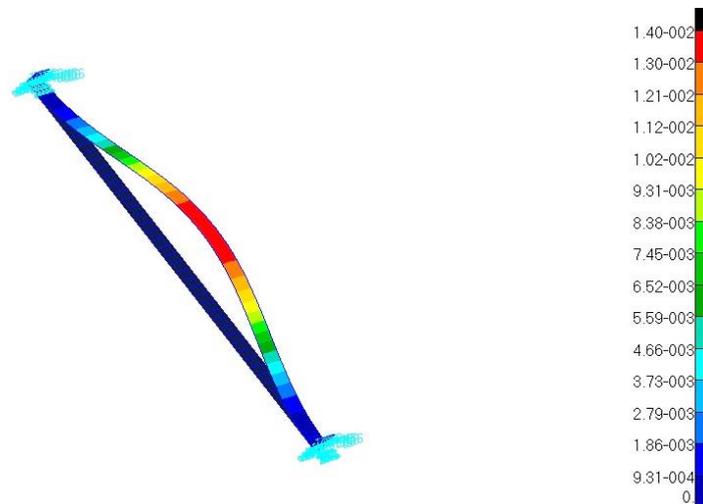
In modo tale da rendere le simulazioni ad elementi finiti di interesse pratico, si è voluto inserire in un grafico l'andamento di  $P/P_{cr}$ , rapporto tra il carico applicato puntualmente e il carico critico per  $e = 0$ , e lo spostamento della sezione di mezzeria.



**Fig. 3.12:** Grafico che descrive l'andamento del rapporto  $P/P_{cr}$  in funzione dell'eccentricità  $e$

Si osserva che le curve presentano tutte la forma iperbolica e che si allontanano dalla condizione ad eccentricità nulla (retta di riferimento in rosso per  $P = P_{cr}$ ) mano a mano che il valore di  $e$  aumenta. Tale andamento, è simile a quello descritto dalla teoria del carico eccentrico per le travi snelle, quindi il risultato ottenuto, è da considerarsi degno di nota ed incoraggiante per eventuali test sperimentali su provini come quelli fin qui analizzati.

Si riporta, a titolo esemplificativo, l'immagine che descrive la deformata del primo modo di *buckling* primario, ottenuta con l'analisi ad elementi finiti, e i corrispettivi valori degli spostamenti nel caso della trave sottoposta a carico assiale non eccentrico ( $e = 0$ ).



**Fig. 3.13:** Deformata del primo modo di buckling per una trave sottoposta a carico assiale non eccentrico, il valore indicativo del FACTOR 71.1 [N]



# Capitolo 4:

## Instabilità Secondaria di Sezioni in Parete Sottile per Carico Eccentrico, Analisi Sperimentale

In questa sezione, viene presentata l'attività di analisi sui fenomeni di instabilità secondaria sia dal punto di vista sperimentale, con l'impiego di una macchina a compressione, sia dal punto di vista di analisi ad elementi finiti.

La progettazione è iniziata con uno studio preliminare per la scelta della sezione da testare, in modo che potesse essere visibile il fenomeno compatibilmente con i carichi sopportabili dalla macchina.

A questa fase di simulazione al computer è seguita la fase di test vera e propria, nella quale, sono stati analizzati i comportamenti dei vari modelli scelti e si sono progettati dei sistemi appositi per poter variare l'eccentricità del carico.

### 4.1 Macchina di prova Dyno

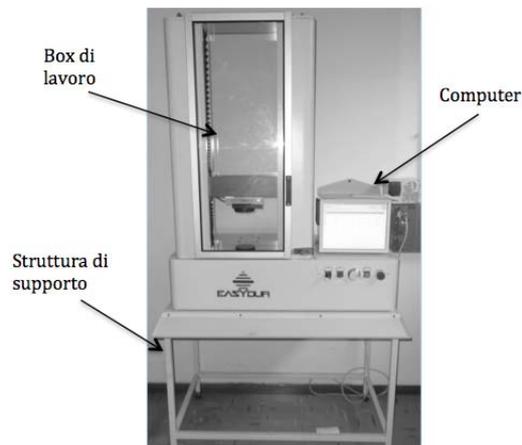
La macchina utilizzata per i test è il modello DYNO prodotto dalla EASYDUR® e permette di effettuare prove industriali a trazione, a compressione e a flessione (**Fig. 4.1**).

Essa, è composta da un motore elettrico *brushless* che permette la movimentazione di una piastra ( $\Phi 100 [mm]$ ) in direzione verticale. A seconda della direzione del movimento, si assiste ad una compressione o ad una trazione del modello da provare. L'altra piastra ( $\Phi 102 [mm]$ ) di sostegno, è vincolata sul basamento della macchina e il tutto, è inserito in un *box* protettivo schermato con un pannello di plexiglass trasparente. Il provino viene posto tra le due piastre appena descritte e, in questo modo, sollecitato nel modo desiderato (**Fig. 4.2**).

Il macchinario è collegato con un cavo USB ad un computer che funge da controllore: è possibile, tramite un software apposito, impostare il programma di

carico della macchina e poi leggere i risultati in termini di forza e spostamento applicati durante il test. L'apparecchio, è infatti dotato di una cella di carico e di un sensore di posizione della piastra mobile, che permettono un controllo in spostamento o in forza durante le prove sperimentali (**Fig. 4.2**). I dati ,vengono quindi registrati e sono salvabili su di un foglio di calcolo Excel® per eventuali manipolazioni successive.

Per sicurezza e praticità d'utilizzo, sono stati posti sul macchinario dei tasti fisici che permettono la movimentazione manuale della piastra o l'arresto immediato (**Fig. 4.3**). Un ulteriore parametro di sicurezza è impostato sulla porta scorrevole del box: solo se il circuito elettrico è chiuso la macchina può funzionare correttamente (**Fig. 4.2**).



**Fig. 4.1:** Macchinario DYNO per le prove industriali



**Fig. 4.2:** Particolare del macchinario

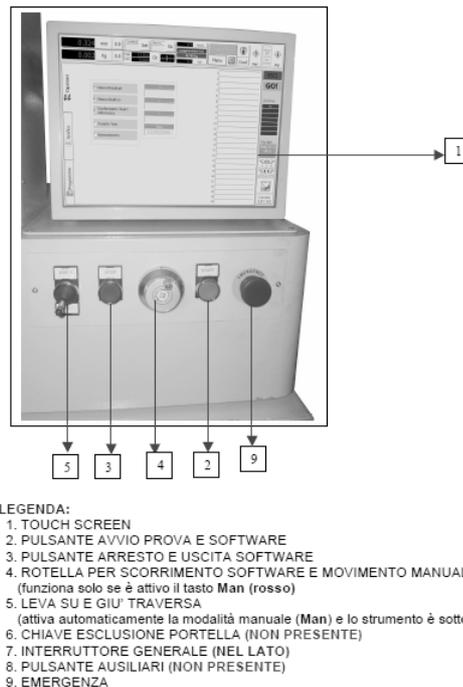


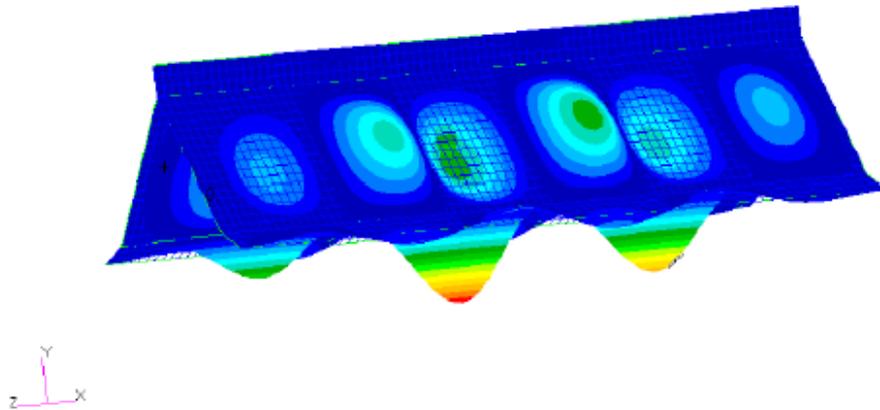
Fig. 4.3: Particolare del macchinario

## 4.2 Scelta dei modelli in parete sottile

Prima di effettuare le prove sperimentali con il macchinario appena descritto, è stata fatta un'indagine ad elementi finiti, per scegliere quale particolare sezione rendesse visibile maggiormente il fenomeno di instabilità. L'attività di ricerca, è stata incentrata sulle sezioni in parete sottile poiché, dalla teoria, risentono maggiormente del fenomeno del *buckling* secondario.

La scrematura iniziale, ha riguardato le seguenti tipologie di provini alettati, le quali sono state analizzate con il software Patran® al fine di individuare le deformate conseguenti al fenomeno in oggetto. E' stata eseguita un'analisi non lineare di *buckling*: i risultati e le tabelle con i valori del carico critico in funzione delle caratteristiche geometriche, sono riportati nelle figure sottostanti.

### 1. Sezione triangolare



**Fig. 4.4:** Sezione triangolare alettata, primo modo di buckling

lunghezza elemento 0.005 con 54 elementi

MODELLO	Lega usata	a[mm]	b[mm]	t[mm]	L[mm]	Pcr[N]
1	AA2024-T3	80	16	0.4	400	1409
2	AA2024-T3	80	16	0.45	400	2006
3	AA2024-T3	80	16	0.5	400	2750
4	AA5052-O	80	16	0.4	400	1352
5	AA5052-O	80	16	0.45	400	1923
6	AA5052-O	80	16	0.5	400	2637

lunghezza elemento 5 mm con 57 elementi

MODELLO	Lega usata	a[mm]	b[mm]	t[mm]	L[mm]	Pcr[N]
1	AA2024-T3	75	15	0.4	350	1506
2	AA2024-T3	75	15	0.45	350	2143
3	AA2024-T3	75	15	0.5	350	2938
4	AA5052-O	75	15	0.4	350	1444
5	AA5052-O	75	15	0.45	350	2055
6	AA5052-O	75	15	0.5	350	2818

**Tab. 7:** Valori del carico critico in funzione del materiale e dello spessore delle piastre componenti il modello

2. Sezione quadrata con alette sugli angoli

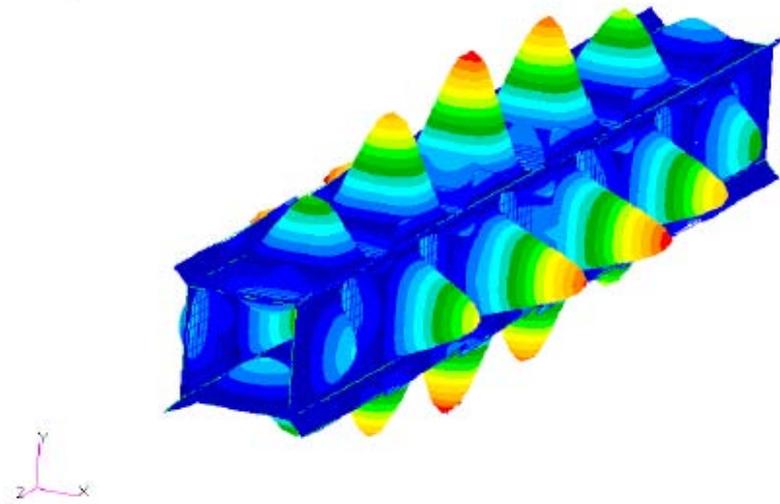


Fig. 4.5: Sezione quadrata alettata sugli spigoli, primo modo di buckling

lunghezza elemento 0.005 con 72 elementi

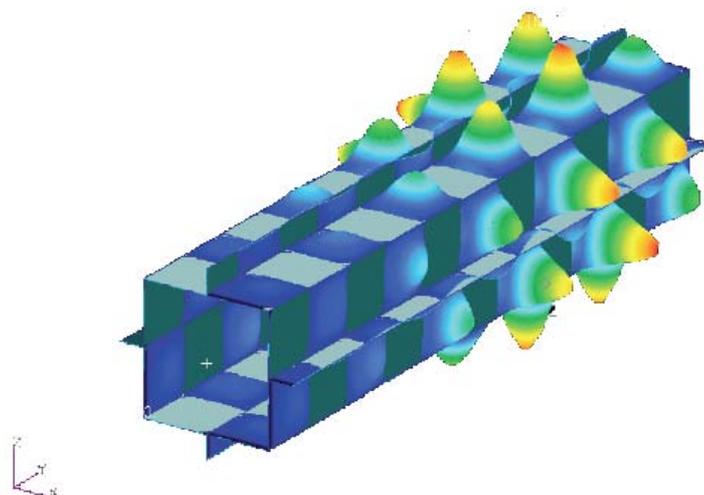
MODELLO	Lega usata	a[mm]	b[mm]	t[mm]	L[mm]	Pcr[N]
1	AA2024-T3	75	15	0.4	350	1914
2	AA2024-T3	75	15	0.45	350	2724
3	AA2024-T3	75	15	0.5	350	3734
4	AA5052-O	75	15	0.4	350	1835
5	AA5052-O	75	15	0.45	350	2612
6	AA5052-O	75	15	0.5	350	3581

lunghezza elemento 0.005 con 72 elementi

MODELLO	Lega usata	a[mm]	b[mm]	t[mm]	L[mm]	Pcr[N]
1	AA2024-T3	80	16	0.4	400	1791
2	AA2024-T3	80	16	0.45	400	2549
3	AA2024-T3	80	16	0.5	400	3495
4	AA5052-O	80	16	0.4	400	1718
5	AA5052-O	80	16	0.45	400	2444
6	AA5052-O	80	16	0.5	400	3352

Tab. 8: Valori del carico critico in funzione del materiale e dello spessore delle piastre componenti il modello

### 3. Sezione quadrata con alette in mezzzeria degli spigoli

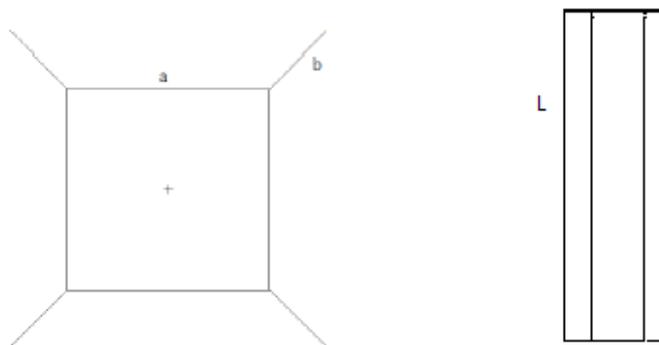


**Fig. 4.6:** Sezione quadrata alettata, primo modo di buckling

MODELLO	Lega usata	a[mm]	b[mm]	t[mm]	L[mm]	Pcr[N]
1	AA2024-T3	80	15	0.3	400	2336.5
2	AA2024-T3	80	15	0.2	400	692.1
3	AA2024-T3	70	20	0.4	350	7297.6
4	AA2024-T3	70	20	0.2	350	955.06
5	AA2024-T3	70	20	0.3	350	3077.2
6	AA5052-O	80	15	0.3	400	2262.4
7	AA5052-O	80	15	0.2	400	670.2
8	AA5052-O	70	20	0.4	350	7066.4
9	AA5052-O	70	20	0.2	350	882

**Tab. 9:** Valori del carico critico in funzione del materiale e dello spessore delle piastre componenti il modello

La scelta della sezione, è ricaduta su quella quadrata con le alette disposte lungo gli spigoli (**Fig. 4.5**) principalmente per due fattori: il primo, è legato al fatto che le simulazioni dimostrano che il fenomeno è molto più visibile rispetto agli altri modelli analizzati; il secondo, è connesso al maggiore impiego di una siffatta sezione in ambito strutturale. Un modello come quello appena trattato, nella realtà, è composto da 4 piastre piegate alle estremità e poi incollate a formare la sezione di figura.



**Fig. 4.7:** Pianta e geometria del provino scelto

Scelta la geometria, sono state fatte diverse simulazioni per vedere l'effetto del materiale e degli spessori sul fenomeno dell'instabilità e sul valore del carico critico. Si è visto che, la grandezza che influenza maggiormente il fenomeno, è lo spessore delle piastre; in particolare il carico critico di *buckling* secondario, aumenta all'aumentare dello spessore in gioco. I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella.

Oltre alla sezione appena vista, si è scelto di analizzare ad elementi finiti, anche il comportamento di una lattina di alluminio. La selezione di questo modello, è legata al fatto che le lattine sono facilmente reperibili e presentano nominalmente delle caratteristiche fissate.

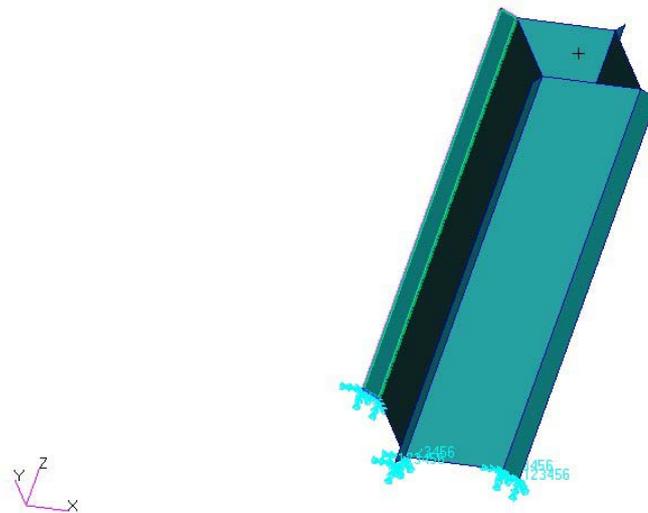
### 4.3 Provino alettato

Definita la geometria e il materiale da utilizzare, abbiamo ordinato i provini e simulato il loro comportamento con delle analisi non lineari al solutore Marc®.

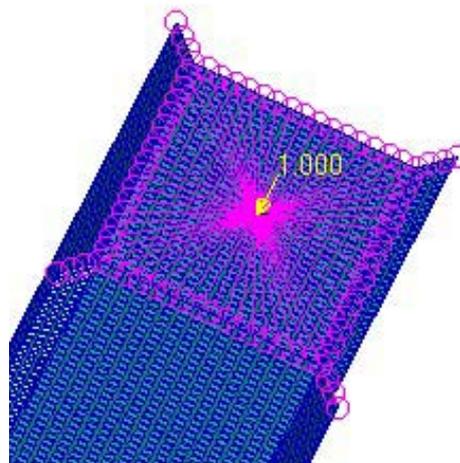
Il modello scelto è il numero 3 della **Tab. 7** e per esso, sono state effettuate diverse analisi per determinarne il comportamento in presenza di diverse condizioni di carico eccentrico.

Alla geometria definita, nel software FEM, è stata associata una proprietà *shell* con elementi 2D QUAD 4. Per simulare le condizioni di carico reali, i nodi delle sezioni di estremità, sono stati associati a degli elementi MPC (Multi Point Constrain), il cui nodo indipendente è stato vincolato o caricato opportunamente. In particolare, un'estremità è stata caricata con una forza unitaria e vincolata, in modo da permettere la traslazione lungo l'asse di

simmetria (direzione  $z$  nel modello) e le rotazioni attorno a tutti e tre gli assi; l'altra estremità scarica, invece, è stata incastrata impedendo tutte le traslazioni e le rotazioni. La sezione scarica, secondo un'analisi più approfondita, dovrebbe presentare dei vincoli solo per le traslazioni, poiché le condizioni di carico, non escludono la presenza di eventuali rotazioni; tuttavia questa scelta è giustificata dal fatto che, le piastre di supporto del macchinario, in prima approssimazione, sono molto più rigide del provino, e quindi il modello è aderente alla realtà sperimentale.



**Fig. 4.8:** Geometria di riferimento nell'analisi FEM

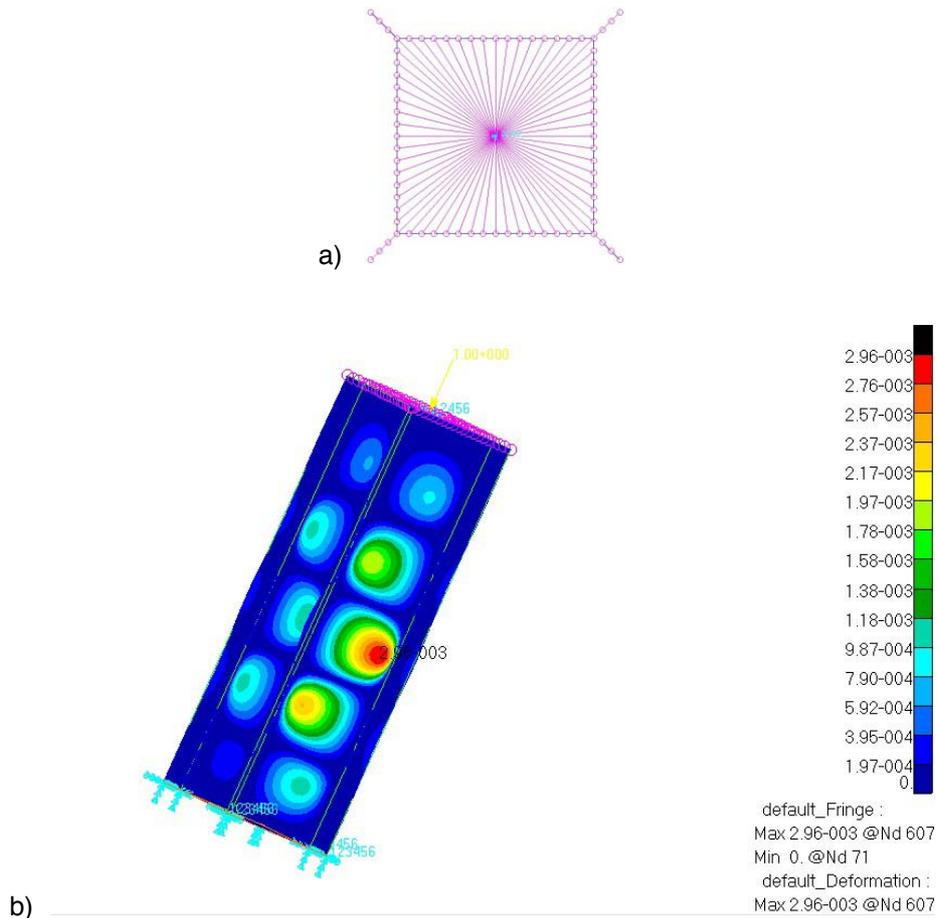


**Fig. 4.9:** Particolare dell'MPC all'estremità caricata

Le condizioni di carico analizzate, in base al diverso punto di applicazione della forzante, hanno permesso di registrare diversi valori del carico critico di

instabilità secondaria e diverse curve di deformazione (il valore di  $e$  è da intendersi come distanza dall'asse centrale della sezione).

### 1. Eccentricità $e = 0$



**Fig. 4.10:** a) Vista in sezione del provino  
 b) Deformata del primo modo di buckling (simmetrica)  
 $e = 0$

I valori ottenuti, per il carico critico di instabilità secondaria, sono stati:

$$P_{cr} = 3300 [N] \quad \text{analisi lineare}$$

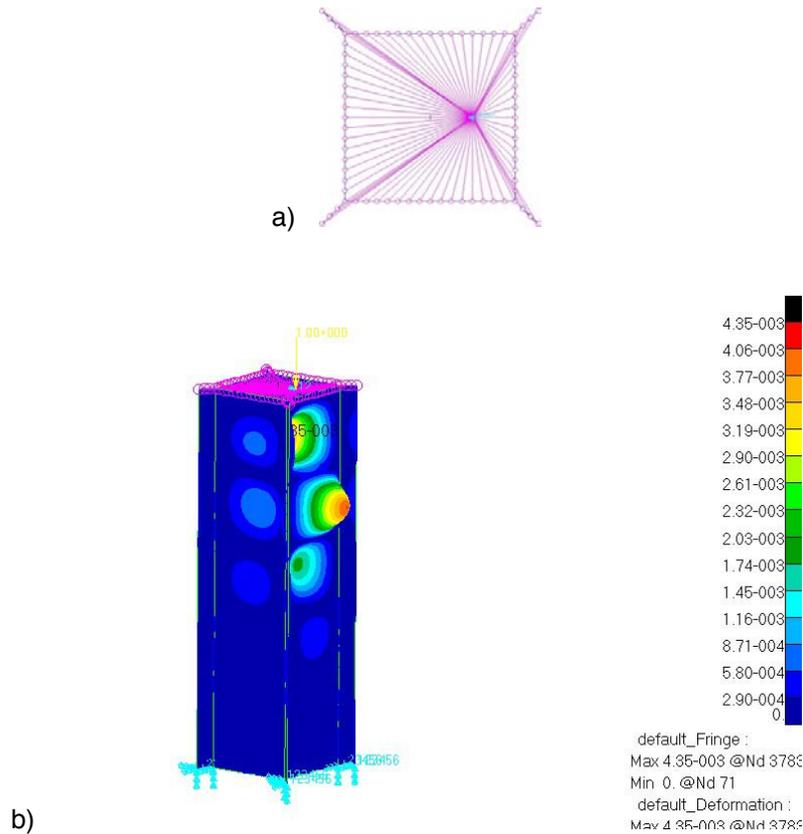
$$P_{cr} = 3264 [N] \quad \text{analisi non lineare}$$

mentre, il valore di spostamento massimo ottenuto per il seguente modello è stato (si riporta il solo dato proveniente dall'analisi non lineare, in quanto, quello corrispettivo all'analisi lineare, non ha alcun significato fisico):

$$\text{Spostamento max} = 2.96 * 10^{-3} [m]$$

Come si osserva, la deformata, risulta simmetrica rispetto all'asse di simmetria della sezione, essendo la condizione di carico e la geometria perfettamente simmetriche.

## 2. Eccentricità $e = 20$



**Fig. 4.11:** a) Vista in sezione del provino  
b) Deformata del primo modo di buckling (non simmetrica)  
 $e = 20$

I valori ottenuti per il carico critico di instabilità secondaria, sono stati:

$$P_{cr} = 2723.5 [N] \quad \text{analisi lineare}$$

$$P_{cr} = 2749.24 [N] \quad \text{analisi non lineare}$$

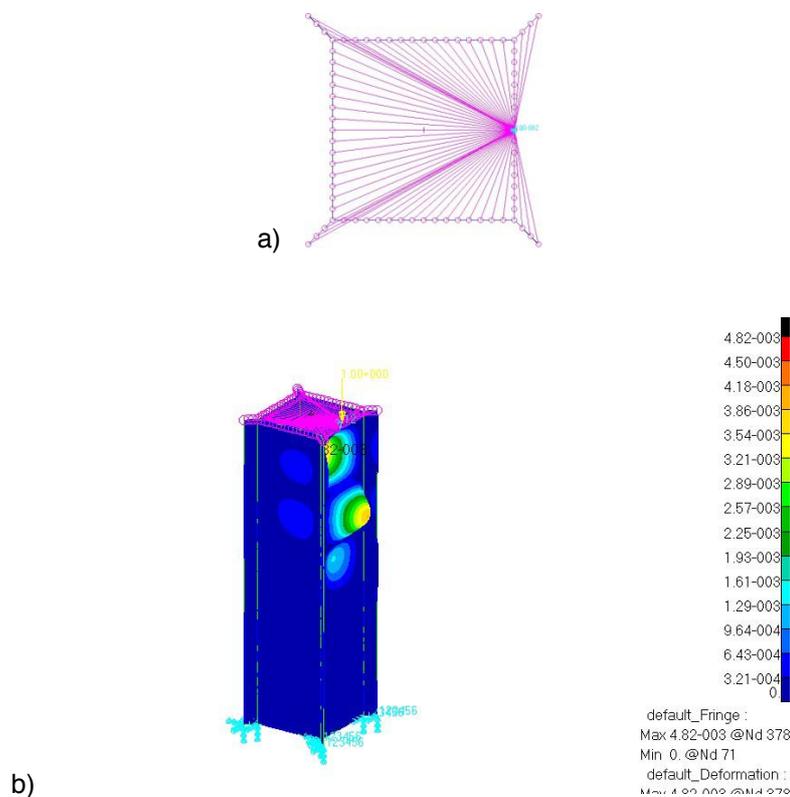
mentre, il valore di spostamento massimo ottenuto per il seguente modello è stato (si riporta il solo dato proveniente dall'analisi non lineare, in quanto, quello corrispettivo all'analisi lineare, non ha alcun significato fisico):

$$Spostamento\ max = 4.35 * 10^{-3} [m]$$

Come si osserva, la deformata, risulta anti-simmetrica essendo la condizione di carico e la geometria non simmetriche: le piastre sollecitate, presentano il fenomeno tipico dell'instabilità mentre, le altre, si deformano solo lievemente.

Si noti che, mentre il valore di carico critico diminuisce, aumenta quello dello spostamento massimo.

### 3. Eccentricità $e = 40$



**Fig. 4.12:** a) Vista in sezione del provino  
b) Deformata del primo modo di buckling (non simmetrica)  
 $e = 40$

I valori ottenuti, per il carico critico di instabilità secondaria, sono stati:

$$P_{cr} = 2102.7 [N] \quad \text{analisi lineare}$$

$$P_{cr} = 2122.92 [N] \quad \text{analisi non lineare}$$

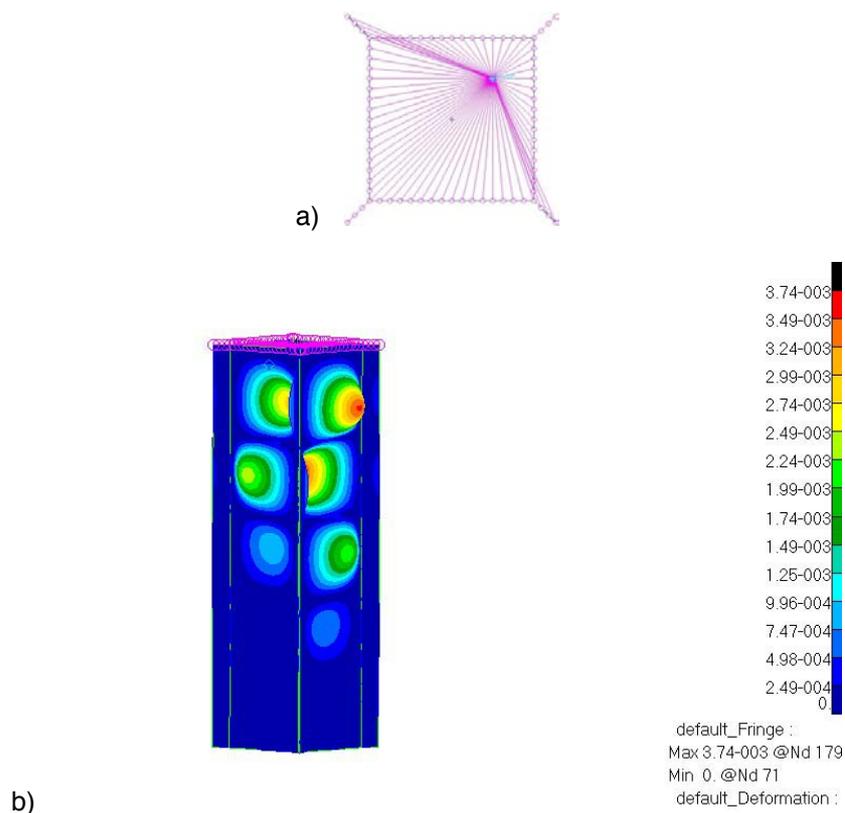
mentre, il valore di spostamento massimo ottenuto per il seguente modello è stato (si riporta il solo dato proveniente dall'analisi non lineare, in quanto, quello corrispettivo all'analisi lineare, non ha alcun significato fisico):

$$Spostamento\ max = 4.82 * 10^{-3} [m]$$

Come si osserva, la deformata, risulta anti-simmetrica essendo la condizione di carico e la geometria non simmetriche: le piastre sollecitate, presentano il fenomeno tipico dell'instabilità, mentre le altre, si deformano solo lievemente. Rispetto al caso precedente, questo comportamento, è ancora più accentuato e risulta, deformata significativamente, solo la piastra più esterna.

Si noti che, rispetto al caso precedente, mentre il valore di carico critico diminuisce, aumenta quello dello spostamento massimo.

#### 4. Eccentricità diagonale $e = 20\sqrt{2}$



**Fig. 4.13:** a) Vista in sezione del provino  
b) Deformata del primo modo di buckling (non simmetrica)  
 $e = 20\sqrt{2}$

I valori ottenuti, per il carico critico di instabilità secondaria, sono stati:

$$P_{cr} = 2554.84 [N] \quad \text{analisi lineare}$$
$$P_{cr} = 2554.41 [N] \quad \text{analisi non lineare}$$

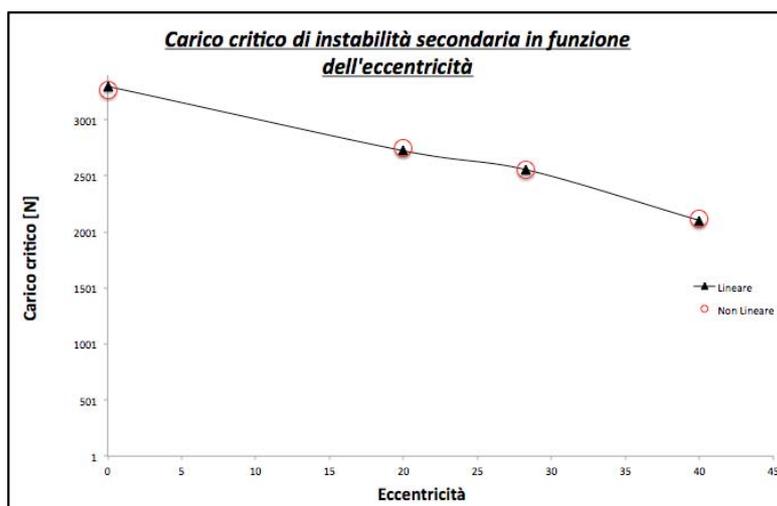
mentre, il valore di spostamento massimo ottenuto per il seguente modello è stato (si riporta il solo dato proveniente dall'analisi non lineare, in quanto, quello corrispettivo all'analisi lineare, non ha alcun significato fisico):

$$\text{Spostamento max} = 3.74 * 10^{-3} [m]$$

Come si osserva, la deformata, risulta anti-simmetrica essendo la condizione di carico e la geometria non simmetriche: le piastre sollecitate, presentano il fenomeno tipico dell'instabilità, mentre le altre, si deformano solo lievemente.

Si noti che, rispetto al caso precedente, il valore di carico critico aumenta, come pure quello dello spostamento massimo. Questo comportamento, è dovuto al fatto che, la condizione di carico in esame, sollecita una sezione resistente superiore.

I risultati, ottenuti da questa serie di simulazioni con diverse condizioni di sollecitazione, sono conformi alla teoria inerente il fenomeno dell'instabilità secondaria. Come per il caso dell'instabilità primaria, si assiste ad un calo del valore di  $P_{cr}$  all'aumentare dell'eccentricità (**Fig. 4.14**). A tale andamento, è legato un aumento sensibile degli spostamenti massimi del modello.

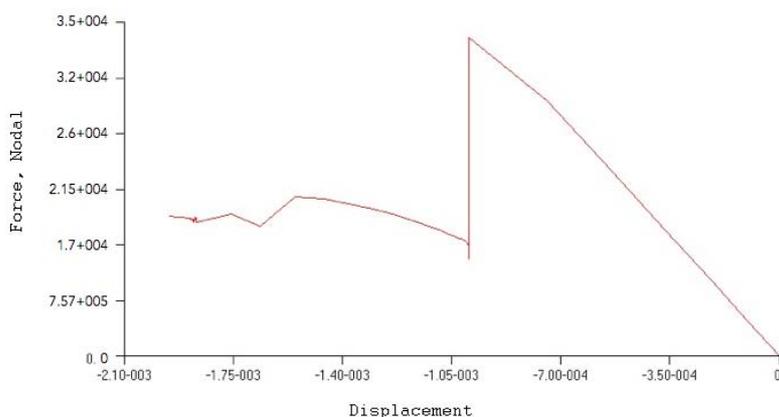


**Fig. 4.14:** Grafico con l'andamento del carico critico in funzione dell'eccentricità

Avendo effettuato i test sperimentali in controllo di spostamento e non di forza, si è deciso di simulare il comportamento del modello, imponendo al nodo

indipendente dell'MPC, uno spostamento lungo l'asse della trave (in direzione negativa di compressione pari a  $1 [mm]$ ). Il solutore non lineare, procede suddividendo lo spostamento in più incrementi e calcolando per ognuno le deformazioni e i carichi applicati. Dopo varie configurazioni di controllo degli incrementi di analisi, si è scelto di adottare un algoritmo adattivo, più stabile dell'algoritmo *fixed* (a step di incremento fissati). Il fine di queste simulazioni è stato quello di verificare che, l'andamento del carico applicato rispetto allo spostamento verticale del modello, fosse congruo con quello ottenuto dai test sperimentali.

Di seguito, si riporta il grafico che descrive l'andamento del carico applicato in funzione degli incrementi dell'analisi ad elementi finiti per le diverse configurazioni di carico. Tale curva, è molto simile a quella prevista dalla teoria: anche per le simulazioni si ottiene un punto di *snap*, ove avviene il fenomeno di instabilità, oltre il quale, vi è una consistente riduzione del carico supportato.



**Fig. 4.15:** Andamento della forza nodale rispetto allo spostamento longitudinale

In fase di test, è stato necessario progettare dei supporti per il provino, poiché le piastre presenti sul macchinario della Easydur® sono risultate essere troppo piccole. Per questo motivo, abbiamo fatto realizzare degli appoggi maggiorati in acciaio (così da essere in prima approssimazione molto più rigide del materiale componente il modello), che presentassero da un lato un invito per le piastre del macchinario e potessero essere ad esso, vincolate attraverso una vite passante. Sulla piastra superiore, è stata prevista anche una levigatura con due fori M3 per l'eventuale fissaggio di un sensore LVDT così da poter effettuare misure di spostamento relativo più accurate.

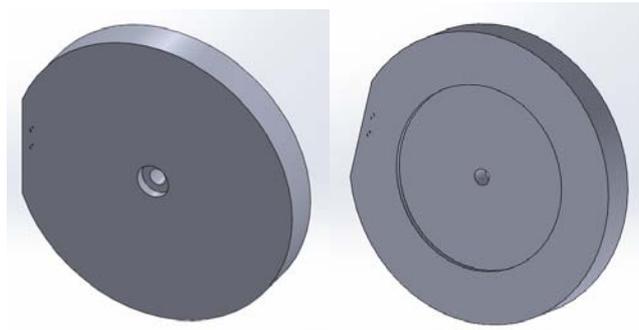


Fig. 4.16: Supporto maggiorato, vista frontale e posteriore

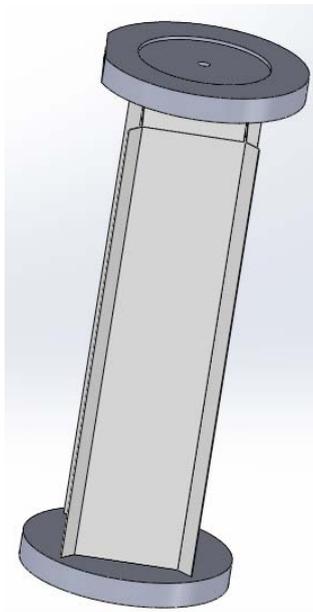


Fig. 4.17: Appoggi maggiorati in acciaio con provino alettato, vista d'assieme

## 4.4 Lattina in lega di Alluminio

Come affermato in precedenza, la scelta della lattina in lega di Alluminio, è giustificata dal fatto che, è un ottimo esempio di struttura in parete sottile regolare, che presenta nominalmente delle caratteristiche ripetibili per ogni sua parte. Gli spessori ridotti e le caratteristiche del materiale, in linea teorica, dovrebbero favorire l'insorgere del fenomeno del *buckling* anche per valori di carico modesti. Si sottolinea inoltre che, la lattina, si presenta come un provino facilmente reperibile e quindi perfetto per la realizzazione di test a basso costo

di gestione. Tra i molti modelli presenti sul mercato, si è selezionato il modello di lattina standard prodotto dalla Bavaria® (**Fig. 5**).

Per giustificare la selezione della lattina per uso alimentare, si sono effettuate delle analisi ad elementi finiti su di un modello realizzato in SolidWorks® e poi importato nel solutore non lineare Marc® (**Fig. 4.18**).



**Fig. 4.18:** Modello 3D realizzato in SolidWorks®

La lattina in esame, prodotta per imbutitura profonda, è costituita di una lega di Alluminio della serie 3000, che presenta le seguenti caratteristiche meccaniche:

	$E$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\nu$	$\sigma_s$ [MPa]	$\sigma_{UTS}$ [MPa]
<b>AA-3004</b>	73.1	2700	0.33	170	215

**Tab. 10:** Caratteristiche meccaniche della lega AA 3004

La modellazione del tratto plastico del materiale è stata definita con la legge di Hollomon avente i seguenti parametri:

$$\begin{aligned} n &= 0.16 && \text{coefficiente di incrudimento} \\ K &= 690 \text{ [MPa]} && \text{coefficiente di resistenza} \end{aligned}$$

- **Geometria analisi ad elementi finiti:**

Nel software FEM, questo materiale, è stato modellizzato come elasto-plastico così da ottenere un comportamento e delle deformazioni molto più aderenti al comportamento reale.

La geometria importata in Marc® è stata trasformata, tramite il comando *break*, in modo tale, da poter passare al solutore le sole superfici esterne. Ad esse è stata associata una proprietà *shell* e una *mesh* composta di elementi 2D QUAD 4 (6228 elementi), in modo tale, da ricreare gli spessori reali nel modello: le sezioni di estremità presentano spessore medio  $t = 0.2 [mm]$ , mentre le superfici laterali hanno uno spessore medio di  $t = 0.1 [mm]$ . La scelta degli elementi QUAD, rispetto a quelli TRIA, è giustificata dal fatto che, i primi, presentano un numero maggiore di nodi e quindi descrivono con più accuratezza la deformata del modello.

Come fatto per il provino alettato, anche in questo caso, si è associato alla sezione sollecitata un elemento MPC (Multi Point Constraint), vincolando le traslazioni lungo il piano ortogonale del campione (**Fig. 4.19**).



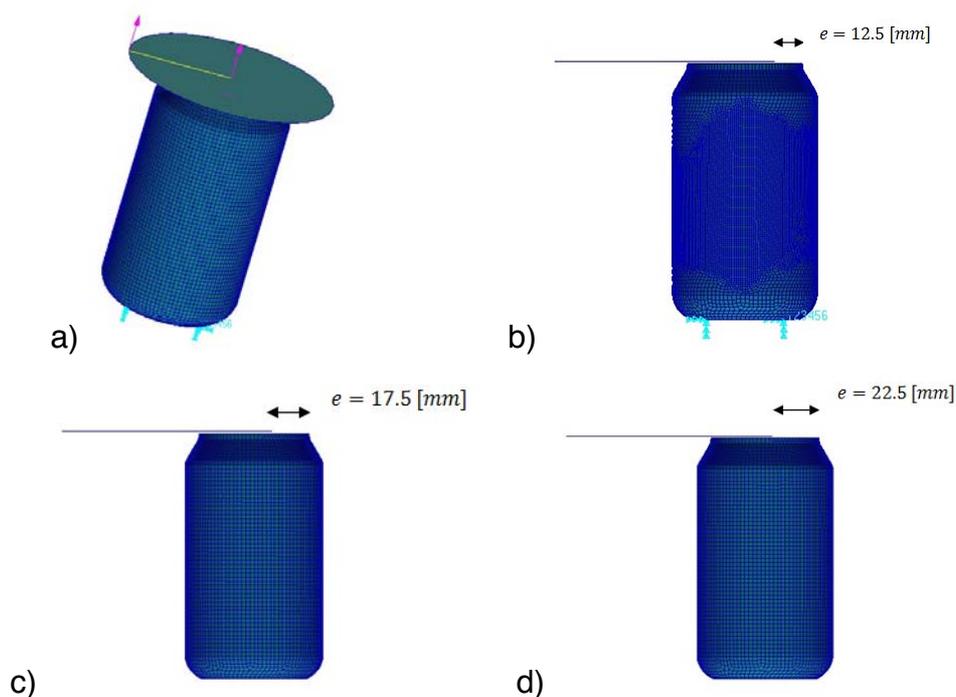
**Fig. 4.19:** Modello FEM della lattina con elementi QUAD 4 ed MPC

In modo analogo al caso precedente del provino alettato, le analisi non lineari, sono state effettuate imponendo al campione, uno spostamento lungo la direzione dell'asse di simmetria, così da riprodurre il controllo di spostamento effettuato con il macchinario. La traslazione, è stata imposta al nodo indipendente dell'MPC e la sua entità è stata di  $20 [mm]$ . La sezione scarica è

stata, invece, vincolata in modo da impedire sia gli spostamenti che le traslazioni. Questa assunzione è, solo in prima approssimazione, corretta, poiché, si trascurano le rotazioni che nei test sperimentali non sono impediti. Essa è, tuttavia ragionevole, perché la rigidità del macchinario, è molto superiore a quella del campione.

Per rendere l'analisi ad elementi finiti esaustiva, sono state studiate configurazioni di carico eccentrico analoghe a quelle considerate in sede di test sperimentale. Data la condizione di carico presente, è stata modellizzata, con il solutore Marc®, una superficie circolare di dimensioni nominali uguali a quelle della piastra mobile del macchinario DYNO, la quale è stata spostata per le diverse simulazioni.

I casi analizzati sono riassunti nella figura seguente:



**Fig. 4.20:** Schema riassuntivo dei casi di carico eccentrico studiati:  
a) eccentricità nulla, b) eccentricità di 12.5 mm,  
c) eccentricità di 17.5 mm, d) eccentricità di 22.5 mm

Per alcune condizioni di carico sono stati esaminati anche dei campioni che presentassero dei difetti di tipo geometrico e di tipo meccanico. La loro modellizzazione è stata realizzata seguendo due strategie:

1. I difetti geometrici sono stati riprodotti imponendo uno spostamento dell'ordine dello spessore (decimi di millimetro) ad alcuni nodi della superficie
2. I difetti meccanici sono stati riprodotti associando ad alcuni elementi della *mesh* un modulo elastico ridotto di ~10% ed una riduzione dello spessore di ~20%



**Fig. 4.21:** Modello ad elementi finiti con difetto superficiale localizzato, i nodi evidenziati sono quelli ai quali è stato associato un offset

- **Setup sperimentale**

La procedura di test sperimentali ha richiesto la progettazione di piastre apposite per la realizzazione delle diverse configurazioni di carico eccentrico. Per questo motivo si è scelto di aumentare, con un appoggio circolare in acciaio, la sezione della piastra statica del macchinario (**Fig. 4.22**).



**Fig. 4.22:** Supporto maggiorato in acciaio

La lattina è stata, con una apposita squadretta metrica, posizionata nelle configurazioni volute e quindi si è potuto procedere con il test.

Il macchinario è stato programmato in modo da ottenere un controllo in spostamento durante l'esecuzione della prova. A tal fine è stato realizzato un programma apposito con il software di proprietà installato nella macchina (**Fig. 4.23**) che permettesse un controllo per *step*. I parametri selezionati sono stati:

- **F0**: comando che azzerava la lettura della cella di carico
- **L0**: comando che permette di definire una forza minima di contatto (nel nostro caso 3 [N]) per la quale viene data in uscita la dimensione del pezzo
- **P0**: comando che azzerava la lettura di posizione della riga metrica integrata nel macchinario
- **M0**: comando che azzerava la forza massima
- **E0**: comando che azzerava la lettura dell'estensimetro integrato
- **Chr.C**: comando che permette un reset del grafico
- **F(P)**: comando che definisce lo spostamento relativo da imporre alla piastra mobile (nel nostro caso 2 [mm]) insieme ad altri parametri addizionali quali la velocità (0.02 [mm/s]). Questo comando inoltre imposta la lettura, da parte della cella di carico, della forza applicata
- **Peak**: Lettura del picco massimo registrato dalla cella di carico
- **Stop**: arresto del moto della piastra mobile e conclusione del test

Cmd	Descrizione	Condizione	Risultato	Tolleranze
R00	<b>F0</b>	Azzerà Forza		
R01	<b>L0</b>	Lunghezza Molla	3 N	<b>826.210</b> mm
R02	<b>P0</b>	Azzerà Posizione		
R03	<b>M0</b>	Azzerà Forza Max		
R04	<b>E0</b>	Azzerà Estensimetro		
R05	<b>Chr.C</b>	Reset Grafico		
R06	<b>F(P)</b>	Forza a Posizione	R: -2 mm	N
R07	<b>Peak</b>	Picco Max Cella		N (+0.5 -0.5)
R08	<b>Stop</b>	Stop		

Comando di arresto e lettura quando la cella legge una forza di contatto definita

Comando di controllo in spostamento e di lettura della forza agente sulla cella di carico

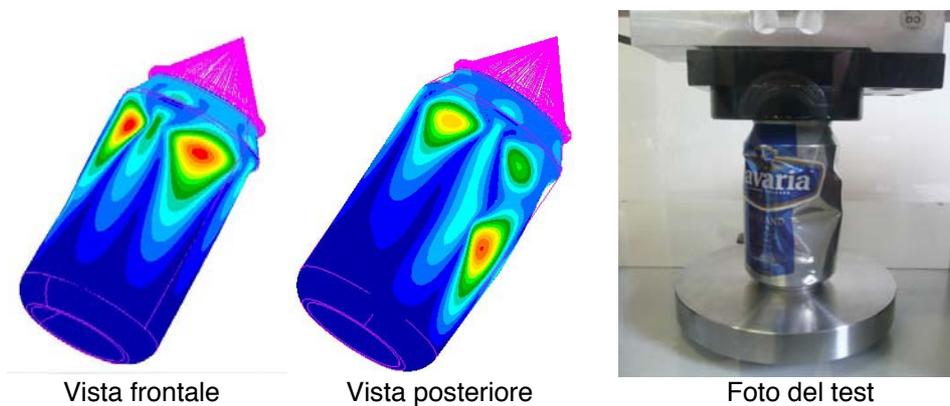
Comando di registrazione della forza di picco durante il test

**Fig. 4.23:** Schermata del programma impostato per le prove sperimentali

- **Confronto dei risultati dei test e della analisi FEM**

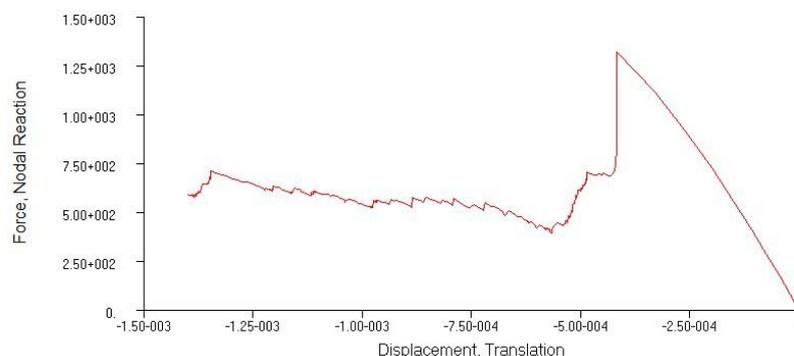
Di seguito si riportano i risultati ottenuti in termini di deformazioni e valori del carico critico per le diverse configurazioni analizzate. Gli aspetti sui quali si è focalizzata lo studio analitico sono stati l'eccentricità del carico e l'effetto di eventuali difetti sul valore del carico critico di instabilità secondaria.

Carico non eccentrico,  $e = 0$



**Fig. 4.24:** Deformate risultanti dalle analisi non lineari e dai test per la condizione di carico con eccentricità nulla [57]

Come si può osservare dalle immagini riportate, l'andamento qualitativo delle deformate relativo alle analisi FEM è analogo a quello ottenuto con i test sperimentali. Il numero di onde e le zone di maggiore deformazione possono considerarsi molto simili. Per quanto concerne l'andamento del carico in funzione dello spostamento si sono ottenuti, rispettivamente per l'analisi non lineare ed i test, i seguenti grafici:



**Fig. 4.25:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico non eccentrico

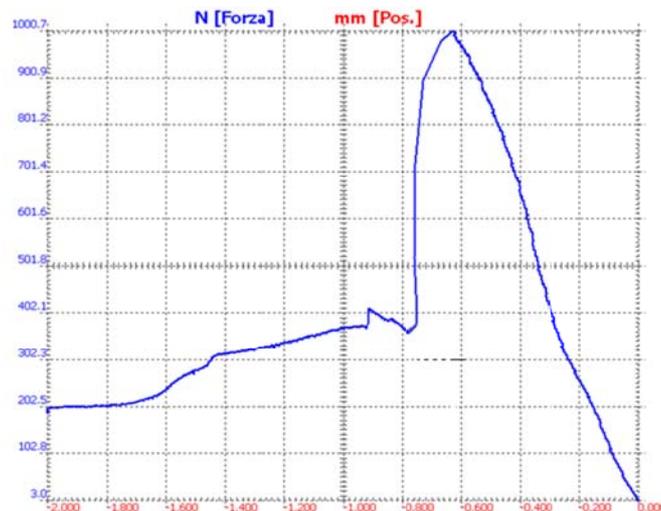


Fig. 4.26: Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il test sperimentale con carico non eccentrico

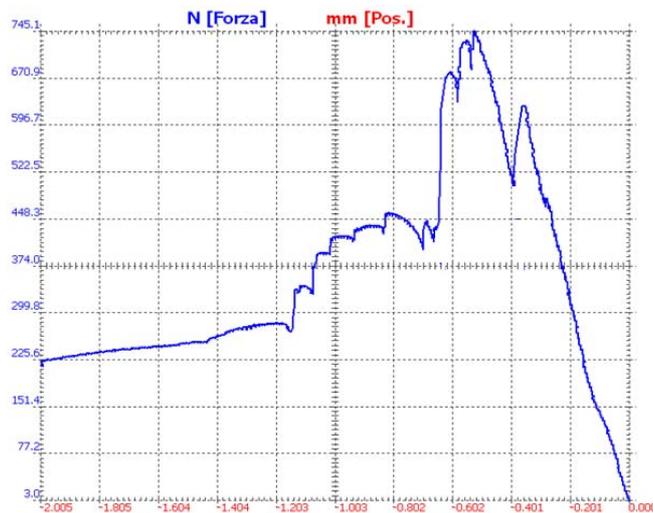
Anche per le curve riportate, si può affermare che l'andamento qualitativo del modello FEM è simile a quello ottenuto per il test sperimentale. Il primo tratto lineare delle curve rappresenta il comportamento elastico del materiale e risulta molto più pronunciato per il grafico riguardante l'analisi FEM, poiché in essa il comportamento del materiale elastico non risente di alcuna variazione nelle proprietà meccaniche. La seconda porzione della curva descrive il comportamento plastico della lega di Alluminio considerata: nel grafico ottenuto dai test è ben visibile il cambio di pendenza rispetto al tratto precedente della curva dovuto all'insorgere di fenomeni plastici nel materiale. Alla fine del tratto plastico si presenta il punto di *snap* delle curve, indicativo del valore del carico critico di instabilità secondaria: è in questo punto che avviene il fenomeno del *buckling* e la struttura sperimenta un calo considerevole delle sue proprietà meccaniche. Le curve poi nei tratti successivi perdono di interesse fisico rispetto al fenomeno considerato.

Il valore del carico critico predetto dal solutore non lineare si attesta su di un valore superiore rispetto a quello medio trovato sperimentalmente:

$$P_{cr,FEM} = 1305.7 [N]$$
$$\bar{P}_{cr,TEST} = 980.7 [N]$$

Questa discrepanza è giustificata dal fatto che il campione analizzato con gli elementi finiti è stato modellizzato senza considerare alcuna presenza di difetti.

Si sottolinea inoltre, che il valore riportato per i test è quello ottenuto da una media dei valori catalogati e non quello caratteristico di ogni singolo campione: la presenza di eventuali difetti visibili (come ad esempio dei rigonfiamenti o depressioni localizzate) e non visibili ha portato alla registrazione di valori ed andamenti anche molto diversi tra loro. Questo aspetto è mostrato in **Fig. 4.27** dove si riporta l'andamento del carico in funzione dello spostamento per un provino che presenta un difetto geometrico visibile (**Fig. 4.28**). Il risultato è che la curva di carico raggiunge un picco inferiore e presenta delle oscillazioni di elevata ampiezza dovute ai cedimenti strutturali localizzati in prossimità del difetto. Questi cedimenti hanno comportato anche dei fenomeni sonori tipici perfettamente udibili.



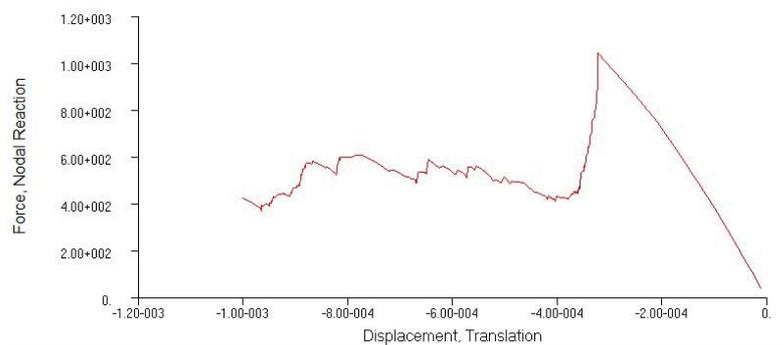
**Fig. 4.27:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per un test sperimentale con carico non eccentrico e provino difettato



**Fig. 4.28:** Provino con difetto superficiale visibile

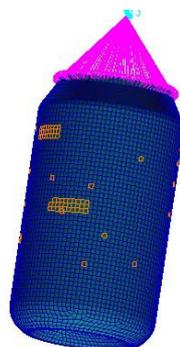
Per simulare il comportamento reale della lattina in presenza di difetti superficiali sono stati fatti dei modelli appositi.

La prima analisi statica non lineare è stata effettuata sul campione con difetti geometrici superficiali modellizzati attraverso lo spostamento dell'*offset* di alcuni nodi superficiali. Il risultato è stato considerevole, nonostante la lieve entità delle imperfezioni considerate, poiché è stato registrato un calo del ~30% nel valore del carico critico che si è attestato attorno a  $P_{cr} = 1090 [N]$ , prossimo a quello ottenuto con i test.



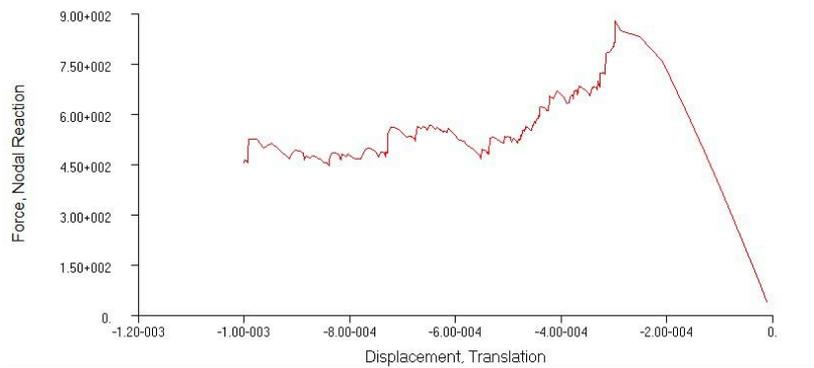
**Fig. 4.29:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico non eccentrico e difetti geometrici

L'ulteriore difetto modellizzato, riguardante le caratteristiche meccaniche del materiale, è stato realizzato variando le proprietà di alcuni elementi della *mesh*. Nello specifico si è scelto di ridurre il modulo di elasticità di ~10% e lo spessore di ~20%. Questa nuova proprietà così definita è stata associata in maniera *random* ad alcuni elementi della *mesh* raggruppati in due regioni più ampie e in altre zone localizzate (**Fig. 4.30**).



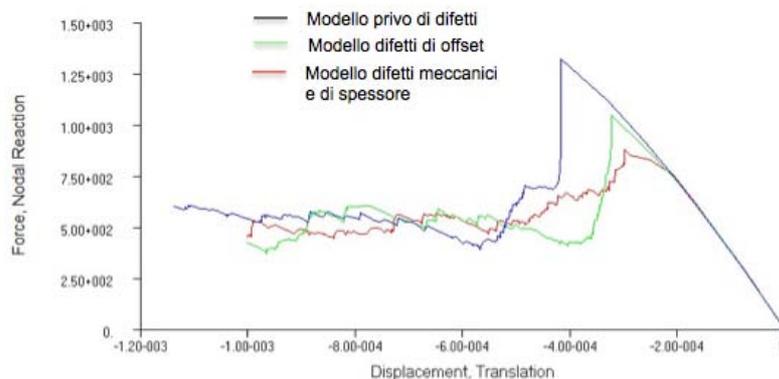
**Fig. 4.30:** Localizzazione dei difetti puntuali e zonal sul modello [57]

Il modello appena descritto è stato analizzato con il solutore non lineare Marc® e si è ottenuto l'andamento del carico in funzione dello spostamento di **Fig. 4.31**. Il valore del carico critico, a causa della considerevole quantità di difetti presenti nel modello, risulta di molto inferiore, ~40%, rispetto a quello ottenuto con il campione iniziale. Il valore ottenuto è  $P_{cr} = 870 [N]$ . La curva riportata presenta uno sviluppo molto frastagliato e irregolare, a causa delle imperfezioni presenti.



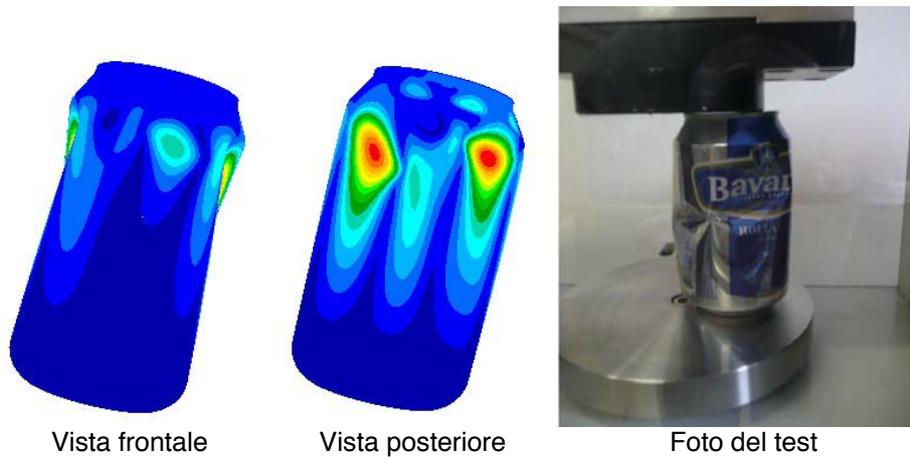
**Fig. 4.31:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico non eccentrico e difetti meccanici e di spessore

Infine si riporta il grafico che riassume i modelli di difetto trattati e permette il confronto tra gli andamenti del carico in funzione dello spostamento corrispondenti.



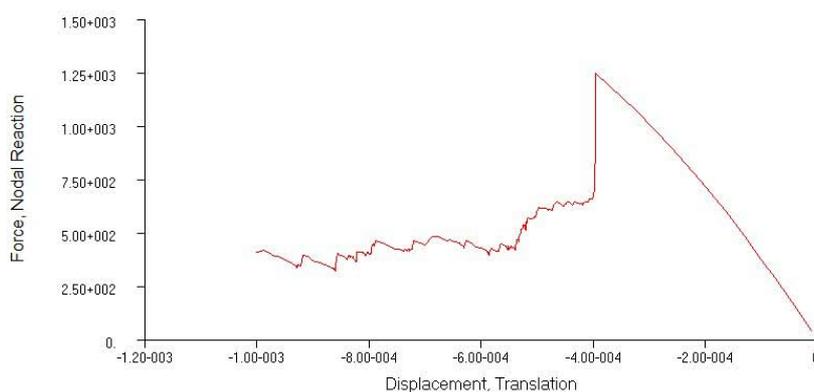
**Fig. 4.32:** Andamento del carico in funzione dello spostamento con i vari casi analizzati [57]

Carico eccentrico,  $e = 12.5$  [mm]

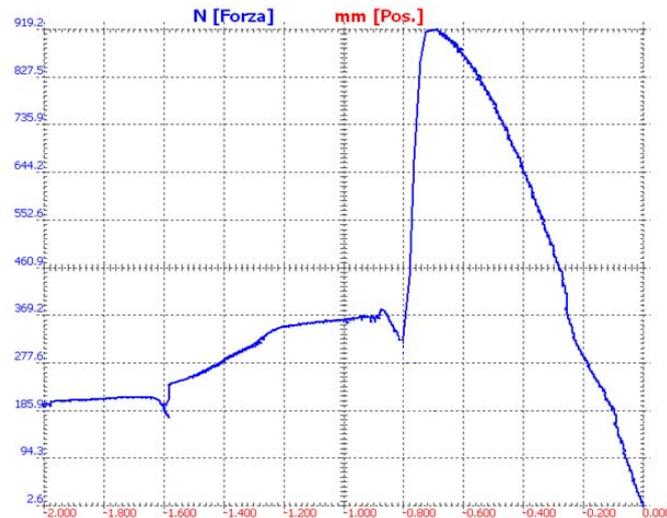


**Fig. 4.33:** Deformate risultanti dalle analisi non lineari e dai test per la condizione di carico con eccentricità  $e = 12.5$  [mm]

Come si può osservare dalle immagini riportate, l'andamento qualitativo delle deformate relativo alle analisi FEM è analogo a quello ottenuto con i test sperimentali. Il numero di onde e le zone di maggiore deformazione possono considerarsi molto simili. Le sezioni che risultano deformate sono solo quelle in corrispondenza del carico, mentre le altre risultano praticamente indeformate. Per quanto concerne l'andamento del carico in funzione dello spostamento si sono ottenuti, rispettivamente per l'analisi non lineare ed i test, i seguenti grafici:



**Fig. 4.34:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico eccentrico,  $e = 12.5$  [mm]



**Fig. 4.35:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il test sperimentale con carico eccentrico  $e = 12.5 [mm]$

Anche per le curve riportate, si può affermare che l'andamento qualitativo del modello FEM è simile a quello ottenuto per il test sperimentale. Il primo tratto lineare delle curve rappresenta il comportamento elastico del materiale e risulta molto più pronunciato per il grafico riguardante l'analisi FEM, poiché in essa il comportamento del materiale elastico non risente di alcuna variazione nelle proprietà meccaniche. La seconda porzione della curva descrive il comportamento plastico della lega di Alluminio considerata: nel grafico ottenuto dai test è ben visibile il cambio di pendenza rispetto al tratto precedente della curva dovuto all'insorgere di fenomeni plastici nel materiale. Alla fine del tratto plastico si presenta il punto di *snap* delle curve, indicativo del valore del carico critico di instabilità secondaria: è in questo punto che avviene il fenomeno del *buckling* e la struttura sperimenta un calo considerevole delle sue proprietà meccaniche. Le curve poi nei tratti successivi perdono di interesse fisico rispetto al fenomeno considerato.

Il valore del carico critico predetto dal solutore non lineare si attesta su di un valore superiore rispetto a quello medio trovato sperimentalmente:

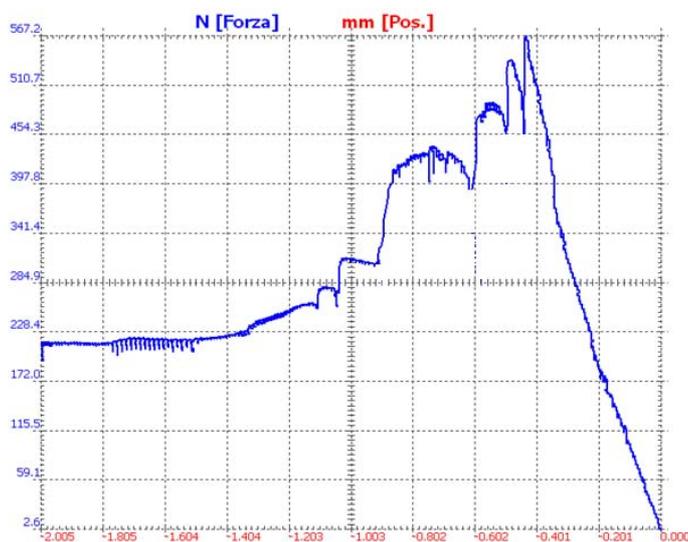
$$P_{cr,FEM} = 1250 [N]$$
$$\bar{P}_{cr,TEST} = 747.5 [N]$$

Rispetto al caso con eccentricità nulla si registra un valore di carico critico inferiore sia nelle simulazioni sia nei test sperimentali. Questo comportamento è

in accordo con quanto presente in letteratura per le sezioni in parete sottile ed è molto simile a quanto visto per il fenomeno dell'instabilità primaria.

La discrepanza di valori ottenuti dalle simulazioni FEM e dalle prove sperimentali, è giustificata dal fatto che il campione analizzato con gli elementi finiti è stato modellizzato senza considerare alcuna presenza di difetti. Si sottolinea inoltre, che il valore riportato per i test è quello ottenuto da una media dei valori catalogati e non quello caratteristico di ogni singolo campione: la presenza di eventuali difetti visibili (come ad esempio dei rigonfiamenti o depressioni localizzate) e non visibili ha portato alla registrazione di valori ed andamenti anche molto diversi tra loro.

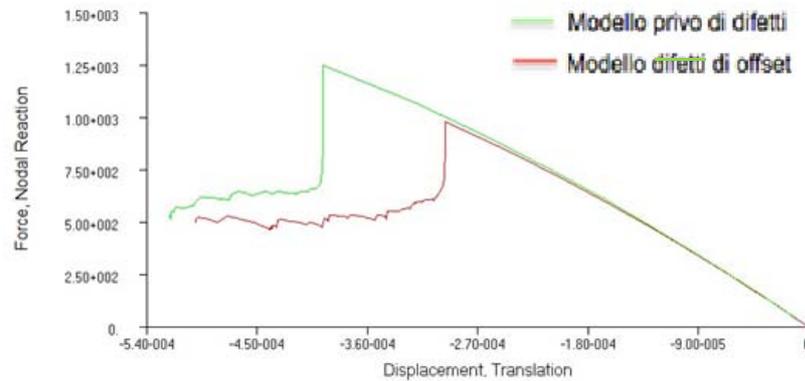
L'effetto della presenza di difetti sul campione è mostrato in **Fig. 4.36** dove si riporta l'andamento del carico in funzione dello spostamento per un provino che presenta un difetto geometrico visibile. Il risultato è che la curva di carico raggiunge un picco inferiore e presenta delle oscillazioni di elevata ampiezza dovute ai cedimenti strutturali localizzati in prossimità del difetto. Questi cedimenti hanno comportato anche dei fenomeni sonori tipici perfettamente udibili.



**Fig. 4.36:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per un test sperimentale con carico eccentrico  $e = 12.5 [mm]$  e provino difettato

Per simulare il comportamento reale della lattina è stato analizzato, con il solutore non lineare Marc®, un modello che presentasse delle imperfezioni geometriche realizzate con lo spostamento dell'offset di alcuni nodi superficiali.

Il risultato ottenuto è stato un calo del carico critico di  $\sim 20\%$ , ed il valore puntuale si è attestato a  $P_{cr} = 980 [N]$ .



**Fig. 4.37:** Andamento del carico in funzione dello spostamento per il caso con e senza difetti di offset  $e = 12.5 [mm]$

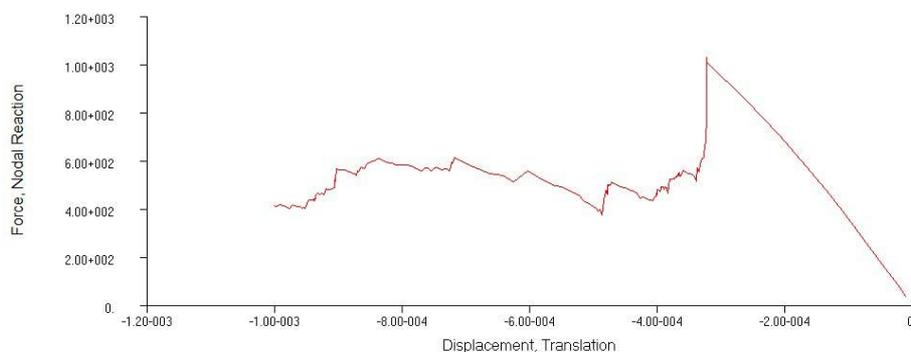
Carico eccentrico,  $e = 17.5 [mm]$



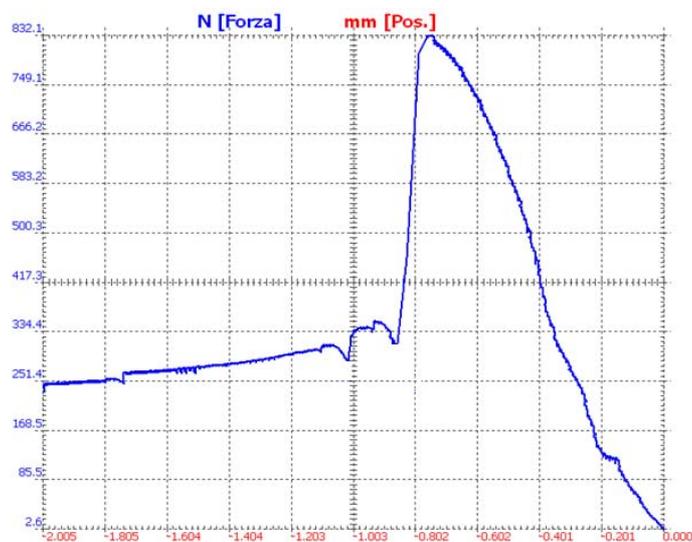
**Fig. 4.38:** Deformate risultanti dalle analisi non lineari e dai test per la condizione di carico con eccentricità  $e = 17.5 [mm]$

Come si può osservare dalle immagini riportate, l'andamento qualitativo delle deformate relativo alle analisi FEM è analogo a quello ottenuto con i test sperimentali. Il numero di onde e le zone di maggiore deformazione possono considerarsi molto simili. Le sezioni che risultano deformate sono solo quelle in corrispondenza del carico, mentre le altre risultano praticamente indeformate.

Per quanto concerne l'andamento del carico in funzione dello spostamento si sono ottenuti, rispettivamente per l'analisi non lineare ed i test, i seguenti grafici:



**Fig. 4.39:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico eccentrico,  $e = 17.5 [mm]$



**Fig. 4.40:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il test sperimentale con carico eccentrico  $e = 17.5 [mm]$

Anche per le curve riportate, si può affermare che l'andamento qualitativo del modello FEM è simile a quello ottenuto per il test sperimentale. Il primo tratto lineare delle curve rappresenta il comportamento elastico del materiale e risulta molto più pronunciato per il grafico riguardante l'analisi FEM, poiché in essa il comportamento del materiale elastico non risente di alcuna variazione nelle proprietà meccaniche. La seconda porzione della curva descrive il comportamento plastico della lega di Alluminio considerata: nel grafico ottenuto

dai test è ben visibile il cambio di pendenza rispetto al tratto precedente della curva dovuto all'insorgere di fenomeni plastici nel materiale. Alla fine del tratto plastico si presenta il punto di *snap* delle curve, indicativo del valore del carico critico di instabilità secondaria: è in questo punto che avviene il fenomeno del *buckling* e la struttura sperimenta un calo considerevole delle sue proprietà meccaniche. Le curve poi nei tratti successivi perdono di interesse fisico rispetto al fenomeno considerato.

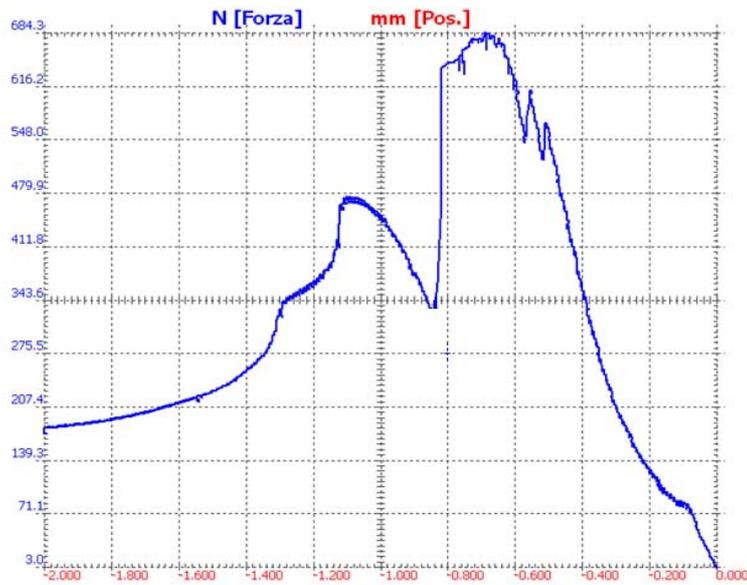
Il valore del carico critico predetto dal solutore non lineare si attesta su di un valore superiore rispetto a quello medio trovato sperimentalmente:

$$P_{cr,FEM} = 1050 [N]$$
$$\bar{P}_{cr,TEST} = 691.3 [N]$$

Rispetto al caso con eccentricità nulla e a quello con  $e = 12.5 [mm]$  si registra un valore di carico critico inferiore sia nelle simulazioni sia nei test sperimentali. Questo comportamento è in accordo con quanto presente in letteratura per le sezioni in parete sottile ed è molto simile a quanto visto per il fenomeno dell'instabilità primaria.

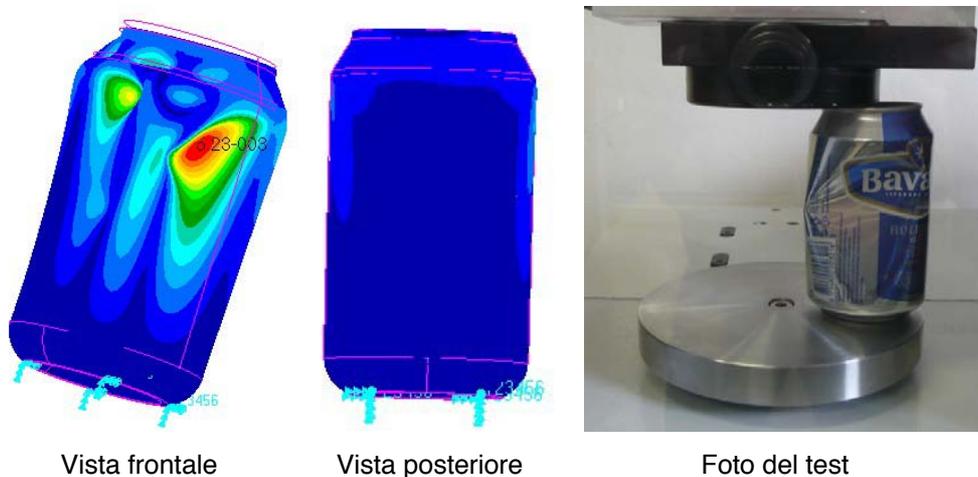
La discrepanza di valori ottenuti dalle simulazioni FEM e dalle prove sperimentali, è giustificata dal fatto che il campione analizzato con gli elementi finiti è stato modellizzato senza considerare alcuna presenza di difetti. Si sottolinea inoltre, che il valore riportato per i test è quello ottenuto da una media dei valori catalogati e non quello caratteristico di ogni singolo campione: la presenza di eventuali difetti visibili (come ad esempio dei rigonfiamenti o depressioni localizzate) e non visibili ha portato alla registrazione di valori ed andamenti anche molto diversi tra loro.

L'effetto della presenza di difetti sul campione è mostrato in **Fig. 4.41** dove si riporta l'andamento del carico in funzione dello spostamento per un provino che presenta un difetto geometrico visibile. Il risultato è che la curva di carico raggiunge un picco inferiore e presenta delle oscillazioni di elevata ampiezza dovute ai cedimenti strutturali localizzati in prossimità del difetto. Questi cedimenti hanno comportato anche dei fenomeni sonori tipici perfettamente udibili.



**Fig. 4.41:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per un test sperimentale con carico eccentrico  $e = 17.5 [mm]$  e provino difettato

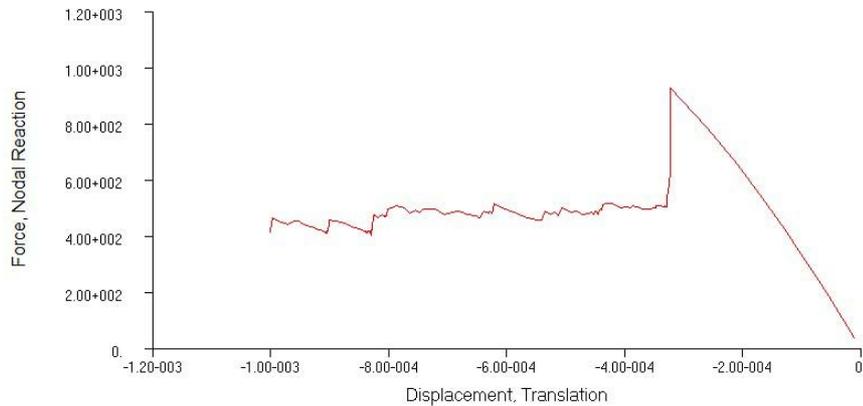
Carico eccentrico,  $e = 22.5 [mm]$



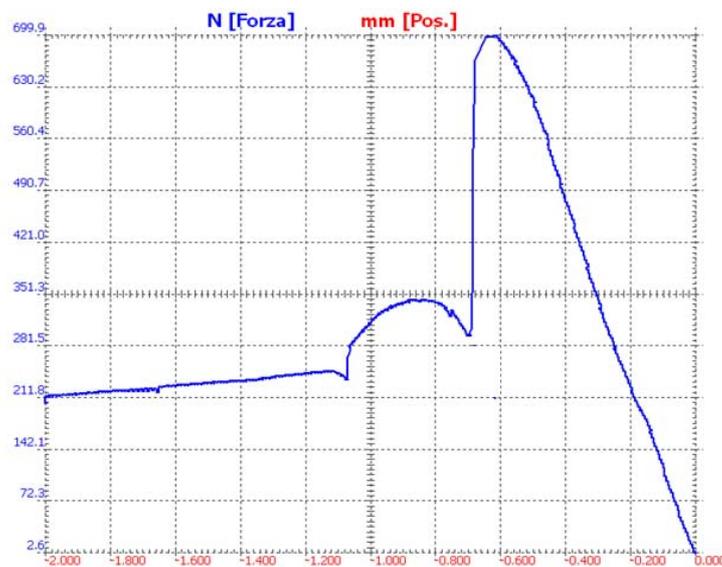
**Fig. 4.42:** Deformate risultanti dalle analisi non lineari e dai test per la condizione di carico con eccentricità  $e = 22.5 [mm]$

Come si può osservare dalle immagini riportate, l'andamento qualitativo delle deformate relative alle analisi FEM è analogo a quello ottenuto con i test sperimentali. Il numero di onde e le zone di maggiore deformazione possono considerarsi molto simili. Le sezioni che risultano deformate sono solo quelle in corrispondenza del carico, mentre le altre risultano indeformate. Per quanto

concerne l'andamento del carico in funzione dello spostamento si sono ottenuti, rispettivamente per l'analisi non lineare ed i test, i seguenti grafici:



**Fig. 4.43:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il modello ad elementi finiti con carico eccentrico,  $e = 22.5$  [mm]



**Fig. 4.44:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per il test sperimentale con carico eccentrico  $e = 22.5$  [mm]

Anche per le curve riportate, si può affermare che l'andamento qualitativo del modello FEM è simile a quello ottenuto per il test sperimentale. Il primo tratto lineare delle curve rappresenta il comportamento elastico del materiale e risulta molto più pronunciato per il grafico riguardante l'analisi FEM, poiché in essa il comportamento del materiale elastico non risente di alcuna variazione nelle proprietà meccaniche. La seconda porzione della curva descrive il

comportamento plastico della lega di Alluminio considerata: nel grafico ottenuto dai test è ben visibile il cambio di pendenza rispetto al tratto precedente della curva dovuto all'insorgere di fenomeni plastici nel materiale. Alla fine del tratto plastico si presenta il punto di *snap* delle curve, indicativo del valore del carico critico di instabilità secondaria: è in questo punto che avviene il fenomeno del *buckling* e la struttura sperimenta un calo considerevole delle sue proprietà meccaniche. Le curve poi nei tratti successivi perdono di interesse fisico rispetto al fenomeno considerato.

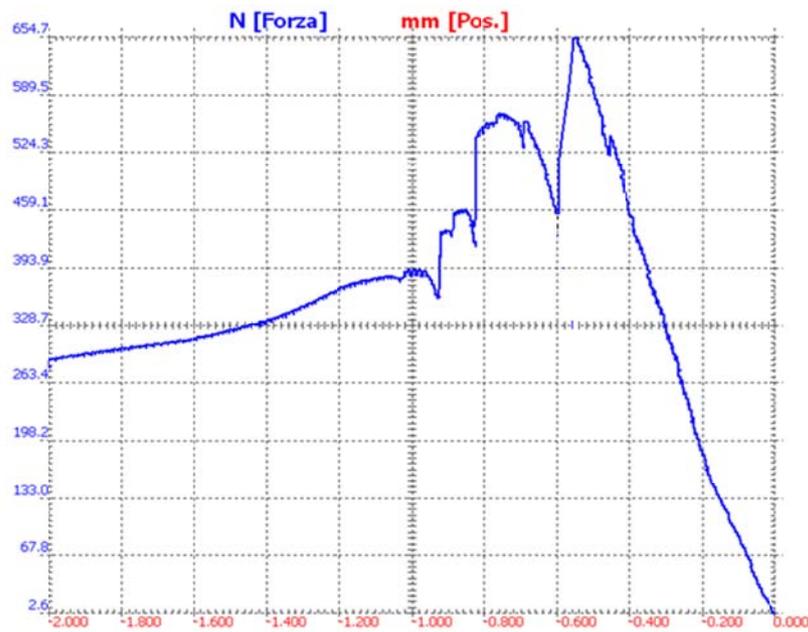
Il valore del carico critico predetto dal solutore non lineare si attesta su di un valore superiore rispetto a quello medio trovato sperimentalmente:

$$\begin{aligned}P_{cr,FEM} &= 900 [N] \\ \bar{P}_{cr,TEST} &= 662.6 [N]\end{aligned}$$

Rispetto ai casi precedenti, l'aumento di eccentricità comporta un valore di carico critico inferiore sia nelle simulazioni sia nei test sperimentali. Questo comportamento è in accordo con quanto presente in letteratura per le sezioni in parete sottile ed è molto simile a quanto visto per il fenomeno dell'instabilità primaria.

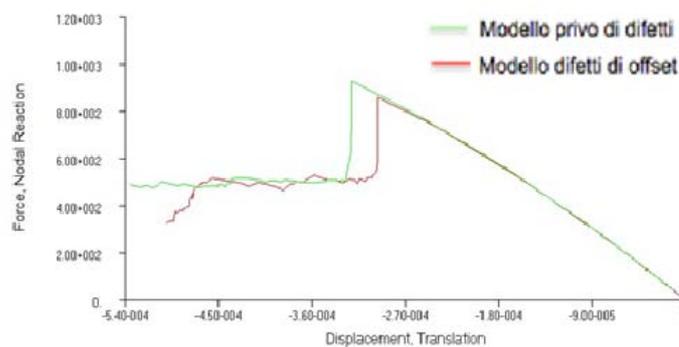
La discrepanza di valori ottenuti dalle simulazioni FEM e dalle prove sperimentali, è giustificata dal fatto che il campione analizzato con gli elementi finiti è stato modellizzato senza considerare alcuna presenza di difetti. Si sottolinea inoltre, che il valore riportato per i test è quello ottenuto da una media dei valori catalogati e non quello caratteristico di ogni singolo campione: la presenza di eventuali difetti visibili (come ad esempio dei rigonfiamenti o depressioni localizzate) e non visibili ha portato alla registrazione di valori ed andamenti anche molto diversi tra loro.

L'effetto della presenza di difetti sul campione è mostrato in **Fig. 4.45** dove si riporta l'andamento del carico in funzione dello spostamento per un provino che presenta un difetto geometrico visibile. Il risultato è che la curva di carico raggiunge un picco inferiore e presenta delle oscillazioni di elevata ampiezza dovute ai cedimenti strutturali localizzati in prossimità del difetto. Questi cedimenti hanno comportato anche dei fenomeni sonori tipici perfettamente udibili.



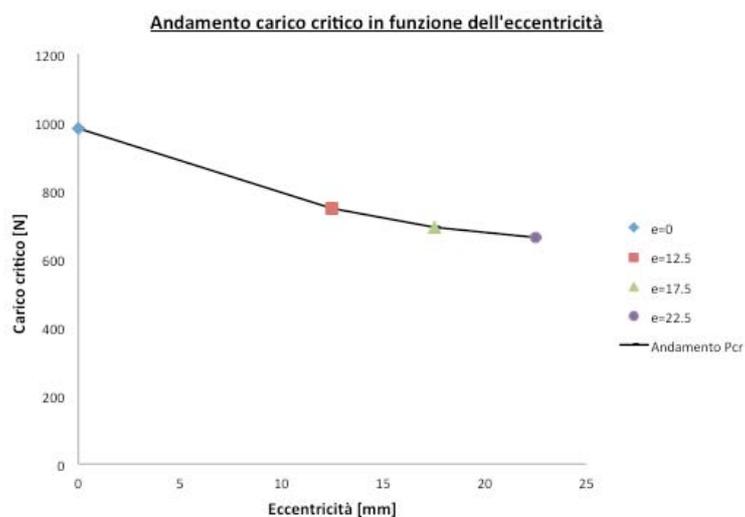
**Fig. 4.45:** Andamento del carico critico in funzione dello spostamento per un test sperimentale con carico eccentrico  $e = 22.5 [mm]$  e provino difettato

Per simulare il comportamento reale della lattina è stato analizzato, con il solutore non lineare Marc®, un modello che presentasse delle imperfezioni geometriche realizzate con lo spostamento dell'offset di alcuni nodi superficiali. Il risultato ottenuto è stato un calo del carico critico di  $\sim 10\%$ , ed il valore puntuale si è attestato a  $P_{cr} = 815 [N]$ .



**Fig. 4.46:** Andamento del carico in funzione dello spostamento per il caso con e senza difetti di offset  $e = 22.5 [mm]$

Si riportano infine un grafico con il valore medio per ogni configurazione di test in funzione di quello dell'eccentricità corrispondente ed una tabella con i dati corrispondenti. Ancora una volta è possibile osservare come il carico critico di instabilità secondaria cala all'aumentare del valore di eccentricità.



**Fig. 4.47:** Andamento del valore medio del carico critico per ogni configurazione di test considerata rispetto al valore di eccentricità corrispondente

	$e = 0$	$e = 12.5 [mm]$	$e = 17.5 [mm]$	$e = 22.5 [mm]$
$P_{cr} [N]$	980.7	747.5	691.3	662.5

**Tab. 11:** Valore medio dei dati sperimentali ottenuti per le diverse configurazioni di carico eccentrico

## Conclusioni

In questa ricerca sperimentale è stato analizzato il fenomeno del *buckling*, focalizzando l'attenzione sul comportamento lineare e non lineare di strutture snelle in parete sottile sottoposte a diverse configurazioni di carico eccentrico.

La trattazione è stata suddivisa in due macro aree che sono state studiate sia dal punto di vista numerico, con software apposito, sia dal punto di vista sperimentale, con l'intento finale di confrontare i risultati ottenuti.

Il comportamento ad instabilità primaria della trave considerata, ha evidenziato molteplici punti di contatto con la teoria sviluppata.

Le analisi FEM hanno sottolineato l'effettiva riduzione del valore di carico critico in modo inversamente proporzionale all'eccentricità del carico applicato.

Per quanto concerne gli spostamenti ricavati dal modello, si assiste ugualmente ad un aumento degli stessi in corrispondenza della mezzeria.

I grafici riportati sia per gli spostamenti che per il carico applicato, hanno permesso quindi, di riscontrare un andamento simile a quello presente in letteratura e le analisi preliminari compiute sui modelli numerici risultano incoraggianti per le eventuali prove sperimentali future sul macchinario progettato.

La disamina effettuata sui campioni scelti per il fenomeno dell'instabilità secondaria riguardante elementi strutturali in parete sottile, ha messo in rilievo un comportamento analogo a quello riscontrato per il *buckling* primario; anche in questo caso si assiste ad una riduzione del valore del carico critico in funzione dell'aumento di eccentricità.

Il fenomeno risulta tuttavia molto più complesso perché legato ad eventi locali fortemente influenzabili da molteplici parametri, tra i quali quello dimostratosi essere il più influente, è stato la presenza di eventuali difetti nel campione.

I test sperimentali sulle lattine in Alluminio hanno evidenziato che il loro comportamento a compressione, è condizionato appunto, dalla presenza di difetti superficiali e/o variazione nel modulo elastico del materiale.

I dati raccolti dimostrano che, a seconda dell'entità dell'imperfezione, si assiste ad una riduzione più o meno importante delle caratteristiche meccaniche del campione. Un'indagine statistica ha messo in luce la scarsa ripetibilità delle prove poiché, nonostante le condizioni risultino nominalmente invariate, le stesse, presentano esiti anche molto diversi tra loro. Questo dato è significativo per comprovare la presenza di difetti non visibili sulle lattine i quali sono da ricondurre alla tecnologia produttiva, ad eventuali cicli di stress subiti durante il trasporto e a caratteristiche meccaniche non uniformi del materiale impiegato.

I risultati ottenuti con i modelli FEM della lattina si sono dimostrati congrui con quelli ricavati dalle prove in compressione mono-assiale: le simulazioni presentano analoghe forme per quanto concerne le deformate di *post-buckling* e permettono di raggiungere delle buone approssimazioni per i valori di carico critico (sempre sovrastimato rispetto al valore reale).

La rielaborazione dei difetti attraverso degli *offset* localizzati in alcuni nodi della struttura e di proprietà meccaniche diverse in termini di spessore e modulo elastico, ha permesso di acquisire dei dati accettabili: come nel caso reale la presenza di un difetto determina un diverso andamento del carico sopportabile dalla struttura e quindi una diversa deformata successiva al fenomeno di instabilità.

Le simulazioni ad elementi finiti trattate nel caso del provino alettato hanno evidenziato un diverso comportamento dello stesso in base alla diversa configurazione di carico considerata. I dati ottenuti sono da considerarsi solo indicativi del comportamento reale che deve essere studiato in modo più approfondito con delle prove sperimentali sui campioni così concepiti.

Per le suddette considerazioni, questo elaborato ha delineato gli aspetti metodologici di analisi sperimentale sul fenomeno del *buckling* ed i risultati ottenuti sono da considerarsi come interessanti punti di riflessione per ricerche future.

Gli aspetti che potranno essere approfonditi riguardano principalmente la validazione dei dati ottenuti dalle simulazioni numeriche con delle prove sperimentali dei *setup* progettati.

Le lattine, per i risultati forniti, non sembrano essere quindi dei provini ripetibili e adatti a test di compressione; tuttavia si prospetta la possibilità di effettuare un maggior numero di test, così da poter definire un comportamento indicativo più preciso delle loro caratteristiche di instabilità.

Un ulteriore aspetto che potrebbe essere spunto di ricerca riguarda la modellazione di altre tipologie di difetti superficiali e/o una più accurata modellazione degli stessi.



## BIBLIOGRAFIA

### **Libri di testo:**

1. S. Timoshenko e S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, II edition, 1959
2. Hugh Lenneous Cox, *The buckling of plates and shells*, Pergamon Press, Vol. 4 of International series of monographs in aeronautics and astronautics, 1963
3. Stephen P. Timoshenko, James M. Gere, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, *Engineering societies monographs*, 1963
4. Arend Hendrik J. Hagedoorn, *An elastic finite element analysis of the buckling of eccentrically stiffened plates and shells*, Cornell University, August 1973
5. Don O. Brush e Bo O. Almroth, *Buckling of bars, plates and shells*, 1975
6. J. M. T. Thompson e G. W. Hunt, *Collapse: The buckling of structures in theory and practice*, Cambridge University Press, 1983
7. Julie Mark Cohen, *Local buckling behaviour of plate elements*, Cornell University, August 1987
8. J. F. Jullien, *Buckling of shell structures, on land, in the sea and in the air*, Elsevier applied science CRC Press, I edition, 1990
9. N. S. Trahair, *Flexural torsional buckling of structures*, CRC Press, 1993
10. S. J. Britvec, *Stability and optimization of flexible space structures*, Birkhäuser, 1995
11. R. C. Coates e M. G. Coutie e F. K. Kong, *Structural Analysis*, Chapman & Hall, III edition, 1997
12. J. Singer e J. Arbocz e T. Weller, *Buckling experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures: Basic concepts, columns, beams and plates – Vol. 1*, John Wiley & Sons INC., 1998
13. Frederick Bloom e Douglas Coffin, *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*, Chapman & Hall/CRC, 2001

14. J. Singer e J. Arbocz e T. Weller, *Buckling experiments: Experimental methods in buckling of thin-walled structures: Shells, built-up structures, composites and additional topics – Vol. 2*, John Wiley & Sons INC., 2002
15. J. Randolph Kissell e Robert L. Ferry, *Aluminium Structures: a guide to their specifications and design*, John Wiley & Sons, II edition, 2002
16. Thomas P. Sarafin e Wiley J. Larson, *Spacecraft Structures and Mechanism – From concept to Launch*, Microcosm INC. e Kluwer Academic Publishers, IV edition, 2003
17. George J. Simitses e Dewey H. Hodges, *Fundamentals of structural stability*, Butterworth-Heinemann, I edition, 2005
18. Robert M. Jones, *Buckling of bars, plates and shells*, Bull Ridge Publishing, 2006
19. J. M. Rotter e J.G. Teng, *Buckling of thin metal shells*, Spon, 2007
20. Lars A. Samuelson e S. F. Eggwertz, *Shell stability handbook*, Taylor & Francis CRC, 2007
21. Michael F. Ashby, *La scelta dei materiali nella progettazione industriale*, Casa editrice Ambrosiana, 2007
22. Bjorn Akesson, *Plate buckling in bridges and other structures*, Taylor & Francis, 2007
23. J. N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC Press, 2007
24. B. G. Falzon e M. H. Aliabadi, *Buckling and postbuckling structures: experimental, analytical and numerical studies*, Imperial College press, 2008
25. C. M. Wang e C. Y. Wang e J. N. Reddy, *Exact solution for buckling of structural members*, CRC Press, 2009
26. N. S. Trahair, *Steel cantilever strength by inelastic lateral buckling*, Research report R912, ISSN 1853-2781, University of Sidney, March 2010
27. Tomasz Kubiak, *Static and dynamic buckling of thin-walled plate structures*, Springer-Verlag, VI edition, 2013
28. T. H. G. Megson, *Aircraft structures for engineering students*, Elsevier Aerospace Engineering series, V edition, 2013

29. Natalia I. Obodan e Olexandr G. Lebedeyev e Vasilii A. Gromov,  
*Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells*, Springer, 2013

**Articoli scientifici:**

30. James. P. Peterson, "Buckling of stiffened cylinders in axial compression and bending - a review of test data", in *NASA TN D-5561*, December 1969, pp. 28
31. R. T. Sullins e G. W. Smith e E. E. Spier, "Manual for structural stability analysis of sandwich plates and shells", in *NASA CR-1457*, December 1969, pp. 385
32. M. Ohga e T. Hara e K. Kawaguchi, "Buckling mode shapes of thin-walled members", in *ScienceDirect Elsevier*, 2nd July 1993, pp. 7
33. A. Teter e Z. Kolakowski, "Interactive buckling of thin-walled open elastic beam-columns with intermediate stiffeners", in *ScienceDirect Elsevier*, 23th February 1995, pp. 16
34. M. K. Chryssanthopoulos e V. Giavotto e C. Poggi, "Characterization of manufacturing effects for buckling-sensitive composite cylinders", in *Butterworth Heinemann, Composite Manufacturing Vol. 6 no. 2*, 1995, pp. 14
35. J. G. Teng, "Buckling of thin shells: Recent advances and trends", in *Appl. Mech. Rev. Vol. 49, no. 4*, April 1996, pp. 12
36. A. Teter e Z. Kolakowski, "Interactive buckling and load carrying capacity of thin-walled beam-columns with intermediate stiffeners", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 2003, pp. 44
37. K. Magnucki e W. Szyk e P. Stasiewicz, "Stress state and elastic buckling of a thin-walled beam with monosymmetrical open cross-section", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 4th July 2003
38. "Dinamica flessio-torsionale di una trave in parete sottile: indagine numerica", GIMC '04, XV Congresso Italiano di Meccanica Computazionale AIMETA Associazione Italiana di Meccanica Teorica e Applicata, L'Aquila 2004, pp. 54

- 
39. Q. Q. Liang e B. Uy e J. Y. Richard Liew, "Nonlinear analysis of concrete-filled thin-walled steel box columns with local buckling effects", in *ScienceDirect Elsevier*, 28th September 2005, pp. 11
  40. G.J. Hancock e K.J.R. Rasmussen, "Recent research on thin-walled beam-columns", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 2006, pp. 16
  41. S. P. Machado, "Non-linear buckling and postbuckling behavior of thin-walled beams considering shear deformation", in *ScienceDirect Elsevier, International Journal of Nonlinear Mechanics*, 21st December 2007, pp. 21
  42. A. Teter, "Static and dynamic interactive buckling of isotropic thin-walled closed columns with variable thickness", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 29th September 2007, pp. 5
  43. R.E. Erkmén e Magdi Mohareb, "Buckling analysis of thin-walled open members - A finite element formulation", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 12nd February 2008, pp. 19
  44. F. Mohri e A. Eddinari e N. Damil e M. Potier Ferry, "A beam finite element for non-linear analyses of thin-walled elements", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 18th March 2008, pp. 10
  45. Noël Challamel e Chien Ming Wang, "Exact lateral-torsional buckling solutions for cantilevered beams subjected to intermediate and end transverse point loads", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 16th September 2009, pp. 6
  46. H.C. Bui, "Buckling analysis of thin-walled sections under general loading conditions", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 4th February 2009, pp. 10
  47. D.G. Stamatelos e G.N. Labeas e K.I. Tserpes, "Analytical calculation of local buckling and post-buckling behavior of isotropic and orthotropic stiffened panels", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 3rd December 2010, pp. 9
  48. E. Magnucka-Blandzi e K. Magnucki, "Buckling and optimal design of cold-formed thin-walled beams: Review of selected problems", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 28th October 2010, pp. 8

49. M. Casafont e F. Marimon e M. Pastor e M. Ferrer, "Linear buckling analysis of thin-walled members combining the Generalised Beam Theory and the Finite Element Method", in *ScienceDirect Elsevier, Computer & Structures*, 14th June 2011, pp. 19
50. Zhiping Tang e Dan Li, "Quasi-static axial buckling behavior of NiTi thin-walled cylindrical shells", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 4th November 2011, pp. 9
51. Yong Huang e Qi-Zhi Luo, "A simple method to determine the critical buckling loads for axially inhomogeneous beams with elastic restraint", in *ScienceDirect Elsevier, Computers and Mathematics with Applications*, 24th February 2011, pp. 8
52. Sándor Ádány, "Global buckling of thin-walled simply supported columns: Analytical solutions based on shell model", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 30th March 2012, pp. 12
53. Sándor Ádány e Dávid Visy, "Global buckling of thin-walled simply supported columns: Numerical studies", in *ScienceDirect Elsevier, Thin-Walled Structures*, 6th March 2012, pp. 12
54. Shi-Rong Li e Romesh C. Batra, "Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams", in *ScienceDirect Elsevier, Composite Structures*, 10th August 2012, pp. 5
55. Chasiotis I., "Buckling of Beams: Structural Instability", in *Structures and Controls Lab.- AE 461*
56. Michael Konečný (with the supervision of Ing. J. Vrbka), "Comparison of analytical and numerical fem solutions for buckling of laminated composite cylindrical shells", in *Master thesis, Brno University of technology, Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Solid Mechanics, Mechatronics and Biomechanics*, 2013
57. Bottos Luca, "Fenomeni di instabilità in elementi strutturali in parete sottile", in *Master thesis, Padua University, Faculty of Aerospace Engineering*, 2013

**Appunti del corso:**

58. D. Zulli, "Instabilità dinamica di una trave in parete sottile inizialmente curva", in *Appunti del corso*, Università della Sapienza, Roma 3rd December 2004, pp.15
59. D. Zaccaria, "Fondamenti di stabilità delle strutture elastiche", in *Appunti del corso*, Università di Trieste, 31st May 2005, pp.50
60. U. Galvanetto e M. Zaccariotto, "Costruzioni e strutture aerospaziali 1 e 2", in *Appunti del corso*, Università di Padova, 2012
61. Elio Sacco, "Lezioni di Scienza delle Costruzioni", in *Appunti del corso*, Università di Cassino e del Lazio meridionale