

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Psicologia Generale

Dipartimento di Filosofia, Sociologia, Pedagogia e Psicologia Applicata

Corso di laurea in scienze psicologiche cognitive e psicobiologiche

Tesi di laurea

Costruzione e validazione di uno spazio di apprendimento  
nel gioco del Go

Building and validation of a learning space for the game of Go

*Relatore*

Prof. Luca Stefanutti

*Correlatore*

Dott. Andrea Brancaccio

*Laureando*

Niccolò Sgaravatti

Matricola: 1223440

Anno Accademico 2021/2022

## Indice

1 - Prefazione	<b>1</b>
2 - Il gioco del Go	<b>3</b>
3 - La teoria degli spazi di conoscenza	<b>5</b>
4 - Dallo spazio problema allo spazio di apprendimento	<b>8</b>
5 - Costruzione dello spazio di apprendimento di un problema di vita e di morte	<b>11</b>
6 - Metodi di raccolta dati	<b>16</b>
7 - Risultati	<b>17</b>
8 - Discussioni	<b>22</b>
Appendice A: Il concetto di vita incondizionata nel gioco del Go	<b>24</b>
Appendice B: problemi in $Q_{int}$	<b>26</b>
Riferimenti	<b>28</b>
Ringraziamenti	<b>32</b>

## 1 – Prefazione

La teoria degli spazi di conoscenza (KST) è una teoria di psicologia matematica che nasce all'inizio degli anni '80 come modo di costruire un sistema automatico per la valutazione della conoscenza (Doignon & Falmagne, 1985, 1999; Falmagne & Doignon, 2011). In questa cornice, la valutazione non è intesa come la restituzione di un valore numerico come nei test attitudinali americani quali il SAT (<https://collegereadiness.collegeboard.org/sat>), ma si basa sull'individuazione di insiemi discreti di unità di conoscenza, e sulla restituzione dello stato di conoscenza: il sottoinsieme di unità delle quali si attribuisce la conoscenza al soggetto. (Falmagne, Cosyn, Doignon, Thiéry, 2006).

Nei test attitudinali ci sono vincoli di validità rispetto alle domande che possono costituire il test: ogni elemento dei test attitudinali deve contribuire alla restituzione di un esito numerico della valutazione e deve quindi rispettare un criterio di omogeneità. Se una particolare domanda non correla con il risultato complessivo del test può essere ritenuta non valida ed esclusa nonostante essa possa andare a sondare conoscenze fondamentali della materia.

Negli strumenti di valutazione costruiti con le metodologie della teoria degli spazi di conoscenza questo non avviene perché ogni parte importante della materia può costituire un'unità di conoscenza; l'aderenza tra le domande e i contenuti rende possibile che l'assessment stesso possa essere un'esperienza di apprendimento (Falmagne & Doignon, 2011).

C'è un rapporto molto stretto tra la valutazione della conoscenza e l'insegnamento, sapere esattamente che cosa un soggetto conosce è utile per orientare l'insegnamento di nuovi argomenti. Strumenti di valutazione basati sulla KST sono stati impiegati da Falmagne e Doignon come componenti di sistemi di apprendimento adattivo ALEKS (<https://www.aleks.com>), le applicazioni pratiche finalizzate all'insegnamento hanno motivato lo studio di particolari strutture note come *spazi di apprendimento* (*learning spaces*) che incorporano principi di pedagogia.

Come osservato da Heller, J., Ünlü, A., & Albert, D. (2013), i primi sviluppi della KST partivano da un paradigma di valutazione della conoscenza comportamentale, dato un dominio di

conoscenza osservavano il comportamento risolutivo dei singoli problemi formulati nel dominio. Successivi sviluppi, noti come *competence-based KST* (CbKST), hanno prediletto un approccio psicometrico per cui il comportamento risolutivo è messo in relazione con variabili cognitive latenti. Nel lavoro di Doignon (1994), ad esempio, è introdotta la nozione di Mappa delle abilità (o *Skill map*), che associa ad ogni problema l'insieme delle abilità e delle competenze rilevanti per risolverlo.

Lo sviluppo procedurale noto come *procedural KST* o PKST nasce dal lavoro di Stefanutti e Albert (2003) con l'idea di ricavare deterministicamente l'insieme delle abilità di un soggetto dal suo comportamento in un contesto di apprendimento simulato, concepito come uno spazio problema, o *problem space*, con riferimento al concetto introdotto da Newell e Simon (1972).

L'approccio è maturato con la generalizzazione di Stefanutti (2019) che ha dimostrato come sia possibile derivare deterministicamente un *learning space* dalla struttura di un *problem space*. Uno sviluppo recente è il modello probabilistico MSPM proposto da Stefanutti, De Chiusole, Brancaccio (2021) per la validazione degli *spazi di apprendimento* derivati deterministicamente tramite la PKST.

Il gioco del Go è un ambito nel quale è possibile applicare la PKST e ottenere degli *spazi di apprendimento*. Oggetto del presente lavoro è la costruzione, tramite la PKST, di un *learning space* per il gioco del Go e la validazione dello spazio attraverso il modello probabilistico *basic local independence model* (BLIM, Falmagne & Doignon, 1988a, 1988b), provando così la PKST in un contesto reale.

Il lavoro è così organizzato: il capitolo 2 presenta le caratteristiche del gioco del Go e come questo sia stato usato per studiare lo sviluppo dell'*expertise*, il capitolo 3 spiega i concetti di base della KST, il capitolo 4 spiega come si deriva uno spazio di apprendimento da uno spazio problema, l'applicazione al gioco del go è presentata nel capitolo 5, metodi di raccolta dati sono presentati nel capitolo 6, i risultati sono presentati nel capitolo 7 e discussi nel capitolo 8.

## 2 - Il gioco del Go

Le prime fonti storiche che fanno riferimento al gioco del Go sono tre opere confuciane databili tra il IV e il III secolo A.C: lo Zuo Zhuan, il libro IV del Mencio e il libro XVII dei dialoghi di Confucio (Shotwell, 2008 p.6). I primi riferimenti confuciani criticano il gioco del Go e i suoi giocatori, il Mencio ad esempio cataloga il comportamento delle persone che indulgiano nel Go tra i comportamenti non filiali.

Secondo Zanon (1996), questa percezione di amoralità cambia sotto l'influenza neoconfuciana durante la dinastia Song, in particolare, il classico di Weiqi (Go) in tredici capitoli (Qijing Shisanpian, circa 1050 d.C) abilita l'interpretazione del gioco alla luce delle teorie taoiste e di Sun Tsu.

Da allora, fino ai giorni nostri, la pratica del gioco è stata considerata una via di accrescimento morale ed intellettuale e vista come un'arte elitaria.

Per la loro semplicità, le regole essenziali del gioco sono rimaste immutate nei secoli.

Il go nella sua forma attuale si gioca dal XV secolo (Shotwell, 2003) su un tavoliere (*goban*) sopra il quale è disegnata una griglia del formato standard, ovvero di  $19 \times 19$  linee (altri formati sono possibili) nella quale due giocatori, a turno, dispongono, uno i pezzi (le pietre) bianchi, l'altro le pietre nere. Iniziando dalla griglia vuota, i giocatori competono per disporre le pietre in modo tale da massimizzare il numero di pietre del proprio colore e lo spazio che queste delimitano, ovvero, lo spazio vuoto esclusivamente raggiungibile dalle proprie pietre.

Le pietre dello stesso colore connesse ortogonalmente tra loro formano un gruppo, le pietre in un gruppo condividono gli spazi vuoti ortogonalmente adiacenti, le *libertà*.

Anche una pietra singola si può considerare un gruppo.

Alla fine di ogni turno, gruppi che non hanno *libertà* vengono rimossi dal tavolo perché "catturati" dalle pietre avversarie.

Per una descrizione formale delle regole del Go si veda Benson (1976).

Dalle regole semplici del Go emergono forme complesse, per questo lo si cita come esempio di epifenomeno (ad esempio Hofstadter, 1979, p.308) e di comportamento emergente (Gobet 2004, p,6). Ad esempio, il concetto di vita di un gruppo di pietre sulla

tavola da gioco, citato da Hofstadter (1979), è una qualità che emerge dalle relazioni tra i gruppi di pietre, il concetto è trattato formalmente da Benson (1976).

Tra gli aspetti computazionali del gioco, il lavoro di Tromp e Farnebäck (2016, p.21) recentemente ha quantificato il numero di posizione legali nel gioco in  $\sim 2,082 \times 10^{170}$ , l'elaborazione del risultato ha richiesto 250.000 ore di CPU e 30 PB di trasferimento dati (Tromp e Farnebäck, 2016, p.21). Walraet e Tromp (2016) hanno dimostrato l'esistenza di  $10^{10^{100}}$  partite possibili, mentre in Tromp e Farnebäck 2016 si dimostra anche che il numero di partite possibili è inferiore a  $10^{10^{171}}$ .

Essendo un gioco ad informazione perfetta, in teoria esiste nel Go una funzione di valore ottimale che determina il risultato della partita, a partire da ogni stato possibile, se entrambi i giocatori giocano perfettamente. Per via del numero di stati legali nel gioco  $19 \times 19$ , di una profondità dell'albero di circa 200 mosse, di un fattore di ramificazione di circa 200, computare una soluzione ricorsiva del gioco  $19 \times 19$  non è fattibile (Allis, 1994). Van Der Werf (2003) ha computato la soluzione del Go  $5 \times 5$  usando Mini Go Solver, mentre nel 2009 ha pubblicato i risultati della computazione ricorsiva del Go  $5 \times 6$  e di altri piccoli formati rettangolari aventi fino a 30 intersezioni. Ad oggi (2021) una soluzione ricorsiva del Go  $6 \times 6$  non è stata computata.

Burmeister (2000), riporta come il gioco per le sue caratteristiche sia un utile dominio di ricerca in psicologia cognitiva e faciliti l'indagine in aree come la memoria, l'apprendimento implicito, l'apprendimento percettivo, il problem solving e l'attenzione. Masunaga e John Horn (2000, p.8), ad esempio, usano un campione di 263 giocatori di Go a 48 livelli di *expertise*, da novizio a professionista, per indagare il rapporto tra le abilità cognitive legate specificamente ad dominio di *expertise* e i costrutti della teoria Cattell-Horn-Carroll (CHC, si veda anche Kaufman 2009).

Lo sviluppo dell'*expertise* nel gioco del Go è un percorso arduo, gli autori (p.8) riportano che occorrono almeno 10 anni di studio strutturato per raggiungere una piena maturazione. Tale maturazione sembra legata allo sviluppo di una memoria di lavoro dominio-specifica ad ampio span ed indipendente dalla Short Term Working Memory della CHC, denominata Expertise Working Memory, e allo sviluppo di abilità di ragionamento deduttivo dominio specifica, denominata Expertise Deductive Reasoning, anch'essa indipendente dalle abilità di ragionamento deduttivo che caratterizzano il

costrutto di intelligenza fluida (Gf) della CHC. Ad alti livelli di *expertise*, queste abilità resistono al declino legato all'invecchiamento, inoltre, se perseguite possono essere potenziate anche durante l'età adulta (Masunaga e Horn, 2000 p.30).

Le differenze nelle abilità percettive e mnemoniche nei giocatori di Go esperti rispetto ai non esperti sono state studiate anche da Judith Reitman (1976), che ha osservato un funzionamento del chunking nel Go differente da come teorizzato da Chase e Simon (1973) in seguito alle loro osservazioni sui maestri di scacchi, gli esperti di Go sembrano sviluppare la percezione di chunk non organizzati gerarchicamente, ma sovrapposti tra loro. Le differenze di abilità percettive e visuospatiali tra giocatori di go esperti e non esperti sono state indagate ulteriormente in uno studio recente da Wojtasinski e Francuz (2018), che hanno mostrato una correlazione tra l'*expertise* nel gioco del Go e i punteggi sia nei test APIS-Z di abilità visuospatiali, che nel test delle matrici progressive di Raven come indicatore delle abilità percettive nel riconoscimento di schemi.

### 3 - La teoria degli spazi di conoscenza

Si consideri un dominio di conoscenza nel contesto del quale possono essere formulati un insieme di problemi  $Q$ . Lo *stato di conoscenza* di un individuo rispetto al dominio di conoscenza è il sottoinsieme  $K$  di tutti i problemi che è in grado di risolvere tra tutti quelli che possono essere formulati nel dominio di conoscenza  $Q$ .

L'insieme degli *stati di conoscenza* che si possono trovare in una certa popolazione è la *struttura di conoscenza*. Formalmente, la struttura di conoscenza è una coppia  $(Q, \mathcal{K})$ , dove  $Q$  è un insieme non vuoto,  $\mathcal{K}$  è un sottoinsieme di  $2^Q$  contenente almeno  $Q$ , lo stato di conoscenza dell'individuo che conosce tutto il dominio di conoscenza, e l'insieme vuoto  $\emptyset$ , lo stato di conoscenza dell'individuo che non sa risolvere alcun problema. Ci si può riferire alla struttura di conoscenza con  $\mathcal{K}$ , poiché  $Q$  si può ottenere dall'unione dei sottoinsiemi di  $\mathcal{K}$ . La struttura di conoscenza  $\mathcal{K}$  è *chiusa all'unione* se per ogni sottoinsieme  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ , l'unione degli elementi di  $\mathcal{F}$  è un elemento di  $\mathcal{K}$ .

Una struttura di conoscenza  $\mathcal{K}$  chiusa all'unione è uno *spazio di conoscenza*.

La chiusura all'unione è una proprietà importante, perché permette di individuare un sottoinsieme degli stati di conoscenza la cui unione può generare ogni stato di conoscenza.

L'estensione (Falmagne & Doignon, 2011, Definizione 3.4.1) di una famiglia di insiemi  $\mathcal{G}$  è la famiglia  $\mathcal{G}'$  contenente ogni insieme dato dall'unione delle sottofamiglie di  $\mathcal{G}$ .

La base di uno spazio di conoscenza  $\mathcal{K}$  è la sottofamiglia  $\mathcal{B}$ , minima rispetto all'inclusione, la cui estensione è  $\mathcal{K}$ . Dato  $\mathcal{B}$  la cui estensione è  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{B}$  è minimo rispetto all'inclusione, se per ciascuna  $\mathcal{H}$  la cui estensione è  $\mathcal{K}$ , e  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ , ne consegue che  $\mathcal{H} = \mathcal{B}$ .

La base fornisce una rappresentazione minima dello spazio di conoscenza.

Uno spazio di conoscenza si può strutturare a partire da un sistema di ipotesi, ovvero una funzione  $\sigma : Q \rightarrow 2^{(2^Q)}$  che associa ad ogni problema  $q \in Q$  una famiglia non vuota di sottoinsiemi di  $Q$  che è la raccolta dei suoi atomi. Ogni atomo  $a_q$  è uno stato di conoscenza minimale rispetto all'inclusione contenente  $q$ , rappresentando un modo nel quale può fondarsi l'apprendimento di  $q$  nello spazio di conoscenza.

La base di uno spazio di conoscenza è l'insieme di tutti i suoi atomi (Falmagne & Doignon, 2011, Teorema 3.4.8).

Uno spazio di conoscenza  $(Q, \mathcal{K})$ , è un *antimatroide* se, per ogni stato di conoscenza  $K$ , esiste un problema  $q \in K$  per il quale  $K \setminus \{q\} \in \mathcal{K}$ .

Gli spazi di conoscenza che abbiano questa proprietà sono detti *spazi di apprendimento*, e sono caratterizzati da due proprietà pedagogiche:

1. Un discente che si trovi in uno stato di conoscenza  $K$ , a sua volta incluso in un altro stato  $L$ , può raggiungere lo stato  $L$  imparando un problema alla volta.
2. Se uno stato di conoscenza  $K$  è incluso in un altro stato  $L$ , ed esiste uno stato  $K \cup \{q\} \in \mathcal{K}$  con  $q \notin L$ , esiste anche  $L \cup \{q\} \in \mathcal{K}$ : per il discente, essere in uno stato di conoscenza  $L$  superiore a  $K$ , non impedisce mai di apprendere i problemi che si potevano apprendere da  $K$ .

La proiezione di uno spazio di apprendimento  $(Q, \mathcal{K})$  su un sottoinsieme proprio non vuoto dei problemi del dominio di conoscenza  $Q' \subseteq Q$  è



$$\mathcal{K}|_{Q'} = \{W \subset Q' \mid W = K \cap Q' : K \in \mathcal{K}\}.$$

La proiezione  $\mathcal{K}|_{Q'}$  di uno spazio di apprendimento  $(Q, \mathcal{K})$  è anch'essa uno spazio di apprendimento.

Per rendere conto delle abilità implicate nella risoluzione di un problema, si può dividere il livello delle prestazioni, descritto dallo spazio di apprendimento, da quello delle competenze, che è dato dall'insieme  $\Pi$  di abilità implicate nella risoluzione dei problemi  $Q$ . Lo stato  $C \subseteq \Pi$  di abilità che un individuo padroneggia è detto il suo *stato di competenza*.

La *skill map* è una tripletta  $(Q, \Pi, \tau)$ , dove  $\tau : Q \rightarrow 2^\Pi$ , che associa ai problemi in  $Q$  i sottoinsiemi non vuoti delle abilità in  $\Pi$  che sono implicati nella loro padronanza.

Nell'interpretazione disgiuntiva della skill map, ogni singola abilità in  $\tau(q)$  è sufficiente per risolvere  $q$ , questo è specificato dalla *funzione problema*:

$$p(C) = \{q \in Q : \tau(q) \cap C \neq \emptyset\}.$$

La collezione delle possibili risposte osservabili durante una valutazione è  $\mathcal{R} = 2^Q$ , che è differente dallo spazio di conoscenza  $\mathcal{K}$ . Per un soggetto le differenze tra il comportamento di risposta osservabile e lo stato di conoscenza possono essere dovute a possibili errori di distrazione o a risposte corrette fortuite. Occorre quindi introdurre un modello probabilistico per rendere conto della separazione tra lo stato di conoscenza  $K$  latente e la risposta  $R \in \mathcal{R}$  che un soggetto può mostrare.

Falmagne & Doignon (1988a, 1988b) definiscono *struttura di conoscenza probabilistica* una tripletta  $(Q, \mathcal{K}, P_{\mathcal{K}})$  nella quale  $P_{\mathcal{K}}$  è una distribuzione di probabilità in  $\mathcal{K}$ , con la funzione  $P_{\mathcal{K}}(K)$  che restituisce la probabilità dello stato  $K$  per ogni  $K \in \mathcal{K}$ .

In questo modello è possibile ottenere le probabilità  $P(R)$  di ogni comportamento risolutivo osservabile  $R \in \mathcal{R}$  avendo le probabilità condizionali  $P(R | K)$  per ogni  $K \in \mathcal{K}$

e ogni  $R \in \mathcal{R}$  attraverso  $P(R) = \sum_{K \in \mathcal{K}} P(R | K)P_{\mathcal{K}}(K)$ .

Avendo come parametri, per ogni problema  $q \in Q$ , la probabilità di osservare risposte corrette fortuite  $\eta_q$  e di osservare errori di distrazione  $\beta_q$ , è possibile ricavare, per ogni  $R \subseteq Q$  e per ogni  $K \in \mathcal{K}$  le probabilità condizionali  $P(R | K)$  attraverso:

$$P(R | K) = \left( \prod_{q \in K \setminus R} \beta_q \right) \left( \prod_{q \in K \cap R} (1 - \beta_q) \right) \left( \prod_{q \in R \setminus K} \eta_q \right) \left( \prod_{q \in Q \setminus (K \cup R)} (1 - \eta_q) \right).$$

Questo modello probabilistico è chiamato *basic local independence model* (BLIM, Falmagne & Doignon, 1988a, 1988b).

#### 4 - Dallo spazio problema allo spazio di apprendimento

Nella generalizzazione di Stefanutti (2019), il concetto di abilità è sostituito dal concetto di *operazione*. Le operazioni sono concatenabili in sequenza: una *stringa* di operazioni

$\omega^1 \omega^2 \dots \omega^n$  prese dell'insieme  $\Omega$  si applica ad un qualche stato iniziale  $p$  producendo un

qualche stato finale  $t$ . L'insieme delle stringhe di sequenza arbitraria è  $\Omega^* = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Omega^n$  dove

$\mathbb{Z}$  è l'insieme degli interi non negativi.

Esiste inoltre un'operazione *neutra*  $\epsilon$  tale per cui  $\Omega^0 = \{\epsilon\}$ .

Lo *spazio problema* è una tripletta  $\mathbf{P} = (S, \Omega, \cdot)$  dove  $S$  è un insieme non vuoto di *stati problema*,  $\Omega$  un insieme non vuoto di operazioni e  $\cdot$  è l'*operatore di applicazione* che mappa  $S \times \Omega^*$  in  $S$ , tale che, per tutti gli  $s \in S$  e  $\pi, \sigma \in \Omega^*$ , le seguenti condizioni reggono:

1.  $s \cdot \epsilon = s$
2.  $(s \cdot \pi) \cdot \sigma = s \cdot \pi\sigma$ .

Poiché l'operatore  $\cdot$  mappa  $S \times \Omega^*$  in  $S$ ,  $s \cdot \pi$  è sempre uno stato problema in  $S$ , in questo modo lo spazio problema è chiuso rispetto all'operatore applicazione.

Un *problema* nello spazio problema  $(S, \Omega, \cdot)$  è una coppia  $(s, T) \in S \times 2^S$  tale per cui  $s \notin T$  e  $s \cdot \pi \in T$  per qualche stringa  $\pi \in \Omega^*$ .

Un *problema singoletto*  $(s, t)$  è un problema nella forma  $(s, \{t\})$  tale per cui  $t = s \cdot \pi$  per qualche stringa  $\pi \in \Omega^*$ .

L'insieme dei problemi che possono essere formulati in  $\mathbf{P}$  è

$$Q = \{(s, T) \in S \times 2^S : s \notin T, s \cdot \pi \in T \text{ per qualche } \pi \in \Omega^*\}.$$

Un percorso risolutivo nello spazio problema  $(S, \Omega, \cdot)$  è ciascuna coppia  $s\pi$ , con  $s \in S$  e  $\pi \in \Omega^* \setminus \{\epsilon\}$ . Un percorso risolutivo *risolve* un problema  $(s, T)$  se  $s \cdot \pi \in T$ .

$\Pi = S \times (\Omega^* \setminus \{\epsilon\})$  è l'insieme dei percorsi risolutivi.

La skill map derivata da uno spazio problema  $(Q, \Pi, \tau)$  con  $\tau : Q \rightarrow 2^\Pi \setminus \{\emptyset\}$ , associa ad ogni problema i suoi percorsi risolutivi:  $\tau(s, T) = \{s\pi \in \Pi : s \cdot \pi \in T\}$ .

Un percorso risolutivo  $b\pi \in \Pi$  è un sottopercorso di  $a\sigma \in \Pi$  se esistono  $\alpha, \beta \in \Omega^*$  tali per cui:

1.  $\sigma = \alpha\pi\beta$
2.  $a \cdot \alpha = b$ .

Se  $b\pi$  è un sottopercorso di  $a\sigma$ , si indica  $b\pi \sqsubseteq a\sigma$ . Stefanutti (2019, Teorema 3) ha mostrato che la relazione  $\sqsubseteq$  è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, quindi struttura l'insieme dei percorsi risolutivi  $\Pi$  in un ordine parziale.

Uno stato di competenza  $C \subseteq \Pi$  rispetta l'inclusione nel percorso risolutivo se, dato  $a\sigma \in C$ ,  $b\pi \sqsubseteq a\sigma \Rightarrow b\pi \in C$ .

L'insieme  $C$  degli stati di competenza  $C \subseteq 2^\Pi$  che rispettano l'inclusione nel percorso risolutivo è lo spazio di competenza.  $C$  è uno spazio di competenza chiuso all'unione e all'intersezione.

Lo stato di conoscenza delineato dallo stato di competenza  $C$  è l'insieme dei problemi in  $Q$  che possono essere risolti da un soggetto il cui stato di competenza sia  $C \subseteq C$  ed è:

$$p(C) = \{(s, T) \in Q : \tau(s, T) \cap C \neq \emptyset\}.$$

L'immagine  $K = p(C) = \{p(C) : C \in C\}$  forma l'insieme degli stati di conoscenza derivabili dallo spazio di competenza ed è anch'essa uno spazio di conoscenza (Stefanutti, 2019, Teorema 5).

Il segmento iniziale generato da un percorso risolutivo  $s\pi \in \Pi$  nell'ordine parziale  $(\Pi, \sqsubseteq)$  è l'insieme  $s\pi^\downarrow = \{t\sigma \in \Pi : t\sigma \sqsubseteq s\pi\}$ .

Poiché ogni segmento iniziale  $s\pi^\downarrow$  è un atomo a  $s\pi$ , l'insieme  $\mathcal{B}_C = \{s\pi^\downarrow : s\pi \in \Pi\}$  forma la base dello spazio di competenza.

Un percorso risolutivo  $s\pi$  è una riduzione propria di un altro percorso  $t\sigma$  se:

1.  $s = t$
2.  $s \cdot \pi = t \cdot \sigma$
3.  $p(s\pi^\downarrow) \subset p(t\sigma^\downarrow)$

Se  $s\pi$  non ha riduzioni proprie, si dice che è un *percorso irriducibile*.

$\mathbb{III}$  è l'insieme dei percorsi irriducibili.

La proiezione dello spazio di conoscenza  $\mathbb{K}$  sull'insieme  $P$  dei problemi singoletto è  $\mathbb{K}|_P$ , essa, Stefanutti (2019, Teorema 12) mostra che essa è uno spazio di apprendimento e che la base di  $\mathbb{K}|_P$  è in corrispondenza biunivoca con la base  $\mathbb{C}|\mathbb{III}$  della proiezione dello spazio di competenza nell'insieme percorsi irriducibili.

Stefanutti (2019, sezione 8.1) spiega come ottenere l'insieme dei percorsi irriducibili di uno spazio problema tramite un algoritmo di ricerca denominato *irriducibile path search*.

L'algoritmo per ottenere lo spazio di apprendimento dallo spazio problema ha quindi tre fasi:

1. Si ottiene l'insieme dei percorsi irriducibili  $\mathbb{III}$  tramite *irriducibile path search*.
2. Si costruisce la *skill map*  $(P, \mathbb{III}, \tau)$  sui problemi singoletto. Per ciascun problema singoletto  $(s, t) \in P$ ,  $\tau$  restituisce tutti i percorsi irriducibili  $s\pi \in \mathbb{III}$  che lo risolvono. Si può quindi ricavare la base dello spazio di competenza  $\mathbb{C}|\mathbb{III}$  da ciascun segmento iniziale  $s\pi^\downarrow$  generato da ogni  $s\pi$  restituito da  $\tau$ .
3. Lo spazio di apprendimento  $\mathbb{K}|_P$  si ottiene da  $p(\mathbb{C}|\mathbb{III}) = \{p(C) : C \in \mathbb{C}|\mathbb{III}\}$ .

## 5 - Costruzione dello spazio di apprendimento di un problema di vita e di morte

Un *problema di vita e di morte* è una particolare situazione *locale* nel gioco del Go. I problemi di vita e di morte sono prodotti culturali utili all'insegnamento delle tecniche del Go, alcuni si tramandano da secoli (come la raccolta Xuanxuan Qijing), altri sono costruiti da giocatori esperti e professionisti, altri ancora si originano spontaneamente da situazioni di gioco. La pratica dei problemi di vita e di morte è stata ed è parte normale della routine dello studio del Go per milioni di giocatori.

Le sequenze ottimali fanno parte dei problemi e normalmente, ma non sempre, sono pubblicate nelle raccolte dei problemi, in altri casi sono conosciute dagli insegnanti i quali le rivelano agli studenti quando ritengono siano pronti a comprenderle.

Sviluppi recenti quali KataGo (Wu, 2019) inoltre hanno permesso di operare intelligenze artificiali in grado di giocare a Go a livello superumano in personal computer.

È possibile utilizzarle per ricavare euristicamente i percorsi risolutivi.

In un problema di vita e di morte, una sezione di  $N \times M$  intersezioni del *goban* è divisa in una regione di pietre di un colore  $X$  che accerchiano, e in una regione di pietre del colore opposto  $\bar{X}$  che sono accerchiate. Se nello stato iniziale del problema, la mossa spetta a  $X$ , si dice che il problema è  *$X$  per uccidere*, nel caso opposto si dice che il problema è  *$\bar{X}$  per vivere*.

Lo scopo del risolutore del problema di vita e morte è definire l'insieme delle sequenze ottimali (*percorsi risolutivi*) del problema.

Un percorso ottimale è una sequenza di mosse, tale per cui:

1. Ogni mossa  $X$  priva le pietre circondate della proprietà della *vita incondizionata* (si veda *appendice A*, oppure Benson 1976 per una definizione formale) per ogni possibile risposta  $\bar{X}$ .
2. Ogni mossa  $\bar{X}$  rende possibile la *vita incondizionata* per ogni possibile risposta  $X$ .

Nel Go si chiama *regola del ko* il divieto di ripetere una identica disposizione due volte nella stessa partita.

Un percorso ottimale può finire per tre ragioni:

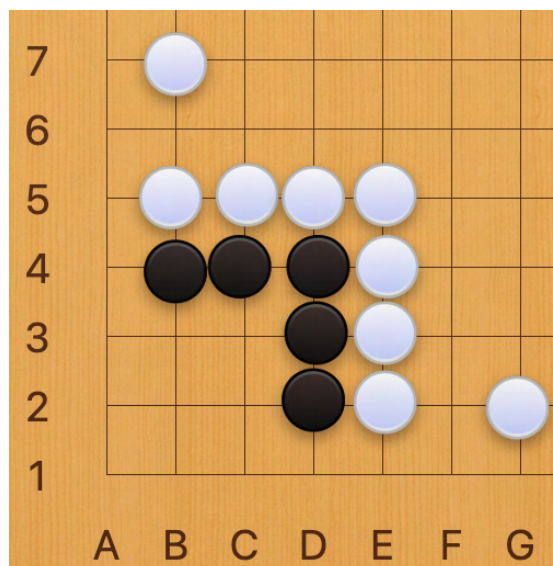
1. Non ci sono mosse  $\bar{x}$  per rendere possibile la vita incondizionata
2. Non ci sono mosse  $x$  per privare le pietre accerchiate della vita incondizionata.
3. Si potrebbe ricavare una mossa  $x$  o  $\bar{x}$  violando la *regola del ko*.

Nel terzo caso, si dice che la soluzione del problema è un ko.

Un particolare problema ben noto è la squadra del carpentiere, ad esso un celebre giocatore professionista, Cho Chikun, ha dedicato un capitolo di una sua raccolta (Cho Chikun, 1993), illustrandone i percorsi risolutivi.

La squadra del carpentiere si può rappresentare in una sezione  $7 \times 7$  del goban, la *fig.1* mostra la posizione iniziale.

*Fig.1 La squadra del carpentiere*



Lo stato iniziale della squadra del carpentiere è simmetrico rispetto alla diagonale, così anche le soluzioni del problema lo sono.

La *fig.2* mostra un esempio di soluzione. La *fig.3* mostra la stessa soluzione a coordinate invertite, simmetrica rispetto alla *fig.2*. In questo lavoro, consideriamo le soluzioni simmetriche come un'unica soluzione.

Considerando l'equivalenza delle simmetrie, Cho Chikun presenta 10 soluzioni per il problema.

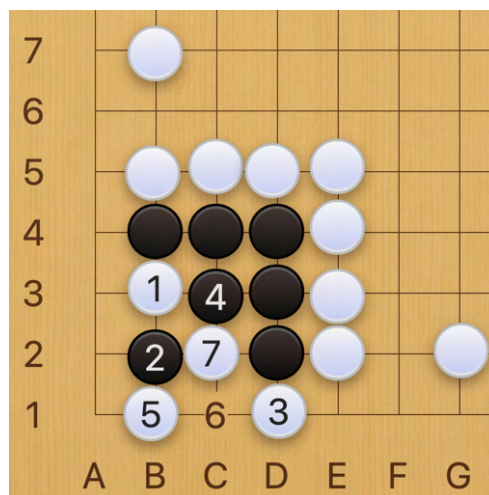
Ogni stato problema è definito come una particolare configurazione di pietre e intersezioni libere nella sezione  $7 \times 7$  considerata. Un esempio di stato problema è rappresentato in *fig 1*. Le configurazioni simmetriche rientrano nello stesso stato.

Le dieci soluzioni per la squadra del carpentiere possono essere descritte come una sequenza di operazioni. Ogni operazione corrisponde al posizionamento di un pietra, di colore  $x$  o  $\bar{x}$ , su una specifica coordinata del goban. La soluzione numerata in *fig.2* rappresenta la sequenza di operazioni bianco C2, nero b2, bianco A4, nero C3, bianco A2, nero A3 e bianco B3.

*Fig.2 una soluzione*



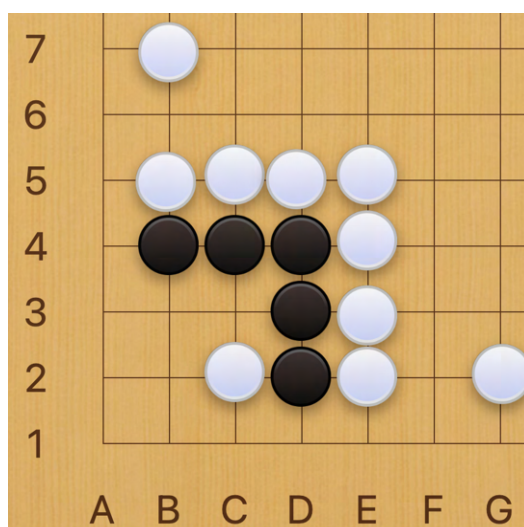
*Fig.3 una soluzione simmetrica*



L'applicazione di un'operazione trasforma uno stato problema in un altro.

Ad esempio, l'applicazione dell'operazione "bianco C2" allo stato iniziale, porta allo stato problema in *fig.4*.

*Fig.4 lo stato problema 2*



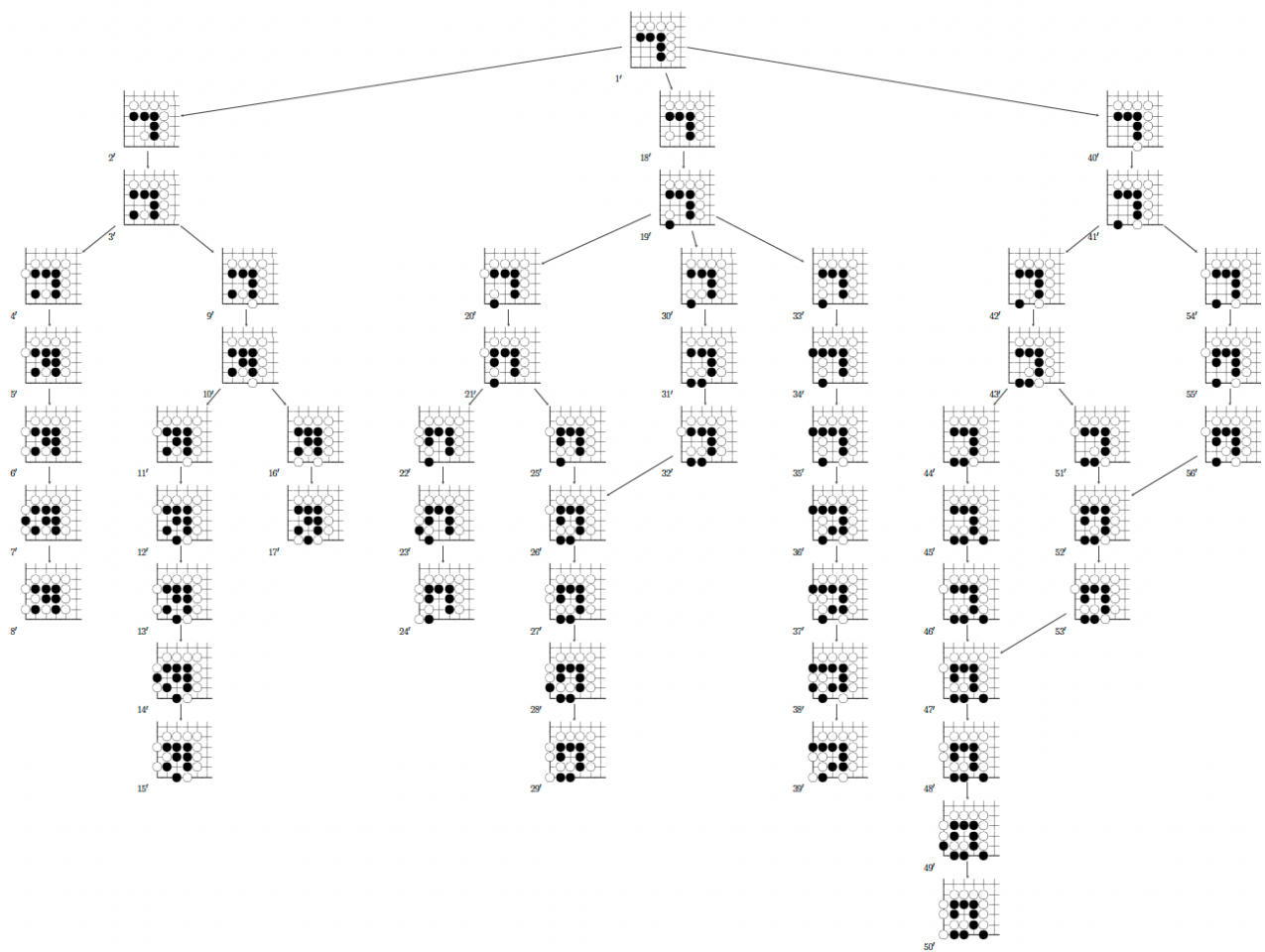
Per ottenere l'insieme stati problema, le dieci soluzioni sono state applicate una alla volta, operazione per operazione, allo stato problema di partenza, cioè la posizione iniziale della squadra del carpentiere in fig.1.

L'applicazione delle operazioni della prima soluzione non può generare due stati uguali per la *regola del ko*, per cui tutti gli ottenuti dall'applicazione delle operazioni della prima soluzione fanno parte dell'insieme degli stati problema. L'applicazione delle operazioni delle soluzioni successive alla prima può invece generare stati già individuati.

Applicando con questa procedura i percorsi risolutivi descritti da Cho Chikun (1993), si vengono ad individuare 56 stati problema distinti (fig.5).

La fig.5 illustra il grafo diretto del problema, i vertici sono gli stati problema e gli archi le singole operazioni.

Fig.5 Il grafo diretto della squadra del carpentiere



Lo spazio problema  $\mathbf{P}_{carp} = (S, \Omega, \cdot)$  per la squadra del carpentiere è definito come

segue: l'insieme  $S$  degli stati problema è dato dall'insieme dei 56 stati  $p \in S$  individuati



con la procedura descritta precedentemente. L'insieme delle operazioni  $\Omega$  è dato dalle possibili mosse del colore  $x$  e del colore  $\bar{x}$  nella sezione  $7 \times 7$  del goban intese come coordinate.

Per ogni stato problema  $p \in S$ , le operazioni che portano ad un altro stato problema sono dette *operazioni efficaci*. Ad esempio, l'operazione "bianco C2" applicata allo stato iniziale (fig.1), è un'operazione efficace perché porta allo stato problema 2 in fig.4.

Al contrario, un'operazione che non porta ad uno stato problema è detta *operazione inefficace*. Ad esempio, l'operazione "bianco C3" applicata allo stato iniziale è *inefficace*.

Tra i 56 stati individuati, ci sono 7 stati  $t \in S$  per i quali non esistono sequenze di operazioni  $\pi \in \Omega^*$  la cui applicazione trasforma lo stato in un altro. Questi 7 stati sono gli stati finali della squadra del carpentiere.

I problemi nello spazio problema della squadra del carpentiere  $(S, \Omega, \cdot)$  sono i problemi  $(s, T) \in S \times 2^S$  per i quali  $T$  è l'unione degli stati finali  $t$  raggiungibili da  $s$  attraverso l'applicazione di qualche sequenza di operazioni  $\pi \in \Omega^*$ .

Nello spazio problema della squadra del carpentiere è possibile formulare 49 problemi  $Q$ , un problema per ciascuno stato ad esclusione degli stati finali.

L'applicazione dell'algoritmo di Stefanutti (2019) alla proiezione dello spazio problema della squadra del carpentiere sui 49 problemi  $Q$  genera uno spazio di apprendimento  $\mathcal{K}|Q$  che ha più di trenta milioni di stati di conoscenza.

Tale spazio di apprendimento richiede una numerosità campionaria troppo grande per essere validato. Per questo motivo si è scelto di costruire uno spazio di apprendimento su un sottogruppo  $Q_{int}$  di *problemi completi*.  $Q_{int}$  contiene tutti i problemi completi del tipo  $x$  per uccidere che siano costituiti da almeno due operazioni.

La cardinalità  $|Q_{int}| = 17$  e lo spazio di apprendimento  $\mathcal{K}|_{Q_{int}}$  contiene 15296 stati di conoscenza.

Gli stati iniziali dei problemi in  $Q_{int} = \{q_1, \dots, q_{17}\}$  sono mostrati appendice B.

Inoltre, escludendo lo stato 1 in fig.5 è possibile partizionare lo spazio  $\mathbf{P}_{carp}$  in 3 sottospazi indipendenti.

Le caratteristiche dei sottospazi sono schematizzate in *tab.1*, per ciascun sottospazio è stato creato lo spazio di apprendimento della sua proiezione in  $Q_{int}$ .

Tab.1 sottospazi della squadra del carpentiere

	Stati problema (fig.5)	num. stati problema	problemi in $Q_{int}$	$ Q_{int} $	$ \mathcal{K} Q_{int} $
$P_{attach}$	$\{2, \dots, 17\}$	16	$\{q_2, \dots, q_5\}$	4	14
$P_{centr}$	$\{18, \dots, 39\}$	22	$\{q_6, \dots, q_{11}\}$	6	32
$P_{hane}$	$\{40, \dots, 56\}$	17	$\{q_{12}, \dots, q_{17}\}$	6	19

## 6 - Metodi di raccolta dati

Si è scelto di registrare il comportamento risolutivo dei giocatori di go attraverso l'uso di un questionario online.

I soggetti sono stati reclutati tramite invito diretto in forum online e comunità di giocatori di Go. In particolare, l'invito a partecipare allo studio è stato comunicato a tutti i soci della Federazione Italiana Gioco Go (<https://figg.org/it/>) tramite newsletter, è stato rivolto ai giocatori di Go iscritti ai subreddit tematici r/baduk e r/cbaduk e agli utenti del forum di Online Go Server.

Agli invitati è stato chiesto prendersi da 45 minuti ad un'ora per lo svolgimento del compito.

Ai partecipanti è stato chiesto di fornire i seguenti dati anagrafici: anno di nascita, sesso, nazione di residenza. Riguardo alle abitudini nel gioco del Go, è stato chiesto loro di indicare: da quanto tempo giocano a go (meno di 6 mesi, 6 mesi - 1 anno, 1 anno - 2 anni, 2 anni - 5 anni, 5 anni - 10 anni, più di 10 anni), con che frequenza hanno giocato a Go negli ultimi 6 mesi (la maggior parte dei giorni, almeno una volta alla settimana, almeno una volta al mese, almeno una volta, mai), e con che frequenza hanno studiato Go negli ultimi 6 mesi. È stato inoltre chiesto loro di inserire almeno un grado tra grado ufficiale European Go Federation, American Go Association, oppure un grado su una piattaforma

online tra Online Go Server, KGS Go Server, Tygem, Fox Weiqi, o ancora un ranking personale.

Poi è stato chiesto loro di risolvere tutti i 17 problemi in  $Q_{int}$ .

I problemi in  $Q_{int}$  sono stati presentati in ordine randomizzato, uno per uno, per ciascun problema è stata presentata la posizione iniziale, come illustrata in appendice B, ed è stato chiesto di inserire la sequenza di coordinate della loro risposta. Per stimolare i partecipanti a fornire risposte adeguate, si è indicato per ogni problema il numero minimo di mosse di ogni problema. Inoltre la correttezza delle coordinate inserite è stata validata ad ogni problema tramite espressioni regolari, costringendo i partecipanti a fornire risposte formalmente corrette.

Tra i problemi presentati, alcuni sono particolarmente impegnativi, è stato necessario adottare degli accorgimenti per evitare che i giocatori meno esperti si bloccassero fronte a tali problemi abbandonando la prova. Sono quindi stati adottati i seguenti accorgimenti per incoraggiare tutti i giocatori a concludere il compito: nella presentazione di ciascun problema, si è suggerito di non dedicare più 5 minuti allo svolgimento, è stata data la possibilità, nel caso un giocatore non trovasse una soluzione, di saltare un problema (scrivendo "passo" come soluzione), è stato permesso di riprendere in un secondo momento la sessione di svolgimento del compito in caso di interruzione, è stata mostrata una barra di avanzamento nella parte superiore dello schermo per dare un riferimento puntuale.

Alla fine è stato chiesto ai partecipanti se ricordassero di avere già incontrato i problemi in passato.

## 7 - Risultati

151 partecipanti su 192 (78,6%) hanno abbandonato il compito.

Il campione è stato formato sui 41 partecipanti (39 maschi e 2 femmine) che hanno completato tutti i problemi. Il tempo mediano di svolgimento è stato di 47:01.

L'età mediana è di 30 anni.

Riguardo alle abitudini di gioco, il campione è formato da giocatori esperti (Tab.2), l'80% dei giocatori (33 su 41) dichiara di avere maturato almeno 5 anni di esperienza.

Tab.2

Da quanto tempo giochi a Go?	Numero	%
Meno di 6 mesi	0	0%
6 mesi - 1 anno	2	5%
2 anni - 5 anni	6	15%
5 anni - 10 anni	14	34%
più di 10 anni	19	46%

I giocatori dichiarano inoltre di essere attivi negli ultimi 6 mesi: l'83% (34 su 41) dichiara di avere giocato a go con frequenza almeno settimanale (Tab.3), e il 61%, (25 su 41) di essersi dedicato allo studio del gioco (analisi di partite, problemi di vita e morte e altro) ancora con frequenza almeno settimanale (Tab.4).

Tab.3

Con che frequenza hai giocato a Go negli ultimi 6 mesi?	Numero	%
Mai	0	0%
Almeno una volta	1	2%
Almeno una volta al mese	6	15%
Almeno una volta a settimana	18	44%
La maggior parte dei giorni	16	39%

Tab.4

Con che frequenza hai studiato Go negli ultimi 6 mesi?	Numero	%
Mai	7	17%
Almeno una volta	3	7%
Almeno una volta al mese	6	15%
Almeno una volta a settimana	15	37%
La maggior parte dei giorni	10	24%

18 giocatori hanno indicato un grado ufficiale EGD (<https://europeangodatabase.eu/EGD>), degli altri 23, 20 hanno indicato almeno un grado in una piattaforma di gioco online, gli altri 3 hanno dichiarato un grado autoattribuito.

Il grado ufficiale è ricavato da un punteggio ELO-like basato sulle prestazioni del giocatore nelle partite ufficiali. Il punteggio più basso corrisponde a 30 Kyu (30k), e il punteggio più alto a 7 Dan (7d). Nei gradi Kyu il grado decresce al crescere della forza, quindi 1 Kyu è il grado Kyu più forte, mentre nei gradi Dan il grado cresce al crescere della forza, quindi 1 Dan è più forte di 1 Kyu e meno forte di 7 Dan.

Per i gradi delle piattaforme di gioco online, è possibile stimare un grado ufficiale dal grado online utilizzando i dati raccolti in un sondaggio del 2018

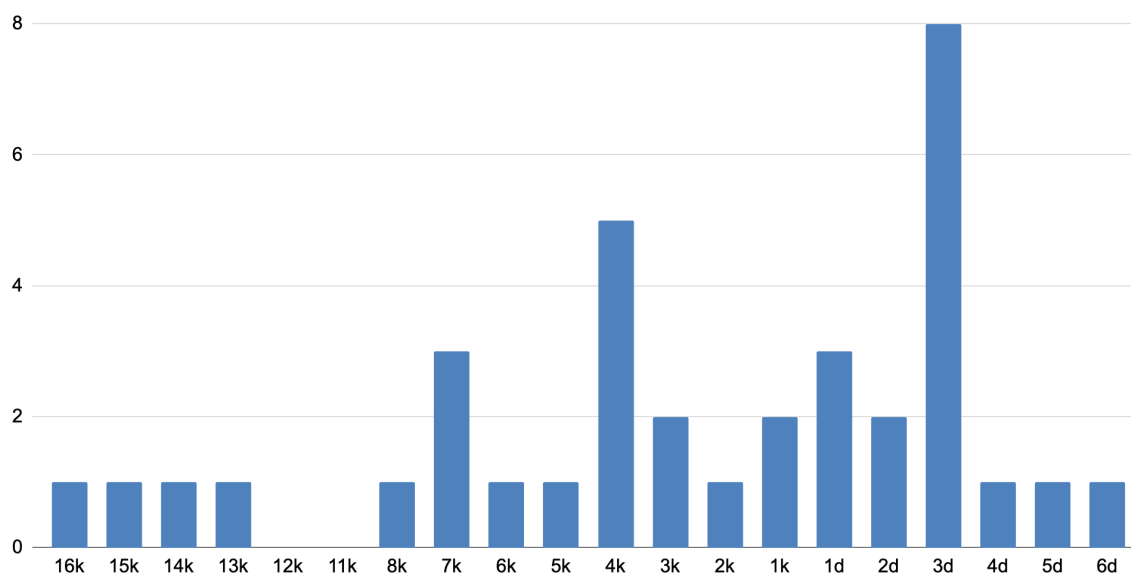
(<https://idex.github.io/go-rank-survey/go-survey-results>). Il grado online è stato convertito nel grado ufficiale corrispondente stimato. La tab.5 mostra un riepilogo dei gradi dichiarati.

Tab.5

Tipo grado	Numero	%	Grado mediano	Grado medio	stdev
Autoattribuito	3	7%	9 Kyu	10 Kyu	4,16
Online	15	37%	2 Kyu	2 Kyu	4,64
Ufficiale	23	56%	3 Kyu	3 Kyu	5,81

La fig.6 mostra che i soggetti che hanno concluso il compito coprono un ampio ventaglio di gradi, che va 16 Kyu a 6 Dan. C'è almeno un soggetto per ogni grado nell'intervallo, tranne per i gradi 12 Kyu e 11 Kyu. I gradi più rappresentati sono 3 Dan (8 soggetti) e 4 Kyu (5 soggetti).

Fig.6 Conteggio dei partecipanti che hanno completato il compito per singolo grado



La Tab.6 e la Fig.7 mostrano la distribuzione geografica dei soggetti. 14 sono residenti italiani, 12 di altri paesi europei e 15 extraeuropei.



Per quanto riguarda la conoscenza pregressa, il partecipante mediano che ricorda di avere già visto i problemi è 5 gradi più forte di quello che dichiara di non averli mai visti e risolve correttamente 8,5 problemi in più.

Tab.7

<i>Avevi incontrato questi problemi in passato?</i>	Numero	Grado mediano	Mediana risposte corrette
Sì	12	2 Dan	14,5
Non so	8	6 Kyu	7
No	21	4 Kyu	6

Dei tre spazi di apprendimento derivati dagli spazi problema in *tab.1*,  $\mathbf{K}_{attach}$  non è testabile con BLIM perché il numero di gradi di libertà del test chi-quadro

$$df = 2^{|Q|} - |K| - 2|Q| = -6.$$

Gli spazi di apprendimento  $\mathbf{K}_{centr}$  e  $\mathbf{K}_{hane}$  sono stati validati con il BLIM via massima

verosimiglianza, individuando i parametri del modello che rendessero i dati osservati più probabili.

È stato applicato un algoritmo di expectation-maximization (EM, Stefanutti e Robusto, 2009). Il BLIM è stato applicato 50 volte su ciascuno spazio partendo da parametri iniziali differenti, ed è stato scelto il modello risultante con la massima verosimiglianza.

Per testare la bontà del fit dei modelli è stata usata la procedura di bootstrap parametrico (Efron, 1979) su 500 replicazioni per calcolare il p-value del chi-quadro.

Il BLIM supera il test chi-quadro per entrambe le strutture (Tab.8).

I parametri di un modello probabilistico possono essere analizzati se sono identificabili, l'analisi dell'identificabilità del BLIM sugli spazi di apprendimento è stata condotta usando la funzione BLIMIT (Stefanutti, Heller, Anselmi e Robusto, 2012).

Per la struttura  $\mathbf{K}_{centr}$ , i parametri  $\beta_{q6}, \eta_{q7}, \eta_{q8}, \eta_{q11}$  sono risultati essere non identificabili,

mentre per lo spazio  $\mathbf{K}_{hane}$  non sono interpretabili i parametri  $\beta_{q12}$  e  $\eta_{q15}$ .

Questo rende i parametri non interpretabili, è possibile in un futuro studio superare questo limite utilizzando item equivalenti, come problemi simmetrici o a colori invertiti.

Tab.8

	$K_{attach}$	$K_{centr}$	$K_{hane}$
df	-6	21	24
(log)likelihood	N/A	97,65	89,17
chi-quadro	N/A	2,18	3,47
bootstrap p-value	N/A	0,18	0,32
parametri non identificabili (BLIMIT)	N/A	$\beta_{q6}, \eta_{q7}, \eta_{q8}, \eta_{q11}$	$\beta_{q12}, \eta_{q15}$

## 8 - Discussioni

La modalità di raccolta dati e le caratteristiche dei problemi hanno influito sulla formazione del gruppo di partecipanti che ha completato il compito. L'alto tasso di mortalità dei partecipanti ha selezionato i giocatori più forti: dei 151 giocatori che hanno abbandonato il compito, 84 hanno dichiarato il proprio grado, di questi 14 hanno dichiarato un grado di livello Dan (16,7%), per confronto, dei 41 partecipanti che hanno concluso il compito 16 hanno dichiarato un grado di livello Dan (39,0%).

E' un campione di giocatori qualificato, si può fare un confronto con la popolazione di giocatori agonisti della European Go Federation censita dall'European Go Database (<https://www.europeangodatabase.eu/EGD/>): al 26 Maggio 2022 si rilevano 843 giocatori Dan su 4258 giocatori agonisti attivi (19,8%).

Il problema della mortalità si potrebbe mitigare proponendo una modalità di risoluzione dei problemi interattiva, resta comunque difficile validare spazi di apprendimento per il gioco del go che abbiano migliaia di stati di conoscenza.

A questo proposito è utile considerare le strade per ridurre il numero di stati di conoscenza degli spazi di apprendimento. Ne menziono tre: le prime due, utilizzate in questo lavoro, sono la creazione di proiezioni degli spazi di apprendimento su un



sottoinsieme di problemi e la partizione di uno spazio di apprendimento in sottospazi indipendenti. La terza è l'astrazione delle operazioni: in questo lavoro le operazioni sono state definite in maniera concreta, ovvero il posizionamento di una pietra in una specifica coordinata da una certa posizione. È il modo più preciso di definire le operazioni, ma delle astrazioni potrebbero essere più significative e più utili. Ad esempio, lo studio di Reitman (1976) sull'organizzazione delle strutture percettivo-mnemoniche dei giocatori di Go sembra mostrare che i giocatori esperti percepiscono le posizioni in chunk sovrapposti composti da insiemi di pietre in stretta relazione tra loro, questo suggerirebbe la possibilità di classificare una specifica mossa sulla base del contenuto del chunk che l'applicazione della mossa andrebbe a ricostruire.

Nonostante i problemi menzionati gli spazi di apprendimento  $K_{centr}$  e  $K_{hane}$  sono stati validati, questo sembra indicare che le assunzioni della pKST sulla relazione di sottopercorso siano applicabili al gioco del Go: in quelle due strutture ad esempio sappiamo che per sapere risolvere un problema, un giocatore ne deve conoscere almeno un sottopercorso. L'assunzione secondo cui l'applicazione di un percorso risolutivo implica la conoscenza di tutti i sottpercorsi applicati dal giocatore non è stata controllata. Per questo motivo e per i problemi di interpretabilità dei parametri del modello probabilistico, i risultati di questo lavoro gettano le basi ma non sono ancora sufficienti a permettere la creazione di uno strumento di assessment adattivo per il problema di vita e morte della squadra del carpentiere. Anche l'applicabilità di questi risultati per lo sviluppo di strumenti di assessment adattivo delle abilità nel gioco del go più in generale può essere esplorata.

Ma quale può essere l'utilità di strumenti di questo tipo per la psicologia?

Riferendosi al gioco degli scacchi, Simon e Chase (1988) affermarono che *"Come la genetica ha bisogno dei suoi organismi modello, la Drosophila e la Neurospora, così la psicologia ha bisogno di ambienti di lavoro standard attorno ai quali si sviluppa la conoscenza."*

La costruzione di uno spazio di apprendimento procedurale per il gioco del Go potrebbe fornire alla psicologia un'ambiente di studio dei processi di apprendimento, di formazione di strutture mnemonico-percettive, o di confronto per teorie su expertise ed intelligenza.

## Appendice A: Il concetto di vita incondizionata nel gioco del Go

Questa sezione spiega informalmente il concetto di vita incondizionata nel gioco del Go, concetto che deriva dalle regole del gioco del Go, come descritte brevemente nel Cap.2. Per una definizione formale del concetto si veda Benson (1976).

Le figure A1 e A2 mostrano un'applicazione della regola di cattura. Le pietre bianche in A1 formano un gruppo che ha una sola libertà in A, nero giocando in A le *cattura* in fig. A2.

Fig.A1

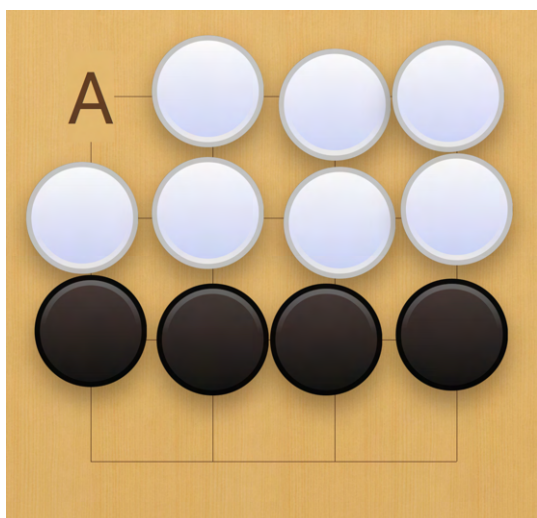


Fig.A2



Le pietre bianche in fig. A3 hanno una libertà ed una libertà in B, a causa della regola di cattura, Nero non può giocare in A perché la pietra nera in A non avrebbe libertà.

Nero potrebbe giocare in A dopo avere rimosso la libertà in B in fig. A4.

Fig.A3

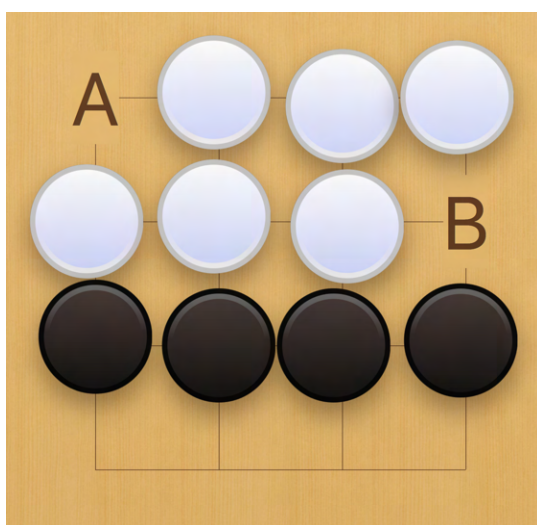
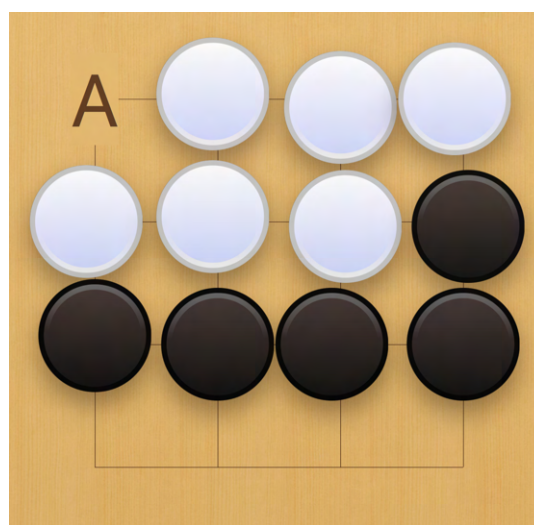
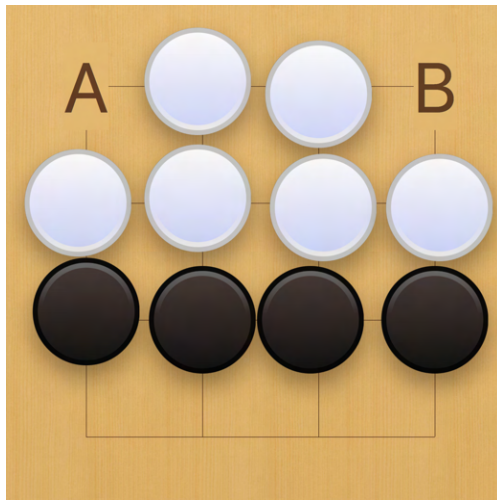


Fig.A4

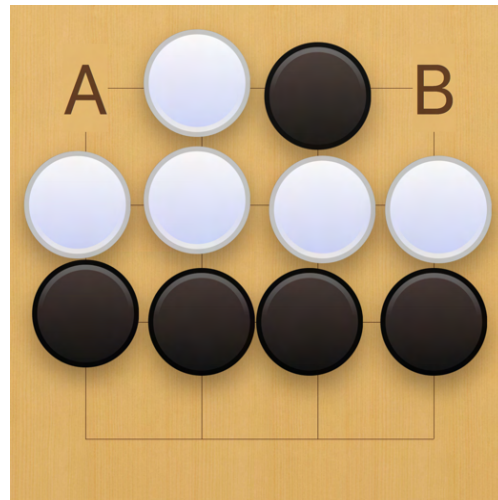


le pietre del gruppo bianco in *fig.A5* sono incondizionatamente vive. Nero non può giocare né in A né in B perché le pietre giocate sarebbero prive di libertà. Per lo stesso motivo, anche le pietre del gruppo bianco in *fig. A6* sono vive.

*Fig.A5*

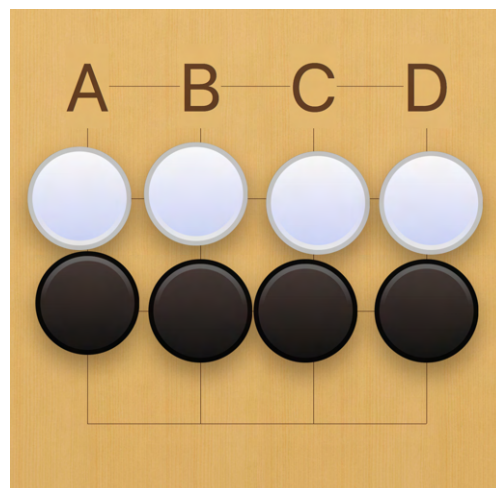


*Fig.A6*



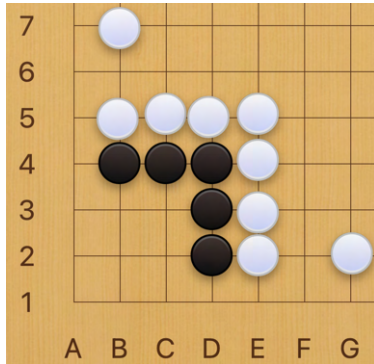
Le pietre del gruppo bianco in *fig.A7* sono incondizionatamente vive, infatti per qualsiasi mossa A,B,C,D di nero, bianco può rispondere con una mossa che crea due libertà per bianco all'interno delle quali nero non può giocare, non avendo libertà per le sue pietre all'interno. Per fare questo, a bianco è sufficiente giocare o nel punto B, o nel punto C. Nero può occupare solo uno dei due punti con una mossa, per cui bianco ha la garanzia di potere occupare l'altro punto con la sua risposta, per questo si dice che il gruppo bianco è *incondizionatamente vivo*. Poiché il gruppo nero in *fig.A7* ha la stessa forma del gruppo bianco, è incondizionatamente vivo anche esso.

*Fig. A7*

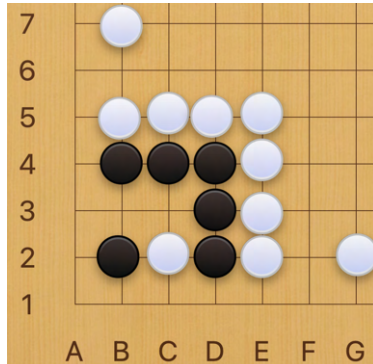


# Appendice B: problemi in $Q_{int}$

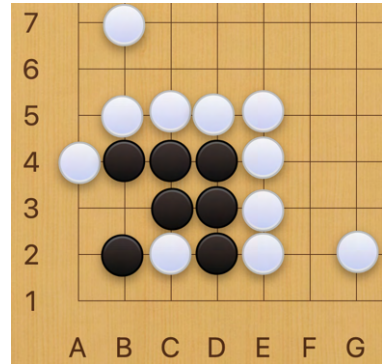
Img B1:  $q_1 \in Q_{int}$



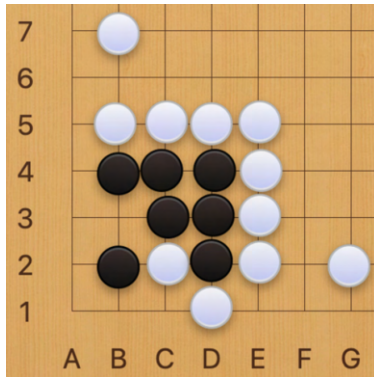
Img B2:  $q_2 \in Q_{int}$



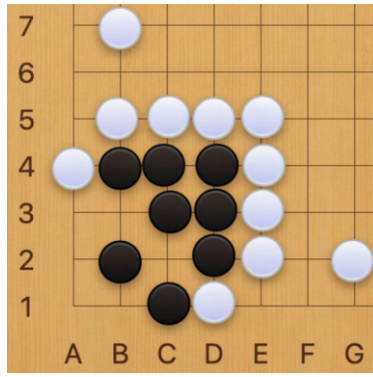
Img B3:  $q_3 \in Q_{int}$



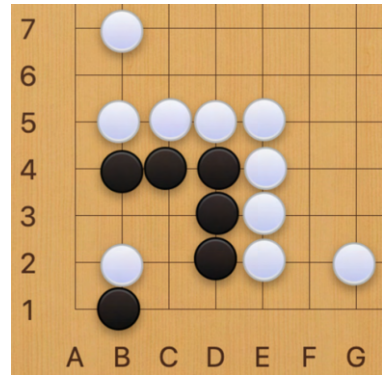
Img B4:  $q_4 \in Q_{int}$



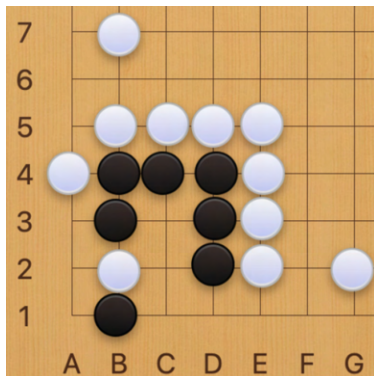
Img B5:  $q_5 \in Q_{int}$



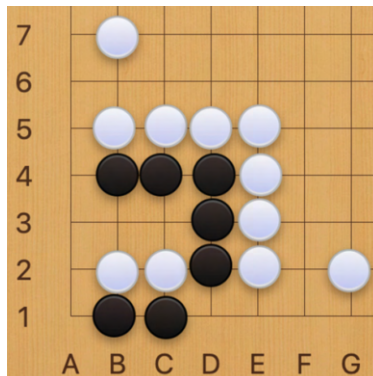
Img B6:  $q_6 \in Q_{int}$



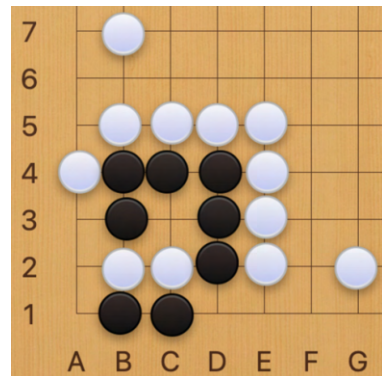
Img B7:  $q_7 \in Q_{int}$



Img B8:  $q_8 \in Q_{int}$

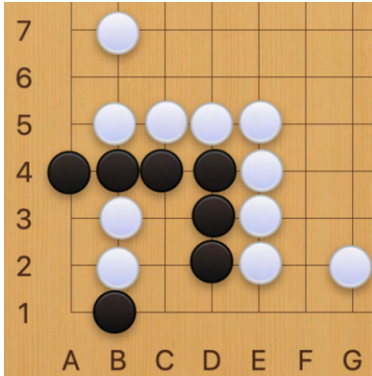


Img B9:  $q_9 \in Q_{int}$

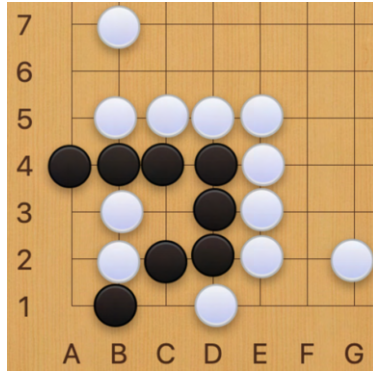




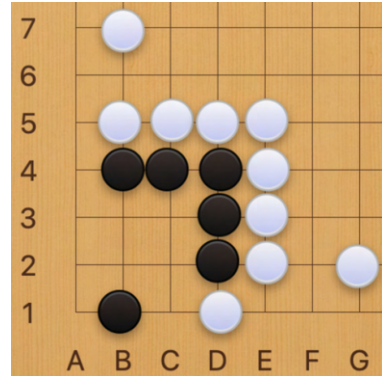
Img B10:  $q_{10} \in Q_{int}$



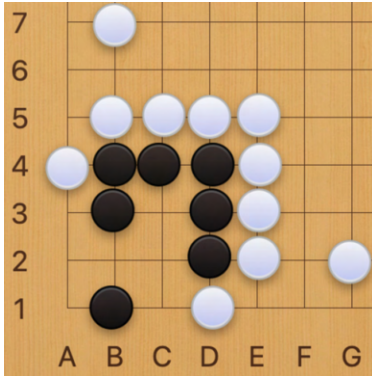
Img B11:  $q_{11} \in Q_{int}$



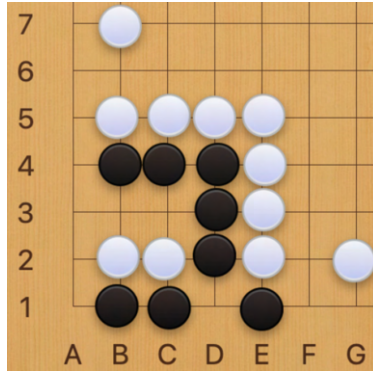
Img B12:  $q_{12} \in Q_{int}$



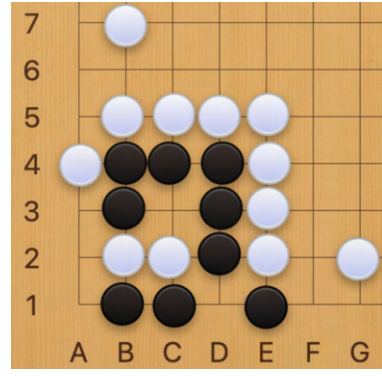
Img B13:  $q_{13} \in Q_{int}$



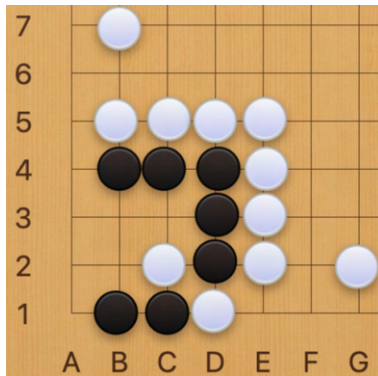
Img B14:  $q_{14} \in Q_{int}$



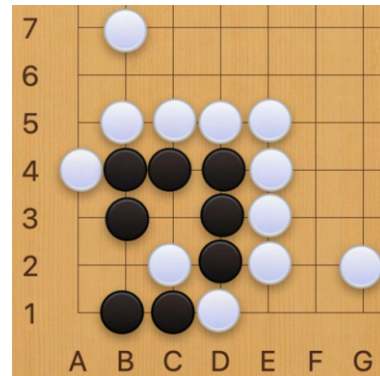
Img B15:  $q_{15} \in Q_{int}$



Img B16:  $q_{16} \in Q_{int}$



Img B17:  $q_{17} \in Q_{int}$



## Riferimenti

Albert, D., Schrepp, M., & Held, T. (1993). Construction of knowledge spaces for problem solving in chess. In G. Fischer, & D. Laming (Eds.), *Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology*. New York: Springer-Verlag

Allis, L. V. (1994). *Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence*. PhD thesis, Univ. Limburg, Maastricht, The Netherlands <http://fragrieu.free.fr/SearchingForSolutions.pdf>

Benson, D. (1976). Life in the Game of Go. *Information Sciences*, 10, 17-29.  
<http://webdocs.cs.ualberta.ca/~games/go/seminar/2002/020717/benson.pdf>

Burmeister, J. M. (2000). *Studies in human and computer Go: Assessing the game of Go as a research domain for cognitive science*.  
[https://staff.itee.uq.edu.au/janetw/Computer%20Go/PhD\\_thesis.pdf](https://staff.itee.uq.edu.au/janetw/Computer%20Go/PhD_thesis.pdf)

Cattell, R. B. (1963). Theory of fluid and crystallized intelligence: A critical experiment. *Journal of Educational Psychology*, 54, 1-22.

Chase, W. G., Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, 4, 55-81.

Chikun, Cho (1993). *All about life and death*, Volume 2. The Ishi Press, 173-181.

Doignon, J.-P. (1994). Knowledge spaces and skill assignments. In G. Fischer & D. Laming (Eds.), *Contributions to mathematical psychology, psychometrics and methodology* (pp. 1020-1121). New York, NY: Springer-Verlag

Doignon, J. P., & Falmagne, J. C. (1985). Spaces for the assessment of knowledge. *International Journal of Man-Machine Studies*, 23(2), 175-196.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7373\(85\)80031-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7373(85)80031-6)

Doignon, J. P., & Falmagne, J. C. (1999). Knowledge spaces. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Gobet, F., Retschitzki, J., & de Voogt, A. (2004). Moves in Mind: The Psychology of Board Games (1st ed.). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9780203503638>

Gosset, D. (2010). Weiqi: A Symbol of The Chinese Experience, Chinese American Forum <http://caforumonline.net/CAFHandlerPDF.ashx?ID=360>

Heller, J., Ünlü, A., & Albert, D. (2013). Skills, competencies and knowledge structures. In J.-C. Falmagne, D. Albert, C. Doble, D. Eppstein & X. Hu (Eds.),

Knowledge spaces: Applications in education (pp. 229–242). New York, NY: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35329-1>

Hofstadter, D. R. (1979). Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid. New York: Basic Books.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife. The Annals of Statistics, 7, 1–26

Falmagne J.-C., Cosyn E., Doignon JP., Thiéry N. (2006) The Assessment of Knowledge, in Theory and in Practice. In: Missaoui R., Schmidt J. (eds) Formal Concept Analysis. Lecture Notes in Computer Science, vol 3874. Springer, Berlin, Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/11671404\\_4](https://doi.org/10.1007/11671404_4)

Falmagne, J.-C., & Doignon, J.-P. (1988a). A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 41, 1–23.

Falmagne, J.-C., & Doignon, J.-P. (1988b). A Markovian procedure for assessing the state of a system. *Journal of Mathematical Psychology*, 32, 232–258.

Falmagne, J.-C., Doignon, J.-P. (2011). *Learning spaces: Interdisciplinary applied mathematics*. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

<https://doi.org/10.1007/978-3-642-01039-2>

Falmagne, J.-C., Koppen, M., Villano, M., Doignon, J.-P., & Johannesssen, L. (1990). Introduction to knowledge spaces: How to build, test and search them. *Psychological Review*, 97, 204–224. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.97.2.201>

Kaufman, A.S (2009). *IQ Testing 101*. New York: Springer Publishing, 98

Masunaga, H., Horn, J. (2000). Characterizing mature human intelligence: Expertise development. *Learning and Individual Differences*, 12, 5–33.

Wojtasinski, M., & Francuz, P. (2018). Expertise in the Game of Go and Levels of Visuospatial and Pattern Recognition Abilities. *Japanese Psychological Research*, 61(4), 273–281.

<https://doi.org/10.1111/jpr.12236>

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving* (Vol. 104, No. 9). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-hall.

Reitman, J. (1976) Deducing memory structures from inter-response times. *Cognitive Psychology*, 3, 336–356.

Shotwell, P. (2003). *Go! More Than a Game*, Tuttle Publishing.

Shotwell, P. (2008). *The Game of Go: Speculations on its Origins and Symbolism in Ancient China* (PDF). American Go Association.

[http://www.usgo.org/files/bh\\_library/originsofgo.pdf](http://www.usgo.org/files/bh_library/originsofgo.pdf)



Simon, H., Chase, W. (1988). Skill in Chess. In: Levy, D. (eds) Computer Chess Compendium. Springer, New York, NY. [https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1968-0\\_18](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1968-0_18)

Stefanutti L. (2019). On the assessment of procedural knowledge: From problem spaces to knowledge spaces. *The British journal of mathematical and statistical psychology*, 72(2), 185–218. <https://doi.org/10.1111/bmsp.12139>

Stefanutti, L., & Albert, D. (2003). Skill assessment in problem solving and simulated learning environments. *Journal of Universal Computer Science*, 9(12), 1455–1468.

Stefanutti, L., Heller, J., Anselmi, P., & Robusto, E. (2012). Assessing the local identifiability of probabilistic knowledge structures. *Behavior Research Methods*, 44(4), 1197–1211.

Stefanutti, L., De Chiusole, D. Brancaccio, A. (2021). Markov solution processes: Modeling human problem solving with procedural knowledge space theory, *Journal of Mathematical Psychology*, Volume 103, <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2021.102552>

Stefanutti, L., & Robusto, E. (2009). Recovering a probabilistic knowledge structure by constraining its parameter space. *Psychometrika*, 74, 83–96.

Tromp, J., Farnebäck, G. (2016). *Combinatorics of Go* (PDF). <https://tromp.github.io/go/gostate.pdf>

Walraet M., Tromp J. (2016) A Googolplex of Go Games. In: Laat A., Kusters W., van den Herik J. (eds) *Computers and Games. CG 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 10068. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-50935-8\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-319-50935-8_18)  
<https://matthieuw.github.io/go-games-number/AGoogolplexOfGoGames.pdf>

Werf, E. C. D. van der, Herik, H. J. van den, Uiterwijk, J. W. H. M. (2003). Solving Go on Small Boards. *ICGA Journal*, Vol. 26, No. 2, pp. 92–107.  
[http://erikvanderwerf.tengen.nl/pubdown/solving\\_go\\_on\\_small\\_boards.pdf](http://erikvanderwerf.tengen.nl/pubdown/solving_go_on_small_boards.pdf)

Werf, E.V., Winands, M.H. (2009). Solving Go for Rectangular Boards. J. Int. Comput. Games Assoc., 32, 77-88. <http://erikvanderwerf.tengen.nl/pubdown/SolvingGoICGA2009.pdf>

Wu, D. J. (2019). Accelerating Self-Play Learning in Go (Version 5). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1902.10565>

Zanon, P. (1996). The Opposition of the Literati to the Game of Wei Qi in Ancient China. Asian and African Studies, 5.

## Ringraziamenti

Desidero dedicare un ringraziamento particolare a Sofia Malatesta per la preziosa collaborazione nella promozione del questionario online verso la comunità dei giocatori di Go italiana ed internazionale.