Università degli Studi di Padova
Tesi di Laurea in Matematica
a.a. 2001-2002

Sulla Topologia Simplettica di Claude Viterbo Applicazioni al Calcolo delle Variazioni

Laureanda: Olga Bernardi

Relatore: Ch.mo Prof. Franco Cardin

Ringrazio vivamente i Proff. Franco Cardin, Giuseppe De Marco e Claude Viterbo per il paziente aiuto prestatomi.

Indice

0.1 Introduzione

Il calcolo delle variazioni classico —classico, almeno nel senso della Meccanica— indaga sostanzialmente sull'esistenza e la classificazione dei punti estremali del funzionale (**Principio Variazionale di Hamilton**)

$$J : q(\cdot) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

definito in qualche opportuno spazio di curve (per esempio H^1) ad estremi fissi, oppure in $\mathbb{S}^1$. E' un risultato largamente noto che condizioni di convessità su L rispetto alle $\dot{q}$, e via via condizioni sempre più deboli, producano una teoria di esistenza e di informazione sulla 'qualità' dei punti stazionari, tipicamente minimi locali, la cui ostruzione all'esserlo è data dalla presenza di punti coniugati e dalla teoria di Morse che amministra tutto ciò. E' abbastanza popolare pertanto tutta una serie di condizioni (appunto, a partire dalla convessità) che portano il funzionale sopra scritto ad essere inferiormente limitato, e dunque producente un minimo. Va notato che, indicata con Q la varietà delle configurazioni, $q \in Q$, l'ambiente geometrico naturale è il fibrato tangente TQ di Q. Uno dei punti più alti e importanti di tale costruzione risiede proprio nella sopra accennata teoria di Morse: lo spazio negativo della forma Hessiana J'' valutata su un punto-curva critico γ di J, $J'(\gamma) = 0$, è esattamente il numero (contato con le molteplicità) dei punti coniugati su γ. Esiste però un ambiente geometrico alternativo al TQ su cui edificare il calcolo delle variazioni: tale ambiente è il fibrato co-tangente T^*Q, il funzionale coniugato a J è dato ora da (**Principio Variazionale di Hamilton-Helmholtz**)

$$A : (q(\cdot), p(\cdot)) \mapsto \int_{t_0}^{t_1} [p(t) \cdot \dot{q}(t) - H(q(t), p(t), t)]dt.$$

Qui, la funzione Hamiltoniana H è la trasformata di Legendre della Lagrangiana L. Da un lato, è ben noto che T^*Q è geometricamente molto più ricco di TQ, dato che risulta essere proprio lo spazio prototipo delle varietà simplettiche, e dunque si propone quale nuovo candidato per porgere descrizioni più profonde del problema variazionale. Ma, d'altro lato, il funzionale A in tale nuovo ambiente non risulta nè inferiormente nè superiormente limitato, comunque formuliamo ipotesi su H. Ciononostante, è stato proprio da questo impianto che negli anni '70 ha ricevuto un nuovo impulso il calcolo delle variazioni (o, almeno, una sua importante componente): accadde che Rabinowitz, Weinstein, Ambrosetti in Italia, e altri, attaccassero problemi variazionali legati al funzionale A, fondamentalmente usando (e dando luce nuova mediante) la teoria di Lusternik e Schnirelman. Quest'ultimi erano matematici russi degli anni '30, che elaborarono una teoria topologico variazionale (di min-max) 'concorrenziale' —o, più esattamente, 'complementare'— a quella che più o meno negli stessi anni Morse sviluppava negli USA. Per esempio, il ben noto principio variazionale 'duale' di Ambrosetti-Rabinowitz (cf. [2]) si può collocare in tale contesto/percorso culturale.

Ma qual è dunque in tale ambiente l'ingresso della topologia simplettica? Qual è il suo ruolo? Come ben chiariscono McDuff e Salamon nell'Introduzione del loro trattato "Introduction to Symplectic Topology ", le varietà simplettiche non hanno invarianti locali: in piccolo, esse sono *tutte* assimilabili (teorema di Darboux) a $\mathbb{R}^{2n}$ con la struttura standard $dp_i \wedge dq^i$, fatto questo ben diverso per esempio da quanto accade nelle varietà 'riemmaniane' ove la curvatura svolge invece un ruolo chiave nella classificazione locale. Dunque, lo studio topologico delle varietà simplettiche discerne eventualmente invarianti globali, si occupa del comportamento di simplettomorfismi *lontani dall'identità*.

Torniamo a Rabinowitz e Weinstein: il primo, nel 1978 (cf. [16]) mostra che su ogni superficie stellata di co-dimensione uno (cioè bordo di un dominio stellato rispetto ad un punto in $\mathbb{R}^{2n}$) esiste un'orbita Hamiltoniana *periodica*; il secondo, nello stesso anno, (cf. [22]) mostra che ciò accade su ogni ipersuperficie convessa (cioè bordo di un convesso in $\mathbb{R}^{2n}$). Weinstein definisce le ipersuperfici di tipo contatto e formula una congettura:

In ogni ipersuperficie S di tipo contatto e soddisfacente a $H^1(S) = 0$ esiste un'orbita periodica.

Questa è stata risolta ampiamente e brillantemente da Claude Viterbo nel 1987 (cf. [18]), nel senso che le condizioni co-omologiche presunte da Weinstein ($H^1(S) = 0$) non sono state necessarie per la risoluzione.

Ivar Ekeland, nel suo bellissimo recente libro divulgativo "Il Migliore dei Mondi Possibili. Matematica e destino " (Bollati-Boringhieri), afferma (a pag. 168) che quello di Viterbo può essere considerato il più importante risultato nel Calcolo delle Variazioni della seconda metà del secolo XX.

Hofer e Zehnder, nello stesso anno (cf. [12]), pubblicano una dimostrazione parzialmente alternativa a quella di Viterbo: addirittura, giungono nel 1994 alla pubblicazione del trattato "Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics" che, oltre ad altri risultati, riprende in maniera quasi 'didattica' tutta la matematica necessaria alla loro dimostrazione della congettura di Weinstein.

Lo stesso Viterbo, nel 1992, riconsidera la materia della topologia simplettica in un lungo articolo sui Math. Annalen (cf. [21]) in cui mette in evidenza il profondo legame tra le funzioni generatrici delle sottovarietà Lagrangiane e i punti fissi di mappe simplettiche associate ad Hamiltoniane a supporto compatto. Lo studio di tale complesso lavoro è parte sostanziale di questa tesi di laurea. La completa chiarificazione (ed esibizione di tutte le dimostrazioni) del primo capitolo dello stesso è stata recentemente materia della tesi di dottorato (all' Université Paris 7) di Theret (cf. [17]). Ciononostante, qui Viterbo non 'ridimostra' il suo teorema del 1987 in questo nuovo ambito di grande respiro: le sue applicazioni vertono su ridimostrazioni semplificate di certi altri risultati (problema del 'cammello simplettico') di Gromov.

Nell'ultimo capitolo di questa tesi si affronta la risoluzione della congettura di Weinstein in tale nuovo ambiente. La dimostrazione risulta autoconsistente, nel senso che tutta la matematica necessaria è quella presente nell'articolo di Viterbo. Non vengono utilizzati infatti ulteriori argomenti variazionali nè la teoria del grado di Leray - Schauder, che giocano invece un ruolo fondamentale nella dimostrazione di Hofer e Zehnder (cfr. [12]). Si utilizzano invece delle proprietà fondamentali delle ' capacità ' di Viterbo, le cui dimostrazioni sono qui completamente esposte in tutti i dettagli.

0.2 Contenuti

Nel **Capitolo 1** viene data la definizione di funzione generatrice S per una sottovarietà Lagrangiana L nel fibrato cotangente di una varietà chiusa (denotata con B). Si dimostra che la scelta di tale funzione generatrice è essenzialmente unica. Ad ogni sottovarietà Lagrangiana L di T^*B e ad ogni classe u nello spazio di co-omologia di B si associa poi un numero reale $c(u, L)$ (cf. **Capitolo 2**). Mediante i richiami riportati sulla teoria di Lusternik - Schnirelman e sulla co-omologia relativa, si mostra che $c(u, L)$ è un valore critico della funzione generatrice S. Nel **Capitolo 3** si associa ad ogni simplettomorfismo ψ di $\mathbb{R}^{2n}$, a supporto compatto e isotopo all'identità (nell'insieme dei simplettomorfismi di $\mathbb{R}^{2n}$ a supporto compatto), una sottovarietà Lagrangiana $\widetilde{\Gamma}_\psi$ di $T^*\mathbb{S}^{2n}$, che coincide sostanzialmente con la compattificazione del grafico di ψ. La costruzione di $c(u, L)$ fatta precedentemente conduce alla definizione di due numeri $c_+(\psi)$ e $c_-(\psi)$. Alla fine di questo capitolo si giunge ad un importante risultato sull' *esistenza di punti fissi* per il simplettomorfismo ψ (cf. teorema 3.2.1): esistono due punti fissi di ψ (denotati con x_+ e x_-), necessariamente distinti se $\psi \neq \mathrm{id}$, che realizzano una rappresentazione integrale di $c_+(\psi)$ e $c_-(\psi)$ rispettivamente, mediante il funzionale A sopra citato. Il **Capitolo 4** è interamente dedicato a dimostrare le proprietà più rilevanti dei numeri $c_+(\psi)$ e $c_-(\psi)$. Per un simplettomorfismo ψ di $\mathbb{R}^{2n}$, flusso al tempo $t = 1$ di una Hamiltoniana non negativa e a supporto compatto, si ottiene $c_-(\psi) = 0$. Proprio tali simplettomorfismi di $\mathbb{R}^{2n}$ sono l'oggetto di studio del **Capitolo 5**. Utilizzando molte proprietà di $c_+(\psi)$ dimostrate precedentemente, si giunge ad un "conteggio" dei punti fissi di ψ in supp ψ di periodo k: il numero di tali punti fissi (contati con le loro molteplicità) risulta maggiore o uguale al periodo k fissato. In particolare, ψ ha almeno un punto fisso di periodo 1 contenuto in supp ψ. Utilizzando tale risultato di topologia simplettica, nel **Capitolo 6** si ridimostra la congettura di Weinstein in $\mathbb{R}^{2n}$ dotato della struttura simplettica standard (congettura già risolta, tramite altre tecniche, dallo stesso Viterbo nel 1987):

In ogni ipersuperficie $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, che sia di tipo contatto, esiste (almeno) un'orbita periodica.

Più in dettaglio, una ipersuperficie compatta e orientabile $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ è di tipo contatto se esiste un campo vettoriale X, definito in un intorno U di S, con le seguenti due proprietà:

- In U la derivata di Lie della 2-forma ω rispetto a X vale: $L_X\omega = \omega$,
- X è campo vettoriale trasversale a S.

Dall'orientabilità si deduce che S è di tipo energia, cioè che esiste una funzione Hamiltoniana H, definita su $\mathbb{R}^{2n}$, tale che $S = H^{-1}(c)$. Inoltre per un'ipersuperficie regolare e orientabile di $\mathbb{R}^{2n}$, indipendentemente dalla funzione Hamiltoniana per cui $S = H^{-1}(c)$, le soluzioni Hamiltoniane su S sono le curve:

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto x(t) \end{aligned}$$

che soddisfano a $\omega(\dot{x}(t), v) = 0$, $\forall v \in T_{x(t)}S$.
Utile è ricordare che se S è superficie di energia regolare per due Hamiltoniane H e $\bar{H}$ allora i campi vettoriali X_H e $X_{\bar{H}}$ hanno le stesse soluzioni su S, a meno di riparametrizzazione del tempo. In particolare, anche le orbite periodiche relative a X_H e $X_{\bar{H}}$ coincidono su S.
Sia ora $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ una ipersuperficie regolare e di tipo contatto ed X il campo vettoriale ad essa associato. Denotato con ψ_X^t il flusso di X, è possibile costruire una vicinanza tubolare N_S di S:

$$N_S =: \bigcup_{\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)} \psi_X^\epsilon(S) =: \bigcup_{\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)} S^\epsilon.$$

La tecnica per ri-ottenere il risultato di Weinstein, è stata quella di definire una Hamiltoniana H con le seguenti proprietà:

- H è Hamiltoniana non negativa il cui supporto coincide con la chiusura di N_S,
- H ammette S come fibra, cioè per un opportuno $c \in \mathbb{R}^{2n}$: $H^{-1}(c) = S$,
- $\nabla H(x) \neq 0 \ \forall x \in S$.

Denotato con $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ il flusso di H, il teorema di Viterbo ci assicura che

esiste un'orbita periodica di periodo 1 (un punto fisso di ϕ_1) contenuta in N_S (sia essa $\gamma(t)$).

Infine tale soluzione Hamiltoniana $\gamma(t)$ può essere trasportata su S tramite il flusso del campo vettoriale di contatto, ottenendo così un'orbita periodica contenuta esattamente sull'ipersuperficie S, inizialmente assegnata in $\mathbb{R}^{2n}$.

Capitolo 1

1.1 Il teorema di unicità di Viterbo sulle funzioni generatrici

Riportiamo in questo paragrafo un risultato di unicità per funzioni generatrici quadratiche all'infinito che generano una sottovarietà Lagrangiana isotopa alla sezione nulla, nel fibrato cotangente di una varietà chiusa (cioè compatta e senza bordo). Tutto ciò permette di definire le capacità per gli aperti di $\mathbb{R}^{2n}$.

1.1.1 Definizioni base

In tutta questa parte B denota una varietà n-dimensionale, connessa, liscia e chiusa. Funzioni e mappe saranno sempre assunte di classe C^∞. Il fibrato cotangente T^*B è pensato dotato della 2-forma simplettica standard $\omega = -d\lambda$, dove λ è la 1-forma di Liouville. In coordinate locali $(q,p) = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$, abbiamo:

$$\lambda = pdq = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$$

e

$$\omega = dq \wedge dp = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

Una **sottovarietà** $L \subset T^*B$ è detta **Lagrangiana** se:

- $\dim L = \dim B$
- $i_L^* \omega = 0$ dove i_L denota l'inclusione.

Sia X un campo vettoriale sulla varietà B e sia

$$\Phi_X^t : I \subseteq \mathbb{R} \times B \longrightarrow B$$

il flusso associato.
Il **prodotto interno** di forme associa alla $(k+1)$ - forma ω la k - forma $i_X\omega$ definita nel modo seguente:

$$i_X\omega(v_1, ..., v_k) =: \omega(X, v_1, ..., v_k).$$

La **derivata di Lie** di forme associa ad una k - forma ω la k - forma $L_X\omega$ nel modo seguente:

$$L_X\omega =: \frac{d}{dt}[(\Phi_X^t)^*\omega]|_{t=0}.$$

Una **isotopia simplettica** di T^*B è un cammino liscio (cioè C^∞) $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ di diffeomorfismi di T^*B in sè, tali che:

- $\phi_0 = id_{T^*B}$
- $\phi_t^*\omega = \omega \ \forall t \in [0,1]$ cioè le ϕ_t^* preservano la 2-forma.

Il suo generatore infinitesimo $X = (X_t)_{t\in[0,1]}$ soddisfa a:

$$L_{X_t}\omega = i_{X_t}d\omega + d(i_{X_t}\omega) = d(i_{X_t}\omega) = 0.$$

Quindi $i_{X_t}\omega$ risulta una 1-forma chiusa.
Una **isotopia** è detta **Hamiltoniana** quando $i_{X_t}\omega$ è globalmente esatta.

1.1.2 Funzioni generatrici

Le funzioni generatrici forniscono un modo per descrivere certe specifiche sottovarietà Lagrangiane nel fibrato cotangente.
Sia $\pi : E \longrightarrow B$ un fibrato vettoriale sopra B. Parleremo di fibrato prodotto quando $E = B \times \mathbb{R}^k$, con coordinate (q, v) e $\pi(q, v) = q$.
Il **sottofibrato coisotropo**, detto anche **polare**, $W \subset T^*E$ è definito in questo modo:

$$W = \{\xi \in T_e^*E : e \in E \text{ e } \xi = 0 \text{ su } T_e(\pi^{-1}(\pi(e)))\}$$

$(\pi^{-1}(\pi(e))$ individua la fibra contenente $e)$.

Definizione 1.1.1 *Una funzione $S : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione generatrice se il suo differenziale dS, come mappa da E in T^*E, è trasversale a W.*

Lavoriamo nel caso di fibrato prodotto cioè

$$\pi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B.$$

Se S è una funzione generatrice su $B \times \mathbb{R}^k$, la condizione di trasversalità si esprime dicendo che $0 \in (\mathbb{R}^k)^*$ è un valore regolare di $\frac{\partial S}{\partial v} : B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow (\mathbb{R}^k)^*$. Motiviamo quest'ultima affermazione.

$$\pi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$$

è tale che:

$$e = (q, v) \longmapsto q.$$

Lo spazio tangente alla fibra in $e = (q, v)$ è:

$$T_e(\pi^{-1}(\pi(e))) = \{(q, v; 0, \delta v)\}.$$

Il sottofibrato coisotropo in $e = (q, v)$ è:

$$W_e = \{(q, v; p, 0)\},$$

$$S : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Vogliamo imporre la condizione di trasversalità:
il differenziale di S è trasversale a W in T^*E.

$$\mathrm{im}(dS) = \{(q, v; \frac{\partial S}{\partial q}(q, v), \frac{\partial S}{\partial v}(q, v)) \ \forall (q, v) \in E = B \times \mathbb{R}^k\}$$

è sottovarietà di T^*E di dimensione $n + k$.

$$W = \{(q, v; p, 0)\}$$

è sottofibrato di T^*E di dimensione $2n + k$.
Inoltre per $(q, v) \in E$, abbiamo che:

$$\dim(T_{(q,v)} T^*E) = 2n + 2k.$$

Sia $(q', v') \in \mathrm{im}(dS)$. Allora:

$$T_{(q',v')}\mathrm{im}(dS) =$$

$$\{(dq', dv'; \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q}(q', v')dq + \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial q}(q', v')dv, \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial v}(q', v')dq + \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial v}(q', v')dv)\}$$

è sottospazio in TT^*E (attaccato a $(q^{'}, v^{'})$) di dimensione $n+k$
($dq^{'}$ e $dv^{'}$ sono arbitrari).
Analogamente, per $(q^{''}, v^{''}) \in W$:

$$T_{(q^{''}, v^{''})}W = \{(dq^{''}, dv^{''}; dp, 0)\}$$

è sottospazio di TT^*E di dimensione $2n+k$
($dq^{''}$, $dv^{''}$ e dp sono arbitrari).
Pensiamo ora ai precedenti due spazi tangenti in un punto comune $e =$
$= (q, v) \in \mathrm{im}(dS) \cap W$:
$T_{(q,v)}\mathrm{im}(dS)$ e $T_{(q,v)}W$ devono generare tutto $T_{(q,v)}T^*E$.
Ciò accade se la mappa lineare:

$$(dq, dv) \longmapsto \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial v^\alpha}(q, v)dq^i + \frac{\partial^2 S}{\partial v^\beta \partial v^\alpha}(q, v)dv^\beta|_{(q,v): \frac{\partial S}{\partial v}(q,v)=0}$$

è a rango massimo ($= k$), come ora vediamo.
Ciò è equivalente a chiedere che la mappa lineare:

$$B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

tale che:

$$(q, v) \longmapsto \frac{\partial S}{\partial v}(q, v) =: G(q, v)$$

abbia $0 \in (\mathbb{R}^k)^*$ come valore regolare.
Infatti:

$$\mathrm{rk}(dG|_{G=0}) = \max$$

equivale a:

$$\mathrm{rk}(\tfrac{\partial^2 S}{\partial q \partial v}(q, v), \tfrac{\partial^2 S}{\partial v \partial v}(q, v))|_{(q,v): \frac{\partial S}{\partial v}(q,v)=0} = \max = k.$$

Ciò è quanto volevamo dimostrare.
Come conseguenza otteniamo che $\Sigma_S = \{(q, v) \in B \times \mathbb{R}^k : \frac{\partial S}{\partial v}(q, v) = 0\}$ risulta una sottovarietà di $B \times \mathbb{R}^k$ di dimensione pari a $\mathrm{dim}B$.
Inoltre la mappa $i_S : \Sigma_S \longrightarrow T^*B$:

$$(q, v) \longmapsto (q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, v))$$

è tale che $i_S(\Sigma_S)$ è una sottovarietà Lagrangiana.
Mostriamo che la 2-forma ω è nulla su $i_S(\Sigma_S)$:

$$-\omega|_{i_S(\Sigma_S)} = -i_S^* \omega,$$

$$= i_S^* \, d\lambda = d(i_S^* \lambda),$$

(il pull-back commuta con il differenziale)

$$= d(\frac{\partial S}{\partial q}(q,v)|_{\frac{\partial S}{\partial v}(q,v)=0}) = d^2 S = 0.$$

Ricordiamo poi che dim $i_S(\Sigma_S) = \dim B$ (dalla trasversalità).
Siamo così pronti a dare la seguente:

Definizione 1.1.2 *Sia L una sottovarietà Lagrangiana immersa in T^*B. Diciamo che una funzione generatrice S genera L se i_S è un diffeomorfismo da Σ_S ad L.*

Diamo ora l'utile definizione di funzione generatrice quadratica all'infinito, sinteticamente: f.g.q.i.

Definizione 1.1.3 *Sia $\pi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$ un fibrato vettoriale sopra B.*

- *Una **forma quadratica non degenere** su E è una mappa*

$$Q : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$e = (q,v) \longmapsto \frac{1}{2}\langle Q(b)v, v\rangle$$

che è quadratica non degenere quando ristretta alle fibre di π.

- *Una **funzione generatrice** $S : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è **quadratica all'infinito** se esiste una forma quadratica non degenere $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\frac{\partial S}{\partial v} - \partial_v Q : E \longrightarrow B \times (\mathbb{R}^k)^*$ è limitato, dove ∂_v denota la derivata verticale lungo la fibra.*
Più precisamente:

$$S : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} : E \longrightarrow B \times (\mathbb{R}^k)^*$$

$$(q,v) \longmapsto (q, \frac{\partial S}{\partial v}(q,v))$$

(per esempio, $\frac{\partial S}{\partial v^\alpha}(q,v) = Q_{\alpha\beta}(q)v_\beta + B_\alpha e^{-|v|^2}$, B essendo una costante).
Allora esiste c tale che:

$$|\frac{\partial S}{\partial v}(q,v) - Q(q)v| < c < \infty \;\; \forall v \in \mathbb{R}^k, \;\; \forall q \in B.$$

- *Se $S = Q$ al di fuori di un insieme compatto in $E = B \times \mathbb{R}^k$ che contiene la sezione nulla $B \times \{0\}$, diremo che S è **esattamente quadratica all'infinito**.*
  Ciò equivale a dire che esiste $K > 0$ tale che:
  $$S(q, v) = \frac{1}{2}\langle Q(q)v, v\rangle$$
  $\forall v \in \mathbb{R}^k$ *con* $|v| > K,\ \forall q \in B$.

- *Una funzione esattamente quadratica all'infinito è **speciale** se la forma quadratica associata Q è indipendente dalla prima coordinata di $E = B \times \mathbb{R}^k$. Cioè:*
  $$S(q, v) = \frac{1}{2}\langle Qv, v\rangle$$
  e ciò vale $\forall v \in \mathbb{R}^k$ tale che $|v| > K,\ \forall q \in Q$
  (Notare che Q è indipendente da $q \in B$).

Le funzioni generatrici esattamente quadratiche all'infinito speciali verranno denominate per semplicità **funzioni generatrici speciali**.
Ora consideriamo le **operazioni base** sulle funzioni generatrici.

Definizione 1.1.4 *Sia $\pi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$ un fibrato vettoriale e sia $S : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$ una funzione generatrice.*

- *Sia $c \in \mathbb{R}$. Si pone $\bar{S} = S + c : E \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *Sia $\Phi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E = B \times \mathbb{R}^k$ un diffeomorfismo tale che $\pi \circ \Phi = \pi$, allora si pone $\bar{S} = S \circ \Phi : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$.*

- *Se si considera $E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B$ dotato di un'altra forma quadratica non degenere $\bar{Q}$, si definisce $\bar{S} = S \oplus \bar{Q} : E \oplus E \longrightarrow \mathbb{R}$. Questa operazione prende il nome di **stabilizzazione**.*

Nota Il diffeomorfismo Φ sarà necessariamente della forma $\Phi(q, v) = (q, \Phi(q, v))$.
In tutti i casi si vede abbastanza facilmente che $\bar{S}$ risulta una funzione generatrice che genera la stessa sottovarietà Lagrangiana.

Definizione 1.1.5 *Due **funzioni generatrici** sono **equivalenti** se possono essere rese uguali da una successione (finita) di operazioni base.*

Notiamo che i punti critici di due funzioni generatrici equivalenti sono gli stessi, mentre gli insiemi dei valori critici differiscono per una costante additiva.

Sarebbe inoltre comodo poter lavorare soltanto con f.g. speciali.
La proprietà per una funzione generatrice di essere speciale non è preservata da nessuna delle operazioni base. Ritorna spesso utile questa:

Proposizione 1.1.1 *Sia B una varietà connessa, liscia e chiusa. Qualsiasi f.g.q.i. per B è equivalente ad una f.g. speciale.*

(Vedere [17], proposizione 2.12).
Nelle prossime sezioni elenchiamo una serie di risultati, tutti dimostrati nell'articolo di Theret ([17]), che ci permetteranno di costruire punti critici di f.g. con la tecnica min-max.

1.1.3 Teoremi di esistenza e unicità

Sia B una varietà chiusa e $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia Hamiltoniana di T^*B.

Teorema 1.1.1 ***(Teorema di esistenza di Sikorav)*** *Sia L una sottovarietà Lagrangiana chiusa in T^*B, che ammette una f.g.q.i. Allora $\phi_1(L)$ ha una f.g.q.i.*

La sezione nulla O_B di T^*B, che spesso identificheremo con B, ha ovviamente una f.g.q.i. e quindi questo teorema assicura che $\phi_1(B)$ ammette sempre una f.g.q.i. Una f.g.q.i. per O_B è ad esempio:

$$S(b,v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle.$$

L'idea di Viterbo è stata quella di usare i valori critici di una f.g.q.i. per definire invarianti simplettici collegati a $\phi_1(B)$.

Per fare questo, bisogna però riuscire a correlare qualitativamente le possibili f.g.q.i. per una data Lagrangiana.

Teorema 1.1.2 ***(Teorema di unicità di Viterbo)*** *Le funzioni generatrici quadratiche all'infinito di $\phi_1(B)$ sono tutte equivalenti, nel senso della definizione 1.1.5.*

Corollario 1.1.1 *Sia B una varietà chiusa. Allora le f.g.q.i. della sezione nulla di T^*B sono tutte equivalenti, cioè O_B ha la proprietà di unicità.*

1.1.4 Invarianza della proprietà di unicità sotto isotopie

Poniamo $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(T^*B)$ = l'insieme delle sottovarietà Lagrangiane di T^*B che sono diffeomorfe a B ed ammettono una f.g.q.i. Una data sottovarietà Lagrangiana $L \in \mathfrak{L}$ ha la proprietà di unicità se tutte le sue f.g.q.i. sono equivalenti. Seguendo la notazione di Viterbo, sia $G(L)$ = l'insieme delle f.g. speciali per L.

Teorema 1.1.3 *Supponiamo che $L \in \mathfrak{L}$ abbia la proprietà di unicità, e $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ sia una isotopia Hamiltoniana di T^*B. Allora $L_1 = \phi_1(L)$ ha la proprietà di unicità.*

Sia $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia Hamiltoniana di T^*B. Allora, per il teorema 1.1.3, $L = \phi_1(O_B)$ ha ancora la proprietà di unicità.
Conseguenze Sia B una varietà chiusa. Siano S_1, S_2 due f.g.q.i. che generano la stessa sottovarietà Lagrangiana L di T^*B. Supponiamo inoltre che $L = \phi_1(O_B)$, dove $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ è una isotopia Hamiltoniana di T^*B. Sappiamo dal corollario 1.1.1 e dal teorema 1.1.3 che $\phi_1(O_B)$ ha la proprietà di unicità. Quindi S_1 ed S_2 risultano equivalenti. Di conseguenza per queste due funzioni i punti critici sono gli stessi, invece gli insiemi dei valori critici differiscono per una costante additiva.

1.2 Richiami di coomologia relativa, il teorema di escissione

1.2.1 Coomologia relativa

Introduciamo la coomologia di de Rham relativa (si veda per esempio [5], pagg 78-79). Consideriamo due varietà M, N con $N \subseteq M$.
Sia

$$i : N \hookrightarrow M$$

l'inclusione.
$\Omega^*(M) =$ l'insieme delle forme differenziali su M.
Analogamente per $\Omega^*(N)$.
Definiamo il complesso di forme:

$$\Omega^q(M, N) =: \Omega^q(M) \oplus \Omega^{q-1}(N)$$

e il seguente differenziale esterno:

$$d^q : \Omega^q(M) \oplus \Omega^{q-1}(N) \longrightarrow \Omega^{q+1}(M) \oplus \Omega^q(N)$$

$$d^q(\omega, \theta) =: (d^q\omega, i^*\omega - d^q\theta).$$

Denoteremo, quando non crea ambiguità, d^q con d.
La forma relativa (ω, θ) è **relativamente chiusa** se $d(\omega, \theta) = 0$, cioè se ω è chiusa in M, la sua restrizione a N è esatta e θ è una sua primitiva ($i^*\omega = d\theta$).
La forma relativa (ω, θ) è **relativamente esatta** se esiste $(\bar{\omega}, \bar{\theta}) \in \Omega^{q-1}(M) \oplus$ $\oplus \Omega^{q-2}(N)$ tale che $d(\bar{\omega}, \bar{\theta}) = (\omega, \theta)$, più precisamente:

$$\omega = d\bar{\omega} \quad , \quad \theta = i^*\bar{\omega} - d\bar{\theta}.$$

Notiamo che $d^2 = 0$:

$$d^2(\omega, \theta) = d(d\omega, i^*\omega - d\theta) = (d^2\omega, i^*d\omega - d(i^*\omega - d\theta)) = (0, 0).$$

La coomologia relativa è data dagli spazi quozienti:

$$H^q(M, N) = \frac{\text{Ker } d^q}{\text{Im } d^{q-1}} = \frac{Z^q(M, N)}{B^q(M, N)}.$$

Usiamo la notazione:

$$B^*(M, N) = \bigoplus_{q=0}^{\dim M} B^q(M, N) \ , \ H^*(M, N) = \bigoplus_{q=0}^{\dim M} H^q(M, N), \text{ecc.}$$

Gli elementi di $H^*(M, N)$ sono così classi di equivalenza di elementi $(\omega, \theta)+$ $+B^*(M, N)$, con $(\omega, \theta) \in Z^*(M, N)$.

1.2.2 Teorema di escissione

Ci sarà utile in seguito il seguente teorema (si veda per esempio [9], pag 173):

Teorema 1.2.1 ***(Teorema di escissione)*** *Siano N una sottovarietà chiusa di dimensione m di M e P una sottovarietà chiusa di dimensione m di M contenuta nell'interno di N e sia U l'interno di P. L'inclusione*

$$j : (M - U, N - U) \longrightarrow (M, N)$$

induce l'isomorfismo

$$j^* : H(M, N) \longrightarrow H(M - U, N - U)$$

L'enunciato ci dice in sostanza che si può togliere l'insieme U nelle ipotesi poste: se U non va a toccare la frontiera di N, allora U può essere eliminato senza alterare la coomologia relativa.

1.2.3 Retratti di deformazione e coomologia di de Rham

Ricordiamo le nozioni di omotopia e di retratto di deformazione (si veda per esempio [5], pagg 35-36). Siano M e N due varietà. Una omotopia tra due mappe f e g da M a N è una mappa $F : M \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow N$ tale che:

$$F(x, t) = f(x) \text{ per } t \geq 1 \quad , \quad F(x, t) = g(x) \text{ per } t \leq 0.$$

Supponiamo ora che $N \subseteq M$.
Se $i : N \hookrightarrow M$ è l'inclusione e $r : M \longrightarrow N$ è una mappa che induce l'identità su N, allora i è detta **retrazione** di M su N. Equivalentemente, $r \circ i : N \longrightarrow N$ risulta la mappa identità di N. Inoltre, se $i \circ r : M \longrightarrow M$ è omotopa all'identità su M, N sarà detta **retratto di deformazione** di M. Utile è il seguente:

Teorema 1.2.2 *Se N è un retratto di deformazione di M, allora N ed M hanno la stessa coomologia di de Rham.*

1.3 Dualità di Poincaré e isomorfismo di Thom

1.3.1 Dualità di Poincaré

Sia M^n una varietà orientabile di dimensione n.
Denotiamo con $H_c^{n-h}(M^n)$ le $n-h$ forme su M^n a supporto compatto.
Si verifica che la mappa:

$$H^h(M^n) \times H_c^{n-h}(M^n) \longrightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$(\theta, \omega) \longmapsto \int_M \theta \wedge \omega$$

- È bilineare, non degenere
- È coomologica (cioè non dipende dai rappresentanti).

Ricordiamo inoltre il seguente fatto:
La mappa mette in dualità i due spazi fattore. Vale cioè il seguente isomorfismo:

$$H^h(M^n) \cong (H_c^{n-h}(M^n))^*$$

Consideriamo ora l'immersione di varietà (orientabili):

$$\pi : \Sigma^{n-h} \hookrightarrow M^n,$$

con $h < n$.
Prendiamo particolari forme lineari sullo spazio vettoriale $H_c^{n-h}(M^n)$:

$$\theta^{n-h} \longmapsto \int_{\Sigma^{n-h}} \pi^* \theta^{n-h}$$

(Anche questa mappa risulta coomologica).
Tale forma lineare deve corrispondere per dualità ad un elemento in $H^h(M^n)$.
Esso sarà denotato $t^h \in H^h(M^n)$.
Accade che per ogni $\theta^{n-h} \in H_c^{n-h}(M^n)$ è soddisfatta la relazione:

$$\int_{\Sigma^{n-h}} \pi^* \theta^{n-h} = \int_{M^n} t^h \wedge \theta^{n-h}.$$

Diamo allora la seguente:

Definizione 1.3.1 *La classe $t^h \in H^h(M^n)$ è detta il duale di Poincaré di Σ^{n-h}.*

Ricordiamo ora il **Principio di localizzazione**:
Si possono prendere rappresentanti di t^h che hanno supporto vicino a Σ^{n-h} quanto vogliamo (tale supporto contiene Σ^{n-h} nel suo interno).
Notare che si deve supporre $\partial\Sigma^{n-h} = \emptyset$, altrimenti cade l'aspetto coomologico di:

$$\theta^{n-h} \longmapsto \int_{\Sigma^{n-h}} \pi^* \theta^{n-h}$$

1.3.2 Isomorfismo di Thom

Sia ora Σ^h la sezione nulla di un fibrato $\pi : M^n \longrightarrow \Sigma^h$, le cui fibre avranno dimensione $k = n - h$.
Denotiamo con $t^{n-h} = t^k$ il duale di Poincaré di Σ^h in M^n. Le forme nella classe t^k sono, per il principio di localizzazione, a supporto compatto lungo le fibre verticali ed inducono il seguente isomorfismo graduato, detto di Thom:

$$H_c^*(M^n) \cong H^{*-k}(\Sigma^h)$$

$$H^{*-k}(\Sigma^h) \longrightarrow H_c^*(M^n)$$

tale che:

$$\alpha \longmapsto t^k \wedge \pi^* \alpha$$

1.4 Sottovarietà Lagrangiane e funzioni generatrici speciali

1.4.1 Preliminari e notazioni

D'ora in poi supporremo che le funzioni generatrici siano normalizzate in modo che l'indeterminazione per una costante sia rimossa. Di conseguenza, non solo i punti critici ma anche i valori critici per due funzioni generatrici equivalenti coincidono. Supponiamo inoltre che B sia una varietà compatta e connessa. H^* sarà la coomologia a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$.
Consideriamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \{&\text{Sottovarietà Lagrangiane compatte di } T^*B \\ &\text{Hamiltonianamente isotope alla sezione nulla}\}, \\ = \{&L \subset T^*B \text{ tali che } L \text{ è compatta ed esiste } (\varphi_t)_{t\in[0,1]} \\ &\text{isotopia Hamiltoniana per cui vale che } L = \varphi_1(O_B)\}.\end{aligned}$$

Per $L \in \mathcal{L}$ consideriamo:

$$\begin{aligned}G(L) = \{&\text{Funzioni generatrici speciali} \\ &\text{che generano la sottovarietà Lagrangiana } L\}.\end{aligned}$$

Se $S \in G(L)$ allora S coincide con la forma quadratica non degenere Q_∞ all'infinito e Q_∞ è indipendente da B.
Cioè: $S(q,v) = \frac{1}{2}\langle Q_\infty v, v\rangle$ e ciò vale $\forall v \in \mathbb{R}^k$ con $|v| > K,\ \forall q \in B$.

Nota $Q_\infty^t = Q_\infty$ e quindi lo spettro di Q_∞ è reale. Di conseguenza esiste R (matrice $k \times k$) con $R^t R = \mathrm{id}$ (cioè rotazione), tale che: $R^t Q_\infty R =$ $= \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_k)$.
Poi si può operare con una mappa da $B \times \mathbb{R}^k$ in sè $((q,v) \longmapsto (q, \xi = Av))$ di modo che : $\frac{1}{2}\langle Q_\infty v, v\rangle$ risulti uguale a $|\xi^+|^2 - |\xi^-|^2$.

Considerando quanto appena visto nella nota per Q_∞ e ricordando che S coincide con Q_∞ all'infinito, possiamo affermare che $\forall\ q \in B, \forall\ v\ :\ |v| > K$ esiste un cambio di coordinate:

$$B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B \times \mathbb{R}^k : (q,v) \longmapsto (q, \xi = Av)$$

tale che:

$$S(q,\xi) = Q_\infty(q,\xi) = |\xi^+|^2 - |\xi^-|^2.$$

In tal caso abbiamo che:
$$\xi = \xi^+ \oplus \xi^-$$
con $\xi^+ \in \mathbb{R}^l$ e $\xi^- \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{k-l}$.
Il sistema di coordinate $\{B \times \mathbb{R}^m\}$ sarà chiamato il fibrato negativo E_∞^- di Q_∞.

1.4.2 Nozioni di coomologia di un fibrato

Prima di continuare, ricordiamo alcune nozioni di coomologia di un fibrato (si veda per esempio [5], pag 47 e pagg 59-60).
Consideriamo M ed N varietà.
Sia $\pi : M \times N \longrightarrow M$ un fibrato sopra M.
Se vogliamo conoscere la coomologia di $M \times N$ dobbiamo utilizzare la formula di *Künneth*: la coomologia di un prodotto di varietà M ed N coincide con il prodotto tensoriale delle coomologie delle due varietà:

$$H^*(M \times N) = H^*(M) \otimes H^*(N).$$

Ciò significa che, per ogni n, si ha:

$$H^n(M \times N) = \bigoplus_{p+q=n} H^p(M) \otimes H^q(N).$$

Consideriamo ora tale caso particolare:

$$\pi : M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M.$$

La mappa $i : q \longmapsto i(q) = (q, 0)$ immerge M diffeomorficamente in $M \times \mathbb{R}^k$.
Poichè $M \times \{0\}$ risulta un retratto di deformazione di $M \times \mathbb{R}^k$, abbiamo che la coomologia di M è isomorfa alla coomologia di $M \times \mathbb{R}^k$, cioè:

$$H^*(M) \cong H^*(M \times \mathbb{R}^k).$$

Questo risultato non è in generale vero per la coomologia a supporto compatto (si veda ancora Bott-Tu a pag 60).

1.4.3 Proprietà delle funzioni generatrici speciali

Abbiamo prima definito $E_\infty^- = \{B \times \mathbb{R}^m\}$, il fibrato negativo di Q_∞.
Sia $E = B \times \mathbb{R}^k$. Se $S \in G(L)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo:

$$E^\lambda =: \{e \in E \text{ tali che } S(e) \leq \lambda\}$$

(E^λ è detto **insieme di sottolivello**) e denotiamo con $\mathbb{D}(E^-_\infty)$ ed $\mathbb{S}(E^-_\infty)$ i fibrati disco e sfera associati ad E^-_∞:

$$\mathbb{D}(E^-_\infty) = B \times \{\xi^- \in \mathbb{R}^m \ : | \ \xi^- \ |\leq 1\} = B \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^m),$$

$$\mathbb{S}(E^-_\infty) = B \times \{\xi^- \in \mathbb{R}^m \ : | \ \xi^- \ |= 1\} = B \times \mathbb{S}(\mathbb{R}^m).$$

Notiamo inoltre che se S coincide con Q_∞ all'infinito, allora per λ positivo grande abbastanza la coomologia delle coppie:

$$(E^\lambda, E^\mu), (E^\mu, E^{-\lambda})$$

non dipende da λ. Possiamo allora scrivere E^∞ , $E^{-\infty}$ per denotare E^λ , $E^{-\lambda}$ nel caso di λ grande abbastanza, dato che in tal caso la struttura topologica di E^λ e di $E^{-\lambda}$ rimane inalterata.
Proviamo ora la seguente:

Proposizione 1.4.1

$$H^*(B) \cong H^*(E^\infty, E^{-\infty}).$$

Nota L'isomorfismo, denotato con T, sarà ancora chiamato isomorfismo di Thom.

Dimostrazione
$Q_\infty(q,\xi) = Q_\infty(\xi) =| \ \xi^+ \ |^2 - | \ \xi^- \ |^2$ con $(\xi^+, \xi^-) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$.
$E^\infty = B \times \{\xi = (\xi^+, \xi^-) \ : \ Q_\infty(\xi) \leq \lambda$ per λ positivo grande abbastanza$\}$,
$E^{-\infty} = B \times \{\xi = (\xi^+, \xi^-) \ : \ Q_\infty(\xi) \leq -\lambda$ per λ positivo grande abbastanza$\}$.
Consideriamo ora un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^k$ del seguente tipo:
$A = E^{-(\lambda+\varepsilon)}$ con λ positivo grande e ε positivo piccolo. A è chiuso e contenuto nell'interno di $E^{-\infty}$, sopra definito. Otteniamo che:

$$H^*(E^\infty, E^{-\infty}) \cong H^*(E^\infty - \mathring{A}, E^{-\infty} - \mathring{A}) \cong H^*(\mathbb{D}(E^-_\infty), \mathbb{S}(E^-_\infty)).$$

Il primo isomorfismo è stato ottenuto per **escissione** e il secondo per **retrazione**.
L'originale isomorfismo di Thom:

$$H^*(B) \cong H^*_c(E^-_\infty)$$

(generato dal duale di Poincaré t^m di B in E^-_∞),
è tra la coomologia di B e la coomologia di E^-_∞ delle forme a supporto compatto. Ma $H^*_c(E^-_\infty)$ può essere identificato con $H^*(\mathbb{D}(E^-_\infty), \mathbb{S}(E^-_\infty))$ nel modo

che segue.
Sia $[\theta]$ una classe di coomologia in $H_c^*(E_\infty^-)$. Allora ne è univocamente determinato il raggio R:

$$R = \inf\{r \geq 0 \ : \ \mathbb{D}_r(E_\infty^-) \supset \mathrm{supp}(\theta)\}$$

per ogni rappresentante $\theta \in [\theta]$. $\mathbb{D}_r(E_\infty^-)$ denota il disco di raggio r in E_∞^-.
Di conseguenza possiamo pensare che $[\theta] \in H^*(E_\infty^-, E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}}_R (E_\infty^-))$ poichè θ è chiusa in $\mathbb{D}_R(E_\infty^-)$ ed è esatta in $E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}}_R$.
Notiamo inoltre che $H^*(E_\infty^-, E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}}_R (E_\infty^-))$ risulta isomorfo (per retrazione) ad $H^*(\mathbb{D}_R(E_\infty^-), \mathbb{S}_R(E_\infty^-))$, dove $\mathbb{S}_R(E_\infty^-)$ denota la sfera di raggio R in E_∞^-.
Vogliamo ora ricondurci alla coomologia relativa di disco e sfera unitari. Sia allora $\theta = \theta(x) \in [\theta]$. Definiamo

$$\bar{\theta}(y) = \sum_i \theta_i(Ry)dy^i.$$

Essendo θ chiusa in $\mathbb{D}_R(E_\infty^-)$ ed esatta in $E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}}_R (E_\infty^-)$, risulta che $\bar{\theta}$ è chiusa in $\mathbb{D}(E_\infty^-)$ ed esatta in $E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}} (E_\infty^-)$.
Così $[\theta] \in H^*(E_\infty^-, E_\infty^- - \overset{\circ}{\mathbb{D}} (E_\infty^-)) \cong (\mathbb{D}(E_\infty^-), \mathbb{S}(E_\infty^-))$.
Abbiamo allora giustificato l' isomorfismo:

$$H_c^*(E_\infty^-) \cong H^*(\mathbb{D}(E_\infty^-), \mathbb{S}(E_\infty^-)).$$

Quindi si ha la seguente catena di isomorfismi:

$$H^*(B) \cong H_c^*(E_\infty^-) \cong H^*(\mathbb{D}(E_\infty^-), \mathbb{S}(E_\infty^-)) \cong H^*(E^\infty, E^{-\infty}).$$

Di conseguenza la coomologia di B risulta isomorfa ad $H^*(E^\infty, E^{-\infty})$, come volevamo provare. $\square$

Dimostrazione alternativa (De Marco)
Per retrazione valgono i seguenti isomorfismi:

$$H^*(E^\lambda, E^{-\lambda}) \cong H^*(E_\infty^-, E_\infty^- - \lambda\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)) \cong H^*(B \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^m), B \times \mathbb{S}(\mathbb{R}^m)).$$

Ma $H^*(B \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^m), B \times \mathbb{S}(\mathbb{R}^m))$ coincide con $H_c^*(B \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^m), B \times \mathbb{S}(\mathbb{R}^m))$.
Il teorema di escissione forte ci garantisce che:
$H_c^*(B \times \mathbb{D}(\mathbb{R}^m), B \times \mathbb{S}(\mathbb{R}^m)) \cong H_c^*(B \times \overset{\circ}{\mathbb{D}} (\mathbb{R}^m)) = H_c^*(B \times \mathbb{R}^m)$.
Essendo B una varietà compatta si ottiene infine:
$H^*(E^\lambda, E^{-\lambda}) \cong H_c^*(B \times \mathbb{R}^k) \cong H^*(B)$. $\square$

Capitolo 2

2.1 Invarianti per sottovarietà Lagrangiane

2.1.1 La definizione di $c(u, L)$

Nel precedente paragrafo, tramite risultati classici di coomologia di un fibrato (retrazioni, escissione, isomorfismo di Thom), abbiamo giustificato il seguente isomorfismo:

$$T : H^*(B) \cong H^*(E^\infty, E^{-\infty}).$$

D'ora in poi B sarà una varietà compatta e connessa.
$E^\infty, E^{-\infty}$ sono insiemi di sottolivello del tipo $E^\lambda, E^{-\lambda}$ con λ positivo molto grande.
Introduciamo la seguente mappa di inclusione:

$$i_\lambda : E^\lambda \hookrightarrow E^\infty.$$

Siamo così pronti a dare la seguente:

Definizione 2.1.1 *Siano $(u, L) \in H^*(B) \times \mathcal{L}$ $(u \neq 0), S \in G(L)$ e consideriamo $Tu \in H^*(E^\infty, E^{-\infty})$.*

$$\begin{aligned} c(u, L) &= inf\{\lambda : l'immagine\ di\ Tu\ tramite\ la\ mappa \\ &\quad H^*(E^\infty, E^{-\infty}) \longrightarrow H^*(E^\lambda, E^{-\infty})\ è\ diversa\ da\ zero\}, \\ &= inf\{\lambda : i_\lambda^* Tu \neq 0\}, \end{aligned}$$

dove si intende:

$$i_\lambda^* : H^*(E^\infty, E^{-\infty}) \longrightarrow H^*(E^\lambda, E^{-\infty}).$$

Osservazioni

- Come conseguenza del teorema di unicità di Viterbo sulle funzioni generatrici, $c(u, L)$ risulta indipendente dalla scelta di $S \in G(L)$.

- La classe u è un elemento dell'algebra graduata $H^*(B) = \bigoplus_{i=0}^{n} H^i(B)$. Se $u = (u_0, ..., u_n)$, con $u_i \in H^i(B)$ $\forall i = 1, ..., n$, $c(u, L)$ dovrà essere inteso come l'estremo inferiore dei numeri reali λ per cui l'immagine di $Tu = (Tu_0, ..., Tu_n)$ tramite le mappa i_λ^* è diversa da $(0, ..., 0)$.

- Ricordiamo che se $S(q, v)$ è funzione generatrice per la sottovarietà Lagrangiana L, allora:

  $$L = \{(q, p) \ : \ p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, v), \frac{\partial S}{\partial v}(q, v) = 0\}.$$

  Inoltre q^* è punto critico per $S(q, v)$ se e solo se:

  $$\frac{\partial S}{\partial q}(q^*, v) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial S}{\partial v}(q^*, v) = 0.$$

  Di conseguenza, **c'è una corrispondenza biunivoca tra punti critici di S (globali, cioè nelle q e nei parametri ausiliari v) e punti di $L \cap O_B$** (O_B denota la sezione nulla di T^*B).

- È un classico risultato della teoria di Lusternik - Schnirelman che $c(u, L)$ è un valore critico per la funzione generatrice S.

Nella prossima sezione vogliamo spiegare questo fatto.

2.1.2 Note sulla teoria di Lusternik - Schnirelman

Siano E una varietà paracompatta, $S \in C^2(E, \mathbb{R})$. Nell'ipotesi che E non sia compatta, si ammette che valga la

Condizione di Palais-Smale (PS): Ogni successione $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $||S'(e_n)|| \longrightarrow 0$ e $S(e_n)$ sia limitata, ammette qualche sottosuccessione convergente.

La paracompattezza, mediante un teorema di Whitney, ci consente di dotare E di struttura Riemaniana e dunque, mediante i morfismi $\sharp$ e $\flat$ (abbassamento e innalzamento degli indici):

$$\flat : TE \longrightarrow T^*E,$$

$$\sharp : T^*E \longrightarrow TE$$

di definire il seguente campo vettoriale:

$$\nabla S := \sharp(dS).$$

Ricordiamo anche la definizione di insieme di sottolivello:

$$E^\nu =: \{e \in E : S(e) \leq \nu\}.$$

Si può dimostrare la seguente:

Proposizione 2.1.1 *Sia $\nu < \mu$. Se S non ha punti critici in $E^\mu \setminus E^\nu$, allora $H^*(E^\mu, E^\nu) = 0$.*

Nota Nella dimostrazione si prova innanzitutto che E^ν è diffeomorfo a E^μ: il diffeomorfismo è stabilito dal flusso del campo vettoriale sopra scritto. Da ciò segue facilmente che $H^*(E^\mu, E^\nu) = 0$.

Supponiamo ora che $H^*(E^\mu, E^\nu) \neq 0$. Allora in $E^\mu \setminus E^\nu$ esiste almeno un punto critico per S, di valore critico in $[\nu, \mu]$. Per $\lambda \in [\nu, \mu]$, indichiamo con:

$$i_\lambda : E^\lambda \hookrightarrow E^\mu$$

l'inclusione.

Definizione 2.1.2 *Per ogni $u \in H^*(E^\mu, E^\nu)$, $u \neq 0$, poniamo:*

$$c(u, S) =: \inf\{\lambda \in [\nu, \mu] \ : \ i_\lambda^* u \neq 0\},$$

dove si intende:

$$i_\lambda^* : \ H^*(E^\mu, E^\nu) \longrightarrow H^*(E^\lambda, E^\nu).$$

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema 2.1.1 *Il valore $c(u, S)$ è critico per S.*

Dimostrazione La condizione (PS) ci garantisce che l'insieme dei punti critici di S in $S^{-1}([\nu, \mu])$ è compatto. Infatti, sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti critici in $S^{-1}([\nu, \mu])$. Abbiamo che $\nabla S(e_n) = 0$ e che $\nu \leq S(e_n) \leq \mu$. Per (PS) esiste allora una sottosuccessione di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Di conseguenza l'insieme dei punti critici di S in $S^{-1}([\nu, \mu])$ è compatto. In particolare tale insieme è chiuso.
Procediamo per assurdo. Supponiamo di trovare una classe $u \in H^*(E^\mu, E^\nu)$, $u \neq 0$ e il valore $c(u, S)$ non sia critico per S. Il fatto che l'insieme dei punti critici di S in $S^{-1}([\nu, \mu])$ sia compatto garantisce che esiste un ϵ (piccolo) tale che $S^{-1}([c(u, S) - \epsilon, c(u, S) + \epsilon])$ non contenga punti critici di S. Ne risulta,

per la proposizione precedente, che $H^*(E^{c(u,S)+\epsilon}, E^{c(u,S)-\epsilon}) = 0$.
Consideriamo ora la seguente successione esatta, dove la freccia verticale è $i^*_{c(u,S)+\epsilon}$:

$$0 = H^*(E^{c(u,S)+\epsilon}, E^{c(u,S)-\epsilon}) \longrightarrow H^*(E^{c(u,S)+\epsilon}, E^{\nu}) \longrightarrow H^*(E^{c(u,S)-\epsilon}, E^{\nu})$$

$$\uparrow$$

$$u \in H^*(E^{\mu}, E^{\nu})$$

Dato che orizzontalmente è esatta, si ha che il nucleo di:

$$\star : H^*(E^{c(u,S)+\epsilon}, E^{\nu}) \longrightarrow H^*(E^{c(u,S)-\epsilon}, E^{\nu})$$

è la spazio nullo. Di conseguenza, la mappa $\star$ risulta iniettiva.
Per definizione di $c(u, S)$, $u \neq 0$ in $H^*(E^{c(u,S)+\epsilon}, E^{\nu})$ e quindi la sua immagine mediante $\star$ dovrebbe essere non nulla: $u \neq 0$ in $H^*(E^{c(u,S)-\epsilon}, E^{\nu})$, contrariamente alla definizione di $c(u, S)$. $\square$

Nel nostro contesto, S è una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana L.
Notiamo che, per il teorema 1.1.2 (di unicità di Viterbo), $c(u, S)$ coincide con $c(u, L)$ (confrontare definizione 2.1.1).
Per concludere che $c(u, L)$ è valore critico per la funzione generatrice S, occorre il seguente

Lemma 2.1.1 *Se $S : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ è funzione generatrice per la sottovarietà Lagrangiana L, allora S soddisfa alla condizione di Palais-Smale.*

Dimostrazione La funzione generatrice S è speciale. Allora esiste una forma quadratica non degenere $Q : E = B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$S(q, v) = \frac{1}{2}\langle Qv, v\rangle$$

e ciò vale $\forall v \in \mathbb{R}^k$, con $|v| > K$, $\forall q \in B$.
Ragionando per assurdo, supponiamo ora che esista una successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ per cui:
1) $||S'(e_n)|| \longrightarrow 0$,
2) $S(e_n)$ è limitata,
che non ammette alcuna sottosuccessione convergente.
Di conseguenza, esistono punti della successione del tipo $(e_{\bar{n}}) = (q_{\bar{n}}, v_{\bar{n}}) \in B \times \{v \in \mathbb{R}^k : |v| > K\}$.

Il fatto che la successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette una sottosuccessione convergente comporta che c'è un numero finito di elementi di $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in:

$$B \times \{v \in \mathbb{R}^k : |v| \leq K\}.$$

Allora nei punti $(e_{\bar{n}}) = (q_{\bar{n}}, v_{\bar{n}})$ si ha che:

$$S^{'}(e_{\bar{n}}) = Qv_{\bar{n}}.$$

Ciò contraddice l'ipotesi 1). □

2.1.3 Il numero $l(x, y)$

Si può associare ad una coppia di sottovarietà Lagrangiane L_1 ed L_2 di T^*B e ad una coppia $x, y \in L_1 \cap L_2$, punti d'intersezione trasversali (i piani tangenti ad L_1 ed L_2 in x, y generano tutto TT^*B), un numero reale $l(x, y; L_1, L_2)$, denotato generalmente con $l(x, y)$.
Usando la trasversalità (vedere per esempio [5], pagg. 68-69), otteniamo che:

$$\mathrm{codim}(L_1 \cap L_2) = \mathrm{codim}(L_1) + \mathrm{codim}(L_2),$$

equivalentemente:

$$\dim T^*B - \dim(L_1 \cap L_2) = 2\dim T^*B - \dim L_1 - \dim L_2.$$

Di conseguenza, ricordando che $\dim T^*B = 2n$ e che $\dim L_1 = \dim L_2 = n$, si ottiene che:

$$\dim(L_1 \cap L_2) = 0.$$

Allora $L_1 \cap L_2$ consta di punti isolati.
Il numero $l(x, y)$ ha la seguente

Definizione 2.1.3 *Sia γ_1 (rispettivamente γ_2) un cammino in L_1 (rispettivamente in L_2) che connette x ad y. Sia γ il circuito $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$. Allora:*

$$l(x, y; L_1, L_2) = l(x, y) = \int_\gamma pdq.$$

Nota Con $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ si intende la giustapposizione dei cammini γ_1 e γ_2^{-1}.

Mostriamo che la definizione appena data dipendente solamente dalla scelta delle classi di omotopia dei cammini γ_1 e γ_2:

Essendo L_1 ed L_2 sottovarietà Lagrangiane, abbiamo che: $d\lambda = 0$ su L_1 ed L_2. Equivalentemente, se $j : L_1 \hookrightarrow T^*B$ denota l'inclusione, possiamo dire che $j^*d\lambda = d(j^*\lambda) = 0$. Così $j^*\lambda$ è chiusa in L_1. Analogamente, $j^*\lambda$ risulta chiusa in L_2.
Di conseguenza, se γ_1' (rispettivamente γ_2') è un cammino in L_1 (rispettivamente in L_2) omotopicamente equivalente a γ_1 (rispettivamente γ_2), abbiamo che:

$$\int_{\gamma_i \circ (\gamma_i')^{-1}} j^*\lambda = \int_{\Sigma_i \subseteq L_i} j^*d\lambda = \int_{\Sigma_i \subseteq L_i} dj^*\lambda = 0,$$

dove Σ_i è superficie in L_i tale che $\partial\Sigma_i = \gamma_i \circ (\gamma_i')^{-1}$ per $i = 1,2$ (nell'ultimo passaggio è stato utilizzato il teorema di Stokes).
Di conseguenza $\int_\gamma j^*\lambda$ è indipendente dalla scelta del circuito γ.

In particolare, $l(x, y)$ è indipendente dal circuito γ se e solo se la forma di Liouville è esatta sia su L_1 che su L_2. Tale condizione sarà sempre soddisfatta nel seguito perchè le sottovarietà Lagrangiane oggetto del nostro studio ammettono funzioni generatrici globali.

Dimostriamo ora due proposizioni che ci saranno utili nel seguito.

Proposizione 2.1.2 *Siano L una sottovarietà Lagrangiana di T^*B data dalla funzione generatrice S, O_B la sezione nulla di T^*B e supponiamo che i punti di intersezione di L e O_B siano trasversali. Allora:*

$$l(x, y) = S(\pi_B(y), b) - S(\pi_B(x), a)$$

per ogni $x, y \in L \cap O_B$ e per a e b critici:

$$\frac{\partial S}{\partial v}(\pi_B(y), b) = 0 \ , \ \frac{\partial S}{\partial v}(\pi_B(x), a) = 0.$$

Osservazione Si noti che $(\pi_B(y), b)$ e $(\pi_B(x), a)$ sono punti critici (globali) di S in $B \times \mathbb{R}^k$.

Dimostrazione

$$l(x, y) = \int_{\gamma_1} pdq - \int_{\gamma_2} pdq$$

dove γ_1 è curva che connette x ad y contenuta in L e γ_2 è curva che connette x ad y contenuta in O_B.

Se $\lambda \in [0,1] \longmapsto \gamma_1(\lambda)$ è parametrizzazione di γ_1, allora esiste qualche $v(\lambda)$ tale che:

$$\lambda \in [0,1] \longmapsto (q(\lambda), p(\lambda)) = (q(\lambda), \frac{\partial S}{\partial q}(q(\lambda), v(\lambda))).$$

Inoltre $\frac{\partial S}{\partial v}(q,v) = 0$ per $q = q(\lambda), v = v(\lambda)$.
Possiamo così scrivere, ricordando che γ_2 è tutta contenuta in O_B:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} pdq - \int_{\gamma_2} pdq &= \int_{\gamma_1} pdq, \\
&= \int_{\lambda\in[0,1]} \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j}(q(\lambda), v(\lambda))\ \frac{dq_j}{d\lambda}(\lambda) d\lambda, \\
&= \int_{\lambda\in[0,1]} \frac{d}{d\lambda}[S(q(\lambda), v(\lambda))] d\lambda, \\
&= S(\pi_B(y), b) - S(\pi_B(x), a).
\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.1.3 *Stesse ipotesi della proposizione precedente. Allora ad ogni coppia $u, w \in H^*(B)$ possiamo associare una coppia di punti $x_u, x_w \in L \cap O_B$ soddisfacente a:*

$$l(x_u, x_w) = c(u, L) - c(w, L).$$

Dimostrazione Siano $u, w \in H^*(B)$. Allora $c(u, L)$ e $c(w, L)$ sono valori critici per S, la funzione generatrice di $L \subset T^*B$. Sappiamo inoltre che esiste una corrispondenza biunivoca tra punti critici di S e punti in $L \cap O_B$.
Allora esistono $x_u, x_w \in L \cap O_B$ e opportuni parametri ausiliari a e b, per cui:

$$S(\pi_B(x_u), b) = c(u, L),$$
$$S(\pi_B(x_w), a) = c(w, L).$$

Ora usiamo l'ipotesi che i punti di intersezione di L con O_B sono trasversali per poter applicare la proposizione precedente.
Così :

$$l(x_u, x_w) = S(\pi_B(x_u), b) - S(\pi_B(x_w), a) = c(u, L) - c(w, L).$$

□

2.2 Composizione di sottovarietà Lagrangiane

Nei prossimi paragrafi utilizzeremo sottovarietà Lagrangiane di T^*B non necessariamente isotope alla sezione nulla, ma che possiedono comunque una funzione generatrice speciale.
Come prima cosa definiamo per una coppia di sottovarietà Lagrangiane L_1, L_2 di T^*B le sottovarietà Lagrangiane L_1+L_2 ed L_1-L_2. Diamo così la seguente:

Definizione 2.2.1 *Siano L_1, L_2 due sottovarietà Lagrangiane di T^*B e supponiamo che $L_1 \times L_2$ sia trasversale a $T^*_\Delta(B \times B)$(= la restrizione alla diagonale Δ di $T^*(B \times B)$).*

$$L_1 \pm L_2 =: \{(q,p) \in T^*B \ : \ p = p_1 \pm p_2 \ , \ (q,p_1) \in L_1 \ e \ (q,p_2) \in L_2\}.$$

Osservazioni

- L'ipotesi di trasversalità garantisce che $L_1 + L_2$ ed $L_1 - L_2$ siano effettivamente sottovarietà Lagrangiane di $T^*(B)$. È infatti subito verificato che:
$$\omega|_{L_1 \pm L_2} = 0.$$
Dalla trasversalità otteniamo poi che:
$$\text{codim}((L_1 \times L_2) \cap T^*_\Delta(B \times B)) = \text{codim}(L_1 \times L_2) + \text{codim}(T^*_\Delta(B \times B)).$$
$$\text{codim}((L_1 \times L_2) \cap T^*_\Delta(B \times B)) = \dim(T^*(B \times B)) - \dim((L_1 \times L_2) \cap T^*_\Delta(B \times B)),$$
$$= 4n - \dim((L_1 \times L_2) \cap T^*_\Delta(B \times B)).$$
$$\text{codim}(L_1 \times L_2) + \text{codim}(T^*_\Delta(B \times B)) =$$
$$= 2\dim(T^*(B \times B)) - \dim(L_1 \times L_2) - \dim(T^*_\Delta(B \times B)) = 8n - 2n - 3n = 3n.$$
Di conseguenza:
$$\dim((L_1 \times L_2) \cap T^*_\Delta(B \times B)) = 4n - 3n = n.$$
Ne segue che:
$$\dim(L_1 \pm L_2) = n,$$
come deve essere, affinchè $L_1 + L_2$ e $L_1 - L_2$ siano sottovarietà Lagrangiane di T^*B.

- Notiamo che $L_1 - L_1$ non è la sezione nulla O_B a meno che la proiezione $L_1 \longrightarrow B$ non risulti biiettiva.

Il seguente risultato è immediatamente verificato.

Proposizione 2.2.1 *Siano S_1, S_2 funzioni generatrici speciali per L_1 ed L_2. Poniamo:*

$$S_1 \pm S_2(x,\xi,\eta) = S_1(x,\xi) \pm S_2(x,\eta)$$

Allora $S_1 \pm S_2$ è una funzione generatrice speciale per $L_1 \pm L_2$.

Nota Siano ora $u, w \in H^*(B)$:

$$u = (u_0, \ldots.., u_n) \quad , \quad w = (w_0, \ldots.., w_n).$$

La classe $u.w$ è definita come segue:

$$u.w =: (u_0 + w_0, \ldots.., u_n + w_n)$$

($u.w$ è la somma di u e w nell'algebra graduata $T^*(B)$).
Possiamo così dimostrare la seguente

Proposizione 2.2.2 *Siano $u, w \in H^*(B)$. Allora vale che:*

$$c(u.w, S_1 \pm S_2) \geq c(u, S_1) + c(w, S_2).$$

Dimostrazione La definizione delle $c(u, S_1), c(w, S_2)$ e $c(u.w, S_1 \pm S_2)$ è data tramite gli insiemi di sottolivello ed è indipendente dalla scelta delle funzioni generatrici S_1 ed S_2 per L_1 ed L_2 rispettivamente.
Se allora S_1 è definita su E_1 ed S_2 è definita su E_2, abbiamo che $S_3 = S_1 \pm S_2$ è definita su $E_3 = E_1 \times_B E_2$.
Notiamo poi che:

$$E_3^\nu = \{(q,\xi,\eta) \in E_3 : S_3(q,\xi,\eta) \leq \nu\},$$

$$= \{(q,\xi,\eta) \in E_3 : (S_1 \pm S_2)(q,\xi,\eta) \leq \nu\} = \bigcup_{\lambda+\mu=\nu} E_1^\lambda \times_B E_2^\mu,$$

dove abbiamo definito:

$$E_1^\lambda = \{(q,\xi) \in E_1 : S_1(q,\xi) \leq \lambda\},$$

$$E_2^\mu = \{(q,\eta) \in E_2 : \pm S_2(q,\eta) \leq \mu\}.$$

Ma allora $c(u.w, S_3) = \inf\{\nu$ tali che l'immagine di $T(u.w)$ tramite la mappa: $H^*(E_3^\infty, E_3^{-\infty}) \longrightarrow H^*(E_3^\nu, E_3^{-\infty})$ è diversa da zero $\} \geq c(u, S_1) + c(w, S_2)$.
Infatti $c(u.w, S_3)$ risulterà maggiore o uguale alla somma degli estremi inferiori corrispondenti a $c(u, S_1)$ e $c(w, S_2)$. $\square$

La seguente proposizione utilizza tutti i risultati visti in questa sezione.

Proposizione 2.2.3 *Siano L una sottovarietà Lagrangiana di T^*B e $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia Hamiltoniana tale che $\psi_1 = \psi$ e $\psi_0 = id$.*
Allora:

$$c(u, \psi(L)) = c(u, L - \psi^{-1}(O_B)).$$

Dimostrazione Consideriamo:

$$c(u, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B))$$

e dimostriamo che tale espressione è indipendente da t.
Scegliamo innanzitutto una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana $\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)$ che abbia lo zero tra i suoi valori critici. Ciò è possibile poichè le funzioni generatrici per una data Lagrangiana sono definite a meno di una costanta additiva.
Prendiamo poi una classe $w_t \in H^*(B)$ tale che $c(w_t, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)) = 0$. Per fare questo è sufficiente ricordare che $c(w_t, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B))$ è valore critico della funzione generatrice per $\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)$. La classe w_t sarà proprio quella per cui $c(w_t, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B))$ è zero.
Allora $c(u, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)) - c(w_t, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)) =$
$= c(u, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)) = l((q_t, 0), (q_t^{'}, 0))$,
dove $(q_t, 0), (q_t^{'}, 0)) \in [\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)] \cap O_B$ (nell'ultimo passaggio è stata usata la proposizione 2.1.3).
Di conseguenza (ricordando la definizione di l), $c(u, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B))$ assume valori nell'insieme:

$$\int_{\gamma_{1,t}} pdq - \int_{\gamma_{2,t}} pdq,$$

dove $\gamma_{1,t}$ e $\gamma_{2,t}$ sono cammini che collegano i punti $(q_t, 0)$ e $(q_t^{'}, 0) \in [\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)] \cap O_B$, $\gamma_{1,t}$ è contenuto in $\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)$ e $\gamma_{2,t}$ è contenuto in O_B.
Siano:

$$S_{1,t}(q, \xi) \text{ una funzione generatrice speciale per } \psi_t(L),$$

$$S_{2,t}(q, \eta) \text{ una funzione generatrice speciale per } \psi_t\psi^{-1}(O_B).$$

Allora $(S_{1,t} - S_{2,t})(q, \xi, \eta)$ risulta una funzione generatrice speciale per $\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)$.
Ricordiamo ora che $((q_t, 0), (q_t^{'}, 0)) \in [\psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)] \cap O_B$.
Utilizzando la proposizione 2.1.2, otteniamo:

$$l((q_t, 0), (q_t^{'}, 0)) = \int_{\gamma_{1,t}\circ(\gamma_{2,t})^{-1}} pdq,$$

$$= [S_{1,t} - S_{2,t}](q_t, \xi_t, \eta_t) - [S_{1,t} - S_{2,t}](q_t^{'}, \xi_t^{'}, \eta_t^{'}),$$

$$= [S_{1,t}(q_t, \xi_t) - S_{2,t}(q_t, \eta_t)] - [S_{1,t}(q_t^{'}, \xi_t^{'}) - S_{2,t}(q_t^{'}, \eta_t^{'})].$$

Ma la precedente espressione può essere ordinata nel modo che segue:

$$[S_{1,t}(q_t, \xi_t) - S_{1,t}(q_t^{'}, \xi_t^{'})] - [S_{2,t}(q_t, \eta_t) - S_{2,t}(q_t^{'}, \eta_t^{'})].$$

L'idea è ora quella di rileggere quest'ultima espressione utilizzando la proposizione 2.1.2.
Ricordiamo che: $\gamma_{1,t} \subset \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B) \Longrightarrow \gamma_{1,1} \subset \psi(L) - \psi\psi^{-1}(O_B) = \psi(L) - O_B = \psi(L) \Longrightarrow \psi^{-1}(\gamma_{1,1}) \subset \psi^{-1}\psi(L) = L \Longrightarrow \psi_t\psi^{-1}(\gamma_{1,1}) \subset \psi_t(L)$, $\gamma_{2,t} \subset O_B$.
Allora:

$$[S_{1,t}(q_t, \xi_t) - S_{1,t}(q_t^{'}, \xi_t^{'})] =$$

$$= \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{1,1})} pdq - \int_{\gamma_{2,t}} pdq.$$

Analogamente si verifica che $\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{2,1}) \subset \psi_t\psi^{-1}(O_B)$.
Di conseguenza:

$$[S_{1,t}(q_t, \xi_t) - S_{1,t}(q_t^{'}, \xi_t^{'})] - [S_{2,t}(q_t, \eta_t) - S_{2,t}(q_t^{'}, \eta_t^{'})] =$$

$$= \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{1,1})} pdq - \int_{\gamma_{2,t}} pdq -$$

$$- \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{2,1})} pdq + \int_{\gamma_{2,t}} pdq,$$

$$= \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{1,1})} pdq - \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{2,1})} pdq,$$

$$= \int_{\psi_t\psi^{-1}(\gamma_{1,1}\circ(\gamma_{2,1})^{-1})} pdq,$$

$$= \int_{\gamma_{1,1}\circ(\gamma_{2,1})^{-1}} pdq,$$

essendo ψ_t^{-1}, ψ mappe simplettiche.
Allora $l((q_t, 0), (q_t^{'}, 0))$ risulta indipendente da t.
Abbiamo così finito, infatti in tal caso anche:

$$c(u, \psi_t(L) - \psi_t\psi^{-1}(O_B)) = l((q_t, 0), (q_t^{'}, 0))$$

risulta indipendente da t.
Allora $c(u, \psi_1(L) - \psi_1\psi^{-1}(O_B)) = c(u, \psi_0(L) - \psi_0\psi^{-1}(O_B))$.
Per $t = 0$, otteniamo:
$$c(u, L - \psi^{-1}(O_B))$$
e per $t = 1$ abbiamo:
$$c(u, \psi(L) - O_B) = c(u, \psi(L)).$$
Ciò è quanto volevamo provare. $\square$

Nota Conveniamo che se L è una sottovarietà Lagrangiana immersa in T^*B, allora $\bar{L}$ denota l'immagine di L tramite la mappa:
$$(q, p) \longrightarrow (q, -p).$$
Ovviamente, $\bar{L}$ risulta ancora una sottovarietà Lagrangiana.
Dimostriamo ora il seguente:

Corollario 2.2.1 *Siano $u, w \in H^*(B)$, L una sottovarietà Lagrangiana di T^*B e $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia Hamiltoniana tale che:*
$\psi_1 = \psi, \psi_0 = id$. Allora:
$$c(u.w, \psi(L)) \geq c(u, L) + c(w, \psi(O_B)).$$

Dimostrazione In accordo con la proposizione 2.2.3 appena dimostrata, abbiamo:
$$c(u.w, \psi(L)) = c(u.w, L - \psi^{-1}(O_B)).$$
Applichiamo ora la proposizione 2.2.2 per ottenere:
$$c(u.w, \psi(L)) \geq c(u, L) + c(w, \overline{\psi^{-1}(O_B)}).$$
Usando di nuovo 2.2.3 vediamo che:
$$c(w, \psi(O_B)) = c(w, O_B - \psi^{-1}(O_B)) = c(w, \overline{\psi^{-1}(O_B)}).$$
Questo conclude la nostra dimostrazione. $\square$

Capitolo 3

3.1 Note sulla coomologia di de Rham in $\mathbb{S}^{2n}$

- Sia B una varietà. La coomologia di de Rham di B a livello 0 è lo spazio vettoriale:

$$H^0(B) = \{0-\text{forme chiuse}\}/\{0-\text{forme esatte}\}.$$

L'insieme delle 0-forme esatte è per definizione lo spazio nullo.
Di conseguenza:

$$H^0(B) \cong \{0-\text{forme chiuse}\} \cong$$

$$\cong \mathrm{Ker}(d) \cap \{0-\text{forme}\} =$$

$$= \mathrm{Ker}(d) \cap \{f \text{ tali che } f \text{ è una funzione } C^\infty \text{ su } \mathbb{S}^{2n}\},$$

dove

$$d : \{0-\text{forme su } B\} = \Omega^0(B) \longrightarrow \{1-\text{forme su } B\} = \Omega^1(B)$$

è il differenziale esterno.
Ma se una funzione f è C^∞ su B, $df = \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$ sse f è una funzione localmente costante (cioè costante nelle componenti connesse di B).
Vale inoltre che $\dim H^0(B) =$ numero di componenti connesse della varietà B.
Trattiamo il caso $B = \mathbb{S}^{2n}$. Sappiamo che il numero di componenti connesse di $\mathbb{S}^{2n}$ è 1 per $n \geq 1$. Di conseguenza:

$$H^0(\mathbb{S}^{2n}) = \{f \text{ tali che } f \text{ è costante}\} = \mathbb{R} \cdot 1.$$

- $H^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$ è invece l'insieme delle $2n$-forme volume su $\mathbb{S}^{2n}$.

$$[\rho] =: \{\rho + d\omega \text{ per arbitrarie } (2n-1) - \text{forme } \omega\}.$$

Sia:

$$\int_{\mathbb{S}^{2n}} \rho \ dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo che tale assegnazione è coomologica, cioè non dipende dal rappresentante di $[\rho]$.
Sia allora $\bar{\rho} = \rho + d\omega$, con $\omega = (2n-1)$-forma.

$$\int_{\mathbb{S}^{2n}} \bar{\rho} \ dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} =$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{2n}} \rho \ dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} + \int_{\mathbb{S}^{2n}} d\omega \ dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n},$$

$$= \alpha + \int_{\partial\mathbb{S}^{2n}} \omega \ dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n-1} = \alpha,$$

essendo $\partial\mathbb{S}^{2n} = \emptyset$.
(Nell' ultimo passaggio è stato usato il teorema di Stokes).
Di conseguenza α è caratteristico della classe. Se μ è un generatore per $H^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$ abbiamo che:

$$H^{2n}(\mathbb{S}^{2n}) = \mathbb{R} \cdot \mu.$$

3.2 Applicazioni a diffeomorfismi Hamiltoniani.

Sia $Diff_\omega(\mathbb{R}^{2n})$ = Il gruppo dei diffeomorfismi simplettici di $\mathbb{R}^{2n}$, dove ω è la 2-forma su $\mathbb{R}^{2n}$.
Consideriamo i seguenti sottogruppi di $Diff_\omega(\mathbb{R}^{2n})$:

- $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ = Il gruppo delle mappe al tempo $t = 1$ del flusso Hamiltoniano associato ad una Hamiltoniana $H(x,t)$ possibilmente dipendente dal tempo e a supporto compatto.

- $\mathcal{H}(U)$ = Il sottogruppo di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ ottenuto imponendo che il supporto di $H(x,t)$ sia in $U \times [0,1]$.

Denotiamo con $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n}) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la mappa simplettica tale che $\psi(q,p) =: (Q,P)$. Allora il suo grafico Γ_ψ è una sottovarietà Lagrangiana di $(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^n} \oplus -\omega_{\mathbb{R}^n})$.
Essendo $H(x,t)$ a supporto compatto, Γ_ψ coincide con la diagonale Δ al di fuori di tale compatto.
Attraverso la mappa h: $(q,p,Q,P) \longmapsto (\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}, p-P, Q-q)$, Δ viene identificata con la sezione nulla $O_{\mathbb{R}^{2n}} \cong \mathbb{R}^{2n}$.
Mostriamo che h è mappa simplettica.

$$h : (q,p,Q,P) \longmapsto (\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}, p-P, q-Q).$$

Poniamo $(X,Y) = ((\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}), (p-P, q-Q))$.

$$\begin{aligned} dY \wedge dX &= d(p-P) \wedge d(\frac{q+Q}{2}) + d(Q-q) \wedge d(\frac{p+P}{2}), \\ &= \frac{dp \wedge dq}{2} - \frac{dP \wedge dQ}{2} - \frac{dP \wedge dq}{2} + \frac{dp \wedge dQ}{2} + \\ &\quad + \frac{dQ \wedge dP}{2} - \frac{dq \wedge dp}{2} + \frac{dQ \wedge dp}{2} - \frac{dq \wedge dP}{2}, \\ &= dp \wedge dq - dP \wedge dQ = \omega_{(q,p)} \oplus -\omega_{(Q,P)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza $h^*\omega_{\mathbb{R}^{2n}} = \omega_{\mathbb{R}^n} \oplus -\omega_{\mathbb{R}^n})$.
Così :

$$h : (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^n} \oplus -\omega_{\mathbb{R}^n}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathbb{R}^{2n}})$$

è isomorfismo simplettico.
Pensiamo ora alla proiezione stereografica per ottenere:

$$\mathbb{S}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2n} \cup \{\infty\}.$$

Identifichiamo inoltre la diagonale Δ con $\mathbb{R}^{2n}$.
Allora $T^*\Delta$ si immerge in $T^*\mathbb{S}^{2n}$; $h(\Gamma_\psi) \subset T^*(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathbb{R}^{4n}$ è compattificata con l'aggiunta del punto $(\infty, 0) \in T^*\mathbb{S}^{2n}$.
In questo modo si ottiene una sottovarietà Lagrangiana:

$$\widetilde{\Gamma}_\psi \subset T^*\mathbb{S}^{2n}$$

che coincide con la sezione nulla di $T^*\mathbb{S}^{2n}$ in un intorno di ∞ (cioè al di fuori di un insieme compatto). Infatti:

$$\widetilde{\Gamma}_\psi \cap T^*U = U \cong U \times \{0\},$$

dove U = intorno di ∞ in $\mathbb{S}^{2n}$.
La funzione generatrice (quadratica all'infinito):

$$S : \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

per $\widetilde{\Gamma}_\psi$ potrà essere normalizzata in modo tale che il valore critico associato al punto $(\infty, 0) \in O_{\mathbb{S}^{2n}} \cap \widetilde{\Gamma}_\psi$ sia zero ($O_{\mathbb{S}^{2n}}$ denota la sezione nulla di $T^*\mathbb{S}^{2n}$).
Cioè:

$$S(\infty, 0) = 0$$

(C'è infatti una corrispondenza biunivoca tra punti critici di S e punti in $O_{\mathbb{S}^{2n}} \cap \widetilde{\Gamma}_\psi$).

È ben nota la coomologia della sfera $2n$-dimensionale.
Infatti $H^k(\mathbb{S}^{2n})$ è:

- $\mathbb{R}$ se $k = 0, 2n$
- 0 altrimenti.

Così $H^*(\mathbb{S}^{2n})$ è generato da $1 \in H^0(\mathbb{S}^{2n})$ e (dalla classe di orientazione) $\mu \in H^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$.
Sia $H^*(\mathbb{S}^{2n}) = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus \mathbb{R} \cdot \mu$.

Diamo la seguente importante

Definizione 3.2.1

$$c_-(\psi) = -c(\mu, \widetilde{\Gamma}_\psi),$$

$$c_+(\psi) = -c(1, \widetilde{\Gamma}_\psi),$$

$$\gamma(\psi) = c_+(\psi) - c_-(\psi).$$

Nota Il numero $\gamma(\psi) = c_+(\psi) - c_-(\psi)$ si rivelerà una sorta di norma per ψ: $\gamma(\psi) = 0$ se e solo se $\psi = \text{id}$.

Teorema 3.2.1 *Siano* U *un insieme compatto in* $\mathbb{R}^{2n}$, $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ *una isotopia Hamiltoniana in* $\mathcal{H}(U)$ *generata da* H *e tale che* $\psi_0 = id$, $\psi_1 = \psi$ *e* z *un qualsiasi punto in* $\mathbb{R}^{2n} \setminus U$. *Esistono punti fissi di* ψ, x_+ *e* $x_- \in U$ *tali che se* γ_+, γ_- *sono cammini che collegano* x_+ *a* z *e* x_- *a* z *e* $g_+ = \gamma_+ \circ \psi(\gamma_+^{-1})$, $g_- = \gamma_- \circ \psi(\gamma_-^{-1})$ *allora:*

$$c_+(\psi) = l(x_+, z; \psi)(=: -\int_{g_+} pdq) = -\int_{\psi_t(x_+)} pdq - Hdt,$$

$$c_-(\psi) = l(x_-, z; \psi)(=: -\int_{g_-} pdq) = -\int_{\psi_t(x_-)} pdq - Hdt.$$

Osservazioni

- Ricordiamo che i punti fissi della mappa ψ sono i punti in $\Gamma_\psi \cap \Delta$ (dove Γ_ψ = il grafico di ψ). Con $\psi_t(x_\pm)$ si intende allora la curva chiusa, immagine della mappa:
$$[0,1] \longrightarrow U$$
$$t \longmapsto \psi_t(x_\pm).$$

- Si noti che $pdq - Hdt$ è la 1 - forma presente nel funzionale di Hamilton - Helmholtz.

- $l(x, y; \psi)$ è ovviamente definito come $l((x, x), (y, y); \Gamma_\psi, \Delta)$ (confrontare paragrafo 2.1.3).

Dimostrazione del teorema

I punti fissi della mappa ψ sono i punti in $\Gamma_\psi \cap \Delta$. Essi corrispondono ai punti in $\widetilde{\Gamma}_\psi \cap O_{\mathbb{S}^{2n}}$ (attraverso la mappa simplettica h e la proiezione stereografica) e sono in corrispondenza biunivoca esattamente con i punti critici della funzione generatrice (globale) S per $\widetilde{\Gamma}_\psi \subset T^*\mathbb{S}^{2n}$.
Ricordiamo che sulla sottovarietà Lagrangiana $\widetilde{\Gamma}_\psi$ si ha:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}}(\widetilde{q}, \xi)d\widetilde{q} + \frac{\partial S}{\partial \xi}(\widetilde{q}, \xi)d\xi = \frac{\partial S}{\partial \widetilde{q}}(\widetilde{q}, \xi)d\widetilde{q} = \widetilde{p}d\widetilde{q}.$$

In questa notazione, $\widetilde{q} = (\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2})$ e $\widetilde{p} = (p - P, Q - q)$ sono le coordinate su $T^*\mathbb{S}^{2n}$.

Di conseguenza, se (x_0, ξ_0) e (x_1, ξ_1) sono punti critici della funzione generatrice S e se $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{\Gamma}_\psi$ è un cammino in $\widetilde{\Gamma}_\psi$ che connette x_0 ad x_1:

$$S(x_1, \xi_1) - S(x_0, \xi_0) = \int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{p} d\widetilde{q}.$$

Trasformiamo ora l'integrale $\int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{p} d\widetilde{q}$ tramite la mappa simplettica:

$$h(q,p,Q,P) = (\widetilde{q}, \widetilde{p})$$

usando l'integrazione per parti.
Scegliamo una curva γ in modo tale che il grafico di γ venga mappato su $\widetilde{\gamma}$ attraverso la mappa simplettica h.

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{q} d\widetilde{p} = \int_\gamma (p-P, Q-q) d(\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}),$$

$$= \frac{1}{2} \int_\gamma pdq + pdQ - Pdq - PdQ + Qdp + QdP - qdp - qdP,$$

$$= \frac{1}{2} \int_\gamma pdq - PdQ + QdP - qdp + \frac{1}{2} \int_\gamma pdQ - Pdq + Qdp - qdP,$$

$$= \frac{1}{2} \int_\gamma pdq - PdQ + (d(QP) - PdQ) - (d(qp) - pdq) + \frac{1}{2} \int_\gamma d(pQ) - d(Pq),$$

$$= \frac{1}{2} \int_\gamma pdq - PdQ + d(QP) - PdQ - d(qp) + pdq + \frac{1}{2} \int_\gamma d(pQ) - \frac{1}{2} \int_\gamma d(Pq),$$

$$= \frac{1}{2} \int_\gamma 2pdq - 2PdQ + d(QP) - d(qp) + \frac{1}{2}(pQ)|_{s=0}^{s=1} - \frac{1}{2}(Pq)|_{s=0}^{s=1},$$

$$= \int_\gamma pdq - PdQ + \frac{1}{2}(QP)|_{s=0}^{s=1} - \frac{1}{2}(qp)|_{s=0}^{s=1} + \frac{1}{2}(pQ)|_{s=0}^{s=1} - \frac{1}{2}(Pq)|_{s=0}^{s=1},$$

$$= \int_\gamma pdq - \int_\gamma \psi_p(p) d\psi_q(q) + \frac{1}{2}(X_1Y_1 - X_0Y_0) -$$

$$- \frac{1}{2}(x_1y_1 - x_0y_0) + \frac{1}{2}(y_1X_1 - y_0X_0) - \frac{1}{2}(Y_1x_1 - Y_0x_0).$$

Tutto ciò supponendo che la curva γ sia tale che:

$$\gamma(s=0) = (x_0, y_0, X_0, Y_0), \ \gamma(s=1) = (x_1, y_1, X_1, Y_1).$$

Ricordiamo inoltre che $\gamma(s=0)$ e $\gamma(s=1)$ sono punti fissi di ψ e quindi stanno in $\Gamma_\psi \cap \Delta$, cioè:

$$x_i = X_i, \qquad y_i = Y_i,$$

per $i = 0{,}1$.
Usando allora questo fatto, otteniamo:

$$\int_\gamma pdq + \int_{\gamma^{-1}} \psi_p(p)d\psi_q(q) + \frac{1}{2}(x_1y_1 - x_0y_0 - x_1y_1 + x_0y_0) +$$
$$+\frac{1}{2}(y_1x_1 - y_0x_0 - y_1x_1 + y_0x_0) = \int_\gamma pdq + \int_{\psi(\gamma^{-1})} pdq.$$

Sia α una forma non nulla in $H^*(B)$ ($H^*(B)$ è la coomologia di B a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$).
Nel contesto generale i valori $c(\alpha, \widetilde{\Gamma}_\psi)$ (cfr. ultima osservazione di pag. 20) sono critici per la funzione generatrice S di $\widetilde{\Gamma}_\psi$. Di conseguenza esistono punti critici (x_α, ξ_α) per la funzione generatrice S per cui i valori critici corrispondenti siano proprio i $c(\alpha, \widetilde{\Gamma}_\psi)$.
Nel nostro contesto esistono punti critici $(x_\pm, \xi_\pm)$ di S tali che $S(x_\pm, \xi_\pm) = c_\pm(\psi)$. Scegliamo ora una curva qualsiasi $\gamma_\pm$ che colleghi $x_\pm$ con ∞. Allora:

$$\begin{aligned} c_\pm(\psi) &= S(x_\pm, \xi_\pm), \\ &= S(x_\pm, \xi_\pm) - 0 = S(x_\pm, \xi_\pm) - S(\infty, 0), \\ &= -(\int_{\gamma_\pm} pdq + \int_{\psi(\gamma_\pm^{-1})} pdq). \end{aligned}$$

Poichè per ipotesi $\psi = \mathrm{id}$ in un intorno U di ∞, il punto all'infinito può essere sostituito da un punto qualsiasi $z \in U$. Proviamo ora il seguente:

Lemma 3.2.1 *Se ψ_t è il flusso associato ad una equazione differenziale di Hamilton di Hamiltoniana H, i vettori tangenti alle linee di flusso di X_H sono nel nucleo della forma:*

$$d(pdq - Hdt).$$

Dimostrazione Nel caso di campo vettoriale globalmente Hamiltoniano (di funzione Hamiltoniana H) e autonomo:

$$X_H(q,p) = (\dot{q}, \dot{p}) = (\frac{\partial H}{\partial p}(q,p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p)),$$

sappiamo che vale:

$$d(pdq)(X_H, \cdot) = -dH(\cdot),$$

cioè:

$$i_{X_H}(\omega) = -dH.$$

Consideriamo ora il caso non autonomo:

$$\widetilde{X_H}(q,p,t) = (\dot{q},\dot{p},t) = (\frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t), -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t), 1) = (X_H(q,p),1).$$

$$d(pdq - Hdt) = (d(pdq) - dH \wedge dt)|_{\widetilde{X_H}(q,p,t)} = (d(pdq) - dH \wedge dt)|_{(X_H(q,p),1)},$$
$$= d(pdq)|_{X_H(q,p)} - (dH \wedge dt)|_{(X_H(q,p),1)} = -d_{(q,p)}H - (dH \wedge dt)|_{(X_H(q,p),1)},$$
$$= -d_{(q,p)}H - (dH \otimes dt - dt \otimes dH)|_{(X_H(q,p),1)},$$
$$= -d_{(q,p)}H - [(\frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial t}dt) \otimes dt]|_{(X_H(q,p),1)} + dt \otimes dH|_{(X_H(q,p),1)},$$
$$= -d_{(q,p)}H - \frac{\partial H}{\partial t}dt + dH = -d_{(q,p)}H + d_{(q,p)}H = 0.$$

Ciò è quanto volevamo dimostrare. □

Sia ora Ψ: $[0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ la mappa così definita:

$$\Psi(t,s) = \psi_t(\gamma^{(s)})$$

(ψ_t è il flusso al tempo t e $\gamma^{(s)}$ è la parametrizzazione della curva γ). Notando che $\Psi([0,1]^2)$ è foliato dalle curve immagine del flusso Hamiltoniano:

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$
$$t \longmapsto \Psi(t,s)$$

($s \in [0,1]$ fissato), si ottiene, per il lemma, che

$$\int_{\Psi[0,1]^2} d(pdq - Hdt) = 0.$$

Sia ora γ una curva che unisce x_+ oppure x_- con $z \in U$ = intorno di ∞. Usiamo il teorema di Stokes ricordando che ψ_t, con $t \in [0,1]$, è tale che $\psi_0 = \mathrm{id}$ e $\psi_1 = \psi$.

$$\Psi(\{0,1\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0,1\}) = \gamma \cup \psi_t(z) \cup (-\psi(\gamma)) \cup (-\psi_t(x_\pm)).$$

Allora:

$$0 = \int_\gamma pdq + \int_{\psi_t(z)} (pdq - Hdt) - \int_{\psi(\gamma)} pdq - \int_{\psi_t(x_\pm)} (pdq - Hdt)$$

(Osservare che γ e $\psi(\gamma)$ sono indipendenti da t).
Quindi:

$$\int_\gamma pdq - \int_{\psi(\gamma)} pdq = \int_\gamma pdq + \int_{\psi(\gamma^{-1})} pdq,$$

$$= \int_{\psi_t(x_\pm)} (pdq - Hdt) - \int_{\psi_t(z)} (pdq - Hdt).$$

Cioè:

$$-(\int_\gamma pdq + \int_{\psi(\gamma^{-1})} pdq) = \int_{\psi_t(z)} (pdq - Hdt) - \int_{\psi_t(x_\pm)} (pdq - Hdt).$$

Ora basta ricordare l'espressione per $c_\pm(\psi)$:

$$c_\pm(\psi) = \int_{\psi_t(z)} (pdq - Hdt) - \int_{\psi_t(x_\pm)} (pdq - Hdt),$$

$$= - \int_{\psi_t(x_\pm)} (pdq - Hdt).$$

L'ultima uguaglianza vale poichè $\psi_t(z) \equiv z$ e $H(z,t) \equiv 0.\square$

Concludiamo questo capitolo con un risultato che ci sarà molto utile in seguito.

Proposizione 3.2.1 *Sia*

$$x : I \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$t \longmapsto x(t) = (q(t), p(t))$$

una curva chiusa e

$$y : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$x = (q,p) \longmapsto y(x) = (\bar{q}, \bar{p})$$

una mappa simplettica. Denotiamo inoltre con

$$x : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$y = (\bar{q}, \bar{p}) \longmapsto x(y) = (q,p)$$

l'inversa di y. In tali ipotesi vale la seguente uguaglianza:

$$\oint (p\dot{q} - H(x,t))_{|_{(q(t),p(t))}} dt = \oint (\bar{p}\dot{\bar{q}} - H(x(y),t))_{|_{(\bar{q}(t),\bar{p}(t))}} dt,$$

dove $(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) = y(x(t))$.

Dimostrazione Notiamo innanzitutto che, essendo y mappa simplettica, esiste $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ (di classe C^∞) per cui $\bar{p}d\bar{q} = pdq + df$.
Allora possiamo scrivere (y^* : pull - back):

$$\oint (\bar{p}\dot{\bar{q}} - H(x(y),t))_{|(\bar{q}(t),\bar{p}(t))} dt = \oint y^*(\bar{p}\dot{\bar{q}} - H(y,t))_{|(q(t),p(t))} dt,$$

$$= \oint (p\dot{q} + \frac{df}{dt} - H(x,t))_{|(q(t),p(t))} dt,$$

$$= \oint (p\dot{q} - H(x,t))_{|(q(t),p(t))} dt.$$

□

Nota Dalla precedente proposizione segue che i numeri $c_+(\psi)$ e $c_-(\psi)$ sono invarianti per trasformazioni simplettiche sulla varietà base.

Capitolo 4

4.1 Cenni sull'omologia singolare cubica a coefficienti in $\mathbb{R}$

4.1.1 Notazioni e definizioni

Sia p un intero, $p \geq 1$. $I^p = [0,1]^p$ è il p-cubo standard. Se $p = 0$, I^0 si identifica con il singolo $\{0\}$.

Definizione 4.1.1 *Sia X uno spazio topologico. Un p-cubo singolare di X è un'applicazione continua*

$$c : I^p \longrightarrow X.$$

(L'aggettivo singolare è dovuto al fatto che a c non si richiede di essere omeomorfismo e quindi l'immagine di c è di solito molto diversa da un cubo). Il p-cubo standard ha $2p$ facce, che sono i $(p-1)$-cubi singolari del p-cubo standard.

Definizione 4.1.2 *Sia p un intero, $p \geq 1$. Siano j un intero, $1 \leq j \leq p$, $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$. La (j, α)-esima faccia del p-cubo standard I^p è $\epsilon^p_{j,\alpha} : I^{p-1} \longrightarrow I^p$ definita da*

$$\epsilon^p_{j,\alpha}(\xi_1, ..., \xi_{p-1}) = (\xi_1, ..., \xi_{j-1}, \alpha, \xi_j, ..., \xi_{p-1}).$$

Corrispondentemente, la (j, α)-esima faccia del p-cubo singolare $c : I^p \longrightarrow X$ è il $(p-1)$-cubo $c \circ \epsilon^p_{j,\alpha}$.

Vogliamo ora definire un **bordo** per ogni p-cubo singolare. Tale bordo deve potersi pensare come la frontiera del cubo singolare. Inoltre il bordo di un p-cubo singolare non è un $(p-1)$-cubo singolare ma una $(p-1)$-**catena**, combinazione lineare di $(p-1)$-cubi singolari.

Se $p \geq 0$ è un intero e X è uno spazio topologico, una p-catena singolare, a coefficienti reali, è definita come una combinazione lineare formale finita

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i c_i$$

($\lambda_i \in \mathbb{R}$) di cubi singolari.
Le p-catene singolari sono dunque gli elementi del gruppo abeliano libero che ha per base i p-cubi singolari. Indicheremo tale gruppo abeliano con il simbolo $Q_p(X)$.
Le 0-catene singolari sono gli elementi del gruppo abeliano libero $Q_0(X)$ generato da X stesso. Una 1-catena singolare è pensabile come un insieme finito di cammini $c_1, ..., c_N$, ciascuno contato con molteplicità $\lambda_1, ..., \lambda_N$.
Per completezza, si pone $Q_p(X) = 0$ per $p < 0$. Si definisce poi un omomorfismo

$$\partial_p : Q_p(X) \longrightarrow Q_{p-1}(X)$$

detto **bordo** nel modo seguente: esso è nullo se $p \leq 0$; altrimenti $\partial_p : Q_p(X) \longrightarrow Q_{p-1}(X)$ viene definito sui p-cubi singolari tramite la formula

$$\partial_p(c) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq j \leq p}} (-1)^{j+1} (c \circ \epsilon^p_{j,1} - c \circ \epsilon^p_{j,0}),$$

dove $\epsilon^p_{j,\alpha}$ è l'operatore faccia (j, α)-esima prima definito. Per linearità, l'operatore bordo viene poi esteso alle catene.
Si verifica innanzitutto che $(Q_*(X), \partial)$ è un complesso di catene, cioè:

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0 \quad , \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

In genere però $(Q_*(X), \partial)$ non risulta un complesso di catene esatto, cioè $\mathrm{Ker}(\partial_p) \neq \mathrm{Im}(\partial_{p+1})$. Per avere la "giusta" omologia dobbiamo eliminare i cubi **degeneri**, quelli che solo apparentemente sono oggetti della giusta dimensione.

Definizione 4.1.3 *Un p-cubo $c : I^p \longrightarrow X$ si dice degenere se esiste un intero k, $1 \leq k \leq p$, tale che $c \circ \pi_k = c$, dove $\pi_k : I^p \longrightarrow I^p$, definita da $\pi_k(\xi_1, ..., \xi_p) = (\xi_1, ..., \xi_{k-1}, 0, \xi_{k+1}, ..., \xi_p)$, è la proiezione sulla faccia $(k, 0)$-esima.*

Tale definizione presuppone $p \geq 1$; uno 0-cubo si assume sempre non degenere.

Una **catena** è detta **degenere** se è combinazione lineare di cubi tutti degeneri. Il sottogruppo additivo di $Q_p(X)$ costituito dalle catene degeneri si indica con $D_p(X)$. Si vede subito che

$$\partial_p(D_p(X)) \subseteq D_{p-1}(X).$$

Allora $(D_*(X), \partial)$ risulta un sottocomplesso di $(Q_*(X), \partial)$. Il complesso quoziente $(C_*(X), \partial)$, dove $C_p(X) = \frac{Q_p(X)}{D_p(X)}$ $\forall p \in \mathbb{Z}$, è detto complesso delle catene cubiche singolari non degeneri, a coefficienti reali.
Tale complesso ha la seguente omologia che è detta **omologia singolare cubica di** X

$$H_p(X) = \frac{Z_p(X)}{B_p(X)},$$

$Z_p(X) = \text{Ker } \partial_p$ è lo spazio dei p-cicli,
$B_p(X) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(X))$ è quello dei p-bordi.

4.1.2 Omologia relativa

Siano X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un suo sottospazio.
All'inclusione canonica

$$A \hookrightarrow X$$

è associata la seguente funzione di complessi

$$C_p(A) \hookrightarrow C_p(X),$$

dove $C_p(A)$ è il gruppo delle p-catene di A, combinazioni lineari di cubi singolari non degeneri a valori in A. Il quoziente

$$C_p(X, A) = \frac{C_p(X)}{C_p(A)}$$

può essere identificato con il sottogruppo di $C_p(X)$ generato da quei p-cubi non degeneri $c : I^p \longrightarrow X$ per cui $c(I^p)$ non è contenuto in A. Resta indotto un bordo, ancora indicato con ∂_p

$$\partial_p : C_p(X, A) \longrightarrow C_{p-1}(X, A),$$

che permette di definire il complesso (di catene) quoziente $(C_*(X, A), \partial)$.
Il gruppo $Z_p(X, A)$ dei p-cicli in $C_p(X, A)$ può pensarsi costituito dalle p-catene (modulo $C_p(A)$) il cui bordo sta in $C_{p-1}(A)$.

I p-bordi relativi stanno in $B_p(X, A) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(X, A)) + C_p(A)$. Si ha ovviamente $B_p(X, A) \subseteq Z_p(X, A)$ e per definizione si pone

$$H_p(X, A) = \frac{Z_p(X, A)}{B_p(X, A)}.$$

In tutta generalità, gli spazi di omologia e di coomologia relativa sono in dualità quando i coefficienti stanno in un campo $\mathbb{F}$ fissato di caratteristica 0. Ammettiamo dunque l'esistenza del seguente isomorfismo:

$$H^*(X, A) \cong \mathrm{Hom}(H_*(X, A), \mathbb{F}).$$

Nel nostro contesto i coefficienti sono reali, cioè $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Di conseguenza, con $H^*(X, A)$ indicheremo la coomologia di De Rham relativa (cf. paragrafo 1.2.1) e con $H_*(X, A)$ l'omologia relativa a coefficienti in $\mathbb{R}$ appena descritta.

Proposizione 4.1.1 *Siano* $[(\omega^k, \theta^{k-1})] \in H^k(X, A)$, $[\alpha^k] \in H_k(X, A)$. *La seguente mappa:*

$$H^k(X, A) \times H_k(X, A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([(\omega^k, \theta^{k-1})], [\alpha^k]) \longmapsto \int_{\alpha^k} \omega^k - \int_{\partial\alpha^k} \theta^{k-1} \quad (^*),$$

mette in dualità i due spazi fattore.

Dimostrazione Una classe $[(\omega^k, \theta^{k-1})] \in H^k(X, A)$ è costituita da una k-forma chiusa in X (ω^k) che ristretta al sottospazio A risulta esatta, θ^{k-1} essendo una sua primitiva.
Una classe $[\alpha^k] \in H_k(X, A)$ è rappresentata invece da una k-catena in X il cui bordo $(\partial\alpha^k)$ è combinazione lineare di cubi singolari non degeneri a valori in A.
Occorre allora dimostrare che l'assegnazione (*) è coomologica e non degenere.
Per verificare che l'assegnazione (*) è coomologica, cambiamo il rappresentante della classe $[(\omega^k, \theta^{k-1})] \in H^k(X, A)$ e poi quello della classe $[\alpha^k] \in H_k(X, A)$: in entrambi i casi, l'assegnazione (*) deve risultare caratteristica della classe.
Sia $(\omega^k + d\bar{\omega}^{k-1}, \theta^{k-1} + i^*\bar{\omega}^{k-1} - d\bar{\theta}^{k-2}) \in H_k(X, A)$.
Utilizzando la mappa (*) si ottiene:

$$\int_{\alpha^k} \omega^k + d\bar{\omega}^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k} \theta^{k-1} + i^*\bar{\omega}^{k-1} - d\bar{\theta}^{k-2} =$$

$$= \int_{\alpha^k} \omega^k + \int_{\partial\alpha^k} \bar{\omega}^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k} \theta^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k} i^*\bar{\omega}^{k-1} + \int_{\alpha^k} d^2\bar{\theta}^{k-2}.$$

Ma $\partial\alpha^k$ è combinazione lineare di cubi non degeneri a valori in A, e così l'ultima espressione coincide con:

$$\int_{\alpha^k}\omega^k + \int_{\partial\alpha^k} i^*\bar{\omega}^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k} i^*\bar{\omega}^{k-1} =$$

$$= \int_{\alpha^k}\omega^k - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1}.$$

Variamo ora il rappresentante della classe $[\alpha^k] \in H_k(X, A)$. Ricordiamo che i k-bordi relativi stanno in $\partial_{k+1}(C_{k+1}(X, A)) + C_k(A)$. Consideriamo allora: $(\alpha^k + \partial\bar{\alpha}^{k+1} + \beta^k)$, dove $\bar{\alpha}^{k+1} \in C_{k+1}(X, A)$ e $\beta^k \in C_k(A)$.
Utilizziamo nuovamente (*):

$$\int_{\alpha^k}\omega^k + \int_{\partial\bar{\alpha}^{k+1}}\omega^k + \int_{\beta^k}\omega^k - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1} - \int_{\partial\beta^k}\theta^{k-1} =$$

(essendo $\beta^k \in C_k(A)$ e ω^k esatta in A)

$$= \int_{\alpha^k}\omega^k + \int_{\bar{\alpha}^{k+1}} d\omega^k + \int_{\partial\beta^k}\theta^{k-1} - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1} - \int_{\partial\beta^k}\theta^{k-1} =$$

$$= \int_{\alpha^k}\omega^k - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1}.$$

Infine, verifichiamo che l'assegnazione (*) è non degenere.
Supponiamo che

$$\int_{\alpha^k}\omega^k - \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1} = 0,$$

$\forall\ [\alpha^k] \in H_k(X, A)$. Allora

$$\int_{\alpha^k}\omega^k = \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1},$$

$\forall\ [\alpha^k] \in H_k(X, A)$.
Si ha che

$$\int_{\alpha^k}\omega^k = \int_{\alpha^k} d\theta^{k-1},$$

$\forall\ [\alpha^k] \in H_k(X, A)$ se e solo se (per l'arbitrarietà di α^k) $\omega^k \equiv d\theta^{k-1}$, cioè se ω^k è esatta. Ciò equivale a dire che $[(\omega^k, \theta^{k-1})] = [(0, 0)]$.
Viceversa

$$\int_{\alpha^k}\omega^k = \int_{\partial\alpha^k}\theta^{k-1},$$

$\forall\ [(\omega^k, \theta^{k-1})] \in H^k(X, A)$ se e solo se

$$\int_{\alpha^k} \omega^k = \int_{\alpha^k} d\theta^{k-1},$$

$\forall\ [(\omega^k, \theta^{k-1})] \in H^k(X, A)$.
Ricordiamo che $d\theta^{k-1}$ è la restrizione ad A di ω^k. Allora ciò accade nell'ipotesi che $\alpha^k \in C_k(A)$, cioè $[\alpha^k] = [0]$.
Ciò è quanto volevamo dimostrare. $\square$

4.2 Ulteriori proprietà delle $c_+(\psi), c_-(\psi)$

In questa sezione proveremo una serie di risultati che ci permetteranno di dimostrare un teorema di Viterbo sull'esistenza di orbite periodiche per mappe simplettiche.
Siano $\alpha \neq 0 \in H_*(B)$ ed L una sottovarietà Lagrangiana di T^*B. Possiamo allora definire $c(\alpha, L)$ nel modo che segue:

$$\begin{aligned} c(\alpha, L) = \inf \{ \ \lambda : \widetilde{T}\alpha \in H_*(E^\infty, E^{-\infty}) \text{ è nell'immagine} \\ \text{della mappa } H_*(E^\lambda, E^{-\infty}) \longrightarrow H_*(E^\infty, E^{-\infty}) \ \}. \end{aligned}$$

In tale contesto $\alpha \longmapsto \widetilde{T}\alpha$ è l'isomorfismo di Thom in omologia:

$$H_*(B) \overset{\widetilde{T}}{\cong} H_*(E^\infty, E^{-\infty})$$

Osservazione Nonostante si usi lo stesso simbolo c, la definizione di cui sopra è attualmente indipendente da quella precedentemente data in coomologia.

4.2.1 Sequenza esatta in omologia e in coomologia. Dualità di Alexander

Consideriamo tre spazi (topologici) X, Y, Z tali che $Z \subseteq Y \subseteq X$. Si può dimostrare che le seguenti sequenze (in omologia e in coomologia):

$$... \longrightarrow H_n(Y, Z) \longrightarrow H_n(X, Z) \longrightarrow H_n(X, Y) \longrightarrow ...$$

$$... \longrightarrow H^n(X, Y) \longrightarrow H^n(X, Z) \longrightarrow H^n(Y, Z) \longrightarrow ...$$

risultano esatte. Tali sequenze verranno denominate sequenza esatta in omologia e in coomologia della terna (X, Y, Z).
Supponiamo ora che X sia una varietà n-dimensionale e orientabile, Y e Z siano compatti. Utilizzeremo in seguito la seguente dualità (detta di Alexander):

$$H^q(Y, Z) \cong H_{n-q}(X - Z, X - Y).$$

4.2.2 Risultati sulle $c_+(\psi), c_-(\psi)$

Iniziamo con una proposizione che correla la precedente definizione di $c(\alpha, L)$ con quella di $c(u, L)$ (confrontare paragrafo 1.5.1).

Proposizione 4.2.1 *Se $u \in H^q(B)$ e $\alpha \in H_{n-q}(B)$ sono in dualità (tramite la dualità di Poincaré), allora:*

$$c(u, \bar{L}) = -c(\alpha, L).$$

Dimostrazione Sia S una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana L di T^*B. Allora $-S$ è una funzione generatrice speciale per $\bar{L}$ (cf. nota a pagina 30 per la definizione di $\bar{L}$). Consideriamo i due seguenti insiemi di sottolivello:

$$\overline{E^\lambda} = \{x \in E \ : \ -S(x) \leq \lambda\},$$

$$E^{-\lambda} = \{x \in E \ : \ S(x) \leq -\lambda\}.$$

Naturalmente si ha che:

$$E = \mathring{\overline{E^\lambda}} + E^{-\lambda},$$

equivalentemente:

$$\mathring{\overline{E^\lambda}} = E - E^{-\lambda}.$$

Di conseguenza, $H^*(\mathring{\overline{E^\lambda}}, \mathring{\overline{E^{-\infty}}}) = H^*(E - E^{-\lambda}, E - E^{\infty})$.
Troviamo ora tre isomorfismi tramite la dualità di Alexander (tra coomologia e omologia).

$$H^*(\mathring{\overline{E^\infty}}, \mathring{\overline{E^\lambda}}) = H^*(E - E^{-\infty}, E - E^{-\lambda}) \cong$$
$$\cong H_*(E - E + E^{-\lambda}, E - E + E^{-\infty}) = H_*(E^{-\lambda}, E^{-\infty}).$$

$$H^*(\mathring{\overline{E^\infty}}, \mathring{\overline{E^{-\infty}}}) = H^*(E - E^{-\infty}, E - E^{\infty}) \cong$$
$$\cong H_*(E - E + E^{\infty}, E - E + E^{-\infty}) = H_*(E^{\infty}, E^{-\infty}).$$

$$H^*(\mathring{\overline{E^\lambda}}, \mathring{\overline{E^{-\infty}}}) = H^*(E - E^{-\lambda}, E - E^{\infty}) \cong$$
$$\cong H_*(E - E + E^{\infty}, E - E + E^{-\lambda}) = H_*(E^{\infty}, E^{-\lambda}).$$

Consideriamo ora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 & H_*(E^{-\lambda}, E^{-\infty}) \cong H^*(\overset{\circ}{\overline{E^{\infty}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{\lambda}}}) & \\
 & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & \\
\widetilde{T}\alpha \in & H_*(E^{\infty}, E^{-\infty}) \cong Tu \in H^*(\overset{\circ}{\overline{E^{\infty}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{-\infty}}}) & \\
 & \downarrow \qquad\qquad \downarrow & \\
 & H_*(E^{\infty}, E^{-\lambda}) \cong H^*(\overset{\circ}{\overline{E^{\lambda}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{-\infty}}}) &
\end{array}$$

Gli isomorfismi orizzontali sono dati dalla dualità di Alexander.
Le frecce verticali provengono dalla sequenza esatta in omologia (rispettivamente in coomologia) della terna $(E^{\infty}, E^{-\lambda}, E^{-\infty})$ (rispettivamente $(\overset{\circ}{\overline{E^{\infty}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{\lambda}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{-\infty}}})$).
Notiamo innanzitutto che la dualità di Alexander manda $\widetilde{T}\alpha$ in Tu se u è il duale di Poincaré di α.
Possiamo ora concludere con gli argomenti che seguono.

- Se $\lambda < c(u, \bar{L})$ allora l'immagine della classe Tu va a zero in $H^*(\overset{\circ}{\overline{E^{\lambda}}}, \overset{\circ}{\overline{E^{-\infty}}})$ (questo per definizione di $c(u, \bar{L})$). Poichè la dualità di Alexander fa corrispondere Tu a $\widetilde{T}\alpha$ se u è il duale di Poincarè di α, anche l'immagine di $\widetilde{T}\alpha$ va a zero in $H_*(E^{\infty}, E^{-\lambda})$.
  Usando l'esattezza della sequenza in omologia della terna $(E^{\infty}, E^{-\lambda}, E^{-\infty})$, ciò significa che $\widetilde{T}\alpha$ è nell'immagine di $H_*(E^{-\lambda}, E^{-\infty})$, equivalentemente $-\lambda \geq c(\alpha, L)$ cioè $\lambda \leq -c(\alpha, L)$.
  Di conseguenza
  $$\lambda < c(u, \bar{L}) \Longrightarrow \lambda \leq -c(\alpha, L),$$
  cioè
  $$c(u, \bar{L}) \leq -c(\alpha, L).$$
  Utilizziamo ora uno stesso argomento per ottenere che
  $$c(u, \bar{L}) \leq -c(\alpha, L).$$

- Se $\lambda \geq c(u, \bar{L})$ allora l'immagine della classe Tu è diversa da zero in H^* $(\overset{\circ}{\overline{E^{\lambda}}}, \overset{\circ}{E^{-\infty}})$.
  Ciò è equivalente al fatto che l'immagine di $\widetilde{T}\alpha$ è diversa da zero in $H_*(E^{\infty}, E^{-\lambda})$ cioè che $\widetilde{T}\alpha$ non appartiene al nucleo della mappa naturale
  $$H_*(E^{\infty}, E^{-\infty}) \longrightarrow H_*(E^{\infty}, E^{-\lambda}).$$

Dall'esattezza della sequenza in omologia della terna $(E^{\infty}, E^{-\lambda}, E^{-\infty})$ si ottiene allora che $\widetilde{T}\alpha$ non è nell'immagine dell'applicazione

$$H_*(E^{\lambda}, E^{-\infty}) \longrightarrow H_*(E^{\infty}, E^{-\infty}).$$

Allora deve necessariamente essere: $-\lambda < c(\alpha, L)$ cioè $\lambda > -c(\alpha, L)$.
Si è così dimostrato che

$$\lambda \geq c(u, \bar{L}) \Longrightarrow \lambda > -c(\alpha, L),$$

cioè

$$c(u, \bar{L}) \geq -c(\alpha, L).$$

Le due disuguaglianze comportano allora che $c(u, \bar{L}) = -c(\alpha, L)$. □

Corollario 4.2.1 *Se μ è la classe di orientazione di B, allora*

$$c(\mu, \bar{L}) = -c(1, L).$$

Dimostrazione È noto che μ, la classe di orientazione di B, sta in $H^n(B)$ (dove $n = \dim B$). Essendo B una varietà chiusa (cioè compatta e senza bordo), la dualità di Poincaré ci suggerisce che

$$H^n(B) \cong H_{n-n}(B) = H_0(B).$$

Sia dunque $\alpha \in H_0(B)$ il duale di Poincarè di μ.
Ricordiamo che $\dim E^-_{\infty} = n + m$, quindi $\dim E^-_{\infty} - \dim B = m$. Riscriviamo anche l'isomorfismo di Thom in coomologia:

$$H^q(E^{\infty}, E^{-\infty}) \overset{T}{\cong} H^{q-m}(B)$$

$(m \leq q \leq m+n)$. Tramite la dualità di Poincaré e l'isomorfismo $\widetilde{T}$ (di Thom in omologia) si ottiene

$$H^{q-m}(B) \cong H_{n-q+m}(B) \overset{\widetilde{T}}{\cong} H_q(E^{\infty}, E^{-\infty}).$$

Sia ora $q = n + m = \dim E^-_{\infty}$, di modo che

$$\widetilde{T}\alpha \in H_{n+m}(E^{\infty}, E^{-\infty}).$$

Notiamo che $\dim H_0(B) = \dim H^n(B) = 1$.
Di conseguenza anche $\dim H_{n+m}(E^{\infty}, E^{-\infty}) = 1$. Ciò comporta che $c(\alpha, L)$ può essere definito nel modo seguente:

$$\inf \{\lambda : H_{n+m}(E^{\lambda}, E^{-\infty}) \longrightarrow H_{n+m}(E^{\infty}, E^{-\infty}) \text{ è diverso da zero}\}.$$

Infatti essendo $\dim H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}) = 1$, l'immagine di $H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty})$ in $H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty})$ o risulta uguale a 0 oppure coincide con il generatore di $H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty})$.
Se accade che l'immagine di $H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty})$ è nulla allora $\widetilde{T}\alpha$ ($\widetilde{T}\alpha \neq 0$) non è nell'immagine delle mappa naturale

$$H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty}) \longrightarrow H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}).$$

Viceversa, se $\widetilde{T}\alpha$ non è nell'immagine dell'inclusione sopra scritta, allora necessariamente l'immagine di $H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty})$ è uguale a zero. Di qui l'equivalenza della precedente definizione con $c(\alpha, L)$.
Poichè lavoriamo con coefficienti nel campo $\mathbb{R}$, esiste la seguente dualità (cf. paragrafo 4.1.2):

$$H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty}) \cong \mathrm{Hom}(H^{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty}), \mathbb{R}).$$

Tale isomorfismo ci suggerisce allora che

$$H_{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty}) \longrightarrow H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty})$$

è la trasposta della mappa seguente:

$$H^{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}) \longrightarrow H^{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty}).$$

Valgono anche i fatti seguenti:
$\dim H^{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}) = \dim H_{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}) = 1$,
$H^{n+m}(E^\infty, E^{-\infty}) \overset{T}{\cong} H^{n+m-m}(B) \cong H_0(B) \cong H^0(B)$.
Se 1 è un generatore di $H^0(B)$, prendiamo $T1$ come generatore di $H^{n+m}(E^\infty, E^{-\infty})$; l'immagine di $H^{n+m}(E^\lambda, E^{-\infty})$ in $H^{n+m}(E^\infty, E^{-\infty})$ è diversa da zero se e solo se $\lambda \geq c(1, L)$. Allora $c(\alpha, L) = c(1, L)$.
La proposizione precedente ci assicura poi che, se μ è il duale di Poincaré di α, vale l'uguaglianza:

$$c(\mu, \bar{L}) = -c(\alpha, L).$$

Di conseguenza $c(\mu, \bar{L}) = -c(1, L)$. $\square$

È molto utile anche il seguente risultato.

Proposizione 4.2.2 *(1) $c_-(\psi) \leq 0 \leq c_+(\psi)$, con $c_+(\psi) = c_-(\psi) = 0$ se e solo se $\psi = id$.*
(2) $c_+(\psi^{-1}) = -c_-(\psi)$.

Dimostrazione (1) Sia S una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana $\widetilde{\Gamma}_\psi$:

$$S : \mathbb{S}^{2n} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Per definizione S coincide con una forma quadratica non degenere all'infinito:

$$S(\infty,\xi)=|\xi^+|^2-|\xi^-|^2.$$

Identifichiamo il polo nord della sfera $\mathbb{S}^{2n}$ con $\{\infty\}$. Sia $E_{\{\infty\}}$ la fibra di $E=\mathbb{S}^{2n}\times\mathbb{R}^k$ sopra il polo nord:

$$E_{\{\infty\}}=\{(\infty,\xi)\in E\ :\ \xi\in\mathbb{R}^k\}.$$

Anche relativamente alla fibra $E_{\{\infty\}}$, valgono le solite definizioni di insieme di sottolivello:

$$E^{\lambda}_{\{\infty\}}=\{(\infty,\xi)\in E\ :\ S(\infty,\xi)\le\lambda\}.$$

Le seguenti inclusioni:

$$i_1:(E^0_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}})\longrightarrow(E^0,E^{-\infty}),$$

$$i_2:\{\infty\}\longrightarrow\mathbb{S}^{2n},$$

$$j_1:(E^0,E^{-\infty})\longrightarrow(E^{\infty},E^{-\infty}),$$

$$j_2:(E^0_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}})\longrightarrow(E^{\infty}_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}}),$$

inducono tali mappe tra spazi di coomologia:

$$i_1^*:H^*(E^0,E^{-\infty})\longrightarrow H^*(E^0_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}}),$$

$$i_2^*:H^*(\mathbb{S}^{2n})\longrightarrow H^*(\{\infty\}),$$

$$j_1^*:H^*(E^{\infty},E^{-\infty})\longrightarrow H^*(E^0,E^{-\infty}),$$

$$j_2^*:H^*(E^{\infty}_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}})\longrightarrow H^*(E^0_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}}).$$

Ricordiamo inoltre i seguenti isomorfismi (di Thom) (il primo ha come varietà base $\mathbb{S}^{2n}$, il secondo $\{\infty\}$):

$$T_1:H^*(\mathbb{S}^{2n})\longrightarrow H^*(E^{\infty},E^{-\infty}),$$

$$T_2:H^*(\{\infty\})\longrightarrow H^*(E^{\infty}_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}}).$$

Il seguente diagramma risulta commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H^*(E^0_{\{\infty\}},E^{-\infty}_{\{\infty\}}) & \xleftarrow{i_1^*} & H^*(E^0,E^{-\infty})\\
j_2^*\circ T_2\uparrow & & \uparrow j_1^*\circ T_1\\
H^*(\{\infty\}) & \xleftarrow{i_2^*} & H^*(\mathbb{S}^{2n})
\end{array}$$

Ora la mappa

$$j_2^* \circ T_2 : H^*(\{\infty\}) \longrightarrow H^*(E^0_{\{\infty\}}, E^{-\infty}_{\{\infty\}})$$

è iniettiva. Poichè l'immagine di $1_{\mathbb{S}^{2n}} \in H^*(\mathbb{S}^{2n})$ è $1_{\{\infty\}} \in H^*(\{\infty\})$, necessariamente $j_2^* \circ T_2(1_{\mathbb{S}^{2n}}) \neq 0$, cioè $c_-(\psi) = c(1, \widetilde{\Gamma}_\psi) \leq 0$.
L'uguaglianza $c_+(\psi) \geq 0$ segue dal punto (2) che ora dimostreremo.

(2) Ricordiamo innanzitutto che:

- Γ_ψ è il grafico di ψ e coincide con la diagonale Δ al di fuori di un insieme compatto.

- $h(\Gamma_\psi)$ è l'immagine tramite la mappa simplettica

  $$h(q,p,Q,P) = (\frac{q+Q}{2}, \frac{p+P}{2}, p-P, q-Q)$$

  del grafico di ψ e coincide con la sezione nulla $O_{\mathbb{R}^{2n}}$ al di fuori di un insieme compatto.

- $\widetilde{\Gamma}_\psi$ è la compattificazione di $h(\Gamma_\psi)$ (attraverso la proiezione stereografica).

Vogliamo utilizzare il corollario 4.2.1:
Se μ è la classe di orientazione di B, allora $c(\mu, \bar{L}) = -c(1, L)$. Nel nostro caso poniamo:

$$L = \widetilde{\Gamma}_\psi \Longrightarrow \bar{\widetilde{\Gamma}}_\psi = \widetilde{\Gamma}_{\psi^{-1}}$$

(L'ultima uguaglianza si verifica subito scambiando (q,p) con (Q,P)).
Di conseguenza:

$$c(\mu, \widetilde{\Gamma}_{\psi^{-1}}) = -c(1, \widetilde{\Gamma}_\psi).$$

Cioè:

$$-c_-(\psi^{-1}) = +c_+(\psi).$$

Ugualmente si dimostra che:

$$c_+(\psi^{-1}) = -c_-(\psi).$$

□

Corollario 4.2.2 *Sia ϕ una mappa isotopa all'identità (cioè esiste una isotopia Hamiltoniana $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ per cui $\phi_0 = id$ e $\phi_1 = \phi$) e tale che $\phi_t^*\omega = \omega\ \forall t \in [0,1]$. Allora, per ogni diffeomorfismo $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$, valgono le seguenti uguaglianze:*

$$c_+(\phi\psi\phi^{-1}) = c_+(\psi),$$

$$c_-(\phi\psi\phi^{-1}) = c_-(\psi).$$

Dimostrazione Notiamo innanzitutto che se x, y sono punti fissi di ψ, allora $\phi_t(x)$, $\phi_t(y)$ risultano punti fissi di $\phi_t\psi\phi_t^{-1}$. Per stimare

$$l(\phi_t(x), \phi_t(y)) =: l((\phi_t(x), \phi_t(x)), (\phi_t(y), \phi_t(y)), \Gamma_{\phi_t\psi\phi_t^{-1}}, \Delta),$$

$$l(x, y) =: l((x, x), (y, y), \Gamma_\psi, \Delta),$$

consideriamo:

- γ_t = un qualsiasi cammino che collega $(\phi_t(x), \phi_t(x))$ con $(\phi_t(y), \phi_t(y))$,
  g_t = il circuito $\gamma_t \circ \phi_t\psi\phi_t^{-1}(\gamma_t^{-1})$,
  A_t = una superficie da esso racchiusa.

- γ_1 = un qualsiasi cammino che collega (x, x) con (y, y),
  g_1 = il circuito $\gamma_1 \circ \psi(\gamma_1^{-1})$,
  A_1 = una superficie racchiusa da g_1.

Per l'arbitrarietà della curva γ_t, che collega $(\phi_t(x), \phi_t(x))$ con $(\phi_t(y), \phi_t(y))$, si può scegliere $\gamma_t = \phi_t(\gamma_1)$. Di conseguenza $g_t = \phi_t(g_1)$. Si hanno le seguenti uguaglianze:

$$l(\phi_t(x), \phi_t(y)) = -\int_{g_t} pdq = \int_{A_t} \omega = \int_{A_1} \phi_t^*\omega = \int_{A_1} \omega = -\int_{g_1} pdq = l(x, y).$$

Dal teorema 3.2.1 otteniamo ora che $c_+(\phi_t\psi\phi_t^{-1})$ e $c_+(\psi)$ coincidono con $l(\phi_t(x), \phi_t(y))$ ed $l(x, y)$ rispettivamente, per $x, y, \phi_t(x), \phi_t(y)$ opportuni. Allora $c_+(\phi_t\psi\phi_t^{-1})$ è indipendente da t. Analogamente per $c_-(\phi_t\psi\phi_t^{-1})$. □

Proposizione 4.2.3

$$c_+(\phi\psi) \leq c_+(\phi) + c_+(\psi),$$

$$c_-(\phi\psi) \geq c_-(\phi) + c_-(\psi),$$

$$\gamma(\phi\psi) \leq \gamma(\phi) + \gamma(\psi).$$

Dimostrazione La seguente dimostrazione utilizza il corollario 2.2.1:

$$c(u.v, \psi(L)) \geq c(u, L) + c(v, \psi(O_B)),$$

basta scegliere u, v, L e ψ opportuni.
Ricordando le definizioni di Γ_ϕ, $h(\Gamma_\phi)$ e $\widetilde{\Gamma}_\phi$ (cf. proposizione 4.2.2), vogliamo usare la disuguaglianza precedente.
Sia $L = \widetilde{\Gamma}_\psi$. Al posto di ψ utilizziamo l'estensione di id $\times$ ϕ a $T^*\mathbb{S}^{2n}$ (sia essa $\widetilde{\phi}$). Risulta che $\forall y \in \mathbb{S}^{2n}$, $\widetilde{\phi}$ è definita nel modo seguente:

$$\widetilde{\phi} : T_y^*\mathbb{S}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow T_y^*\mathbb{S}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

$$(y, x) \longmapsto (y, \phi(x)).$$

Se ora applichiamo la mappa simplettica h e poi la proiezione stereografica a Δ e a Γ_ϕ, otteniamo $O_{\mathbb{S}^{2n}}$ e $\widetilde{\Gamma}_\phi$ rispettivamente. Allora $\widetilde{\phi}(O_{\mathbb{S}^{2n}})$ coincide con $\widetilde{\Gamma}_\phi$. Inoltre $\widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma}_\psi) = \widetilde{\Gamma}_{\phi\psi}$.
Così abbiamo che

$$c(1.1, \widetilde{\phi}(\widetilde{\Gamma}_\psi)) \geq c(1, \widetilde{\Gamma}_\psi) + c(1, \widetilde{\phi}(O_{\mathbb{S}^{2n}})).$$

La varietà base è in tal caso $\mathbb{S}^{2n}$, di cui conosciamo la coomologia a livello zero: si ha che $H^0(\mathbb{S}^{2n}) = \mathbb{R} \cdot 1$. Allora si può ancora scegliere 1 come rappresentante della classe di 1.1 in $H^0(\mathbb{S}^{2n})$.
La disuguaglianza precedente equivale a (confrontare anche definizione 3.2.1):

$$-c_+(\phi\psi) \geq -c_+(\psi) - c_+(\phi),$$

cioè:

$$c_+(\phi\psi) \leq c_+(\phi) + c_+(\psi),$$

come volevamo dimostrare.
Per l'altra disuguaglianza ragioniamo in modo analogo prendendo $L = \widetilde{\Gamma}_{\phi^{-1}}$ e come ψ l'estensione di id $\times$ ψ^{-1} a $T^*\mathbb{S}^{2n}$ (sia essa $\widetilde{\psi}$).
Abbiamo ancora che (id $\times$ ψ^{-1})$(\Delta) = \Gamma_{\psi^{-1}}$, allora $\widetilde{\psi}(O_{\mathbb{S}^{2n}}) = \widetilde{\Gamma}_{\psi^{-1}}$.
Inoltre $\widetilde{\psi}(\widetilde{\Gamma}_{\phi^{-1}}) = \widetilde{\Gamma}_{\psi^{-1}\phi^{-1}} = \widetilde{\Gamma}_{(\phi\psi)^{-1}}$.
Di conseguenza si ottiene che

$$c(1, \widetilde{\psi}(\widetilde{\Gamma}_{\phi^{-1}})) \geq c(1, \widetilde{\Gamma}_{\phi^{-1}}) + c(1, \widetilde{\Gamma}_{\psi^{-1}}),$$

cioè

$$-c_+((\phi\psi)^{-1}) \geq -c_+(\phi^{-1}) - c_+(\psi^{-1}).$$

Ricordando ora il punto (2) di proposizione 4.2.2 si ottiene

$$c_-(\phi\psi) \geq c_-(\phi) + c_-(\psi).$$

Questo è quanto volevamo dimostrare. Il resto risulta immediata conseguenza della definizione di $\gamma(\phi\psi)$. $\square$

Corollario 4.2.3 *Sia* $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ *una isotopia Hamiltoniana in* $\mathcal{H}(U)$ *(*$\phi_0 =$ *id) e sia* ψ *in* $\mathcal{H}(U)$ *tale che:*

$$\psi(U) \cap U = \emptyset.$$

Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$c_+(\psi\phi_1) = c_+(\psi),$$

$$c_-(\psi\phi_1) = c_-(\psi).$$

Come conseguenza otteniamo che: $c_+(\phi_1) \leq \gamma(\psi)$.

Dimostrazione Sia x un punto fisso di $\psi\phi_t$. Allora $\psi\phi_t(x) = \psi(\phi_t(x)) = x$. Supponiamo che $x \in U$. Siccome $\psi(U) \cap U = \emptyset$, otteniamo che $\phi_t(x) \notin U$, quindi x non è punto fisso di ϕ_t, cioè $\phi_t(x) \neq x$. Ma $\psi =$ id al di fuori di U, allora $\psi(\phi_t(x)) = \phi_t(x) = x$, assurdo.
Di conseguenza se $\psi(\phi_t(x)) = x$, necessariamente $x \notin U$. Inoltre, poichè $\phi_t =$ id al di fuori di U, otteniamo che tale x deve necessariamente essere un punto fisso di ψ.
Siano ora x, y due punti fissi di $\psi\phi_t$ (e quindi di ψ).
Mostriamo che il numero $l(x, y; \psi\phi_t)$ è indipendente da t.
Scegliamo un cammino γ_1 congiungente x a y.

$$\gamma_1 \circ \psi\phi_t(\gamma_1^{-1}) = \gamma_1 \circ \psi(\gamma_1^{-1}) \circ \psi(\gamma_1) \circ \psi\phi_t(\gamma_1^{-1}) = \gamma_1 \circ \psi(\gamma_1^{-1}) \circ \psi(\gamma_1 \circ \phi_t(\gamma_1^{-1})).$$

Osserviamo innanzitutto che l'area simplettica relativa al circuito $\psi(\gamma_1 \circ \phi_t(\gamma_1^{-1}))$ è la stessa del circuito $(\gamma_1 \circ \phi_t(\gamma_1^{-1}))$, che a sua volta coincide con $l(x, y; \phi_t)$.
Considerando le uguaglianze scritte sopra, è allora sufficiente dimostrare che $l(x, y; \phi_t)$ è zero.
Ricordiamo ora la dimostrazione del teorema 3.2.1.
Era stato provato che $l(x, y; \phi_t)$ risulta uguale a:

$$\int_{\phi_t(x)} pdq - Hdt - \int_{\phi_t(y)} pdq - Hdt.$$

Ma $x, y \notin U$. Di conseguenza: $\phi_t(x) \equiv x, \phi_t(y) \equiv y$ e $H(x,t)$, $H(y,t) \equiv 0$.
Allora $l(x, y; \phi_t)$ è zero e così anche l'area simplettica relativa a $\gamma_1 \circ \phi_t(\gamma_1^{-1})$ è nulla.
L'area che stiamo cercando è quindi l'area di $\gamma_1 \circ \psi(\gamma_1^{-1})$, cioè $l(x, y; \psi)$.

Ne risulta che $l(x,y;\psi\phi_t) = l(x,y;\psi)$ e ciò prova il nostro asserto.
Otteniamo allora (confrontare teorema 3.2.1) che esistono $\bar{x},\bar{y},x',y' \notin U$ realizzanti:

$$l(\bar{x},\bar{y};\psi\phi_t) = c_+(\psi\phi_t),$$

$$l(x',y';\psi\phi_t) = c_-(\psi\phi_t).$$

Da quanto finora provato, $c_+(\psi\phi_t)$ e $c_-(\psi\phi_t)$ risultano indipendenti da t e lo stesso vale per $\gamma(\psi\phi_t) = c_+(\psi\phi_t) - c_-(\psi\phi_t)$.
Possiamo scrivere:

$$c_+(\psi\phi_1) = c_+(\psi\phi_0) = c_+(\psi),$$

$$c_-(\psi\phi_1) = c_-(\psi\phi_0) = c_-(\psi).$$

Applichiamo ora la proposizione 4.2.3.

$$c_+(\psi\phi_1) + c_+(\psi^{-1}) \geq c_+(\psi^{-1}\psi\phi_1) = c_+(\phi_1).$$

Ma $c_+(\psi\phi_1) = c_+(\psi), c_+(\psi^{-1}) = -c_-(\psi)$.
Quindi otteniamo che:

$$c_+(\psi\phi_1) + c_+(\psi^{-1}) = c_+(\psi) - c_-(\psi) = \gamma(\psi) \geq c_+(\phi_1).$$

Ciò è quanto volevamo dimostrare: $c_+(\phi_1) \leq \gamma(\psi)$. □

Proviamo un ulteriore risultato.

Lemma 4.2.1 *Sia S_λ una famiglia continua ad un parametro di funzioni e sia $c(\lambda) = c(u, S_\lambda)$ un valore critico di S_λ ottenuto con la tecnica min-max. Supponiamo inoltre che:*

$$dS_\lambda(x_\lambda) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} S_\lambda(x_\lambda) \geq 0.$$

Allora $c(\lambda)$ è non decrescente.

Dimostrazione Facciamo la forte ipotesi che, se x_λ è un punto critico di S_λ, risulta che $\frac{\partial}{\partial\lambda}S_\lambda(x_\lambda) > 0$. Assumiamo inoltre la genericità della famiglia S_λ, cioè ogni S_λ ha punti critici con distinti valori critici, eccetto che per un numero finito di valori di λ che denoteremo con $\lambda_1 < ..... < \lambda_k$. Se $\lambda \in]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$ allora possiamo trovare l'unico punto critico di valore critico $c(\lambda)$, sia esso x_λ.
Risulta

$$\frac{d}{d\lambda}c(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(S_\lambda(x_\lambda)),$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda}(S_\lambda(x_\lambda)) + dS_\lambda(x_\lambda) \cdot \frac{d}{d\lambda}(x_\lambda) > 0$$

(Il secondo termine è nullo poichè x_λ è un punto critico di S_λ, mentre il primo termine è positivo per ipotesi).
Di conseguenza c è una funzione continua con derivata strettamente positiva eccetto che in un numero finito di punti: c è allora crescente.
È ora facile concludere nel caso generale.
Come prima cosa notiamo che l'ipotesi di genericità della famiglia S_λ è facilmente rimossa con l'approssimazione nella C^1-topologia. Tale approssimazione non distrugge l'ipotesi fatta all'inizio della dimostrazione poichè i punti critici della famiglia perturbata stanno in un intorno dei punti critici della famiglia non perturbata. Se ora consideriamo una sequenza di famiglie generiche convergenti a quella non perturbata, poichè $c(u, S_\lambda)$ dipende in modo continuo da S_λ nella C^1-topologia, otteniamo che $c(\lambda)$ è non decrescente.
Infine l'ipotesi iniziale si può facilmente togliere utilizzando $S_\lambda + \epsilon\lambda$ al posto di S_λ, con ϵ arbitrariamente piccolo. $\square$

Proposizione 4.2.4 *Siano $H_1(x,t)$ e $H_2(x,t)$ due Hamiltoniane a supporto compatto, ψ_1 e ψ_2 le mappe al tempo $t = 1$ del flusso loro associato.*
Supponiamo $H_1(x,t) \leq H_2(x,t)$ $\forall x$, $\forall t$.
Allora $c_+(\psi_1) \leq c_+(\psi_2)$ e $c_-(\psi_1) \leq c_-(\psi_2)$.

Dimostrazione Consideriamo $(H_\lambda(x,t))_{\lambda\in[1,2]}$, una omotopia lineare da $H_1(x,t)$ a $H_2(x,t)$. Si può pensare a

$$H_\lambda(x,t) = (2-\lambda)H_1(x,t) - (1-\lambda)H_2(x,t).$$

Siano $\psi_t^\lambda(x)$ il flusso di $H_\lambda(x,t)$ e S_λ una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana $h(L_\lambda)$, L_λ essendo il grafico di ψ_1^λ

$$L_\lambda = \{(x, \psi_1^\lambda(x)) \ : \ x \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

(S_λ sarà normalizzata in modo che il suo valore nel punto $(\infty, 0)$ sia 0). Se x_λ è un punto critico di S_λ, poniamo $\phi_\lambda(t) =: \psi_t^\lambda(x_\lambda)$. Essendo x_λ critico di S_λ, abbiamo che $(x_\lambda, 0) = h(x_\lambda, \psi_1^\lambda(x_\lambda)) \cap O_{\mathbb{R}^{2n}}$. Accade che $h(x_\lambda, \psi_1^\lambda(x_\lambda)) \in O_{\mathbb{R}^{2n}}$ se e solo se $(x_\lambda, \psi_1^\lambda(x_\lambda)) \in h^{-1}(O_{\mathbb{R}^{2n}}) = \Delta$, cioè se e solo se $\psi_1^\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$. Allora la curva $\psi_t^\lambda(x_\lambda)$, per ogni λ fissato, risulta chiusa. Ora si può utilizzare il teorema 3.2.1, per concludere che:

$$S_\lambda(x_\lambda) = -(-S_\lambda(x_\lambda) + S_\lambda(\infty, 0)) = -\int_{\psi_t^\lambda(x_\lambda)} pdq - H_\lambda dt,$$

$$= -\int_{\phi_t(\lambda)} pdq - H_\lambda dt = -\int_{\mathbb{S}^1} \phi_\lambda^*[\ pdq - H_\lambda dt\ ].$$

Ora occorre verificare solamente che: $\frac{\partial}{\partial\lambda} S_\lambda(x_\lambda) \geq 0$.

$$S_\lambda(x_\lambda) = -\int_{\mathbb{S}^1} \phi_\lambda^*[\ pdq - H_\lambda dt\ ].$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} S_\lambda(x_\lambda) = \int_{\mathbb{S}^1} \frac{\partial}{\partial\lambda} H_\lambda(\phi_\lambda(t), t) dt.$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} H_\lambda(\phi_\lambda(t), t) dt = \frac{\partial}{\partial\lambda}[\ (2-\lambda) H_1(\phi_\lambda(t), t) - (1-\lambda) H_2(\phi_\lambda(t), t)\ ],$$
$$= -H_1(\phi_\lambda(t), t) + H_2(\phi_\lambda(t), t) \geq 0$$

per le ipotesi fatte su H_1 e H_2. Di conseguenza, ricordando il lemma precedente, se $c(\lambda)$ è valore critico di S_λ ottenuto con la tecnica min-max, la famiglia $(c(\lambda))_{\lambda\in[1,2]}$ è non decrescente. In particolare: $c(1) \leq c(2)$.
Essendo $c_\pm(\psi_1)$ e $c_\pm(\psi_2)$ valori critici relativi a S_1 ed S_2 rispettivamente (i primi utilizzando $1 \in H^0(\mathbb{S}^{2n})$, i secondi utilizzando $\mu \in H^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$), ciò significa che:

$$c_+(\psi_1) \leq c_+(\psi_2) \quad , \quad c_-(\psi_1) \leq c_-(\psi_2).$$

□

Corollario 4.2.4 *Se ψ è la mappa al tempo $t = 1$ del flusso generato da una Hamiltoniana non negativa $H(x,t)$, allora $c_-(\psi) = 0$.*

Dimostrazione Essendo $H(x,t) \geq 0$ $\forall x$ e $\forall t$, abbiamo che $c_-(\psi) \geq c_-(\mathrm{id}) = 0$. Ma $c_-(\psi) \leq 0$. Di conseguenza deve essere $c_-(\psi) = 0$.□

Osservazione Utilizzando argomenti di tipo geometrico, nella prossima proposizione proveremo che la distribuzione dei punti critici $(x_\lambda)_{\lambda\in[1,2]}$ non può dipendere in modo continuo dal parametro λ.
Sia $(H_\lambda(x,t))_{\lambda\in[1,2]} = (H_\lambda(q,p,t))_{\lambda\in[1,2]}$ una famiglia ad un parametro di funzioni Hamiltoniane a supporto compatto. Ricordiamo i simboli usati finora:

- $\psi_t^\lambda(x)$ è il flusso di $H_\lambda(x,t)$.
- $L_\lambda = \{(x, \psi_1^\lambda(x))\ :\ x \in \mathbb{R}^{2n}\}$.
- S_λ è una funzione generatrice speciale per la sottovarietà Lagrangiana $h(L_\lambda)$, normalizzata in modo che $S_\lambda(\infty, 0) = 0$.
- Se x_λ è punto critico di S_λ, si pone $\phi_\lambda(t) = \psi_t^\lambda(x_\lambda)$.

- Nelle nostre ipotesi il valore critico $S_\lambda(x_\lambda)$ è ottenibile con la tecnica min-max, cioè esiste $u \in H^*(B)$ tale che $S_\lambda(x_\lambda) = c(u, S_\lambda)$.

Proposizione 4.2.5 *Sia $(H_\lambda(x,t))_{\lambda\in[1,2]} = (H_\lambda(q,p,t))_{\lambda\in[1,2]}$ una famiglia ad un parametro di funzioni Hamiltoniane a supporto compatto come nell'osservazione precedente. Se la distribuzione dei punti critici $(x_\lambda)_{\lambda\in[1,2]}$ dipende in modo continuo da λ, allora $\frac{d}{d\lambda}(c(u,S_\lambda)) = 0$, cioè l'insieme dei valori critici $(c(u,S_\lambda))_{\lambda\in[0,1]}$ risulta indipendente da λ.*

Dimostrazione Pensiamo a $H_\lambda(x,t)$ definita in $T^*\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^{2(n+2)} \ni (q,t,\lambda;p,\tau_\lambda,L)$.
In tale ambiente la funzione Hamiltoniana H_λ è autonoma. Scriviamo la dinamica per $\widetilde{H}_\lambda =: H_\lambda + \tau_\lambda$.

$$(^*)\begin{cases} \dot{q} = & \frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial p} = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p} \\ \dot{t} = & \frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial \tau_\lambda} = 1 \\ \dot{\lambda} = & \frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial L} = 0 \\ \dot{p} = & -\frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial q} = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial q} \\ \dot{\tau_\lambda} = & -\frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial t} \\ \dot{L} = & -\frac{\partial \widetilde{H}_\lambda}{\partial \lambda} \end{cases}$$

Osservazioni

- Il parametro di evoluzione è il tempo t (infatti $\dot{t} = 1$).
- Lungo le curve soluzione λ è costante.
- Il flusso ψ_t^λ di H_λ si ottiene per proiezione dal flusso di (*), cioè tralasciando l'evoluzione di τ_λ e di L.

Poichè la distribuzione dei punti critici $(x_\lambda)_{\lambda\in[1,2]}$ dipende in modo continuo da λ, possiamo considerare la seguente curva:

$$[1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

$$\lambda \longmapsto x_\lambda.$$

La varietà 2-dimensionale Σ:

$$\Sigma = \bigcup_{\substack{t\in[0,1]\\ \lambda\in[1,2]}} \psi_t^\lambda(x_\lambda)$$

è isotropa, cioè

$$\omega_{|\Sigma} = dp \wedge dq + dL \wedge d\lambda + d\tau_\lambda \wedge dt_{|\Sigma} = 0.$$

Lo stesso si può dire per la varietà $\Sigma_{\bar\lambda}$:

$$\Sigma_{\bar\lambda} = \bigcup_{\substack{t\in[0,1]\\ \lambda\in[1,\bar\lambda]}} \psi_t^\lambda(x_\lambda),$$

$\bar\lambda \in [1,2]$ arbitrario.
Di conseguenza

$$0 = -\int_{\Sigma_{\bar\lambda}} \omega = \int_{\Sigma_{\bar\lambda}} d\lambda = \int_{\phi_1(t)} \lambda - \int_{\phi_{\bar\lambda}(t)} \lambda.$$

$$\int_{\phi_1(t)} \lambda = \int_{\phi_1(t)} pdq + Ld\lambda + \tau_1 dt = \int_{\phi_1(t)} pdq - H_1 dt = S_1(x_1).$$

Equivalentemente:

$$\int_{\phi_{\bar\lambda}(t)} \lambda = \int_{\phi_{\bar\lambda}(t)} pdq + Ld\lambda + \tau_{\bar\lambda} dt = \int_{\phi_{\bar\lambda}(t)} pdq - H_{\bar\lambda} dt = S_{\bar\lambda}(x_{\bar\lambda}).$$

Per l'arbitrarietà di $\bar\lambda$, segue che $\frac{d}{d\lambda}(c(u, S_\lambda)) = 0$, cioè l'insieme dei valori critici $(c(u, S_\lambda))_{\lambda\in[0,1]}$ risulta indipendente da λ. $\square$

Capitolo 5

5.1 Orbite periodiche di mappe simplettiche

Nella sezione precedente abbiamo visto che la proprietà per una mappa ψ di essere il flusso al tempo $t = 1$ per una Hamiltoniana non negativa, implica che $c_-(\psi) = 0$.
Possiamo allora definire la seguente relazione di ordine parziale, che denoteremo con $\prec$.

Definizione 5.1.1 *Per $\phi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$, scriviamo $\phi \prec \psi$ se e solo se $c_-(\psi\phi^{-1}) = 0$*

Riassumiamo nella prossima proposizione le proprietà di $\prec$.

Proposizione 5.1.1 *Siano $\phi, \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
a) $id \prec \psi$ sse $\psi^{-1} \prec id$
b) $\psi_1 \prec \psi_2$ sse $\phi\psi_1 \prec \phi\psi_2$
c) $\phi_1 \prec \phi_2$ e $\psi_1 \prec \psi_2 \Longrightarrow \phi_1\psi_1 \prec \phi_2\psi_2$

Dimostrazione c) $\Longrightarrow$ b)
$\psi_1 \prec \psi_2$ e $\phi \prec \phi$ (poichè $c_-(\phi\phi^{-1}) = c_-(\mathrm{id}) = 0$). Allora applicando c) ottengo che $\phi\psi_1 \prec \phi\psi_2$.
Analogamente con $\phi\psi_1 \prec \phi\psi_2$ e $\phi^{-1} \prec \phi^{-1}$ si ottiene $\psi_1 \prec \psi_2$.
b) $\Longrightarrow$ a)
Ho $\mathrm{id} \prec \psi \Longrightarrow \psi^{-1}\mathrm{id} \prec \psi^{-1}\psi$ cioè $\psi^{-1} \prec \mathrm{id}$. In modo analogo:
$\psi^{-1} \prec \mathrm{id} \Longrightarrow \psi\psi^{-1} \prec \psi$ id cioè $\mathrm{id} \prec \psi$.
Per dimostrare la proposizione è allora sufficiente provare c).
$\phi_1\psi_1 \prec \phi_2\psi_2$ significa che $c_-(\phi_2\psi_2\psi_1^{-1}\phi_1^{-1}) = 0$.
Applicando il corollario 4.2.2 e la proposizione 4.2.3, si ottiene:
$0 \geq c_-(\phi_2\psi_2\psi_1^{-1}\phi_1^{-1}) = c_-(\phi_1^{-1}\phi_2\psi_2\psi_1^{-1}\phi_1^{-1}\phi_1) \geq c_-(\phi_1^{-1}\phi_2) + c_-(\psi_2\psi_1^{-1}) = 0,$

poichè per ipotesi $\phi_1 \prec \phi_2$ ($\Longrightarrow c_-(\phi_2\phi_1^{-1}) = 0$) e $\psi_1 \prec \psi_2$ ($\Longrightarrow c_-(\psi_2\psi_1^{-1}) =$ 0).
Di conseguenza $c_-(\phi_2\psi_2\psi_1^{-1}\phi_1^{-1}) = 0$, come si voleva provare.□

Definizione 5.1.2 *Sia $\psi = \psi_1$ il flusso al tempo $t = 1$ associato ad una Hamiltoniana $H(x,t)$ possibilmente dipendente dal tempo e a supporto compatto. Denotiamo con supp(ψ) il supporto dell'Hamiltoniana H:*

$$supp(\psi) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{2n} \times [0,1] \ : \ H(x,t) \neq 0\}.$$

Sia ora $\psi \succ \mathrm{id}$, allora (per il punto c) della proposizione precedente) $\psi\psi = \psi^2 \succ \mathrm{id}$, $\psi^2\psi = \psi^3 \succ \mathrm{id}$, ..., $\psi^k \succ \mathrm{id}$ per tutti i k positivi.
Sappiamo inoltre che (vedere proposizione 4.2.3):
$c_+(\psi^k) = c_+(\psi^{k+1}\psi^{-1}) \leq c_+(\psi^{k+1}) + c_+(\psi^{-1}) = c_+(\psi^{k+1}) - c_-(\psi) = c_+(\psi^{k+1})$ (infatti $c_-(\psi) = c_-(\psi\ \mathrm{id}^{-1}) = 0$, essendo $\psi \succ \mathrm{id}$).
Otteniamo così che la sequenza $(c_+(\psi^k))_{k>0}$ è crescente. Allora o la sequenza precedente va all'infinito oppure converge a qualche valore finito. Dimostriamo ora che $(c_+(\psi^k))_{k>0}$ è limitata.
Denotiamo con U il supporto di ψ^k e sia ϕ un elemento di $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ tale che $\phi(U) \cap U = \emptyset$. Allora abbiamo precedentemente visto (corollario 4.2.2) che $\gamma(\phi) \geq c_+(\psi^k)$ e di qui otteniamo il nostro risultato. Infatti:

$$\begin{aligned}\gamma(\phi) &= c_+(\phi) - c_-(\phi), \\ &= -\int_{g_+} pdq + \int_{g_-} pdq < \infty,\end{aligned}$$

infatti sia g_+ che g_- sono tutti contenuti in U che è un insieme limitato di $\mathbb{R}^{2n}$.
Allora abbiamo appena dimostrato che:
$\sup\ \{c_+(\psi) \ : \ \mathrm{supp}(\psi) \subseteq U\} \leq \inf\ \{\gamma(\phi) \ : \ \phi(U) \cap U = \emptyset\}$.

5.2 Le capacità $c(U)$ e $\gamma(U)$ di Viterbo

Ricordiamo innanzitutto (cfr. pag. 33) che $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})$ è il gruppo delle mappe al tempo $t = 1$ del flusso Hamiltoniano associato ad una Hamiltoniana $H(x,t)$ possibilmente dipendente dal tempo e a supporto compatto.

Definizione 5.2.1 *Sia U un insieme limitato di $\mathbb{R}^{2n}$.*

$$c(U) = \sup_{\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})} \{c_+(\psi) \ : \ supp(\psi) \subseteq U\},$$

$$\gamma(U) = \inf_{\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})} \{\gamma(\psi) \ : \ \psi(U) \cap U = \emptyset\}.$$

Nota $c(U)$ e $\gamma(U)$ vengono chiamate **capacità** (di Viterbo) (cfr. [1]) per il sottoinsieme U di $\mathbb{R}^{2n}$. Dalla proposizione a pag. 39 segue subito che le capacità $c(U)$ e $\gamma(U)$ risultano invarianti per trasformazioni simplettiche sulla varietà base.

Possiamo riassumere i risultati del precedente paragrafo in questa:

Proposizione 5.2.1 *1) Se supp(ψ) $\subseteq U$ e $\phi(U) \cap U = \emptyset$ abbiamo che:*

$$c_+(\psi) \leq c(U) \leq \gamma(U) \leq \gamma(\phi).$$

2) Se id $\prec \psi$ la sequenza crescente $(c_+(\psi^k))_{k>0}$ ha un limite, denotato con $\overline{c_+}(\psi)$.

Con la prossima proposizione dimostreremo che **si può dare una stima esatta di $c(U)$ e $\gamma(U)$ per U coincidente con la palla di raggio ρ in $\mathbb{R}^{2n}$.**

Proposizione 5.2.2 *Sia $B^{2n}(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \ : \ |x| \leq \rho\}$.*
Allora valgono le seguenti disuguaglianze:

$$c(B^{2n}(\rho)) \geq \pi\rho^2 \qquad (1)$$

$$\gamma(B^{2n}(\rho)) \leq \pi\rho^2 \qquad (2)$$

pertanto

$$c(B^{2n}(\rho)) = \gamma(B^{2n}(\rho)) = \pi\rho^2 \qquad (3)$$

Dimostrazione (1) Sia $\epsilon > 0$ e scegliamo una funzione liscia

$$f : [0, \rho^2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$r \longmapsto f(r)$$

tale che:

1. $-\pi < f'(r) \leq 0 \ \ \forall r \in [0, \rho^2]$,
2. $f(r) = \pi\rho^2 - \epsilon$ per r vicino a 0,
3. $f(r) = 0$ per r vicino a ρ^2.

Definiamo ora una Hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto H(x) := f(|x|^2).$$

Allora H risulta a supporto compatto contenuto nella palla $B^{2n}(\rho)$.
Sia $x = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$. L'equazione differenziale di Hamilton $\dot{x} = J\nabla H(x)$ porge:

$$\begin{cases} \dot{q}_j = & 2f'(|x|^2)p_j \\ \\ \dot{p}_j = & -2f'(|x|^2)q_j \end{cases}$$

per $j = 1, ..., n$.
In notazione complessa $z = q_j + ip_j$ il precedente sistema di equazioni differenziali si scrive nella forma:

$$\dot{z} = -2if'(|z|^2)z.$$

Le soluzioni ammettono $|z(t)| \equiv |z(0)|$, si rappresentano nella forma:

$$z(t) = e^{-2if'(|z(0)|^2)t}z(0)$$

e risultano tutte periodiche di periodo $T(z(0)) = \frac{2\pi}{2|f'(|z(0)|^2)|} > 1$.
Abbiamo così dedotto che il periodo $T(z(0))$ delle orbite periodiche (non banali) è **strettamente maggiore di 1.** Di conseguenza il punto fisso x_+ (di periodo 1) consistente con la rappresentazione integrale di c_+ andrà cercato tra i punti vicini al centro di $B^{2n}(\rho)$ (e il punto fisso x_- andrà cercato

tra quelli vicini al bordo di $B^{2n}(\rho)$). Denotando con $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ il flusso relativo all' Hamiltoniana H, risulterà:

$$c_+(\psi_1) = -\int_{\psi_t(x_+)} pdq - Hdt = \int_{\psi_t(x_+)} Hdt,$$

$$= \int_0^1 H(\psi_t(x_+))dt = \pi\rho^2 - \epsilon.$$

Ricordando ora che:

$$c(B^{2n}(\rho)) = \sup_{\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})} \{c_+(\psi) \ : \ supp(\psi) \subseteq B^{2n}(\rho)\},$$

si ottiene subito la disuguaglianza cercata.

(2) Per dimostrare che $\gamma(B^{2n}(\rho)) \leq \pi\rho^2$ scegliamo una mappa isometrica di $\mathbb{R}^2$ (equivalentemente una mappa simplettica di $\mathbb{R}^2$) che manda $B^2(\rho) = \{(q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ q_1^2 + p_1^2 \leq \rho^2\}$ nel semi-disco chiuso di raggio $\sqrt{2}\rho$:

$$D^+(\sqrt{2}\rho) = \{(q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ q_1^2 + p_1^2 \leq 2\rho^2 \ , \ p_1 \geq 0\}.$$

La mappa prodotto $\alpha : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, che nelle coordinate (q_1, p_1) è data dall' applicazione isometrica precedente e nelle altre $2n-2$ coordinate è data dall'identità, è simplettica.
Sia ora $\epsilon > 0$ e scegliamo una funzione di classe C^∞

$$h : [0, \sqrt{2}\rho] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$r \longmapsto h(r)$$

tale che:

1. $-\pi r \leq h^{'}(r) \leq 0 \ \ \forall r \in [0, \sqrt{2}\rho]$,
2. $h^{'}(r) = -\pi r \ \ \forall r \in (\epsilon, \sqrt{2}\rho - \epsilon)$,
3. $h^{'}(r) = 0$ per r vicino a 0 ed r vicino a $\sqrt{2}\rho$.

La funzione h avrà un andamento del tipo indicato in figura:

Sia $x_1 = (q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2$. Tramite la funzione h definiamo l' Hamiltoniana

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto H(x) := h(|x_1|).$$

Notiamo però che H non risulta una Hamiltoniana a supporto compatto. Per renderla tale si può moltiplicare H per una funzione χ ($\chi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$) di classe C^∞ a supporto compatto, che vale 1 su una grande palla contenente $B^{2n}(\sqrt{2}\rho)$ e la cui derivata sia arbitrariamente piccola.
Tramite questo accorgimento si ottiene una Hamiltoniana, che denoteremo ancora con H, a supporto compatto contenente $\alpha(B^{2n}(\rho))$.
L'equazione differenziale di Hamilton:

$$\dot{x}_1 = J\nabla H(x_1)$$

per i punti $x_1 = (q_1, p_1)$ del semidisco $D^+(\sqrt{2}\rho)$ non troppo vicini al bordo, porge:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = & h'(|x_1|)\frac{p_1}{|x_1|} \\ \\ \dot{p}_1 = & -h'(|x_1|)\frac{q_1}{|x_1|} \end{cases}$$

Di conseguenza otteniamo l'equazione differenziale:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{h'(|x_1|^2)}{|x_1|^2} q_1,$$

ovvero $\ddot{q}_1 + \pi^2 q_1 = 0$; dunque, di periodo $T = 2$.
Da ciò si deduce che il flusso al tempo $t = 1$ associato all'Hamiltoniana H ruota il sottoinsieme:

$$D^+_\epsilon(\sqrt{2}\rho) = \{x \in \alpha(B^{2n}(\rho)) \ : \ d(x, \partial\alpha(B^{2n}(\rho))) \geq \epsilon\}$$

di un angolo π.
Denotiamo con $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ il flusso relativo all'Hamiltoniana H. Da quanto detto sopra risulta:

$$\psi_1(D_\epsilon^+(\sqrt{2}\rho)) \cap D_\epsilon^+(\sqrt{2}\rho) = \emptyset.$$

Ricordiamo ora che

$$\gamma(\alpha(B^{2n}(\rho))) = \inf_{\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})}\{\gamma(\psi) \ : \ \psi(\alpha(B^{2n}(\rho)) \cap \alpha(B^{2n}(\rho)) = \emptyset\} =$$

$$= \inf_{\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n})}\{c_+(\psi) \ : \ \psi(\alpha(B^{2n}(\rho)) \cap \alpha(B^{2n}(\rho)) = \emptyset\}$$

ed inoltre che il valore di $c_+(\psi_1)$ dipende soltanto dal simplettomorfismo ψ_1 e non dal supporto dell'Hamiltoniana H.
Pertanto il punto fisso x_+ (di periodo 1) consistente con la rappresentazione integrale di $c_+(\psi_1)$ andrà cercato tra i punti $x = (q,p) \in \alpha(B^{2n}(\rho))$ per cui $|x_1|$ è vicino a 0. Risulterà:

$$c_+(\psi_1) = -\int_{\psi_t(x_+)} pdq - Hdt = \int_{\psi_t(x_+)} Hdt,$$

$$= \int_0^1 H(\psi_t(x_+))dt = h(0) \leq \int_0^{\sqrt{2}\rho} \pi r dr = \frac{\pi r^2}{2}|_0^{\sqrt{2}\rho} = \pi\rho^2.$$

Questa stima ci porta a concludere che $\gamma(\alpha(B^{2n}(\rho))) \leq \pi\rho^2$.
Ora α è una mappa simplettica e quindi (cfr. la proposizione a pag. 39)

$$\gamma(\alpha(B^{2n}(\rho))) = \gamma((B^{2n}(\rho))) \leq \pi\rho^2.$$

Abbiamo così ottenuto la disuguaglianza cercata. □

5.3 Un teorema di Viterbo

Richiamiamo innanzitutto il **Teorema 3.2.1:**

Siano U un insieme compatto in $\mathbb{R}^{2n}$, $(\psi_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopia Hamiltoniana in $\mathcal{H}(U)$ generata da H e tale che $\psi_0 = \mathrm{id}$, $\psi_1 = \psi$ e z un qualsiasi punto in $\mathbb{R}^{2n} \setminus U$. Esistono punti fissi di ψ, x_+ e $x_- \in U$ tali che se γ_+, γ_- sono cammini che collegano x_+ a z e x_- a z e $g_+ = \gamma_+ \circ \psi(\gamma_+^{-1})$, $g_- = \gamma_- \circ \psi(\gamma_-^{-1})$ allora:

$$c_+(\psi) = l(x_+, z; \psi)(=: -\int_{g_+} pdq) = -\int_{\psi_t(x_+)} pdq - Hdt,$$

$$c_-(\psi) = l(x_-, z; \psi)(=: -\int_{g_-} pdq) = -\int_{\psi_t(x_-)} pdq - Hdt.$$

Osserviamo che se $x_+(k), x_-(k)$ sono i punti fissi di ψ^k dati nel teorema 3.2.1, allora $x_+(k) = x_+(kl) \Longrightarrow c_+(\psi^{kl}) = lc_+(\psi^k)$.
Sia infatti γ un cammino da $x_+(k)$ a z ($z \in \mathbb{R}^{2n} \setminus U$) e g il circuito $\gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1})$ tale che:

$$c_+(\psi^k) = -\int_g pdq.$$

$$g \circ \psi^k(g) \circ \psi^{2k}(g) \circ \psi^{3k}(g) \circ ..... \circ \psi^{k(l-1)}(g) =$$

$$= \gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1}) \circ \psi^k[\gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1})] \circ \psi^{2k}[\gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1})] \circ ..... \circ \psi^{k(l-1)}[\gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1})] =$$

$$= \gamma \circ \psi^k(\gamma^{-1}) \circ \psi^k(\gamma) \circ \psi^{2k}(\gamma^{-1}) \circ \psi^{2k}(\gamma) \circ ..... \circ \psi^{k(l-1)}(\gamma) \circ \psi^{kl}(\gamma^{-1}) =$$

$$= \gamma \circ \psi^{kl}(\gamma^{-1}).$$

Quindi il primo e l'ultimo membro hanno la stessa area. Ma l'area del primo membro è l volte l'area di g (essendo ψ diffeomorfismo simplettico) e quindi abbiamo concluso. Infatti:

$$c_+(\psi^{kl}) = -\int_{lg} pdq = -l\int_g pdq = lc_+(\psi^k).$$

Siamo pronti ad enunciare un risultato sui punti fissi (equivalentemente sulle orbite periodiche) di sistemi Hamiltoniani con Hamiltoniana a supporto compatto.

Teorema 5.3.1 *(1) Supponiamo che $id \prec \psi$ (cioè $c_-(\psi) = 0$). Poniamo $Per(N, \psi) = \{$orbite periodiche di ψ in $supp(\psi)$ di periodo k, con $1 \leq k \leq N\}$.*
Allora card $(Per(N, \psi)) \geq C \cdot N$ per qualche costante $C = C(\psi)$ (che si può determinare).
(2) In generale ψ ha infinite orbite periodiche.

Osservazione Si noti che nel caso in cui H è una Hamiltoniana autonoma, esiste una completa simmetria tra le seguenti due definizioni:

- x è punto fisso di ψ^k.
- L'orbita $t \longmapsto \psi_t(x)$ risulta periodica di periodo k.

Dimostrazione del teorema

Supponiamo $\psi \neq \mathrm{id}$, altrimenti il risultato è banale. Sia $c_k = c_+(\psi^k)$.
Sia poi x_k un punto fisso associato a c_k (nel senso del teorema 3.2.1): si noti che x_k non è un generico punto fisso di ψ^k, ma è un punto fisso utile per la rappresentazione integrale di c_k. Sia ora $k(n)$ una sequenza definita induttivamente come segue:

$$k(n+1) = \inf\{k > k(n) : k \leq k(n)\frac{c_k}{c_{k(n)}} + 1\}.$$

Essendo $c_k \leq c_\infty \leq c(\mathrm{supp}(\psi))$, c_k e $c_{k(n)}$ sono finiti e di conseguenza la sequenza $(k(n))_{n>0}$ è ben definita.
È da notare inoltre che esiste sempre un intero $k(n+1) > k(n)$ che soddisfa alla disuguaglianza richiesta: nel caso (limite) in cui $c_k = c_{k(n)}$, si definirà $k(n+1) = k(n) + 1$. Vogliamo ora stimare $k(n)$.
Ricordiamo innanzitutto che

$$\frac{k(n+1)}{k(n)} \leq \frac{c_{k(n+1)}}{c_{k(n)}} + \frac{1}{k(n)}.$$

Partendo da tale disuguaglianza, maggioriamo $k(N)$.
Poniamo

$$\frac{c_{k(n+1)}}{c_{k(n)}} = 1 + \epsilon_n.$$

Possiamo scrivere:

$$k(N) \leq k(N-1)[\frac{c_{k(N)}}{c_{k(N-1)}} + \frac{1}{k(N-1)}] \leq$$

$$\leq k(N-2)[(1+\epsilon_{N-2}) + \frac{1}{k(N-2)}][(1+\epsilon_{N-1}) + \frac{1}{k(N-1)}] \leq .....$$

$$..... \leq \prod_{i=1}^{N-1}(1+\epsilon_i + \frac{1}{k(i)}).$$

Ma $k(i) \geq i \ \forall\ i \geq 1$. (Questo fatto lo si vede per induzione: $k(1) \geq 1$. Supponiamo poi $k(n) \geq n$; allora $k(n+1) \geq k(n) + 1 \geq n+1$).
Di conseguenza:

$$\frac{1}{k(i)} \leq \frac{1}{i} \qquad \forall\ i \geq 1.$$

Risulta così :

$$\prod_{i=1}^{N-1}(1+\epsilon_i + \frac{1}{k(i)}) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{N-1}(1+\epsilon_i+\frac{1}{i}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N-1}(1+\frac{i+1}{i+1}\epsilon_i+\frac{1}{i}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{N-1}(1+\frac{1}{i})(1+\frac{i}{i+1}\epsilon_i).$$

Ora

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+\epsilon_i) =$$

$$= \frac{c_{k(2)}}{c_{k(1)}}\frac{c_{k(3)}}{c_{k(2)}}.....\frac{c_{k(\infty)}}{c_{k(\infty-1)}} =$$

$$= \frac{c_{k(\infty)}}{c_{k(1)}} < \infty.$$

Ricordiamo ora che $\frac{i}{i+1} < 1$ e $\epsilon_i \geq 0$:

$$\prod_{i=1}^{N-1}(1+\frac{i}{i+1}\epsilon_i) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{N-1}(1+\epsilon_i) \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{\infty}(1+\epsilon_i) < \infty.$$

Di conseguenza

$$\prod_{i=1}^{N-1}(1+\frac{i}{i+1}\epsilon_i) = \gamma.$$

Risulta che $\gamma \leq \frac{c_{k(\infty)}}{c_{k(1)}}$.
Allora

$$k(N) \leq \gamma \cdot \prod_{i=1}^{N-1}(1+\frac{1}{i}) =$$

$$= \gamma \cdot (1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})\cdot.....\cdot(1+\frac{1}{N-2})\cdot(1+\frac{1}{N-1}) =$$

$$= \gamma \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot.....\cdot\frac{N-1}{N-2}\cdot\frac{N}{N-1} = \gamma \cdot N.$$

Abbiamo provato prima per induzione che $N \leq k(N)$.
Otteniamo così che

$$N \leq k(N) \leq \gamma \cdot N.$$

Ricordiamo inoltre le seguenti disuguaglianze:

$$k(1) < k(2) < ..... < k(N-1) < k(N) \tag{5.1}$$

con

$$1 \leq k(1), ..., N \leq k(N) \tag{5.2}$$

Da (5.2) segue che:

- In corrispondenza di 1 esiste un punto fisso realizzante $c(1)$ di periodo 1. Inoltre, dato che $k(1) \geq 1$, l'insieme dei punti fissi di $\psi^{k(1)}$ contiene l'insieme dei punti fissi di ψ.

- In corrispondenza di 2 esiste un punto fisso realizzante $c(2)$ di periodo 2. Inoltre, dato che $k(2) \geq 2$, l'insieme dei punti fissi di $\psi^{k(2)}$ contiene l'insieme dei punti fissi di ψ^2.

- In corrispondenza di N esiste un punto fisso realizzante $c(N)$ di periodo N. Inoltre, dato che $k(N) \geq N$, l'insieme dei punti fissi di $\psi^{k(N)}$ contiene l'insieme dei punti fissi di ψ^N.

Da (5.1) si ha però che:

- Alla iterata $k(N)$ - esima di ψ si ottiene un punto fisso di periodo 1, uno di periodo 2, ..., uno di periodo N.

Ciò significa che

$$\text{card }(Per(N, \psi)) \geq N \geq \tfrac{k(N)}{\gamma} \geq N \cdot \tfrac{1}{\gamma}.$$

Di conseguenza, card $(Per(N, \psi)) \geq C \cdot N$ dove la costante $C = \frac{1}{\gamma} \geq \frac{c_{k(1)}}{c_{k(\infty)}} \geq \frac{c_{k(1)}}{c(\text{supp}(\psi))}$.

(2) Consideriamo una sequenza infinita $(\psi^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $c_+(\psi^{k_n}) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Notiamo che se si prendono anche esponenti negativi, tale sequenza esiste sempre. Siano infatti $k_{\bar{n}} < 0$ e $\psi \neq \text{id}$. Allora $c_+(\psi^{k_{\bar{n}}}) = -c_-(\psi^{-k_{\bar{n}}}) > 0$.
Sappiamo che $(c_+(\psi^{k_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata:
$c_+(\psi^{k_n}) \leq c(\text{supp}(\psi)) \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Di conseguenza $(c_+(\psi^{k_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ non può essere fatta di multipli di un numero finito di termini (altrimenti, essendo $(\psi^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sequenza infinita, otterrei che

$(c_+(\psi^{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, assurdo).
Applicando ora il risultato che si trova nella nota a pagina 65, segue che ψ ha infiniti punti fissi (equivalentemente, infinite orbite periodiche).$\square$

Nota

- Nel suo articolo (cf. [21]) Viterbo suggerisce anche un modo per provare che punti fissi di ψ di periodi diversi, realizzanti comunque la rappresentazione integrale delle c, siano distinti. Il risultato appena dimostrato da invece una stima del numero di orbite periodiche relative a un diffeomorfismo simplettico, di periodo minore o uguale ad un intero fissato, tenendo conto anche delle loro molteplicità.

- Il precedente teorema ci assicura che, se ψ è il flusso al tempo $t = 1$ generato da una Hamiltoniana non negativa e a supporto compatto, ψ ha almeno un punto fisso di periodo 1 contenuto in $\mathrm{supp}(\psi)$; ciò è quanto useremo di tale apparato di topologia simplettica nella ridimostrazione della congettura di Weinstein.

Capitolo 6

Sia $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ lo spazio euclideo dotato della struttura simplettica standard. Se S è una ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^{2n}$, dimostreremo innanzitutto che il sostegno delle orbite Hamiltoniane su S —indipendentemente dall'Hamiltoniana H che scegliamo per generare S, $S = H^{-1}(c)$— dipende solamente dalla struttura simplettica di $\mathbb{R}^{2n}$. Ci si può allora chiedere su quali ipersuperfici esiste un'orbita periodica per quella data struttura simplettica. Rabinowitz nel 1978 (cf. [16]) mostra che su ogni superficie stellata di codimensione uno in $\mathbb{R}^{2n}$ esiste un'orbita Hamiltoniana periodica. Weinstein nello stesso anno (cf. [22]) prova che ciò accade su ogni ipersuperficie convessa; inoltre formula la seguente congettura: in ogni ipersuperficie S di tipo contatto e soddisfacente a $H^1(S) = 0$, esiste un'orbita periodica. Tale congettura è stata risolta nel 1987 da Viterbo (cf. [18]), addirittura senza l'uso della condizione coomologica su S.
In questo capitolo, utilizzando il teorema 5.3.1, ritroveremo tale risultato sull'esistenza di orbite periodiche su ipersuperfici di tipo contatto.

6.1 Ipersuperfici di contatto

Definizione 6.1.1 *Una ipersuperficie compatta e orientabile S nella varietà simplettica $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ è di tipo contatto se esiste un campo vettoriale X, definito in un intorno U di S, che soddisfa a:*
(1) $L_X\omega = \omega$ su U,
(2) $X(x) \notin T_xS$ se $x \in S$, cioè X è campo vettoriale trasversale a S.

Osservazione Dall'orientabilità, deduciamo innanzitutto che S è di tipo energia, cioè che esiste una funzione Hamiltoniana H, definita su $\mathbb{R}^{2n}$, tale che $S = H^{-1}(c)$:
Per un'ipersuperficie $S \subset \mathbb{R}^{2n}$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Il fibrato normale ad S in $\mathbb{R}^{2n}$:

$$N(S;\mathbb{R}^{2n}) =: \{(x,v) \ : \ x \in S, \ v \in T_x(\mathbb{R}^{2n}) \text{ e } v \perp T_x(S)\}$$

  è banale.

- S è orientabile.
  (cf. [15], pag. 106, esercizio 18).

Inoltre $N(S;\mathbb{R}^{2n})$ è banale se e solo se esiste una funzione f, definita su qualche intorno U di S, per cui:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \ : \ f(x) = 0\}$$

(cf. [15], pag. 77, esercizio 20).

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 6.1.1 *Sia S una ipersuperficie regolare e orientabile di $\mathbb{R}^{2n}$. Allora, indipendentemente dalla funzione Hamiltoniana H per cui $S = H^{-1}(c)$, le soluzioni Hamiltoniane su S sono curve*

$$[0,1] \longrightarrow S$$

$$t \longmapsto x(t)$$

che soddisfano a $\omega(\dot{x}(t), v) = 0 \ \forall v \in T_{x(t)}S$.

Dimostrazione La 2-forma simplettica ω, essendo non degenere, definisce un isomorfismo tra i campi vettoriali X e le 1-forme su S dato da $X \longmapsto \omega(X, \cdot)$. In particolare, se

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione Hamiltoniana che ammette S come fibra (cioè $H^{-1}(c) = S$), allora dH è una 1-forma su $\mathbb{R}^{2n}$ che, assieme a ω, determina il campo vettoriale X_H nel modo seguente:

$$(i_{X_H}\omega)(x) = \omega(X_H(x), \cdot) = \omega(\dot{x}, \cdot) = -dH(x)\cdot$$

Proviamo ora il nostro asserto.
Supponiamo che $x(t)$ risolva le equazioni di Hamilton per H e $H(x(t)) \equiv c$

$$\omega(\dot{x}(t), \ \cdot) = -dH(x(t)).$$

D'altra parte, per ogni $v \in T_{x(t)}S$ abbiamo che $dH(x(t))v = 0$.
Di conseguenza:

$$\omega(\dot{x}(t), v) = 0, \quad \forall v \in T_{x(t)}S.$$

Viceversa, supponiamo che la curva

$$[0,1] \longrightarrow S$$
$$t \longrightarrow x(t)$$

sia tale che

$$\omega(\dot{x}(t), v) = 0, \quad \forall v \in \mathrm{Ker}(dH(x(t))).$$

Definiamo due mappe A e B nel modo seguente:

$$A : T_{x(t)}S \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$v \longmapsto \omega(\dot{x}(t), v).$$
$$B : T_{x(t)}S \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$v \longmapsto dH(x(t))v.$$

La mappa B è suriettiva (per l'ipotesi di regolarità della superficie S) e $\mathrm{Ker}B \subseteq \mathrm{Ker}A$. Il teorema di omomorfismo per spazi vettoriali ci dice allora che esiste una funzione $\Lambda_{x(t)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, per cui:

$$A = \Lambda_{x(t)} \circ B.$$

Di conseguenza abbiamo che:

$$\omega(\dot{x}(t), \cdot) = \lambda_{x(t)} dH(x(t)).$$

Equivalentemente:

$$J\dot{x}(t) = \lambda_{x(t)} \nabla H(x(t)),$$
$$\dot{x}(t) = -\lambda_{x(t)} J \nabla H(x(t)),$$
$$\dot{x}(t) = -\lambda_{x(t)} X_H(x(t)).$$

La funzione scalare $t \longmapsto -\lambda_{x(t)}$ produce semplicemente una riparametrizzazione della curva $t \longmapsto x(t)$. Si noti che $\lambda_{x(t)}$ è zero se e solo se (ω è non degenere) $\dot{x}(t) = 0$, ma il nostro campo vettoriale non si annulla mai. Allora la curva

$$[0,1] \longrightarrow S$$
$$t \longmapsto x(t)$$

risolve, a meno di riparametrizzazione del tempo, le equazioni canoniche di Hamiltoniana H. $\square$

La seguente proposizione utilizza argomenti tecnici analoghi (riparametrizzazioni del tempo):

Proposizione 6.1.1 *Se S è superficie di energia regolare per due Hamiltoniane H e $\bar{H}$ allora i due campi vettoriali X_H e $X_{\bar{H}}$ hanno le stesse soluzioni su S, a meno di riparametrizzazione del tempo.*

Dimostrazione La nostra ipotesi è che:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} | H^{-1}(x) = c\} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} | \bar{H}^{-1}(x) = \bar{c}\}.$$

Allora le due Hamiltoniane H e $\bar{H}$ sono tali che:

$$rk \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \\ & & \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix} |_S = 1.$$

Ciò comporta che H e $\bar{H}$ risultano funzionalmente dipendenti: esiste una funzione liscia, mai nulla $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui

$$H(x) = f(\bar{H}(x)), \quad \forall x \in S.$$

Otteniamo quindi che:

$$X_H(x) = J\nabla H(x) = Jf^{'}(\bar{H}(x))\nabla \bar{H}(x),$$

$$= f^{'}(\bar{H}(x))J\nabla \bar{H}(x) = f^{'}(\bar{H}(x)) \cdot X_{\bar{H}}(x), \ \forall x \in S,$$

essendo $f^{'}(\bar{H}(x))$ uno scalare.
La dinamica, sull'ipersuperficie S, data dalle Hamiltoniane H e $\bar{H}$ è quindi la stessa (a meno di riparametrizzazioni temporali).$\square$
Osservazione Per la precedente proposizione anche le orbite periodiche relative a X_H e $X_{\bar{H}}$ coincidono su S. Nel prossimo paragrafo definiremo una Hamiltoniana $\bar{H}$ che soddisfi alle ipotesi del teorema 5.3.1 (cioè che sia non negativa e a supporto compatto) e per cui S sia ancora ipersuperficie di energia.

6.2 Orbite periodiche su ipersuperfici di contatto

Sia $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ una ipersuperficie di contatto ed X il campo vettoriale ad essa associato. Denotiamo con ψ_X^t il flusso del campo vettoriale X. Utilizzando il flusso ψ_X^t costruiamo una vicinanza tubolare N_S di S:

$$N_S =: \bigcup_{\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)} \psi_X^{\epsilon}(S) =: \bigcup_{\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)} S^{\epsilon}.$$

Proposizione 6.2.1 *Sia $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ una ipersuperficie di contatto, ψ_X^t il flusso del campo vettoriale X ad essa associato. Vale la seguente uguaglianza:*

$$(\psi_X^t)^*\omega = e^t\omega.$$

Dimostrazione

$$\frac{d}{dt}(\psi_X^t)^*\omega(x)u = \frac{d}{ds}(\psi_X^{t+s})^*\omega(x)u_{|_{s=0}},$$

$$= \frac{d}{ds}(\psi_X^s \circ \psi_X^t)^*\omega(x)u_{|_{s=0}},$$

$$= \frac{d}{ds}((\psi_X^t)^* \circ (\psi_X^s)^*\omega)(x)u_{|_{s=0}},$$

$$= \frac{d}{ds}(\omega(\psi_X^s(\psi_X^t(x)))D\psi_X^s(\psi_X^t(x)))_{|_{s=0}}D\psi_X^t(x)u,$$

$$= (L_X\omega)(\psi_X^t(x))D\psi_X^t(x)u = ((\psi_X^t)^*L_X\omega)(x)u = ((\psi_X^t)^*\omega)(x)u.$$

Di conseguenza otteniamo che $(\psi_X^t)^*\omega = e^t\omega$. $\square$

Siamo ora pronti a ri-dimostrare il seguente

Teorema 6.2.1 ***(Viterbo, 1987)*** *Ogni ipersuperficie compatta, orientabile e regolare S in $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, che sia di tipo contatto, ha almeno un'orbita periodica.*

Dimostrazione Consideriamo una funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$r \longmapsto f(r)$$

che soddisfi alle seguenti proprietà:

- f è di classe C^∞,
- $\text{supp} f = (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,
- $f(r) \geq 0 \ \forall r \in \mathbb{R}, \ f(0) = c$,
- $f'(r) > 0$, per $r \in (-\epsilon_0, \bar{\epsilon}), \bar{\epsilon} > 0$,
- $f'(\bar{\epsilon}) = 0$,
- $f'(r) < 0$, per $r \in (\bar{\epsilon}, \epsilon_0)$,
- $f(\bar{\epsilon}) > \pi\rho^2$.

Sceglieremo ϵ_0 sufficientemente piccolo e ρ sufficientemente grande in modo che:

$$\bigcup_{\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)} \psi_X^{\epsilon}(S) \subset B^{2n}(\rho).$$

In particolare, $f'(0) > 0$. Utilizzando la funzione f appena descritta, definiamo una Hamiltoniana con supporto a chiusura compatta che:
(1) Ammetta S come fibra, $H^{-1}(c) = S$,
(2) $\nabla H(x) \neq 0$, $\forall x \in S$:

$$H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x) := \begin{cases} f(\epsilon), & \text{se } x \in \psi_X^{\epsilon}(S) = S^{\epsilon},\ -\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0 \\ \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Occorre innanzitutto notare che $S \subset H^{-1}(c)$, più precisamente è una sua componente connessa, cioè S è superficie di energia per la funzione Hamiltoniana H. Inoltre H risulta una Hamiltoniana non negativa e a supporto compatto, soddisfacente quindi alle condizioni del teorema 5.3.1. Denotiamo con $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ il flusso di H.
Esiste allora un'orbita periodica di periodo 1 (un punto fisso di ϕ_1) contenuta in supp(ϕ_1).
Nel seguito la indicheremo con γ,

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$t \longmapsto \gamma(t) =: \phi_t(x_1).$$

Tale orbita periodica γ deve necessariamente stare in una superficie di energia, cioè $H \circ \gamma(t) = f(\widetilde{\epsilon})$, con $\widetilde{\epsilon} \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.
La funzione:

$$N_S \longrightarrow (-\epsilon_0, \epsilon_0),$$
$$x \longmapsto \epsilon(x)$$

è ben definita, poichè ψ_X^ϵ è diffeomorfismo $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Essendo $H(x) =: f(\epsilon(x))$, vale la seguente uguaglianza:

$$\nabla H(x) = f^{'}(\epsilon)_{|_{\epsilon=\epsilon(x)}} \cdot \nabla_x \epsilon.$$

Per $\epsilon = \bar{\epsilon}$ abbiamo che $\nabla H(x)_{|_{x \in S^{\bar{\epsilon}}}} = 0$, cioè $S^{\bar{\epsilon}}$ è luogo di punti fissi.
Proviamo che l'orbita periodica γ cercata non è banale, cioè che non è contenuta in $S^{\bar{\epsilon}}$, in altri termini: $\widetilde{\epsilon} \neq \bar{\epsilon}$.
Supponiamo allora per assurdo che il punto fisso x_1 appartenga all'ipersuperficie di energia $S^{\bar{\epsilon}}$. Notiamo innanzitutto che x_1 non è un generico punto fisso di ϕ_1, ma è un punto fisso consistente con la rappresentazione integrale di $c_+(\phi_1)$. Deve infatti necessariamente valere la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} c_+(\phi_1) &= -\int_{\phi_t(x_1)} pdq + \int_{\phi_t(x_1)} Hdt, \\ &= -\int_{\phi_t(x_1)} pdq + \int_0^1 H(\phi_t(x_1))dt. \end{aligned}$$

Maggioriamo l'ultima espressione ricordando i fatti seguenti:

- Nei punti di $S^{\bar{\epsilon}}$ l'Hamiltoniana è costantemente uguale a $f(\bar{\epsilon})$,
- Per costruzione vale che:
$$f(\bar{\epsilon}) > \pi\rho^2.$$

Si ottiene allora:

$$c_+(\phi_1) = -\int_{\phi_t(x_1)} pdq + \int_{\phi_t(x_1)} Hdt > 0 + \pi\rho^2.$$

Assurdo, poichè (cfr. proposizione 5.2.2) $c_+(\phi_1)$ deve necessariamente soddisfare alle seguenti disuguaglianze:

$$c_+(\phi_1) \leq c(\mathrm{supp}(\phi_1)) \leq c(B^{2n}(\rho)) = \pi\rho^2.$$

Di conseguenza l'orbita periodica γ che realizza c_+ non è banale, cioè $\widetilde{\epsilon} \neq \bar{\epsilon}$.
La proprietà per γ di essere curva Hamiltoniana su $S^{\widetilde{\epsilon}}$ si può ora esprimere tramite la 2-forma ω (cf. teorema 6.1.1):

$$\omega(\dot{\gamma}(t), v) = 0 \ , \ \forall v \ \in T_{\gamma(t)}S^{\widetilde{\epsilon}}.$$

Definiamo ora la curva $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma}(t) =: \psi^{-\tilde{\epsilon}} \circ \gamma(t)$$

e dimostriamo che $\hat{\gamma}$ è una curva Hamiltoniana (periodica) su $S = S^0$.
Utilizzeremo i fatti seguenti:

- Sull'ipersuperficie S vale la seguente identità (cf. proposizione 6.2.1):

$$(\psi_X^{\tilde{\epsilon}})^* \omega = e^{\tilde{\epsilon}} \omega.$$

- $u \in T_{\hat{\gamma}(t)} S$ se e solo se $d\psi^{\tilde{\epsilon}} u \in T_{\gamma(t)} S^{\tilde{\epsilon}}$.

- $\dot{\gamma}(t) = d\psi^{\tilde{\epsilon}}(\hat{\gamma}(t))\dot{\hat{\gamma}}(t)$.

Riscriviamo allora l'ipotesi che la curva γ sia Hamiltoniana su $S^{\tilde{\epsilon}}$, tenendo conto delle precedenti osservazioni:

$$\omega(\dot{\gamma}(t), d\psi^{\tilde{\epsilon}} u) = 0 \ , \ \forall u \in T_{\hat{\gamma}(t)} S$$

se e solo se

$$\omega(d\psi^{\tilde{\epsilon}}(\hat{\gamma}(t))\dot{\hat{\gamma}}(t), d\psi^{\tilde{\epsilon}} u) = 0 \ , \ \forall u \in T_{\hat{\gamma}(t)} S.$$

Utilizziamo infine la definizione di pull-back e l'ipotesi che S sia di contatto:

$$0 = \omega(d\psi^{\tilde{\epsilon}}(\hat{\gamma}(t))\dot{\hat{\gamma}}(t), d\psi^{\tilde{\epsilon}} u),$$

$$= [(\psi^{\tilde{\epsilon}})^* \omega](\dot{\hat{\gamma}}(t), u) = e^{\tilde{\epsilon}} \omega(\dot{\hat{\gamma}}(t), u),$$

cioè $\omega(\dot{\hat{\gamma}}(t), u) = 0 \ \forall u \in T_{\hat{\gamma}(t)} S$.
Ciò è quanto volevamo dimostrare. $\square$

Bibliografia

[1] B. Aebischer et al.: *Borel seminar in Bern.* Sumplectic geometry, Progr. Math.,124, 1994.

[2] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Funct. Anal., 14 (349 - 381), 1973.

[3] V.I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer 1978,Appendix 9.

[4] A. Banyaga: *Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui presérvent une forme symplectique.* Comment. Math. Helvetici, 53 (174 - 227), 1978.

[5] R. Bott,L.W. Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology.* Springer - Verlag, 1982.

[6] C. Conley, E. Zehnder: *The Birkhoff - Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I.Arnold.* Invent.Math.73 (33 - 49), 1983.

[7] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko: *Géométrie contemporaine. Géometrie et topologie des variétés.* 1982.

[8] I. Ekeland, H. Hofer: *Convex Hamiltonian energy surfaces and their closed trajectories.* Comm. Math. Physics, 113 (419 - 467), 1987.

[9] C. Godbillon: *Elements de topologie algebrique.* Paris, Hermann, 1971.

[10] M.W. Hirsch: *Differential topology.* Graduate Texts in Math. 33, Springer - Verlag, 1976.

[11] H. Hofer, E. Zehender: *A new capacity for symplectic manifolds.* In: Analysis et cetera, Ed.P.Rabinowitz, E.Zehnder, Academic Press (405 - 428), 1990.

[12] H. Hofer, E. Zehender: *Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C.Viterbo.* Invent.Math.90 (1 - 9), 1987.

[13] H. Hofer, E. Zehnder: *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, 1994.

[14] D. McDuff, D. Salamon: *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford Mathematical Monographs, 1995.

[15] V.G.A. Pollack: *Differential Topology*, 1974.

[16] P. Rabinowitz: *Periodic solutions of Hamiltonian systems.* Commun. Pure Appl. Math. 31 (157 - 184), 1978.

[17] D. Theret: *A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions.* Topology and its applications 96 (249 - 266), 1999.

[18] C. Viterbo: *A proof of Weinstein's conjecture in* $\mathbb{R}^{2n}$. Annales Inst. Poincaré, Anal. nonlinéaire 4 (337 - 356), 1987.

[19] C. Viterbo: *Capacités symplectiques et applications.* Séminaire Bourbaki 1988-89, exposé n714. Astérisque 177-8 (345 - 362), 1989.

[20] C. Viterbo: *Intersections de sous-varietes lagrangiennes, fonctionelles d'action et indice des systémes Hamiltoniens.* Bull.Soc.Math.Fr.115, 1987.

[21] C. Viterbo: *Symplectic topology as the geometry of generating function.* Math.Ann.292 (685 - 710), 1992.

[22] A. Weinstein: *Periodic orbits for convex Hamiltonian systems.* Ann. Math. 108 (507 - 518), 1978.