



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**  
**Facoltà di Scienze Statistiche**

Tesi di Laurea in Statistica, Economia e Finanza

**MODELLI GARCH PER L'ASIMMETRIA**  
**APPLICAZIONI SU SERIE REALI**

**Relatore:** Prof. Silvano Bordignon

**Laureando:** Giosuè Burato

Anno Accademico 2010-2011

*Alla mia famiglia*

# INDICE

|   |    |
|---|----|
| <i>Introduzione</i>   | 04 |
| <i>1. Distribuzioni note, modelli ARCH e modelli GARCH</i>              | 04 |
| 1.1 <i>Alcune distribuzioni</i>   | 04 |
| 1.1.1 <i>Generalized Error Distribution (GED)</i>                       | 04 |
| 1.1.2 <i>t di Student</i>   | 05 |
| 1.1.3 <i>NIG (Normale Inversa Gaussiana)</i>                            | 05 |
| 1.1.4 <i>Distribuzioni asimmetriche</i>                                 | 07 |
| 1.2 <i>Modello ARCH</i>   | 08 |
| 1.3 <i>Modello GARCH</i>  | 09 |
| <i>2. Modelli GARCH per l'asimmetria</i>                                | 10 |
| 2.1 <i>Test di asimmetria</i>   | 10 |
| 2.1.1 <i>Sign Bias Test</i>   | 11 |
| 2.1.2 <i>Negative Sign-Bias Test e Positive Sign-Bias Test</i>          | 11 |
| 2.1.3 <i>Test congiunto</i>   | 11 |
| 2.2 <i>Modello APARCH</i>   | 12 |
| 2.2.1 <i>La lunga memoria delle serie storiche dei rendimenti</i>       | 13 |
| 2.2.2 <i>Formulazione di un APARCH</i>                                  | 13 |
| 2.3 <i>Modello EGARCH</i>   | 14 |
| <i>3. Modelli FGARCH</i>  | 14 |
| 3.1 <i>News Impact Curve</i>  | 14 |
| 3.2 <i>Un modello per tutti gli altri</i>                               | 17 |
| 3.2.1 <i>GARCH Standard</i>   | 17 |
| 3.2.2 <i>Asymmetric Power GARCH (o APARCH)</i>                          | 17 |
| 3.2.3 <i>Exponential GARCH (o EGARCH)</i>                               | 17 |
| 3.2.4 <i>Nonlinear ARCH (o NARCH)</i>                                   | 18 |
| 3.2.5 <i>Nonlinear-asymmetric GARCH</i>                                 | 18 |
| 3.2.6 <i>Threshold GARCH (o TGARCH o GARCH a soglia)</i>                | 18 |
| 3.2.7 <i>Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (o GJR-GARCH)</i>             | 18 |
| <i>4. Generali, Allianz e Axa: Un'applicazione su tre serie reali</i>   | 20 |
| 4.1 <i>Presentazione dei dati</i>                                       | 20 |
| 4.2 <i>Analisi dei rendimenti</i>                                       | 21 |
| 4.2.1 <i>Serie dei rendimenti e struttura di dipendenza</i>             | 21 |
| 4.2.2 <i>Stima della densità</i>  | 24 |
| 4.2.3 <i>Struttura di dipendenza dei quadrati e dei valori assoluti</i> | 26 |
| 4.3 <i>Stima di modelli GARCH</i>                                       | 28 |
| 4.3.1 <i>Stima di un GARCH e analisi dei residui – Generali</i>         | 28 |
| 4.3.2 <i>Stima di un GARCH e analisi dei residui – Allianz</i>          | 31 |
| 4.3.3 <i>Stima di un GARCH e analisi dei residui – Axa</i>              | 34 |
| 4.4 <i>Verifica della presenza dell'effetto leva</i>                    | 36 |
| 4.5 <i>Scelta di un modello alternativo</i>                             | 38 |
| 4.6 <i>Previsioni</i>   | 44 |
| <i>5. Conclusione</i>   | 47 |
| <i>6. Riferimenti</i>   | 48 |

# INTRODUZIONE

Lo scopo di questa tesi è analizzare le differenze principali di alcuni modelli ad eteroschedasticità condizionale. La prima parte dello scritto sarà dedicata alla presentazione dei due principali modelli per la volatilità, ossia il modello ARCH ed il modello GARCH. La seconda e la terza parte dello scritto riguarderanno rispettivamente il cosiddetto *Leverage Effect* ed i vari test che ne verificano la presenza ed alcune varianti dei modelli GARCH che vanno a stimare l'asimmetria nei rendimenti, ossia l'APARCH, l'EGARCH e l'FGARCH. La quarta parte conterrà alcuni esempi pratici su titoli finanziari reali, con l'applicazione dei modelli precedentemente citati. La quinta parte sarà, infine, un breve riassunto di quanto esposto sia dal punto di vista teorico sia dal punto di vista pratico.

## 1. DISTRIBUZIONI NOTE, MODELLI ARCH E GARCH

Prima di addentrarci nell'analisi dei vari modelli ad eteroschedasticità condizionale dobbiamo, però, fare un breve excursus introduttivo sulle principali distribuzioni che vengono sfruttate in finanza. Esistono, infatti, alcuni modelli teorici che vengono usati molto spesso per modellare le distribuzioni empiriche dei rendimenti. Tali modelli, inoltre, sono impiegati per la distribuzione empirica dei residui standardizzati, sui quali vengono costruiti i vari modelli ad eteroschedasticità condizionale.

### 1.1 Alcune distribuzioni

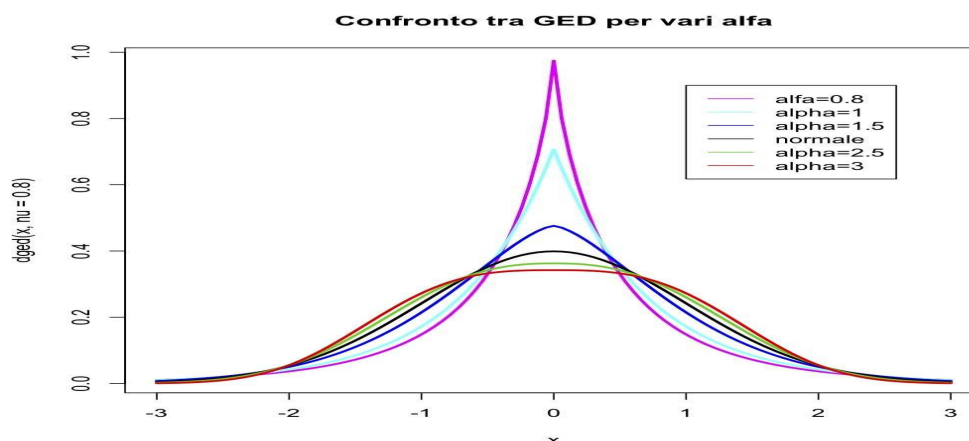
Le distribuzioni che andremo ad analizzare sono a code più pesanti di una normale. Questo perché i rendimenti empirici possiedono tipicamente un elevato parametro di eccesso di curtosi, cosa che rende necessario l'impiego di distribuzioni leptocurtiche. Inoltre, alcune di esse, non dotate di un parametro che permette di “shiftare” a destra o a sinistra la distribuzione per spiegare eventuali fenomeni di asimmetria, tramite alcuni accorgimenti che andremo a vedere possiedono una propria versione asimmetrica.

#### 1.1.1 Generalized Error Distribution (GED)

La funzione di densità di una GED dipende da tre parametri: uno di posizione ( $\mu$ ) per la media, che varia in tutto l'insieme  $\mathbb{R}$ ; uno di scala ( $\sigma^2$ ) per la varianza, che è non negativo; uno di forma ( $\alpha$ ), di nuovo non negativo. Essa viene espressa così

$$f(x; \mu, \sigma^2, \alpha) = \frac{\alpha}{[\sigma 2^{1+1/\alpha} \Gamma(1/\alpha)]} \cdot \exp[-1/2 \cdot |(x-\mu)/\sigma|^\alpha]$$

ed è una distribuzione unimodale della famiglia delle esponenziali. Vediamone alcuni esempi



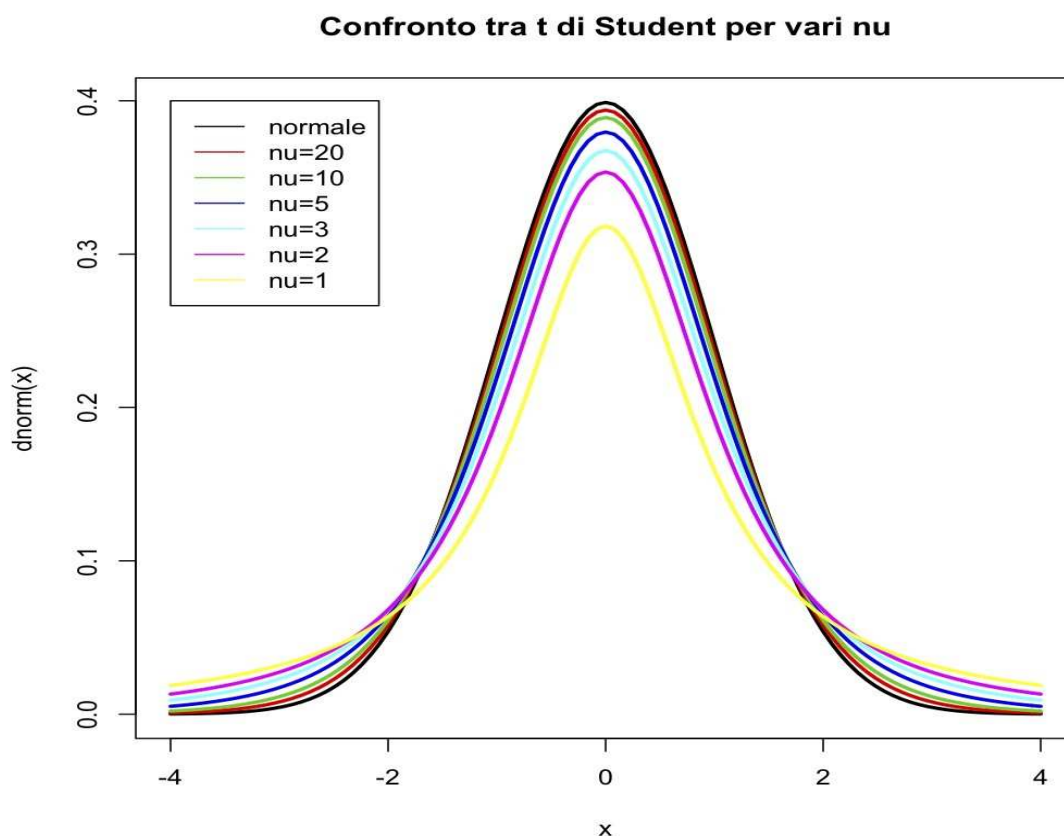
La normale nel grafico può anche essere letta come una GED di parametro  $\alpha$  posto pari a 2. Si ricorda che gli altri parametri, ossia quello di posizione e quello di scala, sono posti pari rispettivamente a 0 e ad 1.

### 1.1.2 t di Student

Una distribuzione t di Student è tipicamente a code più pesanti di una normale, quindi è in grado di cogliere i fenomeni di leptocurtosi che spesso si verificano nelle distribuzioni dei rendimenti. Essa dipende dal suo parametro  $\nu$  che ne indica i gradi di libertà; più esso si avvicina a 0 più la distribuzione è a code pesanti. La sua funzione di densità è la seguente

$$f(x;\nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2) \cdot (\pi\nu)^{1/2}} \cdot (1+x^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}.$$

La t di Student appartiene alla famiglia delle distribuzioni polinomiali ed ha la caratteristica di non possedere una funzione di densità finita per gradi di libertà molto bassi. Vediamo qualche esempio di t di Student al variare dei suoi gradi di libertà



### 1.1.3 NIG (Normale Inversa Gaussiana)

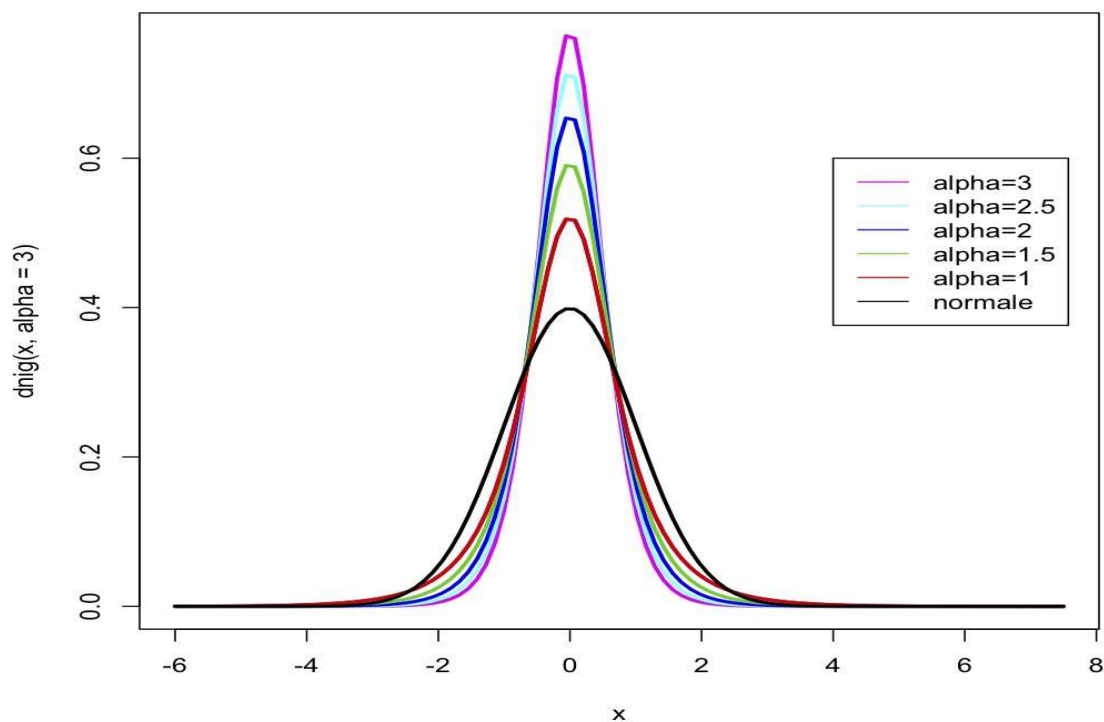
La NIG appartiene alla famiglia delle distribuzioni iperboliche, una classe di distribuzioni caratterizzate da code semi-pesanti. Una NIG dipende da quattro parametri,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\mu$ , rispettivamente di forma, di asimmetria, di scala e di locazione. La sua funzione di densità è la seguente

$$f(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = (\alpha\delta/\pi) \cdot \exp[-\delta \cdot (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} + \beta(x-\mu)] \cdot [K_1(\alpha(\delta^2 + (x-\mu)^2)^{1/2}) / [\delta^2 + (x-\mu)^2]^{1/2}]$$

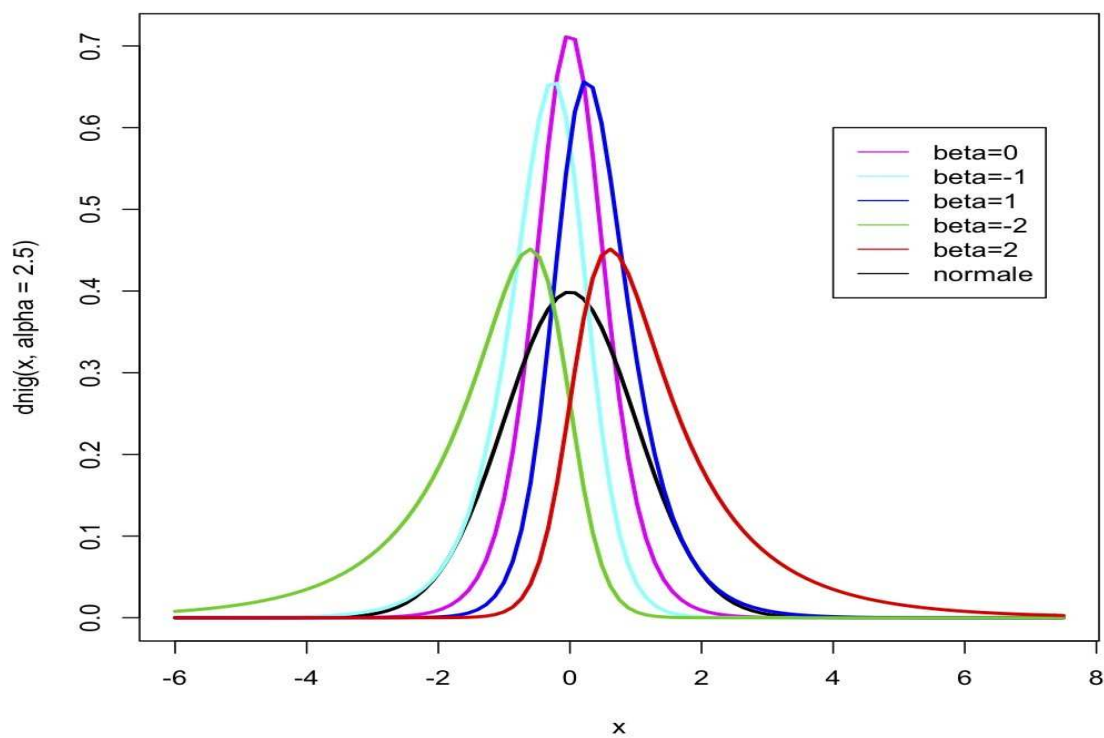
con  $K_1$  funzione di Bessel modificata del terzo tipo. I grafici riportati mettono a confronto varie

NIG. Il primo mostra valori di  $\alpha$  via via decrescenti, tenendo nulli i parametri di asimmetria,  $\beta$ , e di locazione,  $\mu$ , e pari ad 1 il parametro di scala,  $\delta$ . Il secondo mostra ciò che accade, invece, facendo variare i valori di  $\beta$  tenendo gli altri parametri fissi (in questo caso  $\mu=0$ ,  $\delta=1$ ,  $\alpha=2.5$ ).

**Confronto tra NIG per vari Alpha**



**Confronto tra NIG per vari beta**



### 1.1.4 Distribuzioni asimmetriche

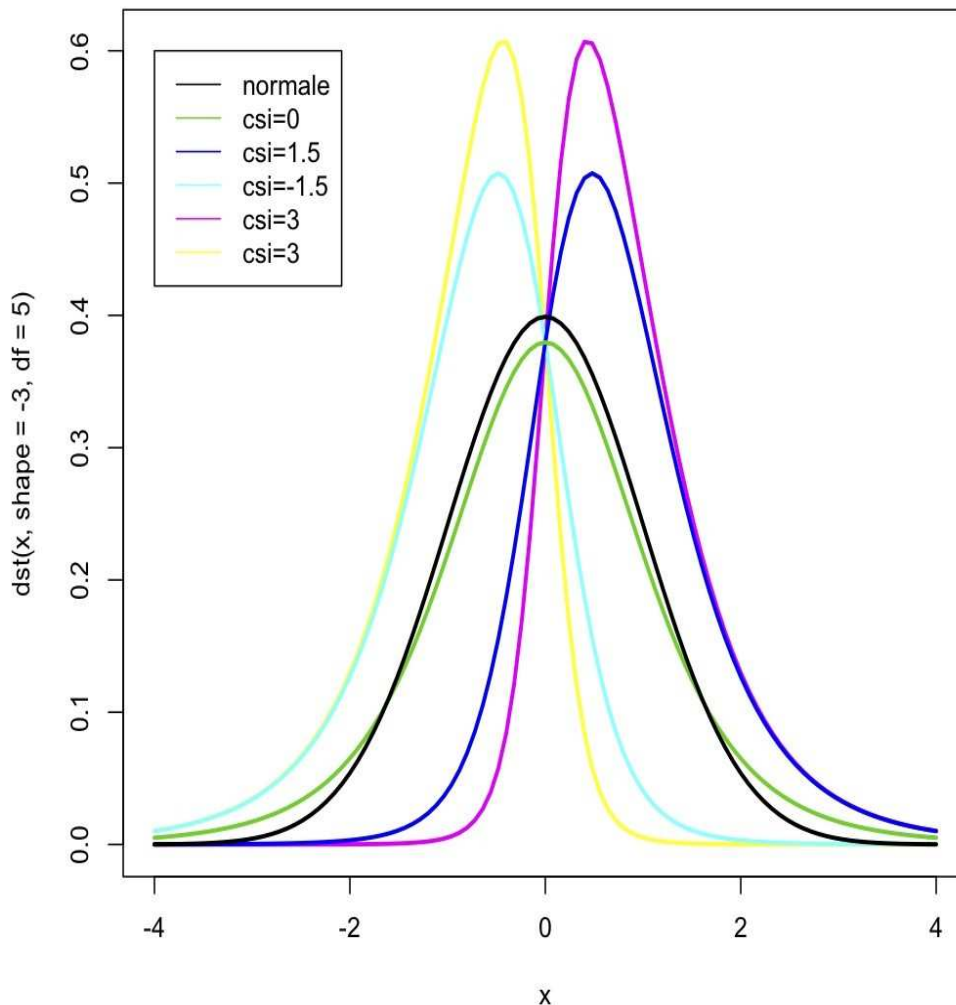
Qualsiasi distribuzione simmetrica unimodale può essere resa asimmetrica mediante l'inserimento di un parametro che modifichi la scala sui due lati (positivo e negativo) della moda (come si può notare dall'ultimo grafico, infatti, si è sfruttato il parametro di asimmetria, previsto per la NIG ma non per le altre distribuzioni viste, per le quali va appunto inserito il parametro di modifica della scala). Chiamando  $\xi$  tale parametro, la formulazione generale per la densità che viene data è

$$p(x;\xi) = 2/(\xi + 1/\xi) \cdot \{f(x/\xi)I_{[0,\infty)}(x) + f(\xi x)I_{[0,-\infty)}(x)\}$$

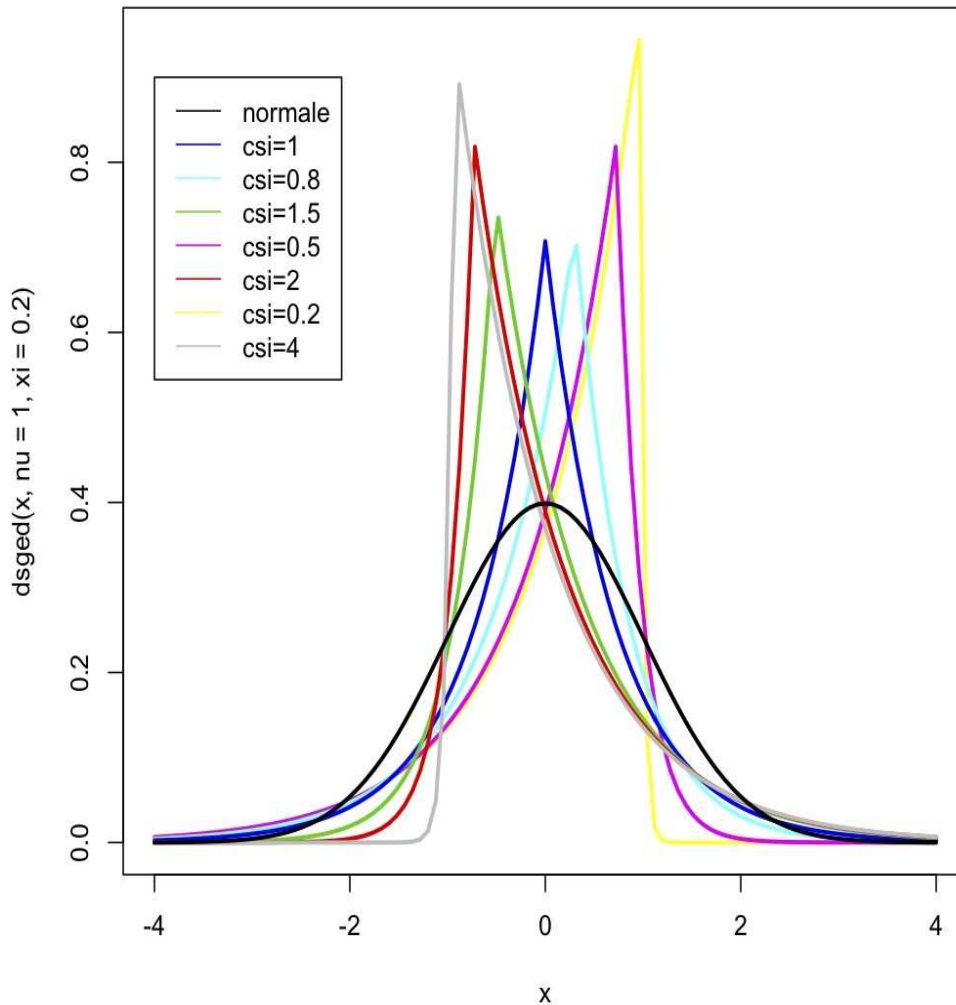
con  $f(\cdot)$  che indica la funzione di densità della distribuzione simmetrica in questione ed  $I$  funzione indicatrice che vale 1 se  $x$  appartiene all'intervallo a pedice e 0 altrimenti. Come si può notare, a dire se la distribuzione è più o meno asimmetrica spetta al valore del parametro  $\xi$ , che quindi lavora di più su uno o l'altro lato della moda a seconda del suo valore. Logicamente se tale parametro è uguale ad 1 si tornerà alla funzione di distribuzione simmetrica di partenza.

Le distribuzioni asimmetriche più usate in finanza sono skew-t, la skew-GED e la skew-norm. Vediamo un confronto tra vari parametri nella versione asimmetrica della t e della GED.

**Confronto tra t di student assimetriche con nu=5 per vari csi**



### Confronto tra GED asimmetriche con alfa=1 per vari casi



Una volta stimato un modello generatore per i rendimenti di un'attività finanziaria e la relativa distribuzione spesso, però, ci troviamo davanti ad evidenze empiriche difficili da ignorare, specie quando andiamo ad analizzare il momento secondo dei rendimenti del modello di riferimento. Secondo le usuali formulazioni il modello di riferimento è omoschedastico, ossia a varianza condizionata costante, ma empiricamente questo non accade mai, o quasi. È più sensato ipotizzare un modello di riferimento per i dati con varianza che cambia nel tempo di interesse, che indicheremo con  $t$ . Ciò significa, nella pratica, che sui rendimenti non può essere fatta un'ipotesi di indipendenza. Quello che dobbiamo fare è quindi ipotizzare un modello che tenga conto dell'eteroschedasticità dei rendimenti. Il primo di questi modelli, dal quale sono derivati tutti i successivi, è il modello ARCH.

#### 1.2 Modello ARCH

È stato il premio nobel per l'economia Robert F. Engle (1982) l'ideatore del modello ARCH. La formulazione che diede per un ARCH( $m$ ), ossia ad  $m$  parametri, è la seguente

$$r_t = \mu_t + a_t$$



$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \text{var}(a_t / I_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2$$

dove  $\mu_t$  è l'equazione che rappresenta la media condizionata,  $a_t$  è l'innovazione corretta per la media,  $\sigma_t^2$  rappresenta l'equazione per la varianza dei rendimenti e  $\varepsilon_t$  è una variabile casuale IID a media nulla e varianza unitaria con distribuzione specificabile.

Usando questo modello è possibile spiegare gran parte delle caratteristiche empiriche che sono incluse in quasi tutte le attività finanziarie: il *volatility clustering*, letteralmente l'addensamento delle volatilità, fenomeno che mette vicine basse volatilità in periodi caratterizzati da bassa volatilità ed alte volatilità in periodi caratterizzati da alta volatilità; l'incorrelazione; la persistenza, ossia l'autocorrelazione, nei quadrati; l'eccesso di curtosi tipico dei rendimenti.

La costruzione di un modello ARCH è molto semplice e si può dividere in cinque passi:

- 1) Costruzione di un modello sulla serie dei rendimenti e calcolo dei residui per la rimozione della dipendenza lineare nei dati, costituita dalla parte  $\mu_t$  dell'equazione, che può essere una semplice costante oppure un modello autoregressivo di basso ordine.
- 2) Verifica della presenza di eteroschedasticità condizionale, tramite un controllo della funzione di autocorrelazione dei residui e l'uso di un test, chiamato test LM, che verifica la significatività o meno della dei parametri ARCH fino all'ordine  $m$ .
- 3) Specificazione e stima dell'ARCH, a cui segue la ricerca della distribuzione più appropriata per i residui, epurati dai suoi effetti.
- 4) Controllo diagnostico di bontà di adattamento.
- 5) Previsioni, ottenute in maniera ricorsiva.

Tuttavia, un modello ARCH possiede un difetto, che consiste nell'elevato numero di parametri da inserire per modellare adeguatamente la volatilità in certe attività finanziarie. In sostanza, ciò significa che un modello ARCH è poco parsimonioso. Altri punti a sfavore sono, inoltre, l'inserimento di molti vincoli sui parametri per garantire la positività del modello e l'incapacità di cogliere certe evidenze empiriche, come l'asimmetria maggiore degli shocks negativi rispetto a quelli positivi. Vediamo, per il momento, un altro modello generale, diretta evoluzione dell'ARCH, che risolve il problema dell'elevato numero di parametri.

### 1.3 Modello GARCH

L'economista danese Tim Bollerslev (1986) giunse ad un'estensione dei modelli ARCH che viene chiamata GARCH, con G che indica *Generalized*. La sua, infatti, è una generalizzazione che viene fatta a partire dal modello di Engle. La formulazione di un GARCH(m,s), con  $m$  ed  $s$ , ordine del modello, è la seguente

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

dove di nuovo  $\varepsilon_t$  è una sequenza di variabili casuali IID con media nulla e varianza unitaria di distribuzione specificabile. La generalizzazione è ottima dal momento che basta porre il parametro  $s$  a 0 per ottenere nuovamente un modello ARCH(m). Di nuovo vediamo confermate molte delle evidenze empiriche osservate nei rendimenti: il fenomeno *volatility clustering* è causato dai termini che, dacché quadratici, danno molta importanza ad alti rendimenti assoluti, di fatto addensandoli, e meno importanza a bassi rendimenti assoluti, di nuovo addensandoli; la persistenza, su cui

Bollerslev ha fatto parsimonia; l'incorrelazione; la leptocurtosi, dato che tale modello prevede di base delle code pesanti.

La costruzione di un modello GARCH(m,s) è del tutto analoga a quella presentata precedentemente per i modelli ARCH, con la sola differenza nella specificazione, che, sebbene sia analiticamente più complessa, è solitamente più parsimoniosa: i modelli GARCH(m,s) più usati nella pratica sono quelli di basso ordine, ossia il GARCH(1,1), il GARCH(2,1) ed il GARCH(2,2).

Sistemato il problema dell'elevato numero di parametri imposti, rimangono però alcune evidenze empiriche che il modello GARCH(m,s) non riesce a mettere in evidenza. Una di esse è l'elevata correlazione esistente tra il rendimento atteso di un investitore ed il rischio del titolo: è verosimile che più un trader investa in titoli rischiosi più si aspetti di ottenere un elevato rendimento. Questa inclinazione del tutto naturale viene spiegata da una particolare estensione del modello GARCH, il GARCH-M (GARCH in-the-Mean). Per esempio un GARCH-M(1,1) ha la seguente formulazione

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

dove  $\mu$  e  $c$  sono costanti del modello, con  $c$  misurante il premio al rischio dell'investitore. Un altro problema che continuiamo però ad avere è quello dell'asimmetria nella volatilità. Combinando quest'ultimo tipo di estensione con altre che vedremo a breve gran parte delle evidenze empiriche dei rendimenti dei titoli vengono facilmente spiegate.

## 2. MODELLI GARCH PER L'ASIMMETRIA

Ma cos'è l'asimmetria? Per capirlo dobbiamo introdurre una regolarità empirica a cui ho già accennato alla fine del paragrafo sui modelli ARCH: quando un'attività finanziaria ha movimenti che tendono al ribasso allora la sua volatilità è maggiore rispetto ai momenti in cui la medesima ha movimenti che tendono al rialzo. Questo perché un investitore, solitamente avverso al rischio, percepisce movimenti al ribasso come un pericolo per sé stesso e cerca di arginare tale pericolo. In altre parole cattive notizie producono una volatilità maggiore rispetto a quella prodotta dalle buone notizie. In finanza questo fatto viene conosciuto come “effetto leva”.

L'effetto leva venne teorizzato per la prima volta dall'economista F. Black (1976), quando osservò che in qualsiasi mercato finanziario delle previsioni di volatilità negative producevano rendimenti molto più elevati in valore assoluto di più di quelle positive. Questo fenomeno venne chiamato “effetto leva” per la prima volta da Daniel B. Nelson (1990), gli studi del quale si basano sulle osservazioni di Black. Quello che fa un modello GARCH come presentato, insomma, è sottostimare l'ammontare delle volatilità quando siamo in presenza di “cattive notizie” e, conseguentemente, sovrastimare l'ammontare delle volatilità quando siamo in presenza di “buone notizie”. Inoltre sottostima il valore della volatilità dopo uno shock elevato e sovrastima il valore della volatilità dopo uno shock contenuto. Sono stati proposti con il tempo numerosi modelli, più o meno validi, per la spiegazione di questo particolare fenomeno.

### 2.1 Test di asimmetria

Prima di introdurre i modelli è, però, opportuno, partendo da dove siamo rimasti alla fine del primo capitolo, individuare se esiste l'effetto leva. Per farlo sono stati proposti diversi test, sviluppati da

Robert F. Engle e V. Ng (1993).

Ogni test di asimmetria analizza se i residui standard al quadrato sono i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuiti). Se esiste un qualche tipo di informazione contenuta negli  $\varepsilon_{t-1}$ , gli errori commessi durante la stima di un modello ad eteroschedasticità condizionale, che può portare alla previsione in questi residui allora ciò significa che la varianza del processo è stata stimata in maniera non corretta. Operativamente questi test vanno a lavorare sulla regressione

$$v_t^2 = b_0 + u_t$$

con  $v_t^2$  serie dei residui standardizzati al quadrato espressa in funzione della costante  $b_0$  e di un termine di errore,  $u_t$ , IID.

### 2.1.1 Sign Bias Test

Il primo test, il Sign Bias Test, va a testare l'impatto che gli shocks positivi e negativi hanno sulla volatilità. Formalmente si basa sulla regressione

$$v_t^2 = b_0 + b_1 S_{t-1}^- + u_t$$

in cui è stata inserita la dummy  $S_{t-1}^-$  che vale 1 se lo shock è negativo e 0 se invece è positivo o, tutt'al più, nullo. Così come costruita, l'equazione su cui si basa il test ha il parametro  $b_1$  positivo se lo shock è negativo, mentre se lo shock è positivo  $b_1$  non dà alcun contributo, perché si annulla. Una volta costruita l'equazione possiamo eseguire il test che è costituito dall'usuale statistica t-ratio

$$t = b_1^* / \text{se}(b_1^*)$$

con  $b_1^*$  che indica la stima del parametro  $b_1$ . Il sistema di ipotesi che andiamo a mettere al confronto diventa

$$H_0 : b_1 = 0$$

$$H_1 : b_1 > 0$$

che implica asimmetria negativa quando ci fa propendere verso l'ipotesi alternativa di positività del parametro  $b_1$ .

### 2.1.2 Negative Sign-Bias Test e Positive Sign-Bias Test

Il secondo test, il Negative Size Bias Test, è analogo al Sign Bias Test, con la differenza che analizza l'influenza della dimensione dello shock. L'equazione della regressione su cui si basa il test è

$$v_t^2 = b_0 + c_1 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + u_t$$

con dummy formulata come nel *Sign Bias Test*. In questo caso la statistica test, del tutto analoga, viene fatta sul parametro  $c_1$ . Il sistema di ipotesi diventa quindi

$$H_0 : c_1 = 0$$

$$H_1 : c_1 < 0$$

che implica effetto leva nel caso in cui il parametro  $c_1$  sia negativo. Esiste anche l'analogo Positive Sign-Bias Test, che lavora sulla medesima regressione a meno di un cambiamento di dummy

$$v_t^2 = b_0 + c_2 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + u_t$$

dove  $S_{t-1}^+ = 1 - S_{t-1}^-$ . In questo caso varia, quindi anche il sistema di ipotesi, che diventa

$$H_0: c_2 = 0$$

$$H_1: c_2 > 0$$

che implica effetto leva nel caso in cui  $c_1$  sia positivo.

### 2.1.3 Test congiunto

Un'ultima possibilità è quella di unire i tre test tipi di test fin qui proposti per fare una verifica congiunta sull'entità e sul segno degli shocks. L'equazione della regressione su cui si basa questo test congiunto è

$$v_t^2 = b_0 + b_1 S_t^- + c_1 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + c_2 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + u_t$$

con dummy formulate come in precedenza. In questo caso il sistema di ipotesi è impostato sulla nullità di tutti i parametri della regressione

$$H_0: b_1 = c_1 = c_2 = 0$$

$$H_1: \text{almeno uno dei parametri è diverso da } 0$$

quindi la statistica test di riferimento è quella della distribuzione F. Esiste un quarto tipo di test proposto da Engle e Ng, che può essere preso singolarmente oppure che può essere inserito all'interno della regressione fatta per il test congiunto, ovviamente con degli opportuni cambiamenti. In esso i due economisti hanno proposto di eseguire verifiche sui residui al quadrato per testare l'entità degli shocks estremi. Una possibile regressione su cui è basata un test che va ad analizzare i valori estremi, l'entità ed il segno degli shocks è così formulata

$$v_t^2 = b_0 + b_1 S_t^- + c_1 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + c_2 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + c_3 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}^2 + c_4 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1}^2 + u_t$$

con ipotesi nulla che verifica la nullità di tutti i parametri nella regressione ed ipotesi alternativa che si verifica quando almeno uno dei parametri della regressione è significativamente diverso da zero.

Esauriti i test utilizzabili possiamo passare all'introduzione dei modelli che prevedono l'asimmetria.

## 2.2 Modello APARCH

Un importante modello asimmetrico sviluppato a partire dai GARCH è quello di Robert F. Engle e dei colleghi Ding e Granger (1993). Tale modello è stato ricavato in seguito ad uno studio eseguito sulle autocorrelazioni di varie potenze in valore assoluto dei rendimenti. Infatti, una regolarità empirica che si osserva in alcune trasformazioni dei rendimenti è quella di possedere autocorrelazioni significative anche a ritardi elevati. Tale proprietà è verificata soprattutto per i rendimenti assoluti dei rendimenti. Indicando con  $|r_t|^\delta$  la trasformazione compiuta nei rendimenti, lo studio è stato condotto per diversi valori strettamente positivi dell'esponente  $\delta$ .

### 2.2.1 La lunga memoria delle serie storiche dei rendimenti

Taylor (1986) aveva osservato che i rendimenti assoluti hanno correlazioni positive anche a lunghissimi ritardi. Ciò si è verificato anche per diverse potenze di  $\delta$  ed in ogni serie reale presa in analisi si è visto che tale proprietà era più forte quando la potenza dell'esponente era prossima ad 1. Alcuni economisti hanno analizzato le autocorrelazioni dei rendimenti giornalieri dell'indice S&P 500 nelle loro trasformazioni assolute e quadratiche ed hanno osservato che le autocorrelazioni rimanevano significative soprattutto nei valori assoluti. Ciò si è rivelato valido anche per valori di  $\delta$  pari a 0.125, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 1.5, 1.75 e 3, con significatività elevate soprattutto per le potenze prossime ad 1, come 0.75, 1.25 e 0.5. La conclusione tratta è stata che il processo possedeva lunga memoria. Addirittura è stato osservato che, quando si poneva  $\delta=1$ , la prima correlazione non significativa si trovava dopo 2705 ritardi, equivalenti a circa 10 anni di osservazioni. Ciò significava che il processo in analisi aveva memoria anche dopo 10 anni di dati!

Gli stessi risultati si sono riscontrati anche aggregando le osservazioni dell'indice S&P 500 in frequenze settimanali: le autocorrelazioni delle trasformazioni dei rendimenti rimanevano significative dopo numerosi ritardi per valori di  $\delta$  prossimi ad 1. Su questa serie è stato, poi, separato il periodo Pre-Guerra da quello Post-Guerra. Si è osservato che nel periodo Pre-Guerra le autocorrelazioni sono quasi le stesse di quelle della serie giornaliera di partenza, mentre il periodo Post-Guerra ha autocorrelazioni più piccole, ad evidenziare il fatto che il mercato in quest'ultimo periodo possiede più breve memoria del suo andamento. La spiegazione della differenza tra queste due aggregazioni temporali sta nel fatto che un mercato ha una memoria più lunga quando si verificano eventi economicamente drastici. Infatti, nel periodo Pre-Guerra viene inclusa anche la grande depressione del 1929, evento che ha causato la lunga memoria nel processo.

A causa di questi studi è apparso evidente che un modello GARCH standard non è in grado di cogliere queste evidenze empiriche, ossia la lunga memoria del processo e l'effetto leva. Si arriva così all'introduzione del modello di Ding, Granger ed Engle Asymmetric Power ARCH, altresì chiamato APARCH.

### 2.2.2 Formulazione di un APARCH

Un APARCH viene così formulato

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \text{ con } \varepsilon_t \sim \text{IID}(0,1)$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i (|a_{t-i}| - \gamma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$$

con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  parametri che vengono stimati, con  $\gamma$  parametro per l'asimmetria e  $\delta$  parametro di potenza. Spiegato a parole significa che la deviazione standard condizionata ai valori passati del modello elevata alla  $\delta$ -esima potenza è data da una costante sommata ad una serie di coefficienti relativi agli shock passati, aggiustati per un parametro di asimmetria, e ad una serie di coefficienti relativi alla deviazione standard dei valori passati elevata alla  $\delta$ -esima potenza. A questo modello vengono però posti alcuni vincoli di positività dei parametri. Si richiede infatti che la costante sia non negativa e non nulla, che i parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  siano non negativi e che valga

$$-1 < \gamma_i < 1.$$

Per valori particolari dei parametri di un APARCH(m,s) otteniamo la stessa identica formulazione dei modelli visti in precedenza. Per  $\delta$  pari a 2 e tutti i  $\beta$  ed i  $\gamma$  pari a 0 possiamo annidare il modello ARCH(m), mentre per  $\delta$  pari a 2 e tutti i  $\gamma$  pari a 0 possiamo annidare il modello GARCH(m,s).

Altri modelli che possono essere annidati sono il GARCH per la deviazione standard di Taylor e Schwert<sup>0</sup>, il GJR-GARCH di Glosten-Jagannathan-Runkle<sup>0</sup>, il T-GARCH di Zakoian<sup>0</sup>, il NARCH di Higgins e Bera<sup>0</sup> ed, infine, il log-ARCH di Geweke e Pantula<sup>0</sup>. Più avanti ne vedremo alcuni di questi, perché annidabili in un'altra classe di modelli più generale.

### 2.3 Modello EGARCH

Il modello EGARCH, introdotto da Nelson (1991), è un GARCH esponenziale. A causa della sua formulazione particolare non può essere annidato negli APARCH, dal momento che essa è logaritmica. Un EGARCH(p,q) è descritto dalla seguente equazione

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \alpha_j g(\varepsilon_{t-j})$$

dove

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)]$$

è come è formulata l'equazione degli errori passati in cui viene racchiuso il possibile effetto di asimmetria. Il vantaggio di un EGARCH(p,q) sta nel fatto che nella sua equazione viene inserito il logaritmo e ciò implica l'eliminazione dei vincoli di positività che impongono il modello APARCH(m,s) ed i suoi derivati. Infatti, nell'equazione dell'errore  $g(\varepsilon_t)$  ci sono due parametri,  $\theta$  e  $\gamma$ , che stimano rispettivamente l'effetto simmetrico dello shock e l'effetto asimmetrico. Lo svantaggio di questa tipologia di modello, tuttavia, sta nel fatto che bisogna conoscere che distribuzione hanno gli errori  $\varepsilon_t$ , che molto spesso non sono gaussiani come si potrebbe pensare. L'impatto asimmetrico, quindi, è presente quando, una volta stimato il modello EGARCH(p,q), si ottiene un parametro  $\theta$  non nullo.

## 3. MODELLI F-GARCH

Introduciamo ora una famiglia di modelli GARCH che contiene in un'unica forma tutti i modelli visti finora, con l'accortezza di soddisfare tutte le regolarità empiriche dei rendimenti evidenziate, ossia l'incorrelazione, la leptocurtosi e l'effetto leva. Per farlo verranno introdotti dei nuovi parametri nelle formulazioni già note, uno di rotazione ed uno di shift, per gli shocks. Il motivo è meglio adattare i casi in cui non basta l'introduzione dell'effetto leva per spiegare l'asimmetria dei rendimenti.

### 3.1 News Impact Curve

Consideriamo ora un modello di tipo GARCH per la deviazione standard che sia per semplicità di ordine (1,1). Tale modello avrà la seguente formulazione

$$\sigma_t = \omega + \alpha \sigma_{t-1} |\varepsilon_t| + \beta \sigma_{t-1}$$

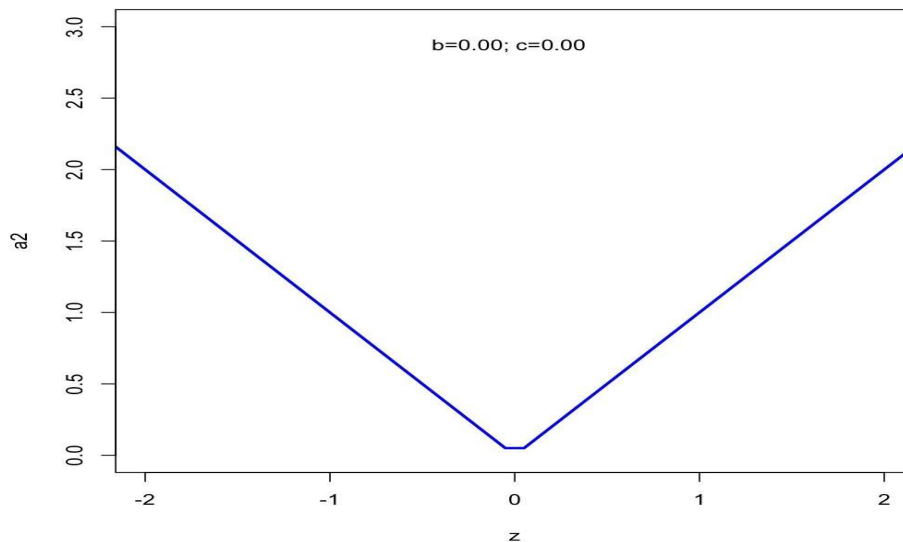
con  $\omega$  costante del modello. Come si può notare si è cambiata la notazione per motivi di praticità. La versione asimmetrica di tale modello, dunque, sarà

$$\sigma_t = \omega + \alpha \sigma_{t-1} f(\varepsilon_t) + \beta \sigma_{t-1}$$

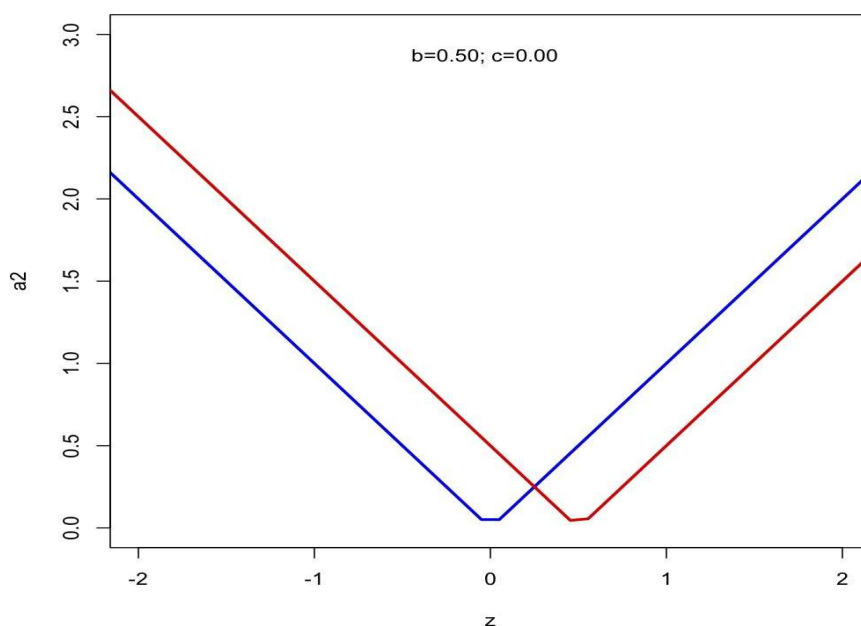
dove

$$f(\varepsilon_t) = |\varepsilon_t - b| - c(\varepsilon_t - b).$$

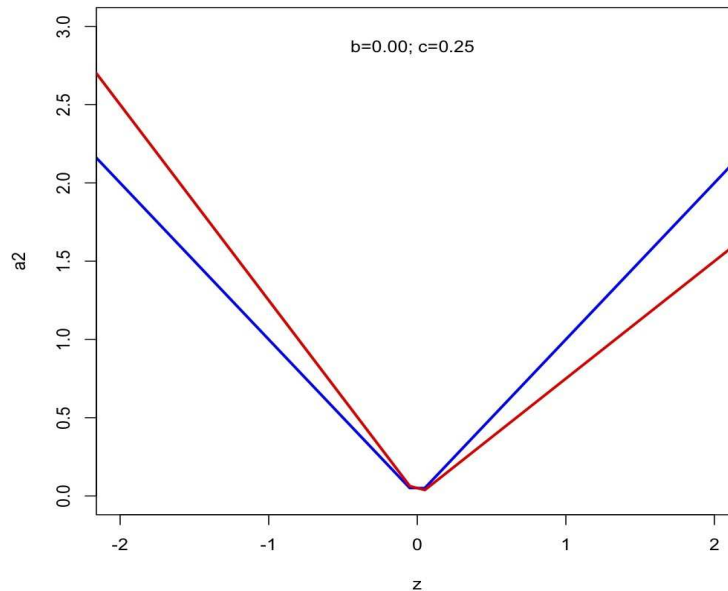
Come si può vedere sono stati introdotti due nuovi parametri nell'equazione del modello, ossia  $b$ , un parametro detto di shift, e  $c$ , un parametro detto di rotazione. Per meglio evidenziare gli effetti di questi parametri è stata introdotta nel Engle e Ng (1993), sviluppata sugli studi di Pagan e Schwert (1990), la curva di impatto delle notizie o *news impact curve* (NIC). La NIC mette in un grafico cartesiano l'impatto degli shocks sulla deviazione standard condizionata. Tipicamente in una NIC di un GARCH simmetrico non sono stati inseriti né il parametro di shift né il parametro di rotazione, posti quindi pari a zero.



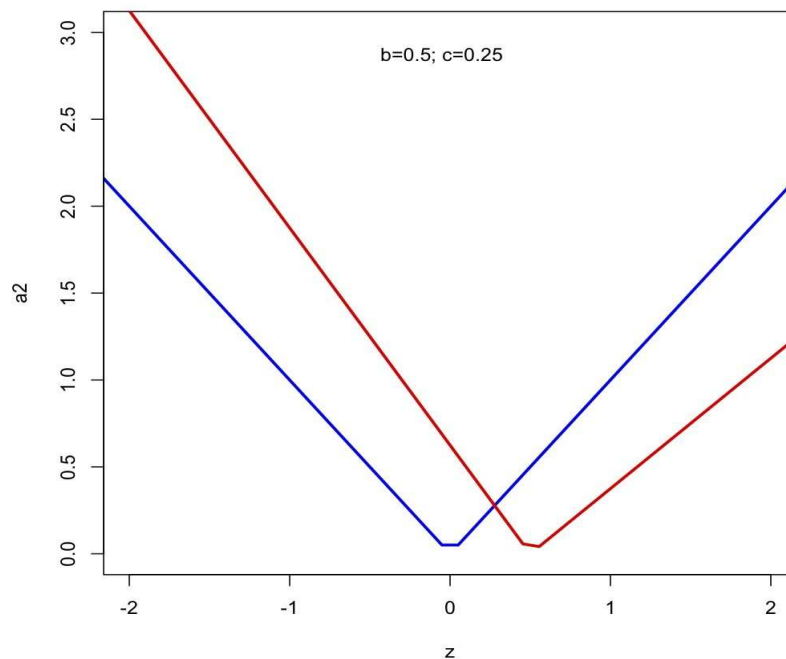
Sono possibili tre combinazioni di questi due parametri per inserire l'asimmetria nel modello GARCH per la deviazione standard. La prima è quella di introdurre solamente uno shift. Shift negativi spostano verso sinistra la NIC, shift positivi invece la spostano verso destra.



La seconda possibilità è quella di imporre l'asimmetria facendo ruotare la curva in senso orario od antiorario sfruttando solamente il parametro  $c$ . La NIC si sposterà in senso orario se  $c$  è positivo, mentre si sposterà in senso antiorario in caso di  $c$  negativo. Vediamo un esempio di spostamento in senso orario.



L'ultima possibilità è ovviamente una combinazione dei due casi precedenti, ossia imporre l'asimmetria mediante uno shift ed una rotazione. Vediamone un esempio.



Combinando correttamente i parametri  $b$  e  $c$  si ottengono risultati che rispondono molto bene alle evidenze empiriche. Dato che lo shift è il parametro che spiega meglio gli shocks asimmetrici di bassa entità, mentre la rotazione si occupa degli shocks di grande segno, è palese come



l'introduzione di questo particolare accorgimento spieghi decisamente meglio l'asimmetria. Tuttavia non è ancora abbastanza: che succede se venisse applicato questo sistema anche ad altri modelli che già di base miglioravano il GARCH visto all'inizio? Nel prossimo paragrafo si generalizzerà ancora di più quanto visto finora.

### 3.2 Un modello per tutti gli altri

Introduciamo un modello che includa i modelli estensione del GARCH fin qui visti ed altri che verranno presentati. Per farlo abbiamo bisogno di due nuovi parametri, che chiameremo  $\lambda$  e  $v$ . Riscrivendo il modello GARCH per la deviazione standard visto in precedenza possiamo ottenere la seguente equazione

$$(\sigma_t^\lambda - 1)/\lambda = \omega' + \alpha \sigma_{t-1}^\lambda f'(\varepsilon_t) + \beta (\sigma_{t-1}^\lambda - 1)/\lambda.$$

La NIC cambia a seconda del valore che assumono i parametri  $\lambda$  e  $v$ . Per precise combinazioni dei parametri  $b$ ,  $c$ ,  $\lambda$  e  $v$  otteniamo gran parte dei modelli GARCH più noti, che verranno ora esaminati più nel dettaglio.

#### 3.2.1 GARCH Standard

Le restrizioni per il più semplice dei modelli ad eteroschedasticità condizionale sono quelle di porre i parametri di shift e di rotazione a 0 ed i parametri  $\lambda$  e  $v$  a 2. Infatti, se si ricorda quello che è stato detto in precedenza, il modello GARCH non permette asimmetria nella volatilità e ciò, con la nuova formulazione, lo riduce a

$$\sigma_t^2 = 2\omega'' + 2\alpha\sigma_{t-1}^2\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

#### 3.2.2 Asymmetric Power GARCH (o APARCH)

Il modello APARCH è forse il più complicato concettualmente tra i tre modelli visti in precedenza, dato che pone i parametri  $\lambda=v$  e permette la rotazione della NIC. La formulazione diventa

$$\sigma_t^\lambda = \omega'' + \alpha\lambda(|\sigma_{t-1}\varepsilon_t| - c\sigma_{t-1}\varepsilon_t)^\lambda + \beta\sigma_{t-1}^\lambda.$$

La difficoltà sta solo teoricamente: porre  $\lambda=v$  significa lasciare i due parametri liberi nel campo di variazione dei numeri reali (sebbene i loro valori saranno sempre molto bassi nelle applicazioni pratiche), il che significa stimare altri parametri. Vedremo più avanti che tale processo sarà simile ad un altro applicato ad un modello chiamato GARCH non lineare.

#### 3.2.3 Exponential GARCH (o EGARCH)

Il GARCH esponenziale, l'ultimo dei modelli visto in precedenza, è uno dei modelli che possono essere annidati, seppur con un piccolo accorgimento. Perché possa essere inserito dobbiamo porre  $b$  e  $\lambda$  a zero, porre  $v$  ad 1 e lasciare libero  $c$ . Così facendo però abbiamo un problema, dato che  $\lambda$  è a denominatore e deve essere diverso da 0. La questione è velocemente risolta portando a limite tutto il termine  $(\sigma_t^\lambda - 1)/\lambda$ , che con  $\lambda$  che tende a zero otteniamo  $\ln\sigma_t^2$ . La formulazione diventa

$$\ln\sigma_t^2 = 2\omega'' + 2\alpha[|\varepsilon_t| - E|\varepsilon_t| - c\varepsilon_t] + \beta\ln\sigma_{t-1}^2.$$

Di nuovo si può vedere come il logaritmo garantisca la positività di tutti i parametri. In realtà è possibile anche far shiftare la NIC, basta sostituire  $(\varepsilon_t - b)$  ad  $\varepsilon_t$ , nell'equazione.

Vediamo ora, per completezza, altri modelli che sono compresi in questa famiglia.

### 3.2.4 Nonlinear ARCH (o NARCH)

Il NARCH è una versione asimmetrica del modello ARCH di Engle che prevede una NIC governata non dà una rotazione né di uno shift (i parametri  $b$  e  $c$  sono posti a 0), ma dall'introduzione dei parametri  $\lambda$  e  $\nu$ , posti l'uno uguale all'altro e liberi di variare nel loro campo di esistenza. Sebbene gli ideatori di tale modello, ossia Higgins e Bera, non abbiano fornito l'estensione più generale, è possibile ottenerla anche in maniera piuttosto semplice. La formulazione diventa pertanto

$$\sigma_t^\lambda = \omega'' + \alpha\lambda|\sigma_{t-1}\varepsilon_t|^\lambda + \beta\sigma_{t-1}^\lambda.$$

### 3.2.5 Nonlinear-asymmetric GARCH

Il modello è un semplice GARCH in cui viene prevista l'asimmetria mediante uno shift, perciò i parametri  $\lambda$  e  $\nu$  sono posti a 2,  $c$  viene posto a 0 e  $b$  viene stimato liberamente. La formulazione diventa la seguente

$$\sigma_t^2 = 2\omega'' + 2\alpha\sigma_{t-1}^2(\varepsilon_t - b)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

### 3.2.6 Threshold GARCH (o TGARCH o GARCH a soglia)

Anche chiamato GARCH a soglia perché impone una sorta di soglia, ponendo ad 1 i parametri  $\lambda$  e  $\nu$ . Tale modello, introdotto da Zakoian nel 1991, permette la rotazione della NIC lasciando libero nella stima il parametro  $c$ . La notazione del TGARCH diventa, pertanto, la seguente

$$\sigma_t = \omega + \alpha\sigma_{t-1}[|\varepsilon_t| - c\varepsilon_t] + \beta\sigma_{t-1}$$

che diventa

$$\sigma_t = \omega + \alpha(1 - c)\sigma_{t-1}\varepsilon_t^+ - \alpha(1 + c)\sigma_{t-1}\varepsilon_t^- + \beta\sigma_{t-1}$$

“spaccando il modulo”, ossia ponendo le seguenti due condizioni

$$\varepsilon_t^+ = \max\{\varepsilon_t, 0\}$$

$$\varepsilon_t^- = \min\{\varepsilon_t, 0\}.$$

Anche se Zakoian non ha previsto lo shift per il TGARCH, il collega indiano Rabemananjara<sup>0</sup> nel 1993 ne ha proposto una versione alternativa, introducendo uno shift con la semplice sostituzione di  $\varepsilon_t$  con  $(\varepsilon_t - b)$ .

### 3.2.7 Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (o GJR-GARCH)

Il modello GJR-GARCH, così conosciuto per i cognomi dei suoi ideatori, è un altro modello a soglia, tanto che spesso viene chiamato così. La soglia però, differentemente dal GARCH a soglia visto in precedenza, con il quale spesso viene confuso, è posta a 2 per i parametri  $\lambda$  e  $\nu$ ,  $b$  viene di nuovo posto 0 e  $c$  è libero di variare nel suo campo di esistenza. Il modello diventa pertanto

$$\sigma_t^2 = \omega'' + 2\alpha\sigma_{t-1}^2[(1 + c^2)\varepsilon_t^2 - 2c|\varepsilon_t|\varepsilon_t] + \beta\sigma_{t-1}^2$$

che come nel suo modello “fratello” si può scomporre separando il modulo dell'errore in

$$\sigma_t^2 = \omega'' + 2\alpha(1 + c^2)\sigma_{t-1}^2\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \text{ se } \varepsilon_t < 0$$

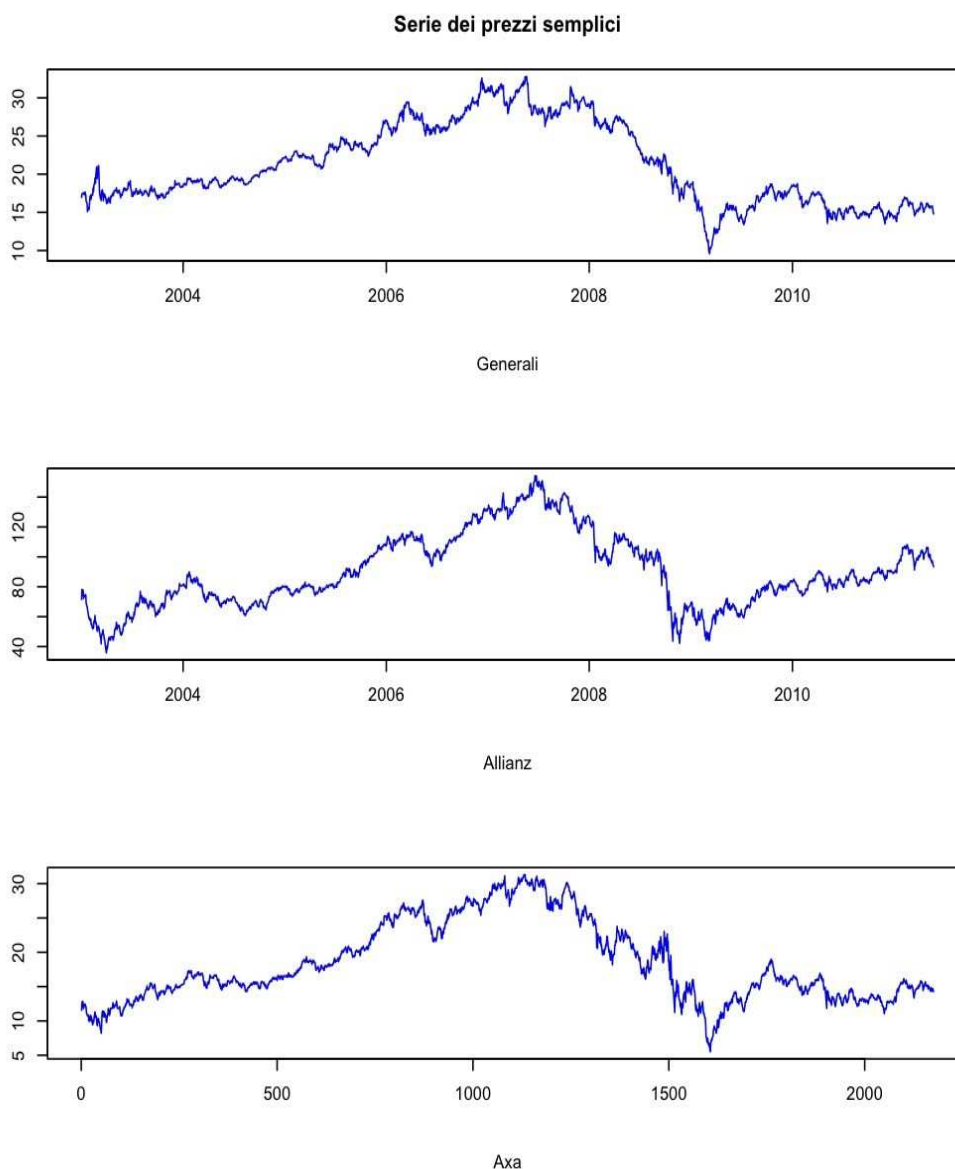
$$\sigma_t^2 = \omega'' + 2\alpha(1 + c^2)\sigma_{t-1}^2\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \text{ se } \varepsilon_t \geq 0.$$

## 4. GENERALI, ALLIAZ ED AXA: APPLICAZIONE SU TRE SERIE REALI

Vediamo ora un'applicazione di quanto appena visto su serie reali. Sono state prese in considerazione le tre più importanti compagnie di assicurazioni europee, ossia l'italiana Generali, la tedesca Allianz e la francese Axa.

### 4.1 Presentazione dei dati

Il punto di partenza sono state le serie dei prezzi giornalieri semplici, aggiustati per dividendi e split, delle tre compagnie. Il periodo campionario parte per tutte e tre le serie dal primo Gennaio 2003 e si conclude il 24 Maggio 2011. Si riportano i grafici dei prezzi.



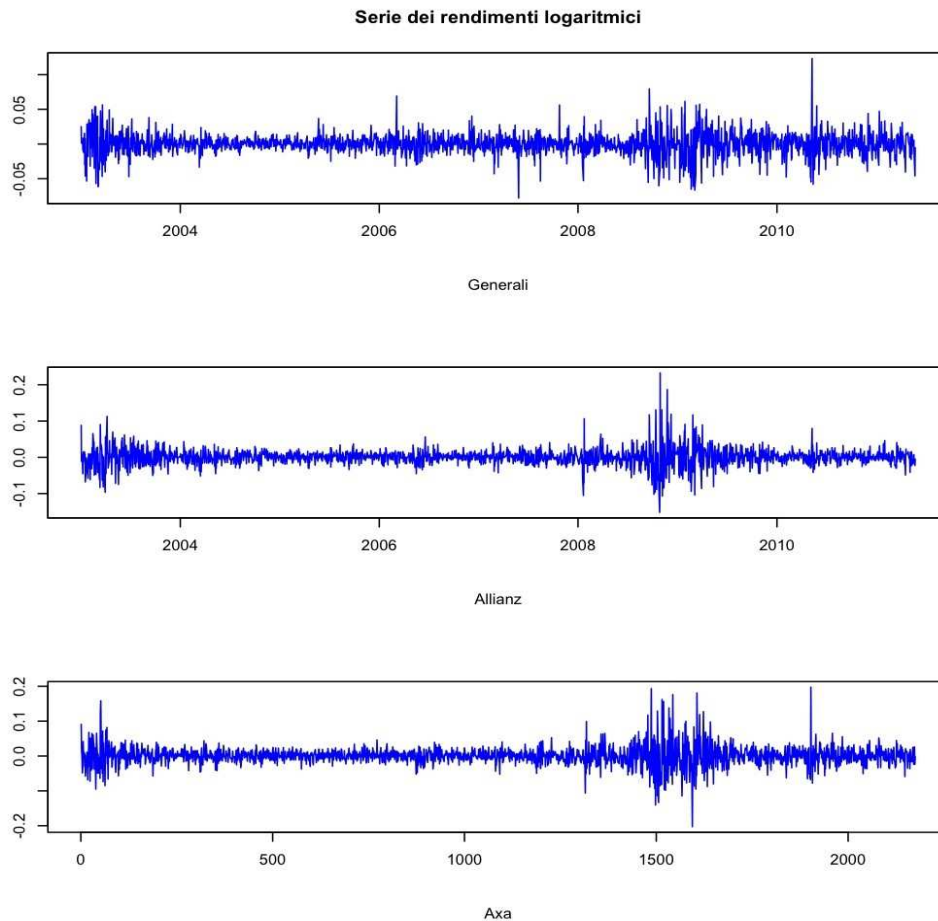
Come si può vedere, l'andamento delle serie è molto simile e l'unica grande differenza è il valore delle azioni di Allianz, che varia circa da un minimo di 40 ad un massimo di 150 euro per azione, diversamente da Generali ed Axa, le cui azioni variano circa da un minimo di 5 ad un massimo di 40 euro ad azione.

## 4.2 Analisi dei rendimenti

Tutta l'analisi verrà compiuta sfruttando i rendimenti logaritmici, come d'uso quando si analizzano serie di dati finanziari reali.

### 4.2.1 Serie dei rendimenti e struttura di dipendenza

Si riportano per prima cosa i grafici dei rendimenti logaritmici e le loro statistiche di base.

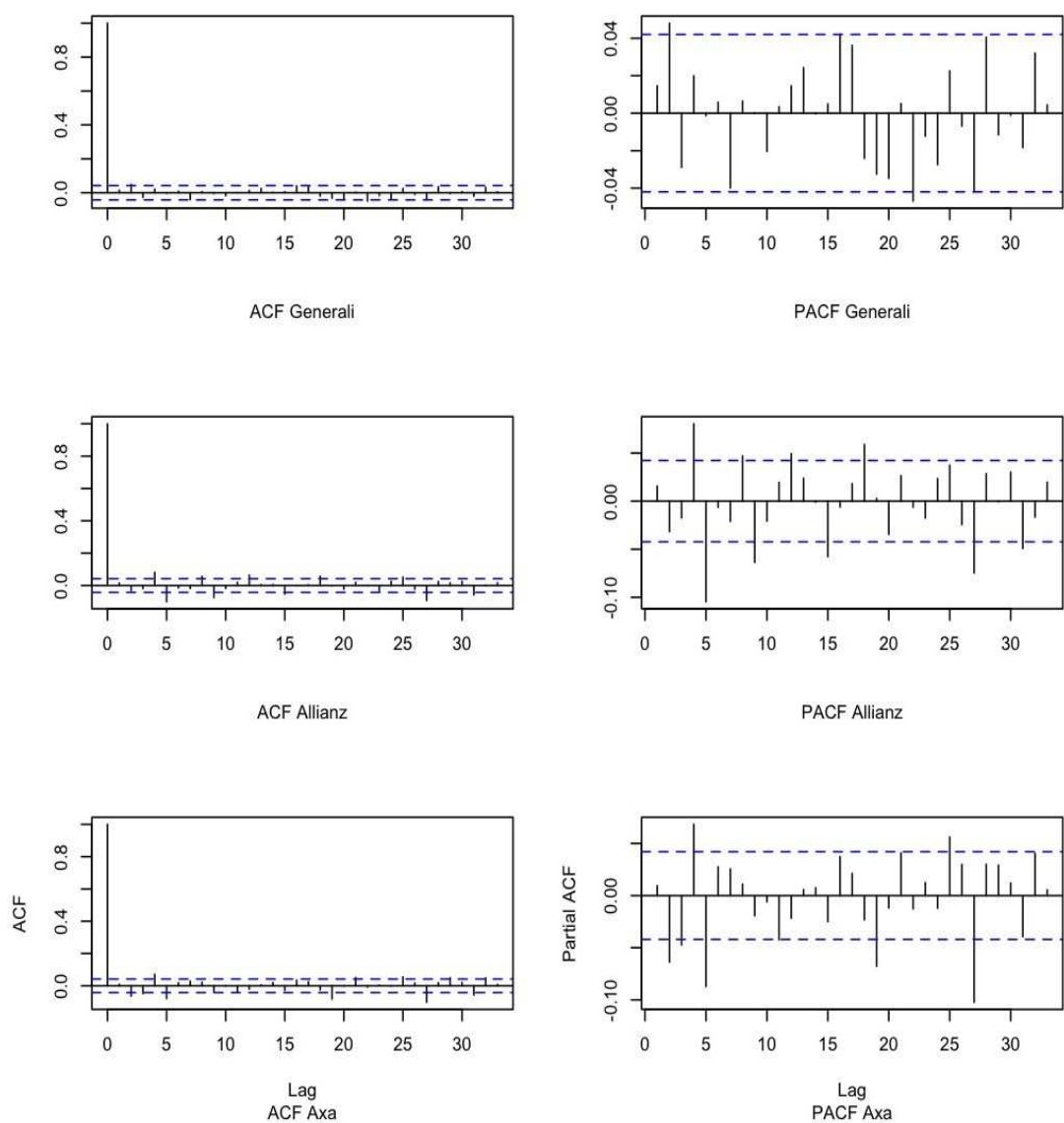


|             | Generali    | Allianz     | Axa         |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| nobs        | 2179.000000 | 2150.000000 | 2175.000000 |
| NAs         | 0.000000    | 0.000000    | 0.000000    |
| Minimum     | -0.077877   | -0.151869   | -0.202783   |
| Maximum     | 0.123340    | 0.232964    | 0.197435    |
| 1. Quartile | -0.007329   | -0.010072   | -0.011869   |
| 3. Quartile | 0.007526    | 0.010237    | 0.012262    |
| Mean        | -0.000063   | 0.000124    | 0.000110    |
| Median      | 0.000000    | 0.000443    | 0.000000    |
| Sum         | -0.136820   | 0.267532    | 0.239616    |
| SE Mean     | 0.000333    | 0.000503    | 0.000587    |
| LCL Mean    | -0.000717   | -0.000863   | -0.001040   |
| UCL Mean    | 0.000591    | 0.001112    | 0.001261    |
| Variance    | 0.000242    | 0.000545    | 0.000748    |
| Stdev       | 0.015566    | 0.023342    | 0.027358    |
| Skewness    | 0.053226    | 0.619095    | 0.574593    |
| Kurtosis    | 4.699130    | 11.326933   | 9.403432    |

Nel grafico dei rendimenti si può vedere come le serie siano ora stazionarie in media, ossia i valori osservati oscillano intorno ad un numero che altro non è che la media della serie. Inoltre, il rapporto t-ratio tra media dei rendimenti e Standard Error della media dei rendimenti, che vale -0.1891892 nel caso di Generali, 0.2519841 nel caso di Allianz e 0.1669506 nel caso di Axa, suggerisce che i valori di tutte e tre le serie sono stazionari attorno ad una media nulla. Si può notare il fenomeno di

volatility clustering, maggiormente evidente nel periodo della crisi finanziaria del 2008. Osservando i valori di asimmetria possiamo affermare che le distribuzioni non sono particolarmente diverse da una normale, mentre osservando i valori degli eccessi di curtosi va detto che le distribuzioni sono a code particolarmente pesanti (leptocurtosi).

Si è successivamente eseguito il test Augmented Dickey-Fuller di radice unitaria per verificare che le serie prodotte con la differenziazione non avessero problemi di sovra-differenziazione. L'accettazione dell'ipotesi nulla in tutti i casi ha portato alla conclusione che le serie sono differenza-stazionarie e pertanto non si è giunti ad una sovra-differenziazione. Ciò si può vedere anche nei grafici delle funzioni di autocorrelazione globale e parziale.

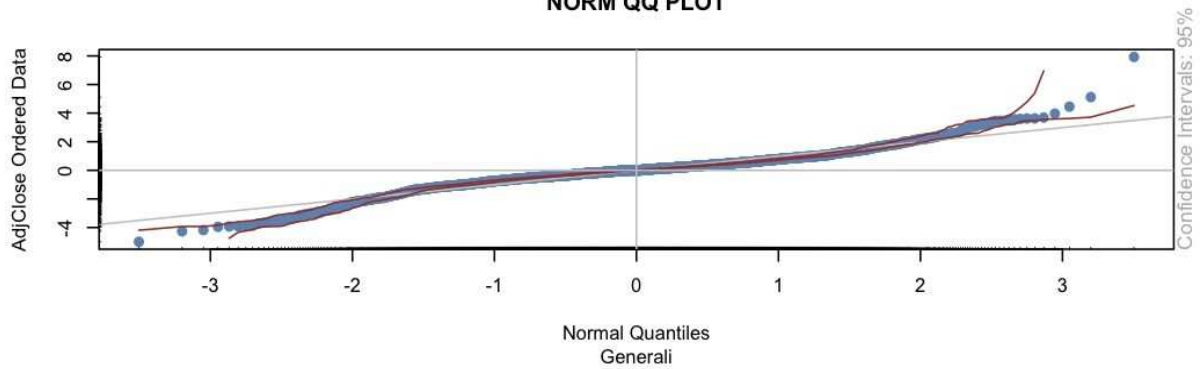


I valori fuori dalle bande di confidenza non sono segnalano particolari forme di autocorrelazione.

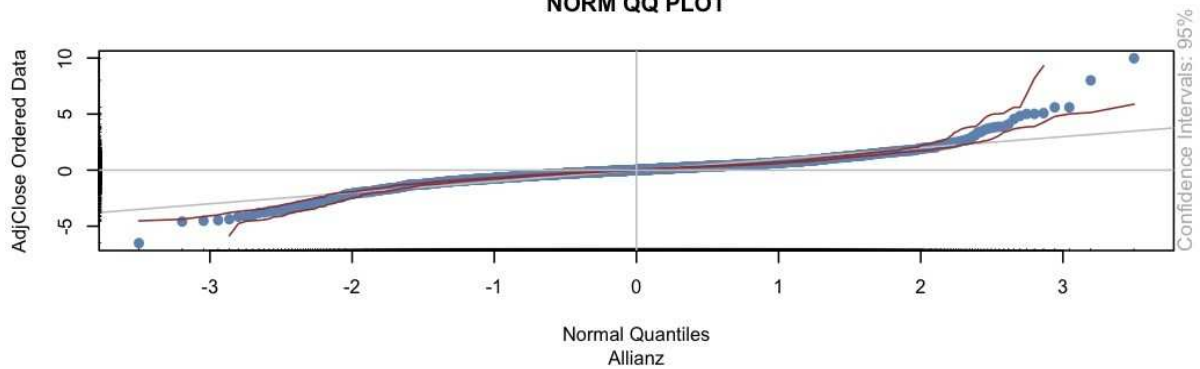
Dalla tabella con le statistiche di base sembra che i rendimenti non provengano da una distribuzione normale. Sono riportati alcuni test di normalità e due grafici, ossia i QQ-Plot, che mettono a confronto i valori osservati con quelli di una normale, e le funzioni di densità empiriche confrontate a quelle teoriche di una normale.

| GENERALI  | ALLIANZ   | AXA   |
|---|---|---|
| Shapiro - Wilk Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>W: 0.9407<br>P VALUE:<br>< 2.2e-16  | Shapiro - Wilk Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>W: 0.8857<br>P VALUE:<br>< 2.2e-16  | Shapiro - Wilk Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>W: 0.8877<br>P VALUE:<br>< 2.2e-16  |
| D'Agostino Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>Chi2   Omnibus: 236.0898<br>Z3   Skewness: 1.0178<br>Z4   Kurtosis: 15.3315<br>P VALUE:<br>Omnibus Test: < 2.2e-16<br>Skewness Test: 0.3088<br>Kurtosis Test: < 2.2e-16 | D'Agostino Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>Chi2   Omnibus: 531.4139<br>Z3   Skewness: 10.8666<br>Z4   Kurtosis: 20.3306<br>P VALUE:<br>Omnibus Test: < 2.2e-16<br>Skewness Test: < 2.2e-16<br>Kurtosis Test: < 2.2e-16 | D'Agostino Normality Test<br>Test Results:<br>STATISTIC:<br>Chi2   Omnibus: 481.6634<br>Z3   Skewness: 10.2411<br>Z4   Kurtosis: 19.4109<br>P VALUE:<br>Omnibus Test: < 2.2e-16<br>Skewness Test: < 2.2e-16<br>Kurtosis Test: < 2.2e-16 |

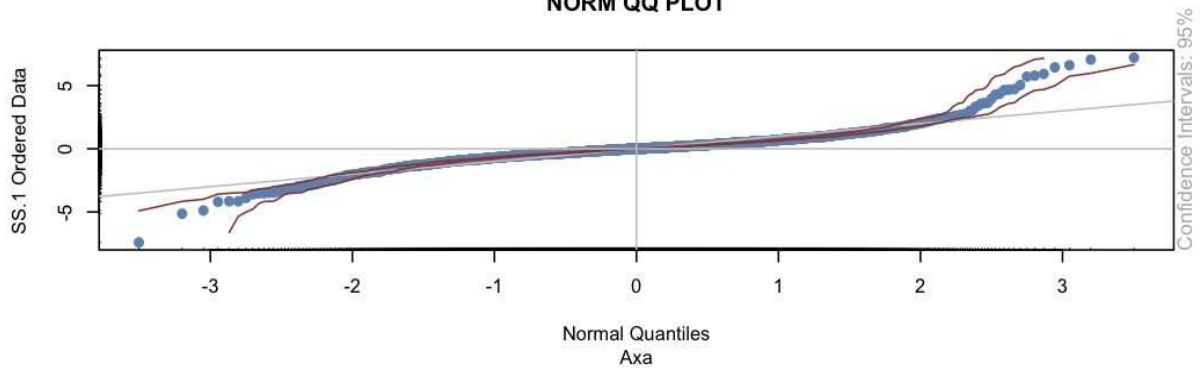
**NORM QQ PLOT**

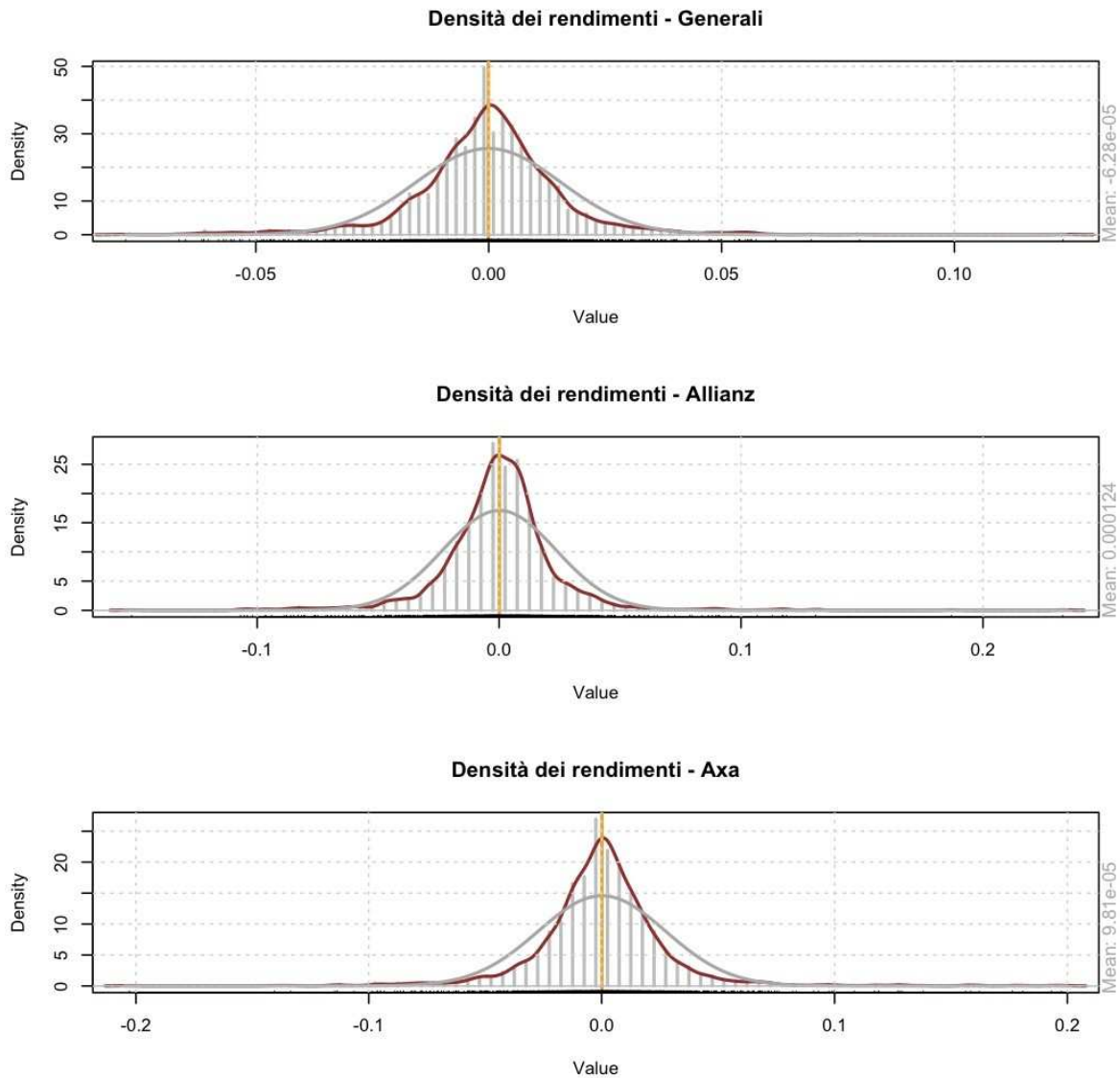


**NORM QQ PLOT**



**NORM QQ PLOT**





Dalla lettura dei test risulta che in tutte e tre le serie si verificano comportamenti di asimmetria e di curtosi decisamente non normali, eccezion fatta per il parametro di asimmetria di Generali condotto nel test D'Agostino, che accetta l'ipotesi nulla di normalità, ma l'eccesso di curtosi è talmente evidente che la sua azione combinata con l'asimmetria porta ad un netto rifiuto nell'ipotesi nulla in favore dell'ipotesi alternativa.

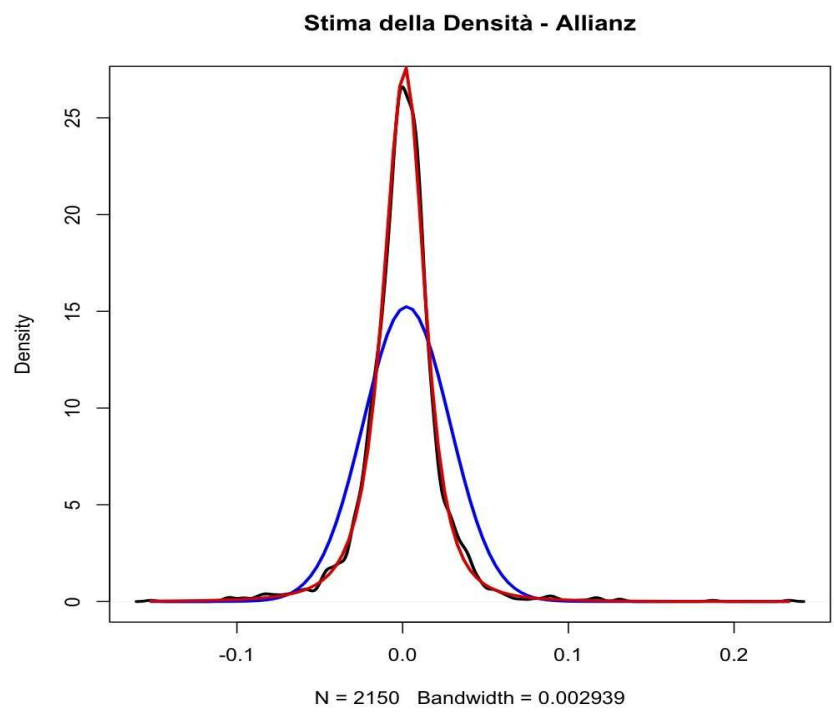
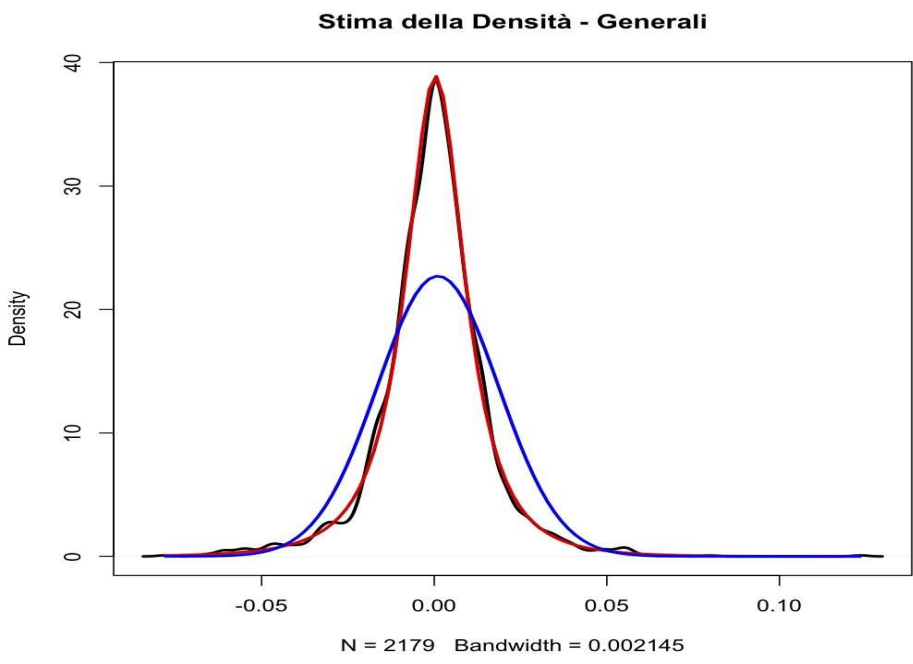
La lettura dei grafici, inoltre, è chiara: la distribuzione empirica dei rendimenti è ben lungi da quella teorica di una normale.

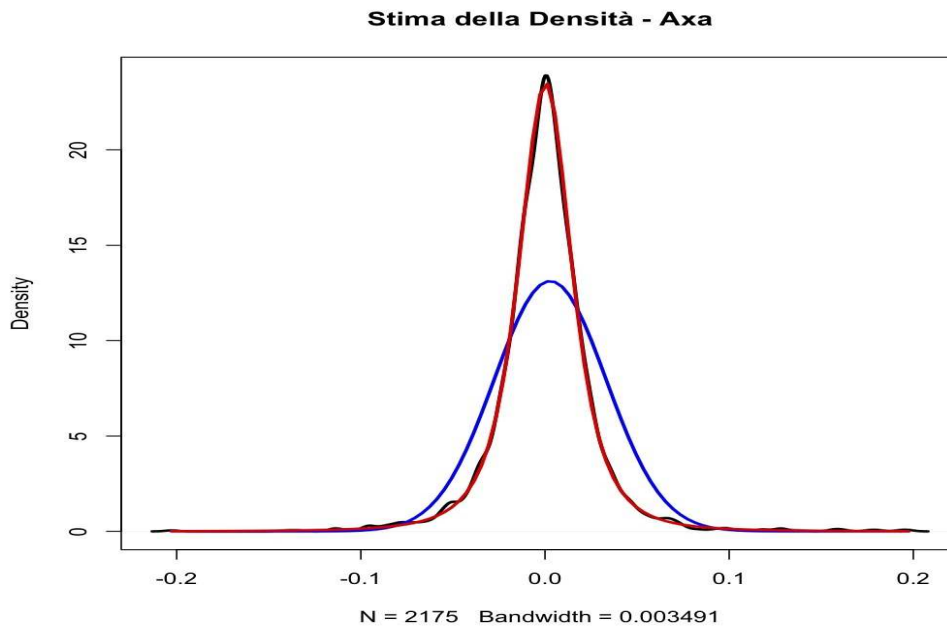
#### 4.2.2 Stima della densità

Ma che densità hanno allora i rendimenti? Sono state stimate sui dati sei diverse distribuzioni teoriche, una canonica ed altre cinque tipicamente usate in finanza, come si accennava in precedenza. Quella canonica è chiaramente la normale, usata per un confronto nei grafici che verranno proposti, le altre cinque sono la GED e la sua versione asimmetrica, la t di Student e la sua versione asimmetrica e la NIG. Le distribuzioni teoriche sono state scelte in base all'AIC. Sono stati poi fatti dei grafici in cui vengono riportate la normale, la distribuzione con minore AIC e la densità



empirica della serie. Nel caso di Generali la distribuzione scelta è la NIG, mentre nel caso di Allianz e di Axa la distribuzione scelta è la versione asimmetrica della t di Student.

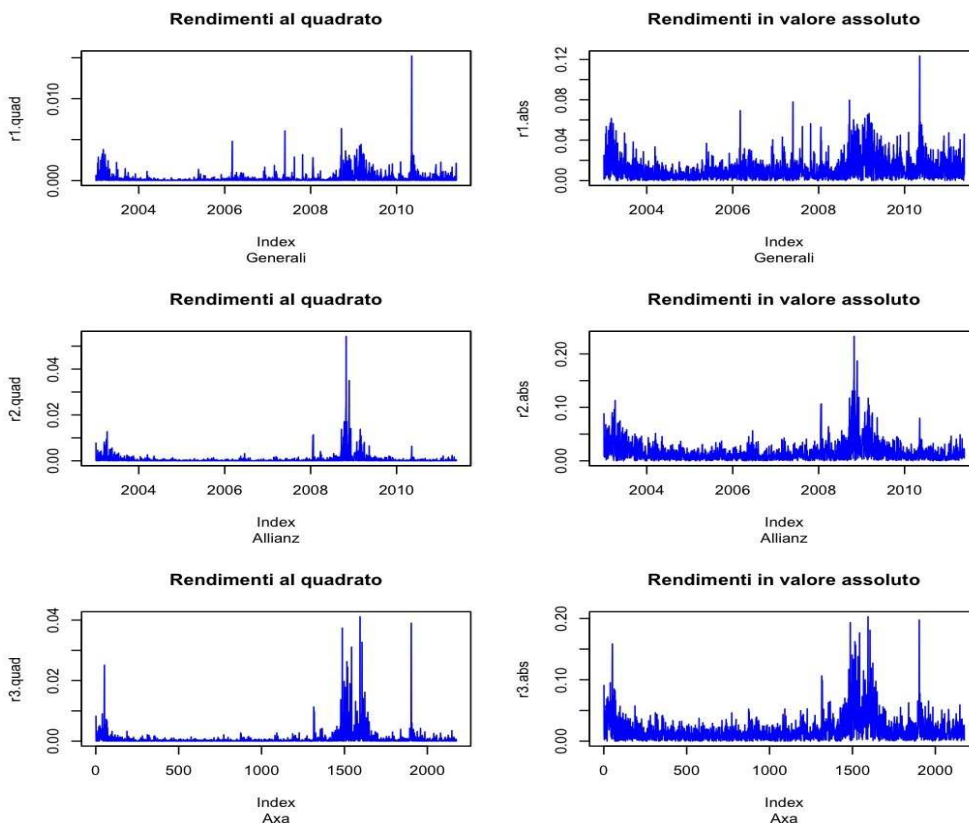


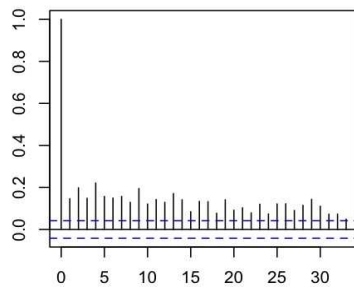


Da segnalare la particolare pesantezza della coda destra di Generali e di Allianz, opportunamente stimate con la NIG e con la t di Student asimmetrica.

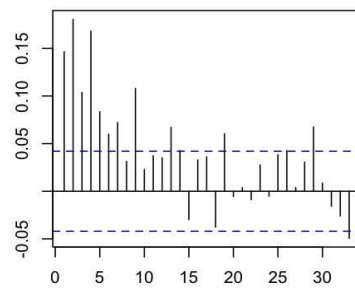
#### 4.2.3 Struttura di dipendenza dei quadrati e dei valori assoluti

Vediamo i grafici dei valori assoluti e dei quadrati dei rendimenti e la loro struttura di dipendenza, con i grafici delle funzioni di autocorrelazione globale e parziale.

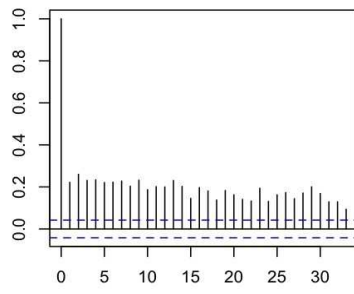




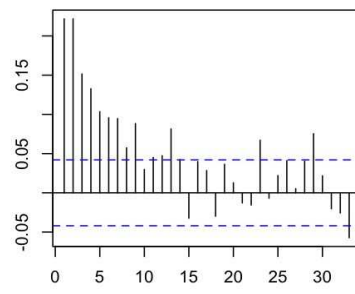
ACF Rendimenti al quadrato - Generali



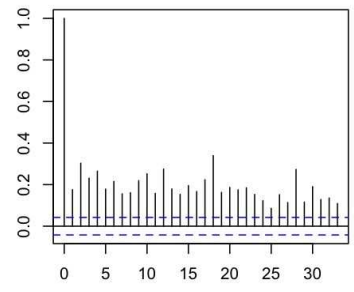
PACF Rendimenti al quadrato - Generali



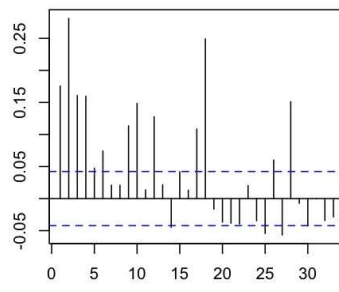
ACF Rendimenti in valore assoluto - Generali



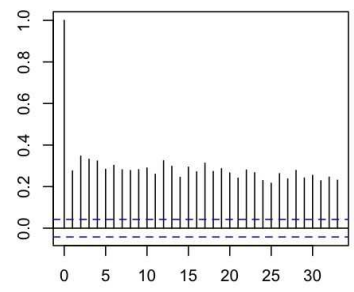
PACF Rendimenti in valore assoluto - Generali



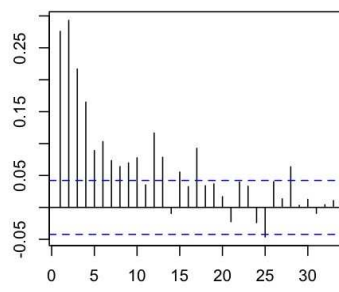
ACF Rendimenti al quadrato - Allianz



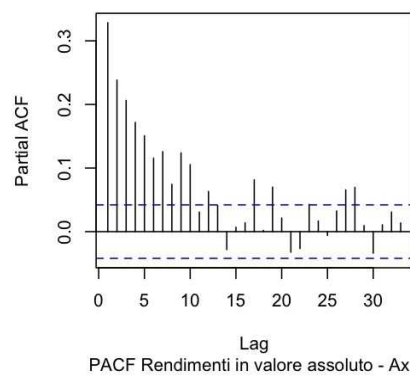
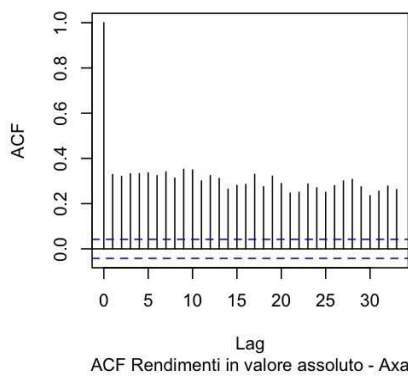
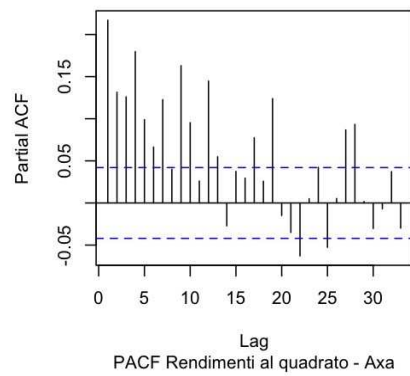
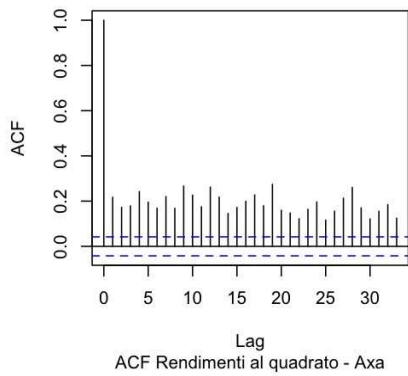
PACF Rendimenti al quadrato - Allianz



ACF Rendimenti in valore assoluto - Allianz



PACF Rendimenti in valore assoluto - Allianz



Chiaramente le serie non sono indipendenti, specie per quanto riguarda i valori assoluti dei rendimenti.

#### 4.3 Stima di modelli GARCH

Considerato ciò che abbiamo verificato con gli ultimi grafici, eseguiamo un test ARCH per vedere se la non stazionarietà delle serie dei rendimenti al quadrato e dei valori assoluti dei rendimenti è dovuta alla presenza di effetti ARCH.

| GENERALI   | ALLIANZ   | AXA  |
|--|---|--|
| ARCH LM-test<br>Null hypothesis: no ARCH effects       | ARCH LM-test<br>Null hypothesis: no ARCH effects      | ARCH LM-test<br>Null hypothesis: no ARCH effects       |
| Chi-squared = 258.1901<br>df = 12<br>p-value < 2.2e-16 | Chi-squared = 437.907<br>df = 12<br>p-value < 2.2e-16 | Chi-squared = 401.2602<br>df = 12<br>p-value < 2.2e-16 |

Visti i valori dei p-value, accettiamo l'ipotesi nulla di presenza di effetti ARCH.

##### 4.3.1 Stima di un GARCH e analisi dei residui – Generali

Dal momento che nella libreria usata per la stima dei GARCH non era possibile implementare la NIG, si è scelto di adottare la distribuzione con il secondo minore AIC, ossia la t di Student asimmetrica. Vengono riportati i risultati principali della stima di un modello GARCH(1,1).

|                           |
|---------------------------|
| Title:<br>GARCH Modelling |
|---------------------------|

```

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)

Conditional Distribution:
sstd

Coefficient(s):
      omega      alpha      beta      skew      shape
1.5143e-06  7.4017e-02  9.2276e-01  9.7355e-01  5.7222e+00

Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
omega 1.514e-06  6.843e-07   2.213   0.0269 *
alpha 7.402e-02  1.595e-02   4.640  3.48e-06 ***
beta  9.228e-01  1.603e-02  57.565  < 2e-16 ***
skew  9.736e-01  2.634e-02  36.956  < 2e-16 ***
shape 5.722e+00  6.786e-01   8.432  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Standardised Residuals Tests:

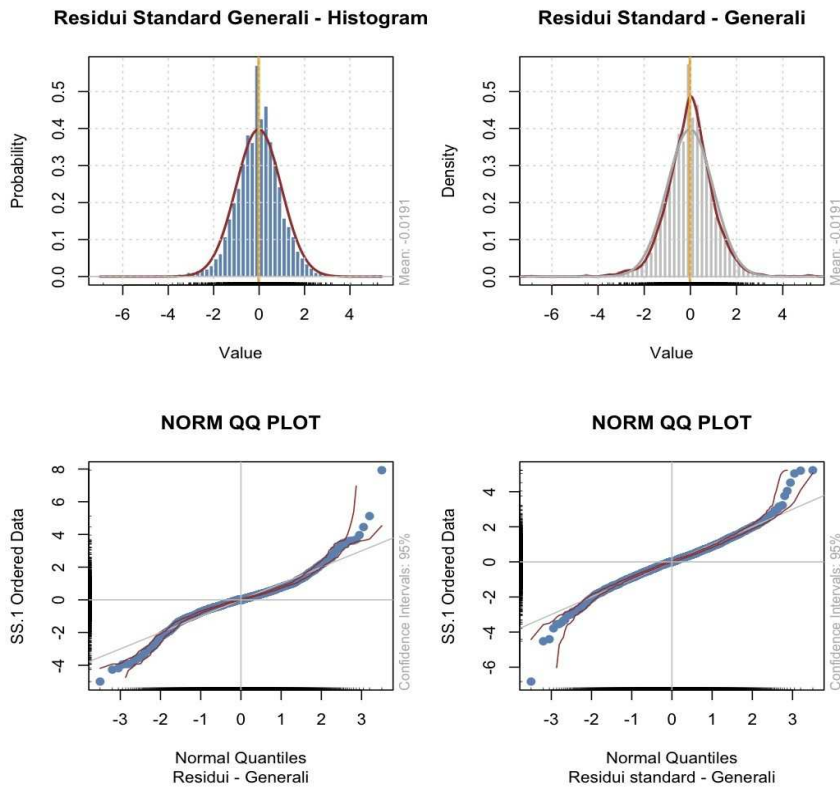
      Jarque-Bera Test  R      Chi^2  Statistic  p-Value
Shapiro-Wilk Test    R      W      0.9765064  0
Ljung-Box Test       R      Q(10)  9.775465   0.4604086
Ljung-Box Test       R      Q(15)  13.14438   0.5911468
Ljung-Box Test       R      Q(20)  16.0296    0.7147859
Ljung-Box Test       R^2    Q(10)  15.45725   0.1162591
Ljung-Box Test       R^2    Q(15)  21.14722   0.1321911
Ljung-Box Test       R^2    Q(20)  24.51395   0.2206621
LM Arch Test         R      TR^2   17.71164   0.1247308

Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-5.860981 -5.847933 -5.860992 -5.856211

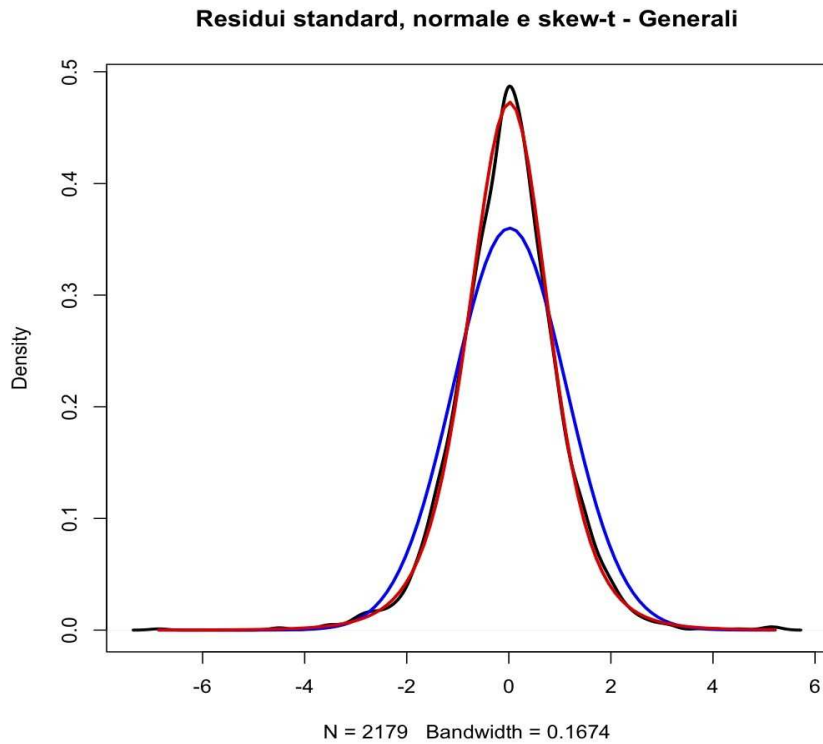
```

Tutti i parametri sono altamente significativi. I test condotti per la normalità dei residui standard portano al rifiuto dell'ipotesi nulla di normalità dei residui. Invece i test di Ljung-Box ed il test ARCH accettano le ipotesi nulle di assenza di auto-correlazione nei residui standard e di assenza di effetti ARCH.

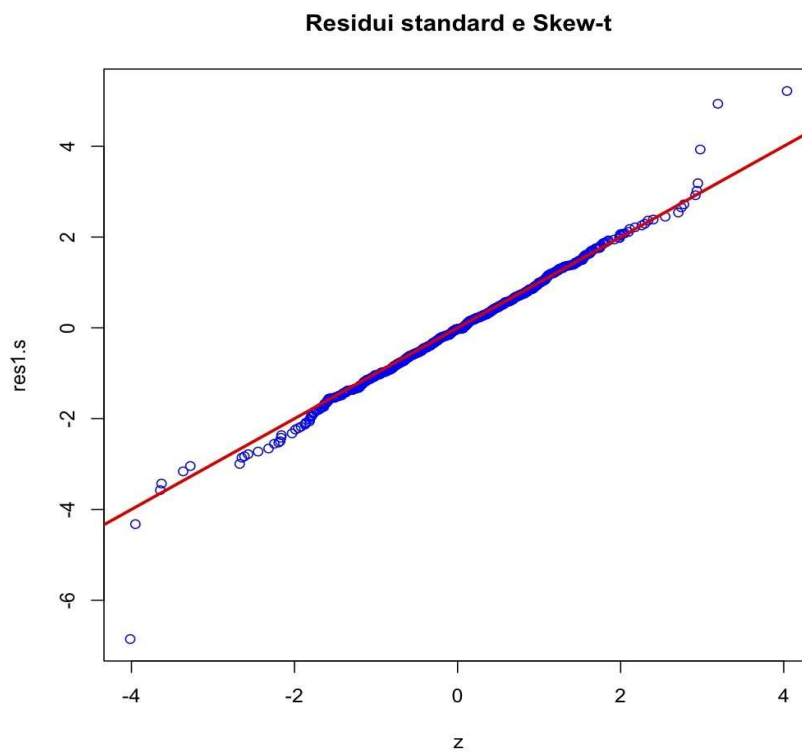
Si riportano, quindi, una serie di grafici derivati dai residui standard e sui loro quadrati.



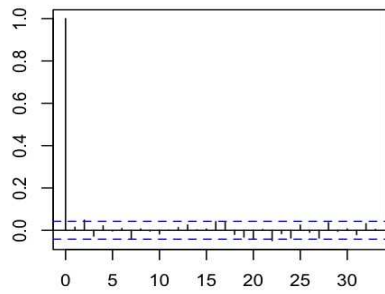
Si è, inoltre, compiuta la stessa procedura di prima per la ricerca della densità dei residui standard. Si è nuovamente optato per la distribuzione teorica con minore AIC.



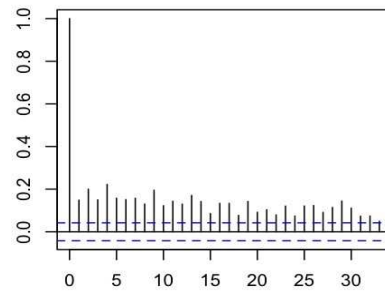
La scelta è caduta su una t di Student asimmetrica. Vediamo un confronto tra funzione di ripartizione teorica e funzione di ripartizione empirica.



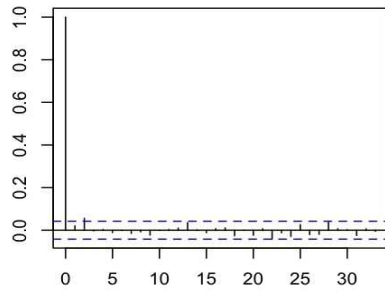
Infine analizziamo la struttura di dipendenza dei dati. Si verificherà graficamente che i residui standard non sono incorrelati.



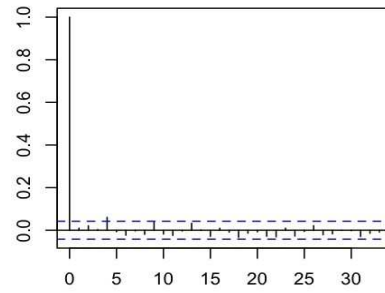
ACF dei residui - Generali



ACF dei residui al quadrato - Generali



ACF dei residui standard - Generali



ACF dei residui standard al quadrato - Generali

### 4.3.2 Stima di un GARCH e analisi dei residui – Allianz

Ripetiamo quanto già fatto nel sotto-paragrafo precedente con i dati di Allianz.

```

Title:
  GARCH Modelling

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)

Conditional Distribution:
  sstd

Coefficient(s):
      mu      omega      alphal      betal      skew      shape
7.1494e-04  3.8391e-06  8.0037e-02  9.1099e-01  9.8295e-01  7.9291e+00

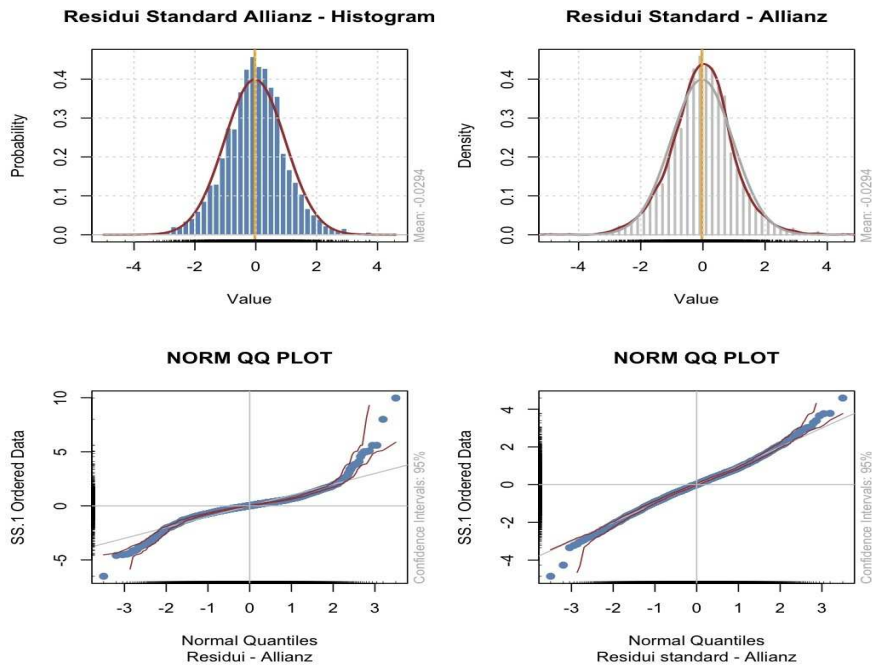
Error Analysis:
      Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
mu      7.149e-04  3.247e-04  2.202  0.02768 *
omega   3.839e-06  1.283e-06  2.992  0.00277 **
alphal  8.004e-02  1.369e-02  5.846  5.05e-09 ***
betal   9.110e-01  1.404e-02  64.872  < 2e-16 ***
skew    9.829e-01  2.932e-02  33.527  < 2e-16 ***
shape   7.929e+00  1.321e+00  6.002  1.95e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Standardised Residuals Tests:
      Statistic  p-Value
Jarque-Bera Test  R      Chi^2  99.28023  0
Shapiro-Wilk Test  R      W      0.9923881  3.746877e-09
Ljung-Box Test     R      Q(10)  19.3248  0.03632599
Ljung-Box Test     R      Q(15)  33.22775  0.004364905
Ljung-Box Test     R      Q(20)  36.79711  0.01237486
Ljung-Box Test     R^2    Q(10)  17.40527  0.06586376
Ljung-Box Test     R^2    Q(15)  18.24029  0.2502435
Ljung-Box Test     R^2    Q(20)  21.18638  0.3862363
LM Arch Test       R      TR^2   18.02465  0.114944

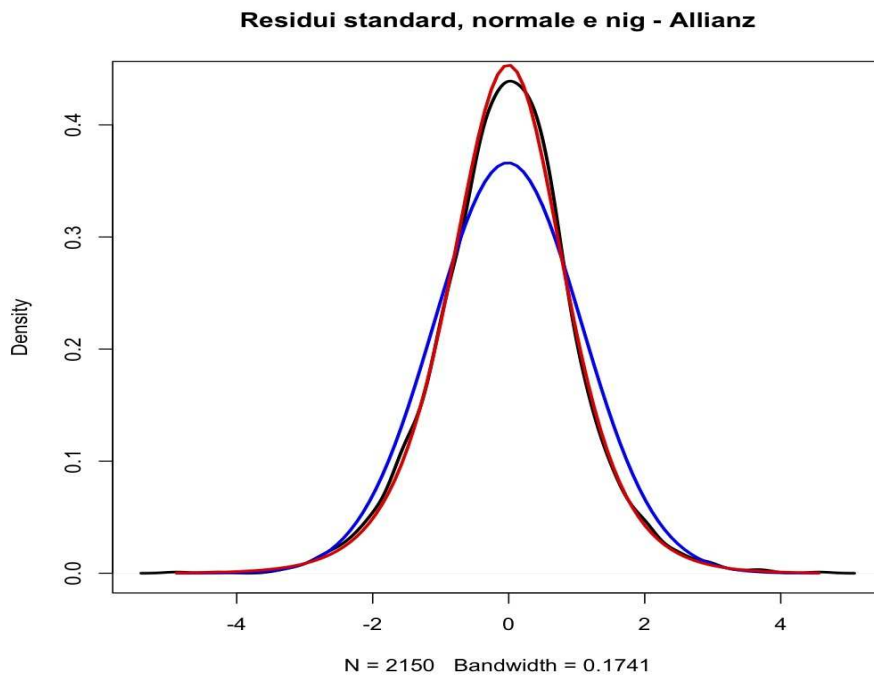
Information Criterion Statistics:
      AIC      BIC      SIC      HQIC
-5.246240 -5.230408 -5.246256 -5.240448

```

Di nuovo tutti i parametri sono altamente significativi, almeno all'usuale 5% di confidenza. I test ci dicono che la distribuzione dei residui standard certamente non è una normale e che c'è qualche problema di autocorrelazione, dato che il test di Ljung-Box rifiuta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione anche a 20 ritardi. Nonostante questo problema, gli effetti ARCH sono spariti. Vediamo qualche grafico dei residui standard.

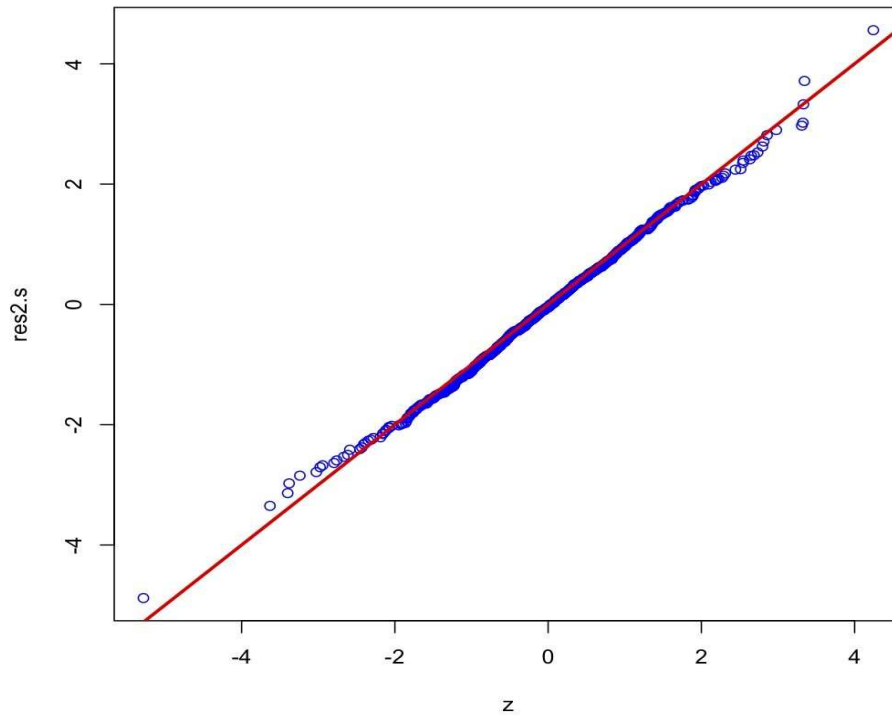


In effetti la situazione è molto meno critica rispetto a Generali, perché la distribuzione empirica è molto simile ad una gaussiana e c'è un allontanamento molto meno sistematico sulle code. Si cercherà lo stesso, però, una distribuzione teorica più adatta. Ed in effetti la Normale Inversa Gaussiana è più adatta. Vediamo i grafici che confrontano la distribuzione empirica con quelle teoriche della normale e della NIG stimate e la funzione di ripartizione empirica con quella teorica della NIG stimata.

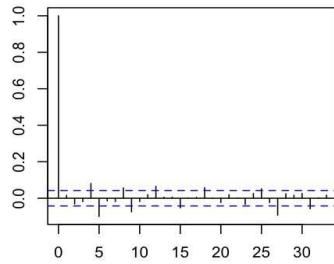




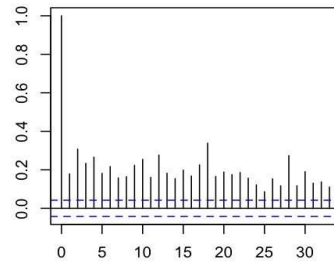
### Residui standard e Nig - Allianz



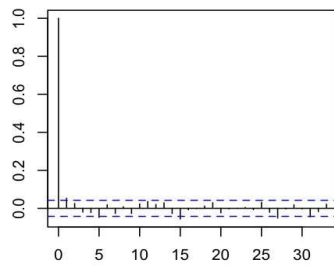
Per quanto riguarda la struttura di dipendenza dei residui, dei residui al quadrato, dei residui standard e dei residui standard al quadrato la situazione grafica è simile alla precedente.



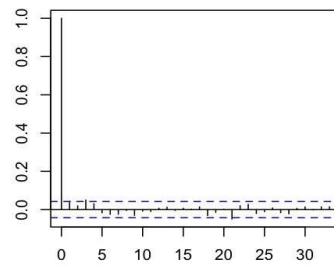
ACF dei residui - Allianz



ACF dei residui al quadrato - Allianz



ACF dei residui standard - Allianz



ACF dei residui standard al quadrato - Allianz

### 4.3.3 Stima di un GARCH e analisi dei residui – Axa

Di nuovo, vediamo gli stessi procedimenti per i dati relativi ai rendimenti della compagnia assicurativa francese Axa.

```

Title:
GARCH Modelling

Mean and Variance Equation:
data ~ garch(1, 1)

Conditional Distribution:
sstd

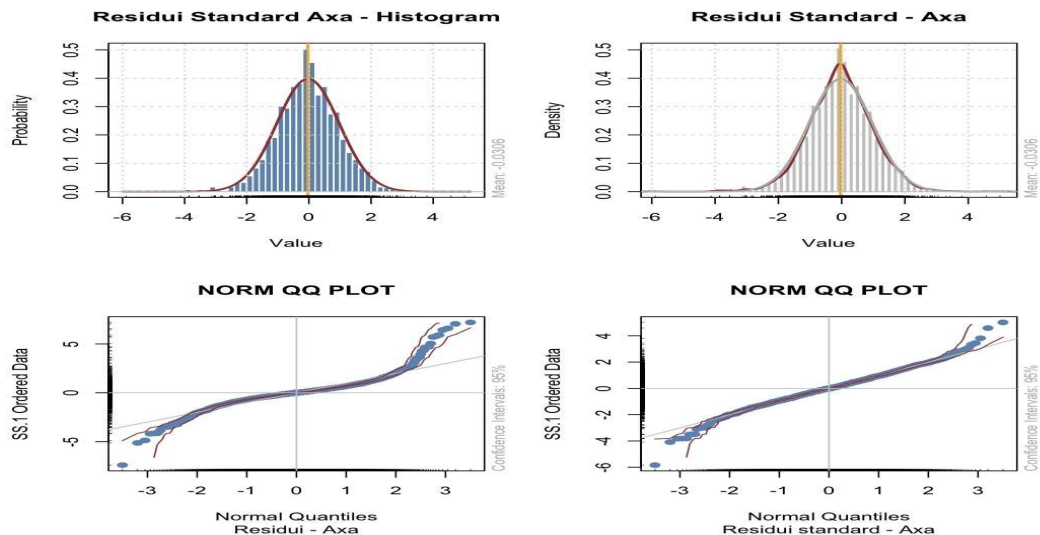
Coefficient(s):
mu          omega      alphas      betas      skew      shape
7.4385e-04  6.0650e-06  9.0636e-02  8.9800e-01  1.0025e+00  9.2789e+00

Error Analysis:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu       7.438e-04  3.611e-04  2.060  0.03938 *
omega    6.065e-06  1.890e-06  3.209  0.00133 **
alpha    9.064e-02  1.516e-02  5.978  2.25e-09 ***
beta     8.980e-01  1.586e-02  56.632 < 2e-16 ***
skew     1.002e+00  3.033e-02  33.055 < 2e-16 ***
shape    9.279e+00  1.613e+00  5.752  8.79e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Standardised Residuals Tests:
Statistic p-Value
Jarque-Bera Test R Chi^2 181.2062 0
Shapiro-Wilk Test R W 0.9907765 1.500808e-10
Ljung-Box Test R Q(10) 11.13733 0.3469191
Ljung-Box Test R Q(15) 13.79499 0.5411309
Ljung-Box Test R Q(20) 16.66999 0.6742866
Ljung-Box Test R^2 Q(10) 14.42854 0.1543265
Ljung-Box Test R^2 Q(15) 19.88326 0.1764569
Ljung-Box Test R^2 Q(20) 24.87235 0.2063585
LM Arch Test R TR^2 16.49227 0.1697148

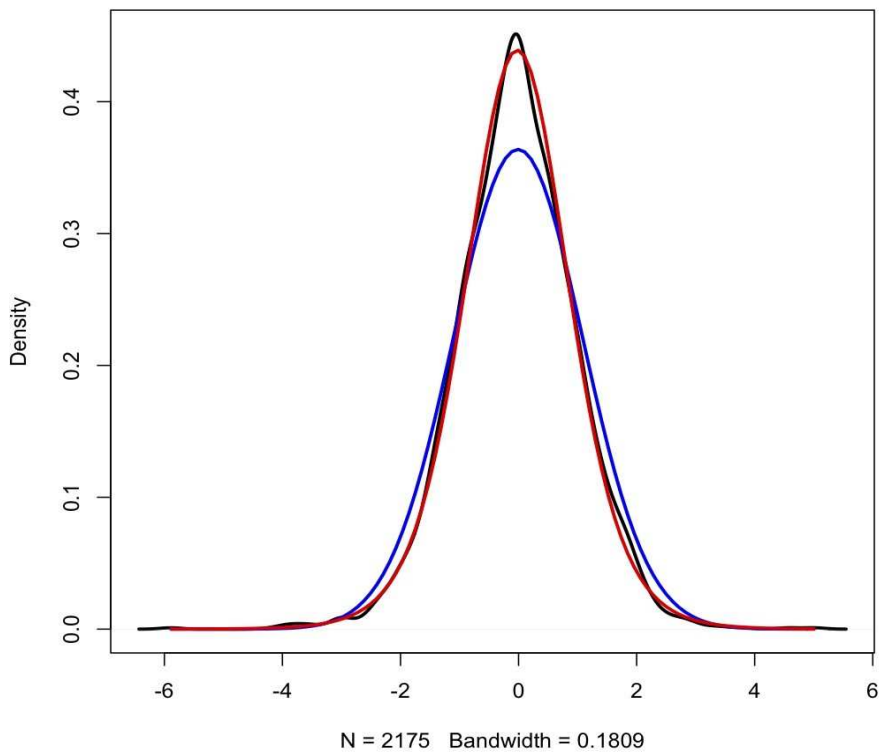
Information Criterion Statistics:
AIC BIC SIC HQIC
-4.971077 -4.955395 -4.971093 -4.965344
    
```

La situazione è molto simile a quella di Allianz, ossia abbiamo significatività dei parametri piuttosto alta, sempre considerando come soglia di confidenza il 5%, tuttavia c'è una miglioria in uno dei test eseguiti sui residui standardizzati del modello. Sicuramente questi non provengono da una distribuzione normale, come prima, mentre i test di Ljung-Box confermano l'ipotesi nulla di assenza di auto-correlazione, sia per quanto riguarda i residui standard che per i residui standard al quadrato. Sono, inoltre, stati tolti gli effetti ARCH che erano presenti in precedenza. Si vedano ora alcuni grafici di densità dei residui standard.

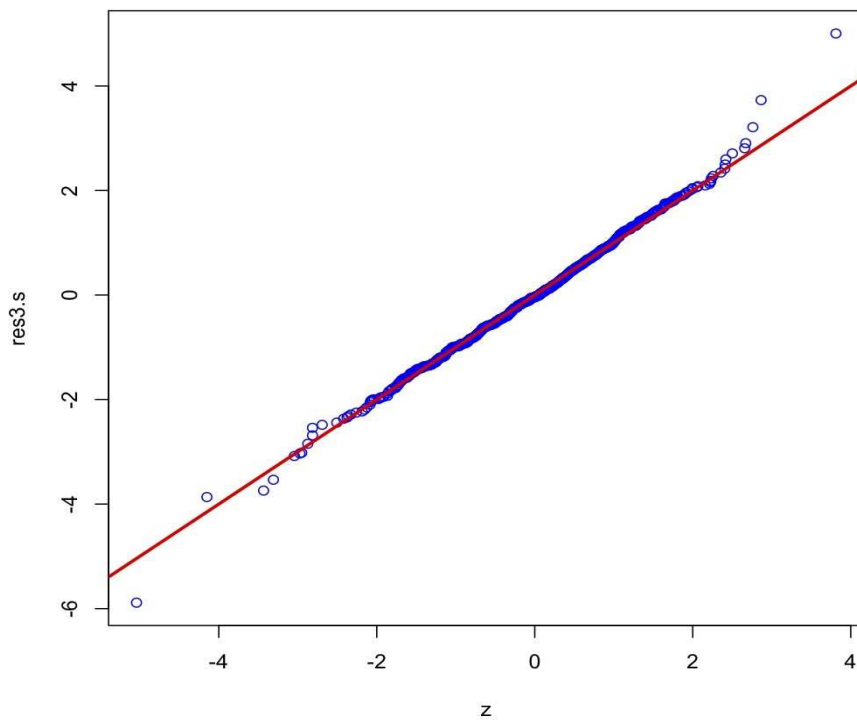


La situazione è simile a quella di prima: la distribuzione empirica è solamente simile ad una normale, pertanto verificiamo con la procedura già nota quale sia la densità teorica più adatta.

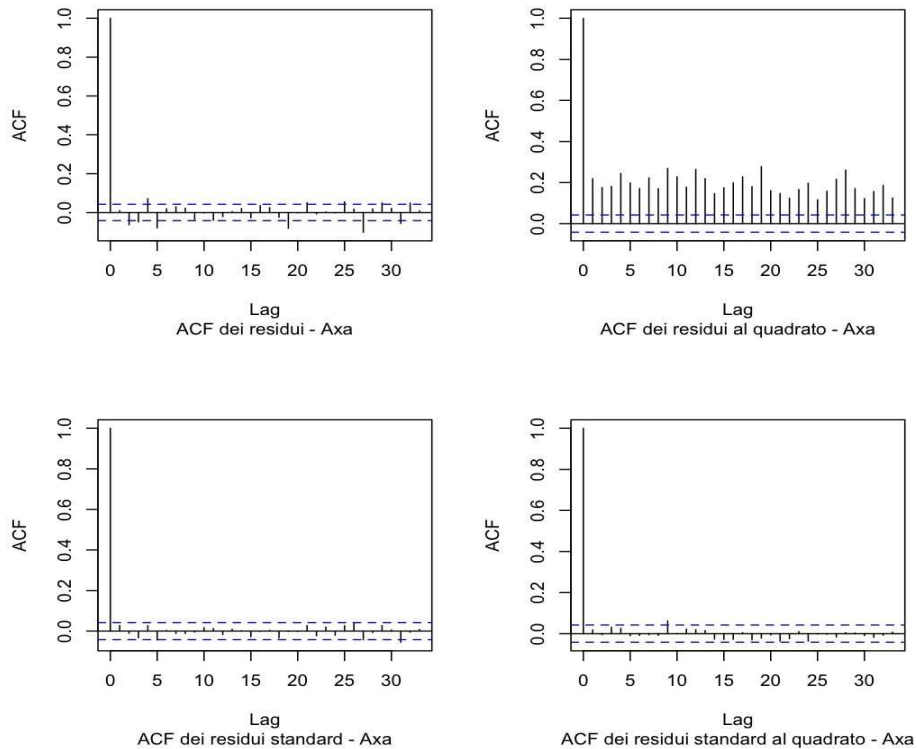
**Residui standard, normale e skew-t - Axa**



**Residui standard e Skew-t - Axa**



Nuovamente la scelta è ricaduta, dunque, su una distribuzione t di Student asimmetrica. Vediamo, infatti, come i dati si adattino abbastanza bene alla distribuzione stimata. Per quanto riguarda la struttura di dipendenza dei dati, infine, vediamo i grafici della funzione di autocorrelazione globale di residui, residui al quadrato, residui standard e residui standard al quadrato.



#### 4.4 Verifica della presenza dell'effetto leva

Come si è già detto in precedenza, i test che verificano la presenza o meno dell'effetto leva sono costruiti sui parametri di una regressione dei residui sui residui standard al quadrato moltiplicati da una variabile dummy che assume il valore 1 in caso di positività del residuo standard e 0 viceversa. Sono state, pertanto, costruite le regressioni utili all'esecuzione del Negative-Sign Bias Test, del Sign Bias Test e del test congiunto. Si riportano le tre regressioni con i relativi risultati per ogni compagnia assicurativa.

|   |   |
|---|---|
| <p>NEGATIVE SIGN-BIAS TEST -- GENERALI</p> <p>Residuals:<br/>           Min 1Q Median 3Q Max<br/>           -1.077 -0.916 -0.661 0.074 45.716</p> <p>Coefficients:<br/>           Estimate Std. Error t value Pr(&gt; t )<br/>           (Intercept) 0.93604 0.06505 14.390 &lt;2e-16 ***<br/>           dl 0.14113 0.09477 1.489 0.137<br/>           ---<br/>           Sign. Codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1</p> <p>Residual standard error: 2.208 on 2176 degrees of freedom<br/>           Multiple R-squared: 0.001018, Adj R-squared: 0.000559<br/>           F-statistic: 2.218 on 1 and 2176 DF, p-value: 0.1366</p> | <p>SIGN BIAS TEST - GENERALI</p> <p>Residuals:<br/>           Min 1Q Median 3Q Max<br/>           -1.388 -0.926 -0.660 0.073 45.684</p> <p>Coefficients:<br/>           Estimate Std. Error t value Pr(&gt; t )<br/>           (Intercept) 0.96713 0.05413 17.866 &lt;2e-16 ***<br/>           D1 -6.55052 4.86726 -1.346 0.178<br/>           ---<br/>           Sign. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1</p> <p>Residual standard error: 2.208 on 2176 degrees of freedom<br/>           Multiple R-squared: 0.0008317, Adj R-squared: 0.0003725<br/>           F-statistic: 1.811 on 1 and 2176 DF, p-value: 0.1785</p> |
| <p>NEGATIVE SIGN-BIAS TEST - ALLIANZ</p> <p>Residuals:<br/>           Min 1Q Median 3Q Max<br/>           -1.3686 -0.8952 -0.6169 0.1478 22.6242</p> <p>Coefficients:<br/>           Estimate Std. Error t value Pr(&gt; t )<br/>           (Intercept) 0.99213 0.03708 26.755 &lt;2e-16 ***<br/>           d2 -3.65945 1.16667 -3.137 0.00173 **<br/>           ---<br/>           Sign. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1</p> <p>Residual standard error: 1.719 on 2147 degrees of freedom</p>  | <p>SIGN BIAS TEST - ALLIANZ</p> <p>Residuals:<br/>           Min 1Q Median 3Q Max<br/>           -1.0577 -0.9080 -0.6315 0.1404 22.8379</p> <p>Coefficients:<br/>           Estimate Std. Error t value Pr(&gt; t )<br/>           (Intercept) 0.99153 0.03841 25.816 &lt;2e-16 ***<br/>           D2 1.89618 18.12886 0.105 0.917<br/>           ---<br/>           Sign. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1</p> <p>Residual standard error: 1.723 on 2147 degrees of freedom</p>   |

|  |  |
|--|--|
| Multiple R-squared: 0.004562, Adj R-squared: 0.004098<br>F-statistic: 9.839 on 1 and 2147 DF, p-value: 0.001732  | Multiple R-squared: 5.095e-06, Adj R-squared: -0.0004607<br>F-statistic: 0.01094 on 1 and 2147 DF, p-value: 0.9167   |
| <b>NEGATIVE SIGN-BIAS TEST - AXA</b>   | <b>SIGN BIAS TEST - AXA</b>  |
| Residuals:<br>Min 1Q Median 3Q Max<br>-1.372 -0.910 -0.613 0.187 33.443  | Residuals:<br>Min 1Q Median 3Q Max<br>-1.290 -0.925 -0.617 0.189 33.516  |
| Coefficients:<br>Estimate Std. Error t value Pr(> t )<br>(Intercept) 1.00234 0.03962 25.301 <2e-16 ***<br>d3 -2.25064 1.13960 -1.975 0.0484 *                            | Coefficients:<br>Estimate Std. Error t value Pr(> t )<br>(Intercept) 0.99585 0.04135 24.083 <2e-16 ***<br>D3 9.24034 15.71160 0.588 0.557                                      |
| ---<br>Sign. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1   | ---<br>Sign. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1   |
| Residual standard error: 1.847 on 2172 degrees of freedom<br>Multiple R-squared: 0.001793, Adj R-squared: 0.001333<br>F-statistic: 3.9 on 1 and 2172 DF, p-value: 0.0484 | Residual standard error: 1.849 on 2172 degrees of freedom<br>Multiple R-squared: 0.0001592, Adj R-squared: -0.0003011<br>F-statistic: 0.3459 on 1 and 2172 DF, p-value: 0.5565 |

Per quanto riguarda i test singoli accettiamo l'ipotesi nulla di assenza di effetto leva nel caso di Generali per entrambi i due tipi di test, mentre sia in Allianz che in Axa il Negative-Sign Bias Test ci dice di accettare l'ipotesi alternativa di presenza di tale effetto, mentre il Sign Bias Test su queste due compagnie ci suggerisce di trarre le stesse conclusioni tratte per Generali.

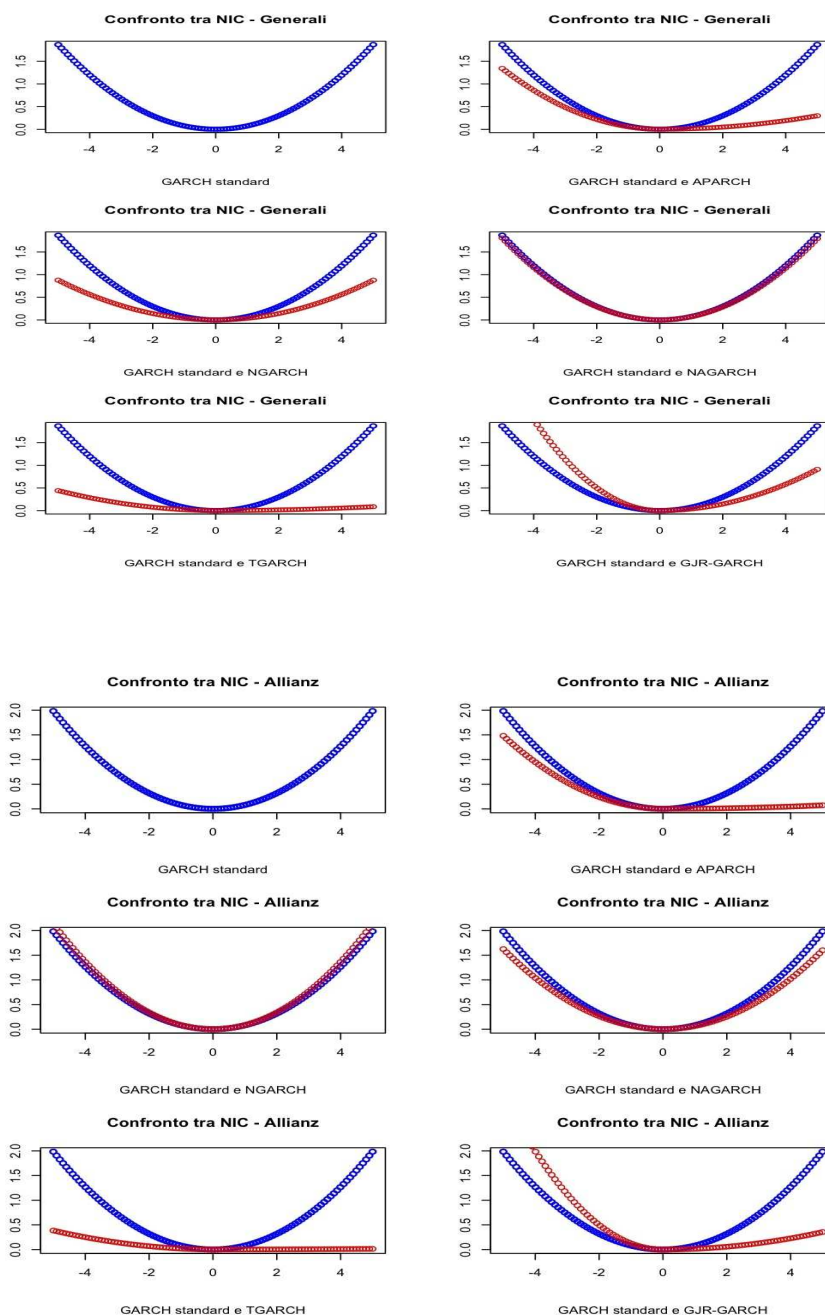
|  |
|--|
| <b>TEST CONGIUNTO - GENERALI</b><br><br>Residuals:<br>Min 1Q Median 3Q Max<br>-1.259 -0.916 -0.661 0.074 45.716<br><br>Coefficients:<br>Estimate Std. Error t value Pr(> t )<br>(Intercept) 0.93604 0.06506 14.388 <2e-16 ***<br>d1 0.10105 0.11731 0.861 0.389<br>D1 -3.49310 6.02405 -0.580 0.562<br>---<br>Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1<br><br>Residual standard error: 2.208 on 2175 degrees of freedom<br>Multiple R-squared: 0.001172, Adjusted R-squared: 0.000254<br>F-statistic: 1.277 on 2 and 2175 DF, p-value: 0.2792   |
| <b>TEST CONGIUNTO - ALLIANZ</b><br><br>Call:<br>lm(formula = a2 ~ 1 + d2 + D2)<br><br>Residuals:<br>Min 1Q Median 3Q Max<br>-1.3538 -0.8958 -0.6165 0.1471 22.6283<br><br>Coefficients:<br>Estimate Std. Error t value Pr(> t )<br>(Intercept) 0.99290 0.03833 25.903 < 2e-16 ***<br>d2 -3.66492 1.16896 -3.135 0.00174 **<br>D2 -1.44384 18.12303 -0.080 0.93651<br>---<br>Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1<br><br>Residual standard error: 1.719 on 2146 degrees of freedom<br>Multiple R-squared: 0.004565, Adjusted R-squared: 0.003637<br>F-statistic: 4.92 on 2 and 2146 DF, p-value: 0.00738 |
| <b>TEST CONGIUNTO - AXA</b><br><br>Residuals:<br>Min 1Q Median 3Q Max<br>-1.905 -0.908 -0.612 0.188 33.433<br><br>Coefficients:<br>Estimate Std. Error t value Pr(> t )<br>(Intercept) 0.99289 0.04135 24.015 <2e-16 ***<br>d3 -2.34643 1.14598 -2.048 0.0407 *<br>D3 12.61990 15.78658 0.799 0.4241<br>---<br>Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1<br><br>Residual standard error: 1.847 on 2171 degrees of freedom<br>Multiple R-squared: 0.002086, Adjusted R-squared: 0.001167<br>F-statistic: 2.269 on 2 and 2171 DF, p-value: 0.1036  |

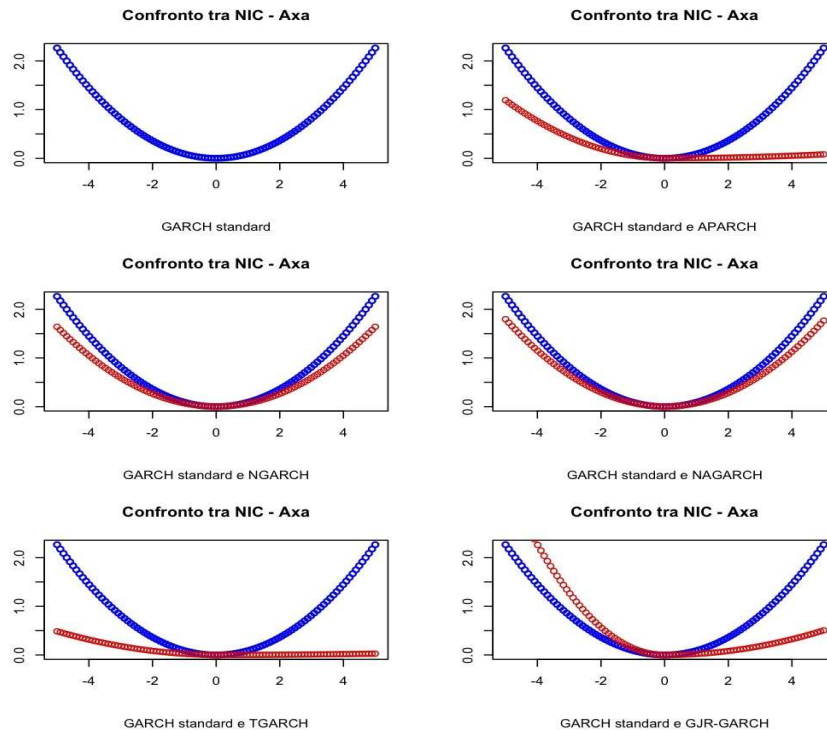
Il test congiunto su Generali conferma l'ipotesi di partenza di assenza di effetto leva. Per quanto riguarda Allianz giungiamo all'accettazione dell'ipotesi alternativa di presenza di effetto leva, fatto

probabilmente dato al maggior contributo del segno nella regressione. In Axa, infine, l'effetto con segno non sembra essere consistente al punto da far accettare l'ipotesi alternativa, visto il valore del p-value. Per maggiori dettagli, tuttavia, si proveranno diverse regressioni con modelli alternativi nella parte successiva, anche per dare man forte alle conclusioni tratte in questi test.

#### 4.5 Scelta di un modello alternativo

La parte successiva è tutta fatta usando la libreria `rgarch`, specializzata nei modelli F-GARCH. Quello che è stato fatto è stimare un modello F-GARCH per ognuna della serie in analisi e annidarci sei tra i modelli ad eteroschedasticità condizionale presentati in precedenza. Questi sono, più nello specifico, il GARCH standard, l'APARCH, il NARCH, il NAGARCH, il T-GARCH ed il GJR-GARCH. Per ognuno di essi è stata, inoltre, prodotta una NIC. Si riportano per prima cosa i grafici delle varie NIC, ognuna delle quali è opportunamente messa a confronto con la News Impact Curve di un GARCH standard, per ogni serie in analisi.





Per quanto riguarda, invece, la scelta finale del modello più adatto, si è fatto riferimento non solo al valore dell'AIC del modello, ma anche ai risultati dei test asimmetrici precedentemente condotti. Si riportano i risultati ottenuti, integrati di opportuni commenti.

```

GARCH Model Fit - Generali
Model : fGARCH (1,1) Sub-Model      : NAGARCH

Exogenous Regressors in variance equation: none

Include Mean : FALSE
AR(FI)MA Model : (0,0,0)
Garch-in-Mean : FALSE
Exogenous Regressors in mean equation: none

Conditional Distribution: sstd

Optimal Parameters
-----
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega    0.000002    0.000002    1.1382 0.255023
alpha1   0.072046    0.018607    3.8720 0.000108
gamma21  0.466553    0.076453    6.1025 0.000000
beta1    0.907574    0.016539   54.8758 0.000000
skew     0.974411    0.026595   36.6389 0.000000
shape    5.911947    0.679399    8.7017 0.000000

Robust Standard Errors:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega    0.000002    0.000007    0.27806 0.780968
alpha1   0.072046    0.086833    0.82971 0.406703
gamma21  0.466553    0.360435    1.29442 0.195522
beta1    0.907574    0.081026   11.20107 0.000000
skew     0.974411    0.025305   38.50631 0.000000
shape    5.911947    1.194378    4.94981 0.000001

LogLikelihood : 6401.522

Information Criteria
-----
Akaike      -5.8701
Bayes      -5.8545
Shibata    -5.8702
Hannan-Quinn -5.8644

Q-Statistics on Standardized Residuals
-----
statistic p-value

```

```

Lag10    9.211  0.5122
Lag15   12.364  0.6513
Lag20   16.281  0.6990

H0 : No serial correlation

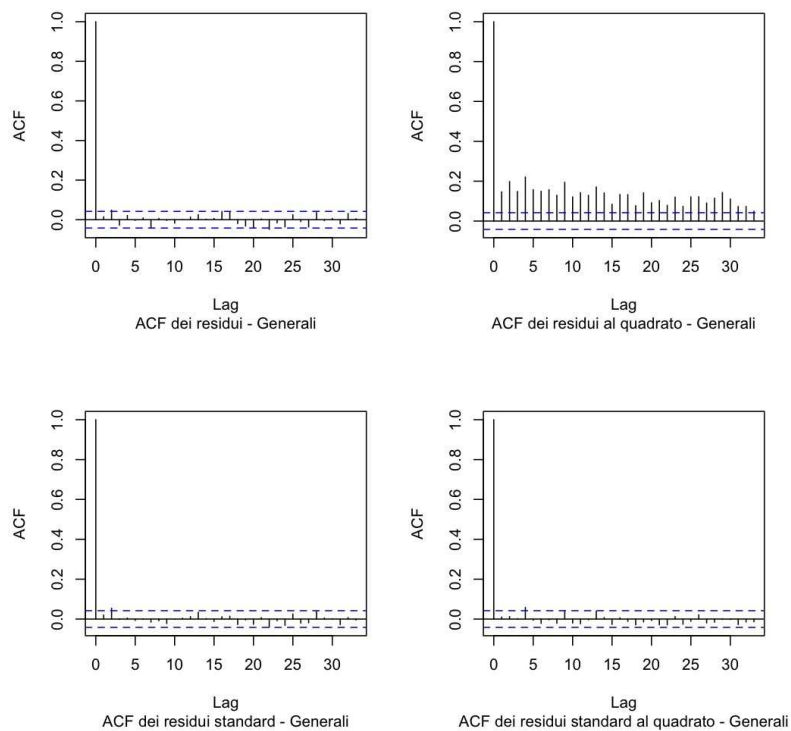
Q-Statistics on Standardized Squared Residuals
-----
      statistic p-value
Lag10    14.51  0.1509
Lag15    20.94  0.1387
Lag20    23.70  0.2557

ARCH LM Tests
-----
      Statistic DoF P-Value
ARCH Lag[2]    0.581  2  0.7479
ARCH Lag[5]    8.134  5  0.1490
ARCH Lag[10]   14.907 10  0.1355

Sign Bias Test
-----
      t-value  prob sig
Sign Bias      0.03001  0.9761
Negative Sign Bias 0.05309  0.9577
Positive Sign Bias 0.18691  0.8518
Joint Effect    0.05220  0.9969

```

Per Generali si è optato per un modello NAGARCH perché già di base il modello GARCH forniva una buona spiegazione teorica ai dati, non sofferenti dell'effetto leva, ed dai grafici delle NIC possiamo apprezzare quanto simili siano i due modelli. Le migliorie che dà questo modello sono effettivamente quasi nulle, perché con il modello GARCH le conclusioni sono esattamente le stesse: parametri della t di Student altamente significativi, assenza di correlazione seriale fino a 20 ritardi sia sui residui standard che sui residui standard al quadrato, assenza di ulteriori effetti ARCH, assenza di effetto leva. Il NAGARCH dà però un rifiuto dell'assenza di effetto leva più netto, con p-value prossimi ad uno in tutti e quattro i test proposti. Inoltre l'AIC ed il BIC di questo sono lievemente più bassi rispetto al modello GARCH, fatto che indica la maggiore parsimonia nella scelta dei parametri. Si riportano infine i grafici delle funzioni di autocorrelazioni globali di residui, residui standard, residui al quadrato e residui standard al quadrato.





```

GARCH Model Fit - Allianz
Model : fGARCH (1,1) Sub-Model : NAGARCH

Exogenous Regressors in variance equation: none

Include Mean : FALSE
AR(FI)MA Model : (0,0,0)
Garch-in-Mean : FALSE
Exogenous Regressors in mean equation: none

Conditional Distribution: sstd

Optimal Parameters
-----
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega 0.000005 0.000002 2.6118 0.009005
alpha1 0.064485 0.010737 6.0058 0.000000
gamma21 0.844838 0.146996 5.7474 0.000000
beta1 0.880341 0.015183 57.9815 0.000000
skew 0.958017 0.028238 33.9271 0.000000
shape 9.426194 1.831491 5.1467 0.000000

Robust Standard Errors:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
omega 0.000005 0.000003 1.3800 0.167572
alpha1 0.064485 0.010423 6.1866 0.000000
gamma21 0.844838 0.136904 6.1710 0.000000
beta1 0.880341 0.020330 43.3031 0.000000
skew 0.958017 0.026270 36.4679 0.000000
shape 9.426194 1.973876 4.7755 0.000002

LogLikelihood : 5676.448

Information Criteria
-----
Akaike -5.2748
Bayes -5.2590
Shibata -5.2749
Hannan-Quinn -5.2690

Q-Statistics on Standardized Residuals
-----
statistic p-value
Lag10 19.08 0.03922
Lag15 31.36 0.00786
Lag20 35.63 0.01699

H0 : No serial correlation

Q-Statistics on Standardized Squared Residuals
-----
statistic p-value
Lag10 13.94 0.1755
Lag15 15.05 0.4477
Lag20 18.94 0.5258

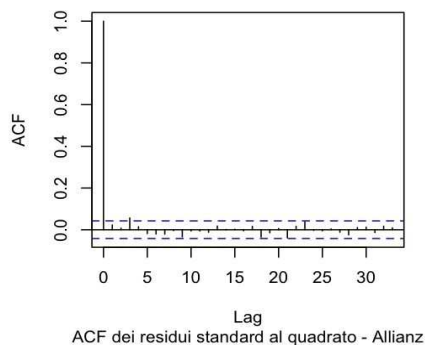
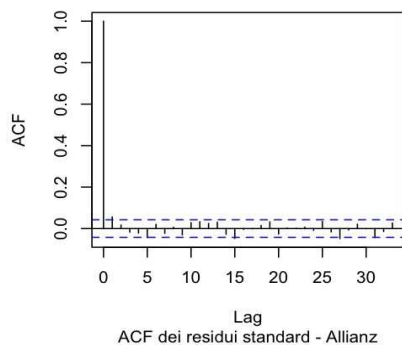
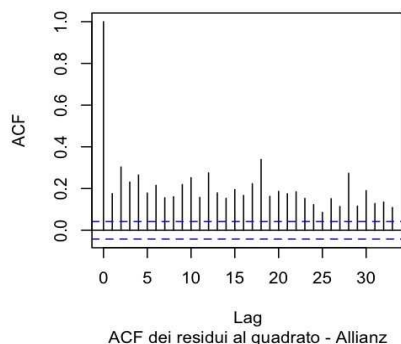
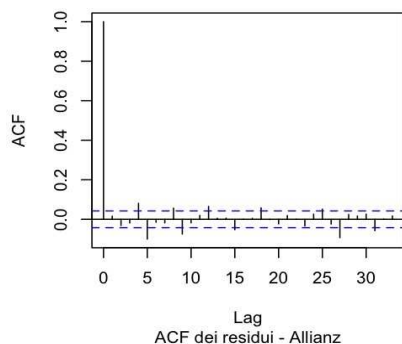
ARCH LM Tests
-----
Statistic DoF P-Value
ARCH Lag[2] 1.488 2 0.47529
ARCH Lag[5] 9.349 5 0.09591
ARCH Lag[10] 13.221 10 0.21157

Sign Bias Test
-----
t-value prob sig
Sign Bias 0.70669 0.4798
Negative Sign Bias 0.03755 0.9701
Positive Sign Bias 0.89210 0.3724
Joint Effect 2.81376 0.4212

```

In seguito ai test di asimmetria condotti sui dati di Allianz si è in precedenza pervenuti all'accettazione dell'ipotesi alternativa di presenza dell'effetto leva. Tra i sei modelli stimati per prima cosa si sono scartati i modelli GARCH e NARCH, dotati di curve di impatto delle notizie simmetriche. Tra i restanti si sono inoltre scartati i modelli APARCH, T-GARCH e GJR-GARCH, tutti aventi problemi sui test ARCH e Q: per alti ritardi si accetta l'ipotesi alternativa di ulteriore presenza di effetti ARCH ed anche di presenza di correlazione seriale sui residui standard al quadrato, senza contare che nel modello T-GARCH si accetta quest'ultima ipotesi alternativa anche per i residui standard semplici. La scelta ricade nuovamente sul modello NAGARCH, dotato tra le altre cose anche di un AIC minore rispetto agli altri modelli. Vediamo, come prima, alcuni grafici

delle funzioni di autocorrelazione globali.



```

GARCH Model Fit - Axa
Model : fGARCH (1,1) Sub-Model : APARCH

Exogenous Regressors in variance equation: none

Include Mean : FALSE
AR(FI)MA Model : (0,0,0)
Garch-in-Mean : FALSE
Exogenous Regressors in mean equation: none

Conditional Distribution: sstd

Optimal Parameters
-----
omega Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
alpha1 0.080172 0.014445 5.55014 0.000000
gamma11 0.594496 0.132767 4.47774 0.000008
beta1 0.916701 0.013398 68.42054 0.000000
lambda 1.266029 0.248351 5.09773 0.000000
skew 0.978402 0.029398 33.28157 0.000000
shape 10.883227 2.200631 4.94550 0.000001

Robust Standard Errors:
omega Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
alpha1 0.080172 0.016146 4.96554 0.000001
gamma11 0.594496 0.137873 4.31192 0.000016
beta1 0.916701 0.015523 59.05428 0.000000
lambda 1.266029 0.281219 4.50194 0.000007
skew 0.978402 0.028893 33.86318 0.000000
shape 10.883227 2.117428 5.13983 0.000000

LogLikelihood : 5437.546

Information Criteria
-----
Akaike -4.9936
Bayes -4.9753
Shibata -4.9936
Hannan-Quinn -4.9869

Q-Statistics on Standardized Residuals
-----

```

```

      statistic p-value
Lag10      10.39  0.4069
Lag15      11.98  0.6805
Lag20      15.35  0.7563

H0 : No serial correlation

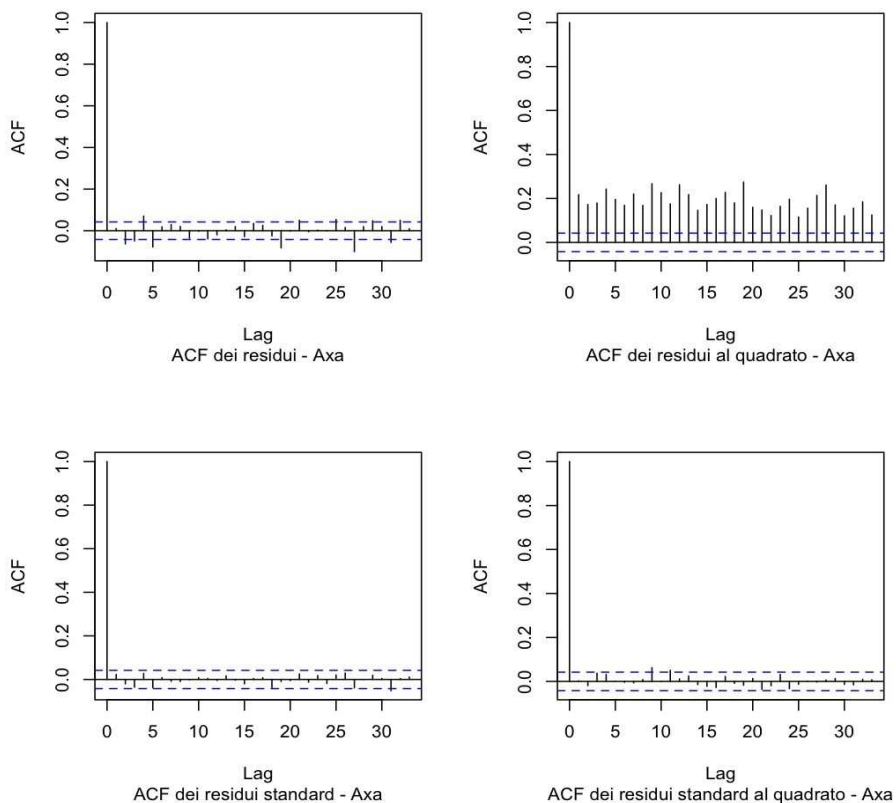
Q-Statistics on Standardized Squared Residuals
-----
      statistic p-value
Lag10      14.90  0.13593
Lag15      23.60  0.07224
Lag20      27.56  0.12014

ARCH LM Tests
-----
      Statistic DoF P-Value
ARCH Lag[2]    0.8631  2  0.6495
ARCH Lag[5]    3.4626  5  0.6291
ARCH Lag[10]   13.1527 10  0.2153

Sign Bias Test
-----
      t-value  prob sig
Sign Bias      0.6059  0.5446
Negative Sign Bias  1.1942  0.2325
Positive Sign Bias  0.0887  0.9293
Joint Effect    1.4357  0.6972

```

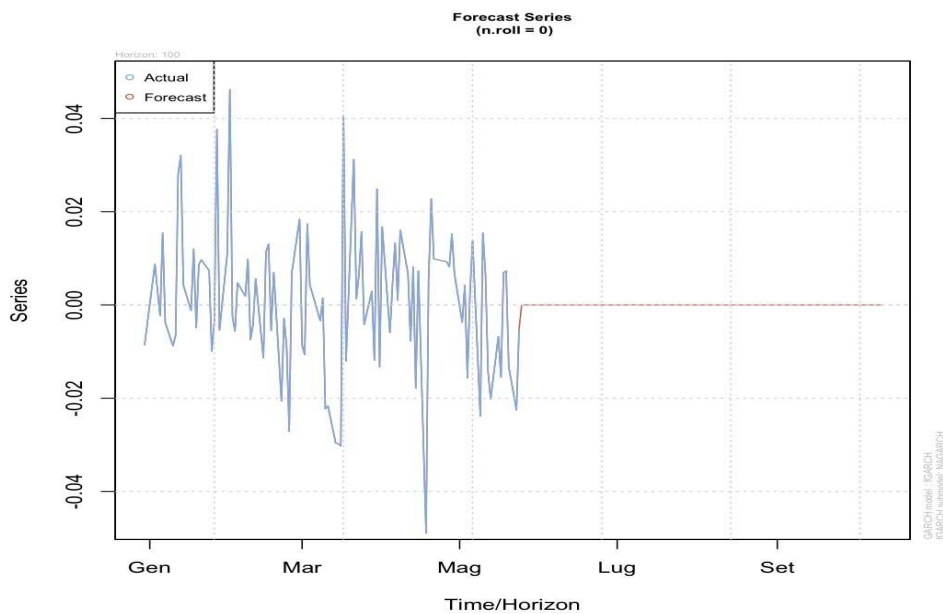
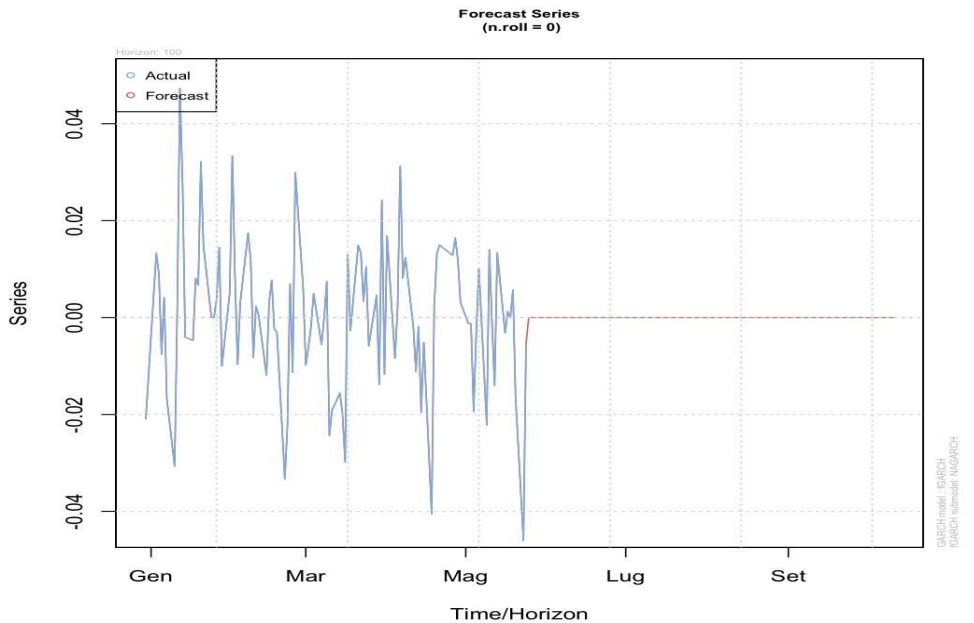
Se si riguardano i test di asimmetria fatti in precedenza per i dati di Axa, si può ricordare che si era in dubbio sull'accettazione o meno della presenza degli effetti leva, vista la duplice lettura dei test che si poteva fare. Stimando con il sistema presentato i modelli GARCH e NARCH annidati ai F-GARCH il test dà la netta accettazione dell'ipotesi alternativa di presenza di effetto leva, cosa che va a scartare questi due modelli. Si è scartato anche il T-GARCH, i cui test sull'autocorrelazione portano all'accettazione dell'ipotesi alternativa di presenza di correlazione seriale. Tra i rimasti, l'APARCH è il migliore dei modelli possibili, visto il suo minore AIC. Vediamo, nuovamente, i grafici delle funzioni di autocorrelazioni globali dei suoi residui.

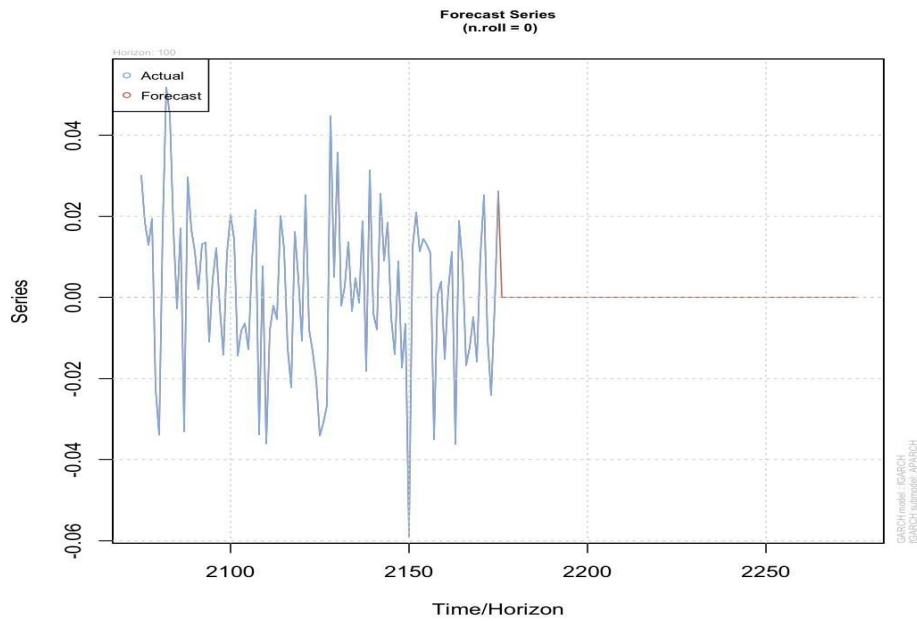


## 4.6 Previsioni

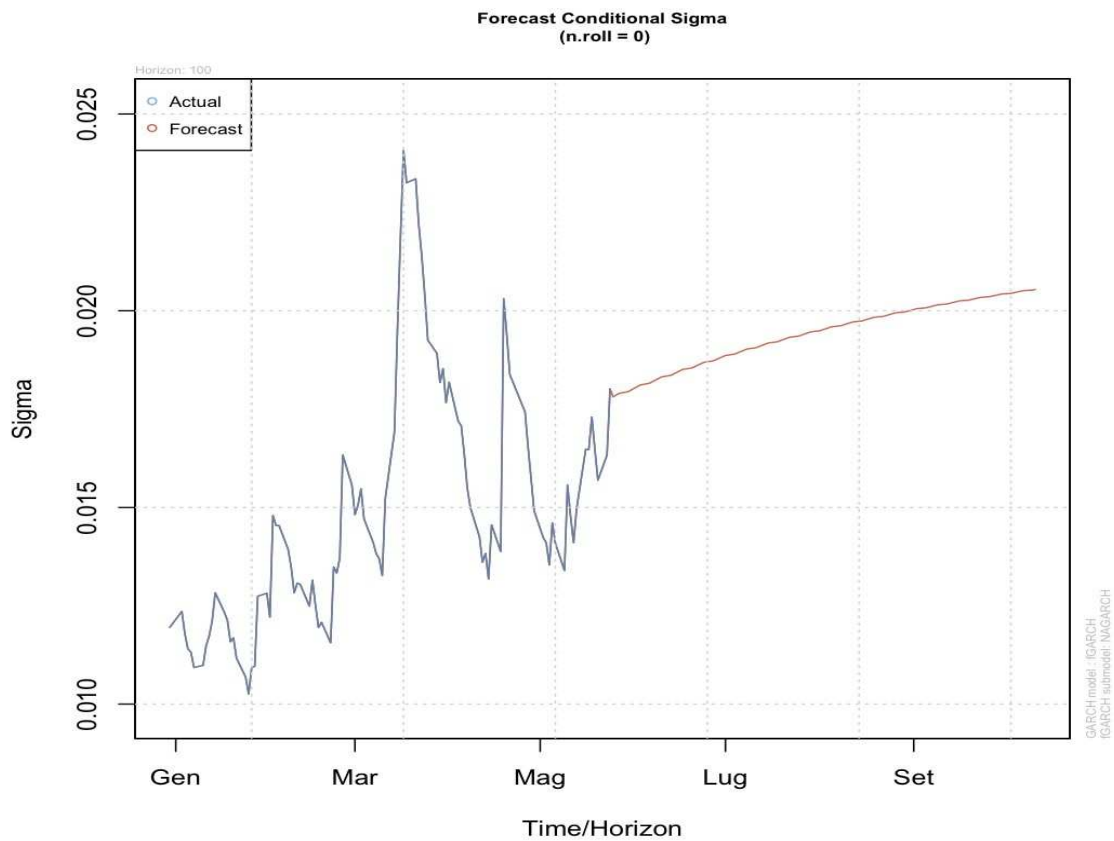
L'ultima fase attuabile è quella delle previsioni per la media condizionata e per la deviazione standard condizionata dei titoli considerati. Si vedrà graficamente che l'unica previsione possibile per la media condizionata di ogni serie di dati è la media non condizionata dei dati stessi. Per quanto riguarda la deviazione standard condizionata, per essa esiste, invece, un margine di previsione. Per definizione, la deviazione standard condizionata tende a quella non condizionata dopo. Tutti i grafici riportano previsioni 100 passi in avanti.

Si vedano, per prima cosa, i grafici delle previsioni condotte sulle medie condizionate delle tre serie in analisi.

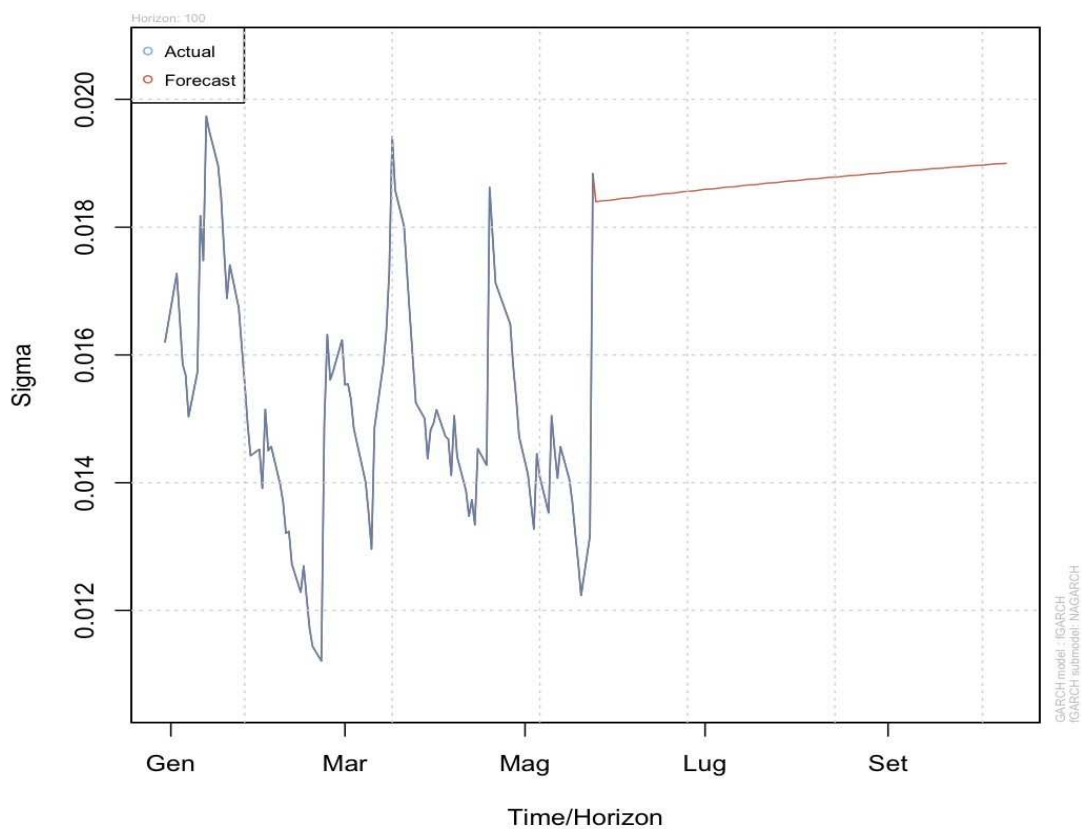




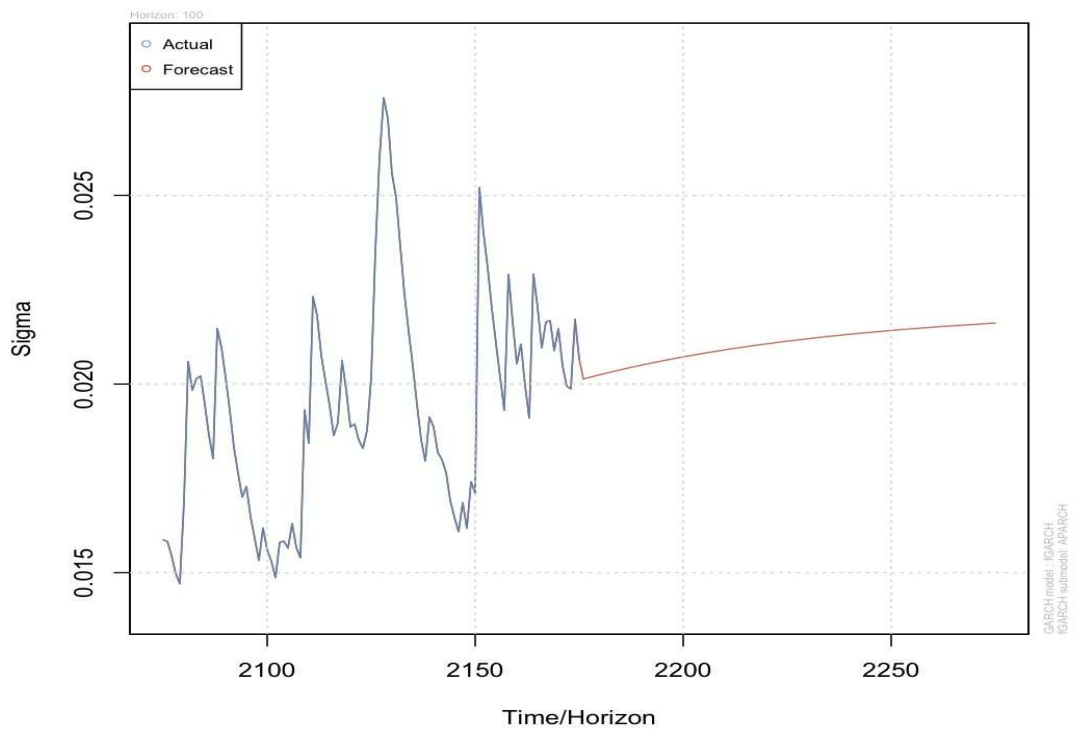
Come si può vedere, già dal primo step in avanti e per tutti i successivi, la previsione della media condizionata è la media non condizionata dei processi. Nei tre casi in analisi, come si può tra l'altro notare dai tre grafici, essa è prossima a 0 o esattamente 0. Diverso è il discorso per quanto riguarda, invece, la deviazione standard condizionata dei processi, la previsione della quale viene riportata nei tre successivi grafici.



Forecast Conditional Sigma  
(n.roll = 0)



Forecast Conditional Sigma  
(n.roll = 0)



Per meglio apprezzare il modo in cui la deviazione standard condizionata tenda a quella non condizionata si riportano in una tabella i valori iniziali ed i valori finali delle previsioni ed il valore della deviazione standard non condizionata di ogni processo.

|  |   |   |
|--|---|---|
| Valori iniziali - Generali<br>sigma series                       | Valori iniziali - Allianz<br>sigma series                       | Valori iniziali - Axa<br>sigma series                       |
| 2011-05-25 0.01839811 0  | 2011-05-25 0.01780870 0   | 2011-05-25 0.02013624 0                                     |
| 2011-05-26 0.01840582 0  | 2011-05-26 0.01785381 0   | 2011-05-26 0.02016514 0                                     |
| 2011-05-27 0.01841349 0  | 2011-05-27 0.01789840 0   | 2011-05-27 0.02019359 0                                     |
| 2011-05-30 0.01842112 0  | 2011-05-30 0.01794246 0   | 2011-05-30 0.02022160 0                                     |
| 2011-05-31 0.01842871 0  | 2011-05-31 0.01798601 0   | 2011-05-31 0.02024919 0                                     |
| 2011-06-01 0.01843626 0  | 2011-06-01 0.01802905 0   | 2011-06-01 0.02027634 0                                     |
| Valori finali - Generali<br>sigma series                         | Valori finali - Allianz<br>sigma series                         | Valori finali - Axa<br>sigma series                         |
| 2011-10-04 0.01897601 0  | 2011-10-04 0.02045833 0   | 2011-05-25 0.02158250 0                                     |
| 2011-10-05 0.01898081 0  | 2011-10-05 0.02047477 0   | 2011-05-26 0.02158933 0                                     |
| 2011-10-06 0.01898559 0  | 2011-10-06 0.02049104 0   | 2011-05-27 0.02159606 0                                     |
| 2011-10-07 0.01899035 0  | 2011-10-07 0.02050715 0   | 2011-05-30 0.02160269 0                                     |
| 2011-10-10 0.01899508 0  | 2011-10-10 0.02052310 0   | 2011-05-31 0.02160922 0                                     |
| 2011-10-11 0.01899978 0  | 2011-10-11 0.02053889 0   | 2011-06-01 0.02161565 0                                     |
| Deviazione standard non<br>condizionata - Generali<br>0.01997208 | Deviazione standard non<br>condizionata - Allianz<br>0.02216823 | Deviazione standard non<br>condizionata - Axa<br>0.02203603 |

## 5. CONCLUSIONE

Dopo aver fatto un breve excursus sui rendimenti dei titoli finanziari, dei quali si sono enunciate le principali caratteristiche, e dopo aver citato quali sono le più importanti distribuzioni usate in finanza, si sono introdotti i modelli ad eteroschedasticità condizionale più importanti, il modello ARCH ed il modello GARCH. Dal momento che questi non verificano alcune regolarità empiriche, come la presenza di un effetto asimmetrico chiamato effetto leva, si sono presentati una serie di test per la verifica di questo ed una serie di modelli, derivati dal GARCH, che possiedono, tra le altre proprietà, quella di implementare l'asimmetria tra shocks positivi e shocks negativi. Si è poi introdotta la curva di impatto delle notizie, il cui uso è maggiormente noto nella classe degli F-GARCH, una famiglia di modelli ad eteroschedasticità condizionale in grado di annidare un grande numero di processi. Si è poi proceduto con tre applicazioni su dati reali di tre tra le più importanti compagnie assicurative europee, ossia l'italiana Generali, la tedesca Allianz e la francese Axa, il tutto fatto in un periodo campionario uguale per ognuna. In tutte e tre le serie si sono riscontrate evidenze empiriche tipiche delle serie finanziarie dei rendimenti giornalieri: prezzi non stazionari, rendimenti correlati e modellati secondo una distribuzione a code pesanti, presenza di effetti ARCH sui residui al quadrato. È stato stimato un modello GARCH(1,1) in ognuna delle serie dei rendimenti, dopodiché si è fatta un'analisi dei residui standard dei vari modelli, giungendo alla conclusione che si sono tolti tutti gli effetti ARCH. È stata, poi, eseguita una serie di test per verificare la presenza o meno dell'effetto leva sulle tre serie e si è riscontrato che in una delle serie (Generali) esso non è presente, in una (Allianz) sicuramente sì e nell'ultima (Axa) si è rimasti con il dubbio. Visti i risultati diversi avuti si è provveduto a stimare un modello alternativo per ognuna delle tre serie. Tutti i modelli usati sono annidabili nella classe dei F-GARCH. Per le serie di Generali ed Allianz si è stimato un modello NAGARCH, mentre per Axa si è optato per un APARCH. Infine sono state eseguite le previsioni sulla media condizionata e sulla deviazione standard condizionata dei tre modelli e si è notato come l'unica previsione per la prima è la media non condizionata del processo, mentre per la seconda si sono prodotte previsioni che, con l'aumentare dell'orizzonte previsivo, tendono alla deviazione standard non condizionata del processo.

## 6. RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Black, F. (1976), "Studies of stock price volatility changes", in *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*, pp. 79–121
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, vol. 31(3), pag. 307-327
- Ding, Z., Granger, Clive W. J. e Engle, Robert F. (1993), "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance*, vol. 1(1), pag. 83-106
- Engle, Robert F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, vol. 50(4), pag. 987-1007
- Engle, Robert F. e Ng, Viktor K. (1991), "Measuring and testing the impact of news on volatility", *Journal of Empirical Finance*, vol. 48(5), pag. 1749-78
- Geweke, J. e Pantula, S. G. (1986), "Comment", *Econometric Reviews*, vol. 5, pag. 57-61 e pag. 71-73
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. e Runkle, D. E. (1993), "On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks", *Journal of Finance*, vol. 48, pag. 1779-1801
- Hentschel, L (1995), "All in the family – Nesting symmetric and asymmetric GARCH models", *Journal of Financial Economics*, vol. 39, pag. 71-104
- Higgins, M. L. e Bera, A. K. (1992), "A class of nonlinear ARCH models", *International Economic Review*, vol. 33, pag. 137-158
- Nelson D. B. (1991), "Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach", *Econometrica*, pp. 347–370
- Pagan, A. e Schwert, G. W. (1990), "Alternative models of conditional variances: a comment", *Journal of Econometrics*, forthcoming
- Rabemananjara, R. e Zakoian J. (1993), "Threshold ARCH models and asymmetries in volatility", *Journal of Applied Econometrics*, vol. 8, pag. 31-49
- Schwert, G. William (1989), "Why does stock market volatility change over time?", *Journal of Finance*, vol. 44, pag. 1115-1153
- Taylor, S. (1986), "Modelling financial time series" (Wiley, New York, NY)
- Zakoian, J. (1991), "Threshold heteroskedastic models", Unpublished paper (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques, Paris)