



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Ingegneria dell' Informazione

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

TESI DI LAUREA

**Modellizzazione, linearizzazione e controllo
in retroazione di un satellite geostazionario**

Laureando:

Pellizzon Alberto

Matricola 1010106

alberto.pellizzon.1@studenti.unipd.it

Relatore:

Professor Ferrante Augusto

22/11/2013

A.A. 2013/2014

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Contesto	1
1.2	Presentazione del sistema	1
2	Modellizzazione	2
2.1	Orbita geostazionaria	2
2.2	Equazioni regolatrici del moto	2
3	Linearizzazione	5
3.1	Confronto tra sistema originale e linearizzato	6
4	Progetto dei controllori	8
4.1	$C_1(s)$	8
4.2	$C_2(s)$	10
4.2.1	PID tuning	11
4.2.2	LQG synthesis	11
4.2.3	Direct Synthesis	13
5	Applicazione del controllo	15
5.1	Aggiustamento della massa del satellite	20
	Riferimenti bibliografici	21

1 Introduzione

1.1 Contesto

Nella storia recente l'automazione costituisce un argomento di grande rilevanza, dal momento che alcune funzioni, sia manuali che cognitive, tipiche dell'uomo, sempre più sono state affidate parzialmente o per intero a sistemi automatici. Dall'industria alle corse automobilistiche, dalla pubblica amministrazione alla medicina, l'automazione minimizza la necessità di intervento umano. Sui risvolti, anche ecologici e sociali di questo, sono state fatte numerose riflessioni, e sicuramente quelle sinora fatte non saranno le sole. Tuttavia non è questo l'oggetto del presente lavoro, che sconfinerebbe altrimenti l'ambito dell'ingegneria. Con questa relazione si mira piuttosto a fornire un esempio basilare di approccio ad un problema di controllo automatico. Si tratta di un esempio perché gran parte di ciò che segue utilizza procedure di carattere generale applicabili in diversi casi particolari. Dunque al posto del satellite geostazionario, che presenta il problema della regolazione¹, potrebbe esserci un forno che deve rimanere a temperatura costante, oppure la glicemia di una paziente diabetico, da mantenere entro una certa soglia.

1.2 Presentazione del sistema

Un'orbita geosincrona è un'orbita che ha come periodo di rotazione un giorno, lo stesso della terra. Un caso particolare è costituito dall'orbita geostazionaria, che è un'orbita geosincrona circolare non inclinata, quindi direttamente in corrispondenza dell'equatore. L'idea di sfruttare un'orbita geosincrona per le comunicazioni venne resa popolare da uno scrittore di fantascienza, Arthur C. Clarke, nel 1945, tanto che a volte quest'orbita viene chiamata col suo nome[1][2]. Il primo satellite ad orbita geosincrona fu il Syncom II, di produzione statunitense e lanciato il 26 luglio 1963; dell'anno successivo fu invece il Syncom III, il primo in orbita geostazionaria[5][6]. Oggi sono presenti attorno alla Terra circa quattro centinaia di satelliti artificiali ad orbita geostazionaria[3], la maggior parte dei quali destinati a comunicazioni, meteorologia e scopi militari.

Nel lavoro che segue si è studiato il sistema di controllo per un satellite geostazionario, il cui obiettivo è garantire una posizione costante rispetto ad un punto sulla superficie terrestre, permettendo scambi di dati con antenne fisse che non devono quindi andare alla ricerca del satellite stesso.

Il primo passo affrontato consiste nella modellizzazione, che permette di selezionare aspetti e grandezze di interesse, e stabilire relazioni matematiche tra di essi.

¹La regolazione prevede di mantenere la grandezza di interesse costante, uguale ad un riferimento dato. Diversa è quindi la problematica dell'asservimento, dove la grandezza di interesse deve evolvere temporalmente seguendo il segnale, evidentemente non costante, fornito come riferimento.

2 Modellizzazione

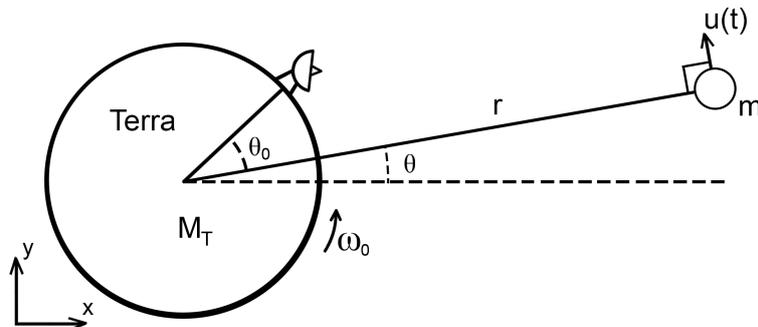
2.1 Orbita geostazionaria

È giusto per prima cosa introdurre in termini matematici l'orbita geostazionaria, così come si ricava dalle leggi del movimento dei pianeti, introdotte nel '600 da Keplero. La terza legge infatti afferma che $\frac{T^2}{a^3} = K$, dove a è il semiasse maggiore dell'orbita, T è il periodo di rivoluzione e $K = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$. Nel caso particolare di un'orbita circolare $a = r$, che implica $T^2 = r^3 K$. Nel caso di $m_1 \gg m_2$, la terza legge di Keplero può essere scritta come $\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_T}{r^3}$, il che porta a concludere: $r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$, ossia l'orbita geostazionaria terrestre ha un raggio di 42168 chilometri. Essendo il raggio medio della Terra di circa 6371 chilometri, tale orbita si trova più o meno a 36000 chilometri dalla superficie terrestre. Ciò detto, i valori utilizzati nella simulazione software presentata più avanti sono leggermente diversi per via delle semplificazioni apportate dal modello.

2.2 Equazioni regolatrici del moto

In questo lavoro verrà considerato, oltre al pianeta Terra perfettamente sferico, un satellite semplificato, dotato di un solo motore che esercita la propria forza solamente in direzione perpendicolare al raggio di rotazione, come illustrato in figura 1. Verrà inoltre trascurata la forza attrattiva del Sole e di altri corpi celesti.

Figura 1:



Si è già accennato all'unico ingresso $u(t)$ del sistema, ossia la forza tangenziale sviluppata dal motore; per quanto riguarda le uscite del sistema bisogna garantire che il satellite si trovi sempre fermo rispetto alla Terra, il che si traduce in raggio di rotazione costante e soprattutto angolo rispetto ad un

²Non seve specificare il significato di m_1 ed m_2 , G invece è la costante di gravitazione universale, pari a $6,67 \cdot 10^{-11} [N \cdot m^2/kg^2]$

riferimento sulla Terra nullo o costante³. Le uscite del sistema sono quindi $y_1(t) = r(t)$ ed $y_2(t) = \theta(t)$, l'obiettivo è avere $y_1(t) \simeq R_0$ e $y_2(t) \simeq \theta_0 + \omega_0 t$ dove $\omega_0 = \frac{2\pi}{60 \cdot 60 \cdot 24} [\frac{rad}{s}]$ è la velocità di rotazione terrestre.

Le variabili di stato scelte per il sistema sono, in accordo con la scelta canonica, posizione e velocità del satellite, il che si traduce in raggio, angolo, e rispettive derivate:

$$\begin{aligned} s_1 &= r \\ s_2 &= \dot{r} \\ s_3 &= \theta \\ s_4 &= \dot{\theta} = \omega \end{aligned}$$

Si costruiscono così le equazioni dinamiche del modello:

$$\dot{s}_1 = \dot{r} = s_2 \quad (1)$$

In base al secondo principio della dinamica o di Newton si ha:

$m\ddot{r} = F_{radiale\ totale} = -\frac{m \cdot M_T \cdot K_G}{r^2} + m\omega^2 r$, che porta alla (2):

$$\dot{s}_2 = \ddot{r} = -\frac{M_T \cdot K_G}{r^2} + \dot{\theta}^2 r = -\frac{M_T \cdot K_G}{s_1^2} + s_4^2 s_1 \quad (2)$$

$$\dot{s}_3 = \dot{\theta} = s_4 \quad (3)$$

Essendo in questo caso $u \perp r$, la coppia totale è $C = r \cdot u$, e valendo inoltre $C = \frac{dL}{dt}$ e $L = J\omega$, dove $J = mr^2$ è il momento di inerzia, allora $\frac{d}{dt}[J\omega] = C$.

Si ha quindi $m \frac{d}{dt}[r^2\omega] = m[2r\dot{r}\omega + r^2\dot{\omega}] = r \cdot u$

$$\dot{s}_4 = \dot{\omega} = -\frac{2\dot{r}}{r}\omega + \frac{1}{rm}u = \frac{-2s_2s_4}{s_1} + \frac{u}{s_1m} \quad (4)$$

Riepilogando, posto $k := M_T \cdot K_G$ si ottiene il seguente sistema di equazioni dinamiche:

$$\begin{cases} \dot{s} = \begin{cases} s_2 \\ s_4^2 s_1 - \frac{k}{s_1^2} \\ s_4 \\ \frac{-2s_2s_4}{s_1} + \frac{u}{s_1m} \end{cases} \\ y_1 = s_1 \\ y_2 = s_3 \end{cases}$$

Il caso al quale si vuole arrivare, trattando un satellite geostazionario, è

$$\begin{cases} \bar{s}_1 = R_0 \\ \bar{s}_2 = 0 \\ \bar{s}_3 = \theta_0 + \omega_0 t \\ \bar{s}_4 = \omega_0 \\ u = 0 \end{cases}$$

³In tutta la parte software del presente lavoro si è considerato $\theta_0 = 0$ per semplicità di calcolo, qualsiasi valore differente non influisce sul progetto dei controllori e sulle prestazioni degli stessi.

Si noti che dai precedenti sistemi di equazioni si può risalire al valore di R_0 da usare nel software di simulazione:

$$\bar{s}_2 = 0 \Rightarrow \dot{s}_2 = 0 \Rightarrow \omega_0^2 R_0 - \frac{k}{R_0^2} = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt[3]{\frac{k}{\omega_0^2}} \simeq 42250 \text{ km.}$$

Si può notare che a differenza di tutte le grandezze, sia variabili che costanti, in gioco, la massa del satellite m non è fissata. Quindi, dal momento che si tratta di un dato fondamentale per tutti i calcoli illustrati in seguito, si è considerato $m = 3 \cdot 10^3 \text{ kg}$, dato conforme alle caratteristiche medie dei satelliti geostazionari. Una nota su come il valore di m influenza il comportamento del sistema verrà fatta più avanti.

3 Linearizzazione

Data la presenza di due equazioni non lineari ed un solo ingresso, la *feedback linearization* è una strada complicata da percorrere⁴, si linearizza quindi attorno ad un punto di equilibrio del sistema, quello dato dall'orbita geostazionaria. Tuttavia (\bar{s}, \bar{u}) non è un punto di equilibrio in quanto, ad esempio, $\bar{s}_3 = \theta_0 + \omega_0 t \Rightarrow \dot{s}_3 = \omega_0 \neq 0$, quando la definizione di punto di equilibrio è $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Tuttavia si può pensare di 'traslare' le variabili in modo da ovviare a questo problema, si considerino quindi le nuove variabili di stato e di uscita, che rappresentano gli scostamenti dalla traiettoria ideale:

$$\begin{cases} x_1 = s_1 - R_0 \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = s_3 - (\theta_0 + \omega_0 t) \\ x_4 = s_4 - \omega_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta y_1 = y_1 - R_0 = x_1 \\ \delta y_2 = y_2 - (\theta_0 + \omega_0 t) = x_3 \end{cases}$$

Le nuove equazioni di stato diventano quindi:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{s}_1 = s_2 = x_2 = f_1(x, u) \\ \dot{x}_2 = \dot{s}_2 = s_4^2 s_1 - \frac{k}{s_1^2} = (x_4 + \omega_0)^2 (x_1 + R_0) - \frac{k}{(x_1 + R_0)^2} = f_2(x, u) \\ \dot{x}_3 = \dot{s}_3 - \omega_0 = s_4 - \omega_0 = x_4 = f_3(x, u) \\ \dot{x}_4 = \dot{s}_4 = \frac{-2s_2 s_4}{s_1} + \frac{u}{s_1 m} = \frac{-2x_2(x_4 + \omega_0)}{x_1 + R_0} + \frac{u}{m(x_1 + R_0)} = f_4(x, u) \end{cases}$$

La verifica che $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$ è punto di equilibrio è immediata, si può quindi procedere con la linearizzazione:

1. $f_1: \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1; \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0; \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0$
2. $f_2: \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{x=0, u=0} = (x_4 + \omega_0)^2 + \frac{2k(x_1 + R_0)}{(x_1 + R_0)^4} \Big|_{x=0} = \omega_0^2 + \frac{2k}{R_0^3} = 3\omega_0^2;$
 $\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0; \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \Big|_{x=0, u=0} = 2(x_4 + \omega_0)(x_1 + R_0) \Big|_{x=0} = 2\omega_0 R_0;$
 $\frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$
3. $f_3: \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0; \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = 1; \frac{\partial f_3}{\partial u} = 0$
4. $f_4: \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{2x_2(x_4 + \omega_0)}{(x_1 + R_0)^2} - \frac{u}{m(x_1 + R_0)^2} \Big|_{x=0, u=0} = 0;$
 $\frac{\partial f_4}{\partial x_2} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{-2(x_4 + \omega_0)}{x_1 + R_0} \Big|_{x=0} = -\frac{2\omega_0}{R_0}; \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = 0;$
 $\frac{\partial f_4}{\partial x_4} \Big|_{x=0, u=0} = -\frac{2x_2}{x_1 + R_0} = 0; \frac{\partial f_4}{\partial u} \Big|_{x=0, u=0} = \frac{1}{m(x_1 + R_0)} \Big|_{x=0} = \frac{1}{mR_0}$

Si è ora nelle condizioni di scrivere un modello di stato in forma matriciale, a patto di rimanere in un intorno del punto di equilibrio, quindi con x e u

⁴La procedura della feedback linearization prevedrebbe di scrivere l'ingresso in questo modo: $u(t) = a(x) + b(x) \cdot v(t)$, cercando di fare risultare il sistema lineare tra uscita e nuovo ingresso $v(t)$.

quanto più ‘piccoli’.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2\omega_0 R_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\omega_0}{R_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mR_0} \end{bmatrix} u$$

$$\delta y_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x$$

$$\delta y_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] x$$

Si ricavano a questo punto le funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = C_1[sI-A]^{-1}B = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & s & 0 & -2\omega_0 R_0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{2\omega_0}{R_0} & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mR_0} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{mR_0} [(sI-A)^{-1}]_{1,4} = \frac{1}{mR_0 \det(sI-A)} \text{adj}([sI-A]_{4,1}) = \frac{(-1)^{4+1}(-1)2\omega_0 R_0 s}{mR_0(s(s^3+4\omega_0^2 s)+3\omega_0^2(-s^2))} =$$

$$\frac{2\omega_0}{ms(s^2+\omega_0^2)} \cdot^5$$

$$G_2(s) = C_2[sI-A]^{-1}B = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -3\omega_0^2 & s & 0 & -2\omega_0 R_0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{2\omega_0}{R_0} & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mR_0} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{mR_0} [(sI-A)^{-1}]_{3,4} = \frac{1}{mR_0 \det(sI-A)} \text{adj}([sI-A]_{4,3}) = \frac{(-1)^{4+3}(-1)(s^2-3\omega_0^2)}{mR_0 s(s^2+\omega_0^2)} =$$

$$\frac{s^2-3\omega_0^2}{mR_0 s^2(s^2+\omega_0^2)} \cdot^5$$

3.1 Confronto tra sistema originale e linearizzato

Prima di procedere alla fase di progetto dei controllori, è d’obbligo un confronto tra sistema originale Σ e sua versione linearizzata Σ_L : poiché suddetta fase è basata esclusivamente su Σ_L , ma ha come fine l’applicazione del controllo al sistema non lineare, ci si aspetta che quest’ultimo rispecchi entro limiti accettabili le prestazioni esibite dalla sua versione linearizzata. È quindi di grande utilità avere un’idea delle differenze nel comportamento di Σ e Σ_L quando ci si ‘allontana’ da $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$. I grafici in figura 2 mostrano i due sistemi comportarsi molto similmente, dato che gli ordini di grandezza lungo gli assi sono molto minori rispetto alle grandezze in gioco. Il comportamento leggermente diverso è inevitabile data l’approssimazione che la linearizzazione comporta. Anche facendo evolvere liberamente i due sistemi in condizioni di

⁵Si osservi che l’uguaglianza $[(sI-A)^{-1}]_{1,4} = \frac{1}{\det(sI-A)} \text{adj}([sI-A]_{4,1})$ è data dal fatto che la matrice aggiunta è la trasposta della matrice dei cofattori, gli indici di riga e colonna sono quindi scambiati.

non equilibrio, nella fattispecie $r(0) = R_0 + 10^4 m$ e $u = 2N$, i grafici in figura 3 mostrano andamenti simili. Può essere interessante evidenziare che a parità di forza sviluppata dal motore, un satellite con massa maggiore mostrerebbe le traiettorie di figura 3 meno divergenti: la maggiore inerzia rende necessaria più forza per allontanarsi dal punto di equilibrio sul quale è stata basata la linearizzazione. Vale ovviamente il contrario se la massa del satellite diminuisce.

Figura 2: Confronto tra l'evoluzione libera di Σ e Σ_L in condizioni iniziali di equilibrio.

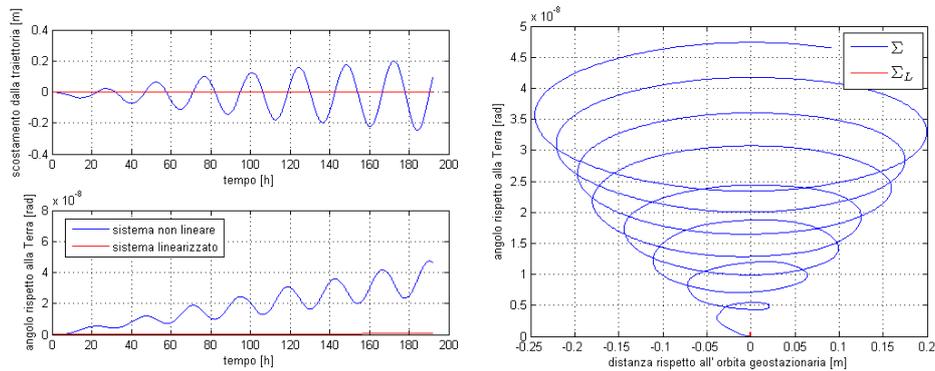
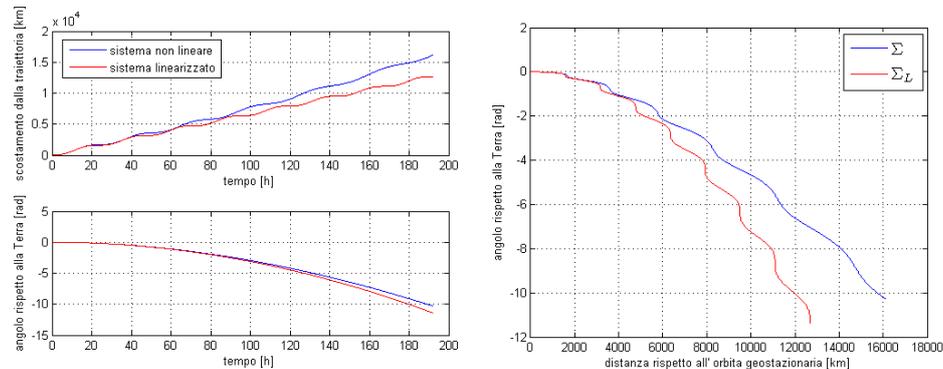


Figura 3: Confronto tra l'evoluzione libera di Σ e Σ_L con condizione iniziale $r(0) = R_0 + 10km$ e $u(t) = 2N$.



La finestra temporale in entrambe le figure corrisponde ad otto rivoluzioni terrestri, come si può intuire valutando 'ad occhio' le evidenti periodicità presenti.

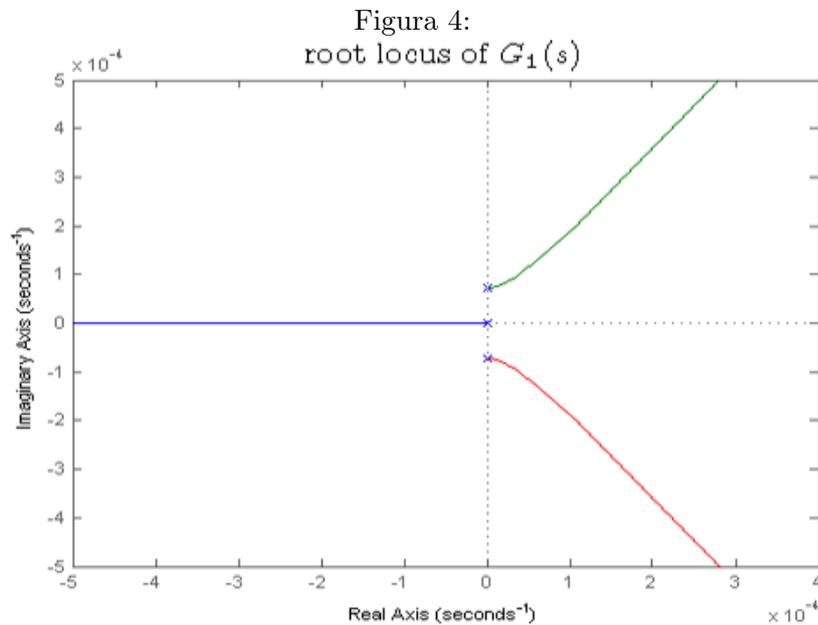
Appurato che i sistemi sono confrontabili, si è proceduto alla progettazione dei controllori.

4 Progetto dei controllori

Disponendo delle funzioni di trasferimento, risulta agevole il progetto di controllori in ambiente MATLAB, dove è stata svolta gran parte della presente relazione.

4.1 $C_1(s)$

Per la prima delle due funzioni di trasferimento la progettazione del controllore è stata fatta ‘manualmente’, posizionando direttamente poli e zeri del controllore $C_1(s)$ nel piano complesso. Infatti il luogo delle radici, vedi figura 4, suggerisce di ‘attrarre’ i rami del luogo nel semipiano sinistro, mediante l’introduzione di due zeri complessi coniugati con $\Re e < 0$, per garantire poi la stabilità aggiustando il guadagno di C_1 . MATLAB mette a dispo-



sizione uno strumento, il *SISOTool*, che permette di modificare zeri, poli e guadagno del controllore valutando in *real time* le prestazioni del feedback; la scelta di un buon C_1 è quindi stata fatta in questo modo, cercando, ovviamente dopo la stabilità, un compromesso tra i parametri che contraddistinguono il comportamento di un sistema.⁶ C'è da notare che il controllore finora descritto è della forma $k(s + \alpha + i\beta)(s + \alpha - i\beta)$, quindi non fisicamente realizzabile, dal momento che il grado del denominatore non può essere maggiore di quello del numeratore. Per ovviare a questo è sufficiente aggiungere poli in numero adeguato, purché stabili ($\Re e < 0$) e con par-

⁶In questo caso si è data particolare attenzione ai parametri tempo di assestamento t_s , margine di guadagno m_G e margine di fase m_φ .

te reale molto minore rispetto a quella di poli e zeri già presenti, in modo da influenzare il meno possibile la dinamica del sistema a catena chiusa. Con questi accorgimenti è stato progettato $C_1(s) = \frac{3550s^2 + 9.865s + 0.0388}{s^3 + 0.6s^2 + 0.13s + 0.01}$, mediante il quale si ottiene il sistema retroazionato $W_1(s) = \frac{C_1(s)G_1(s)}{1 + C_1(s)G_1(s)} = \frac{0.0001721s^2 + 4.783 \cdot 10^{-7}s + 1.881 \cdot 10^{-9}}{s^6 + 0.6s^5 + 0.13s^4 + 0.01s^3 + 0.0001721s^2 + 4.783 \cdot 10^{-7}s + 1.881 \cdot 10^{-9}}$. Le prestazioni del sistema a catena chiusa sono visibili in figura 5 e 6.

Figura 5: Diagrammi di Bode relativi a $W_{1OL} := C_1G_1$

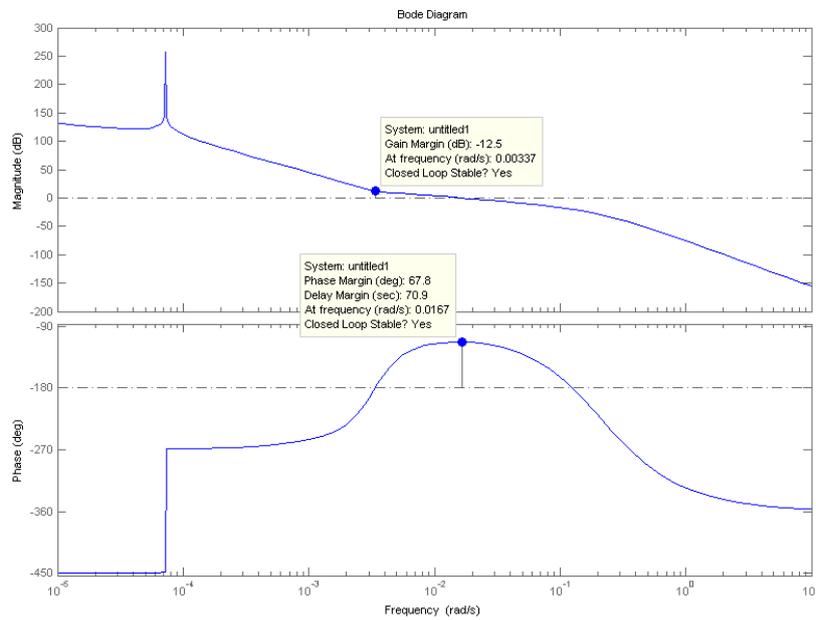
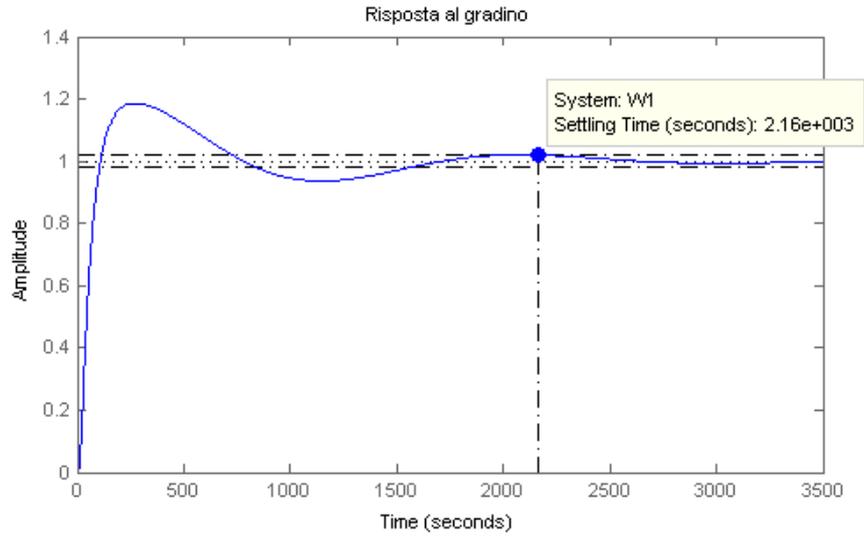


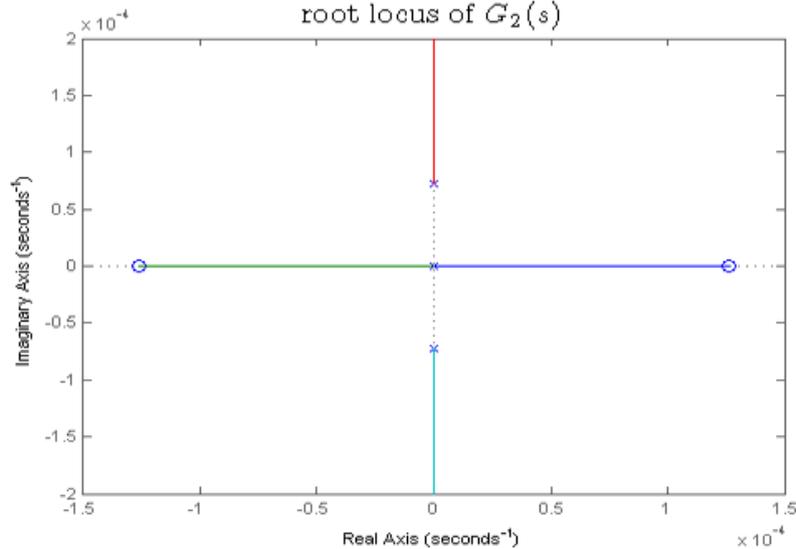
Figura 6: Risposta al gradino unitario del sistema a catena chiusa W_1



4.2 $C_2(s)$

Come si può vedere dal luogo delle radici in figura 7, è presente un ramo interamente contenuto nel semipiano destro, particolarità che rende impegnativa la progettazione di un controllore. Dal momento che il luogo delle radici in questione non fornisce evidenti suggerimenti sul dove vadano piazzati zeri e poli di $C_2(s)$, si sono provati più metodi, illustrati in seguito.

Figura 7:
root locus of $G_2(s)$



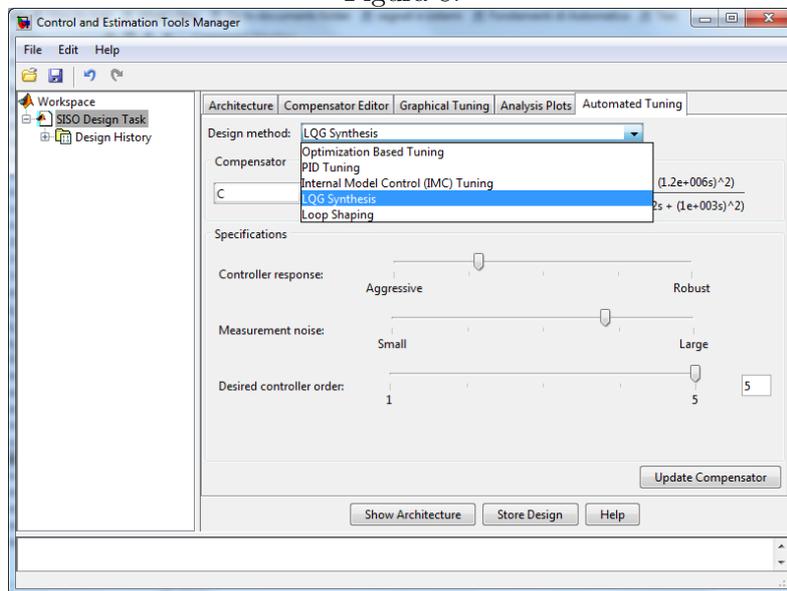
4.2.1 PID tuning

Sebbene si tratti di un metodo fallimentare nel caso del presente satellite geostazionario, è interessante una breve nota, dal momento che i controllori di questo tipo (Proporzionale Integrativo Derivativo) sono i più diffusi in ambito industriale[13]. I controllori PID hanno una funzione di trasferimento della forma $C(s) = K_p + K_i/s + K_d s$, che risulta in un luogo delle radici avente un polo nell'origine degli assi, e due zeri a parte reale negativa. È quindi evidente che un controllore di questo tipo non risolve affatto, ad esempio, il ramo del luogo delle radici di G_2 interamente a destra dell'origine⁷.

4.2.2 LQG synthesis

Si tratta di un metodo ottimo per la messa a punto di controllori[16], implementato da MATLAB all'interno del già citato *SISOTool* (vedi figura 8). Aggiustando i parametri a disposizione si può cercare un controllore adatto allo scopo prefissato, nel presente caso si è prestata maggiore attenzione al parametro *settling time* t_s , dal momento che gran parte dei controllori via via indicati dal metodo LQG facevano sì che la *step response* del sistema si assestasse dopo 10^6 secondi, dato non certo incoraggiante. Nelle figure 9 e 10 si può valutare il comportamento del sistema a catena chiusa, più avanti verrà mostrato e discusso ciò che conta, ossia le prestazioni di questo controllore applicato al sistema originale.

Figura 8:



⁷Si noti che per motivi simili un controllore PID non era utilizzabile nemmeno per G_1 .

Figura 9: Diagrammi di Bode relativi a $W_{2OL}^{LQG} := C_2^{LQG}G_2$

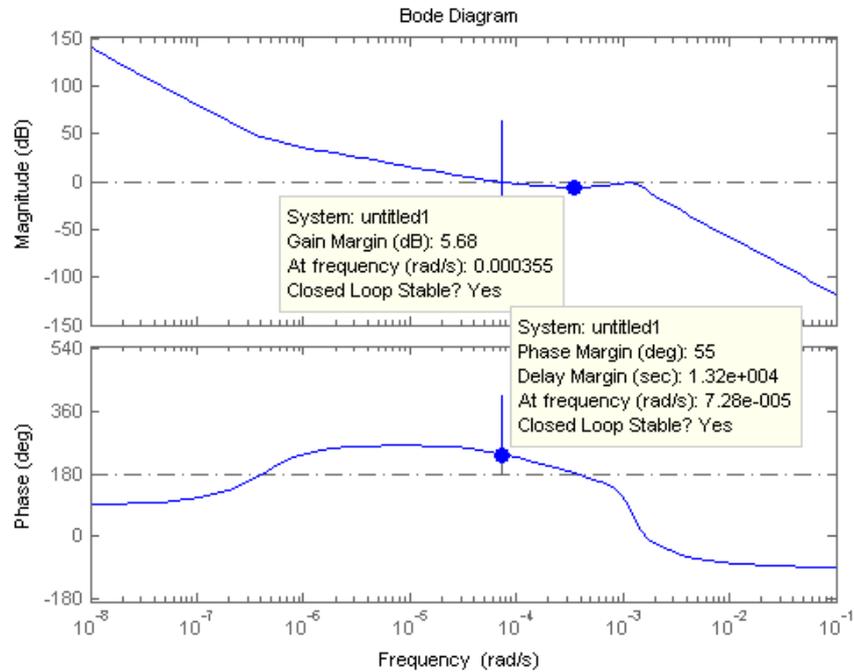
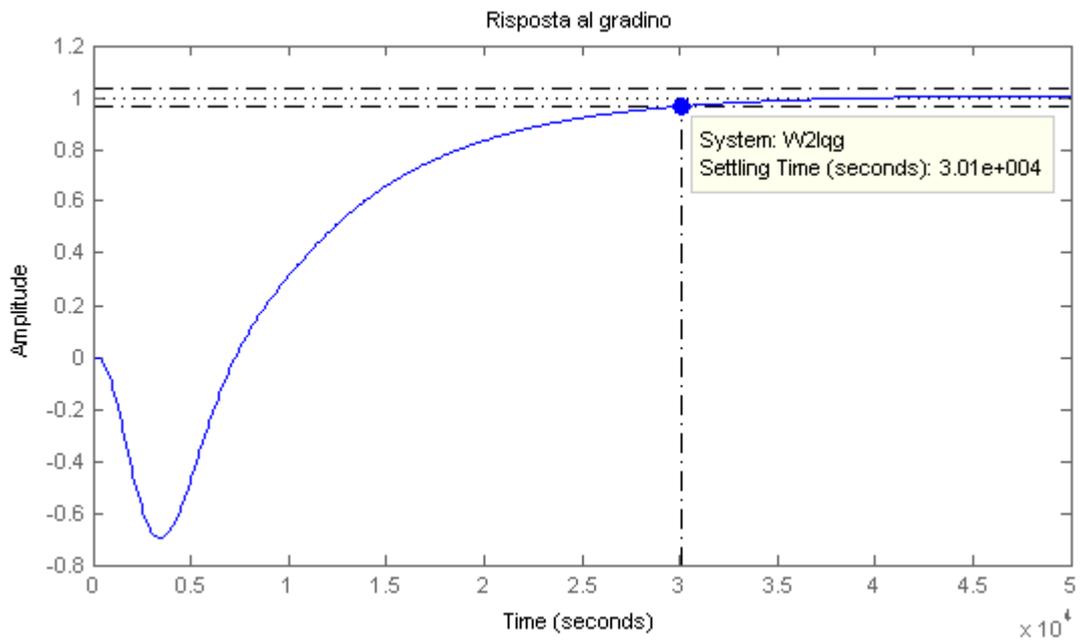


Figura 10: Risposta al gradino unitario del sistema a catena chiusa W_2^{LQG}



4.2.3 Direct Synthesis

Il metodo della sintesi diretta prevede di ricavare il controllore C a partire dal sistema G e dalla funzione di trasferimento ad anello chiuso W . La conoscenza di G , e quindi del sistema che si sta studiando, è ovvia, molto meno banale è la conoscenza di W . Per poter applicare il metodo della sintesi diretta esistono alcune condizioni, che si traducono in regole per costruire una W basilare. Se quest'ultima, senza alcun aggiustamento, garantisce la stabilità del feedback si può procedere al calcolo diretto del controllore, tuttavia molto spesso è indispensabile cercare la stabilità di W aggiungendovi poli e/o zeri. Nell'attuale caso, detti N e D rispettivamente numeratore e denominatore di W , lo zero a parte reale positiva di G_2 deve essere anche zero di N , mentre i poli instabili di G_2 devono essere zeri di $D - N$. Il punto di partenza è stato dunque $W_{base}(s) = \frac{s - \sqrt{3}\omega_0}{s^2(s^2 + \omega_0^2) + (s - \sqrt{3}\omega_0)}$. Non essendo quest'ultima una funzione di trasferimento stabile, è stato necessario aggiungere poli e zeri, una volta ottenuta una f.d.t. a catena chiusa stabile, il controllore è stato calcolato appunto con la sintesi diretta: $C_2^{DS} = \frac{1}{G_2} \cdot \frac{W_2^{DS}}{1 - W_2^{DS}}$.

La sintesi diretta non è esplicitamente implementata nel *SISOtool*, poiché molti problemi di controllo possono essere risolti con controllori PID o comunque semplici; al contrario la sintesi diretta rappresenta una soluzione in casi particolari, come il presente, e fornisce controllori complessi⁸ e dunque anche costosi a livello economico.

Ciò detto, le figure 11 e 12, che esprimono il comportamento di Σ_L controllato con C_2^{DS} , non sembrano mostrare miglioramenti rispetto al controllore progettato con la sintesi LQG, tuttavia più avanti saranno evidenti le notevoli differenze tra i due metodi.

⁸Con 'complesso' si intende un controllore la cui funzione di trasferimento presenta numeratore e/o denominatore di grado elevato.

Figura 11: Diagrammi di Bode relativi a $W_{2OL}^{DS} := C_2^{DS}G_2$

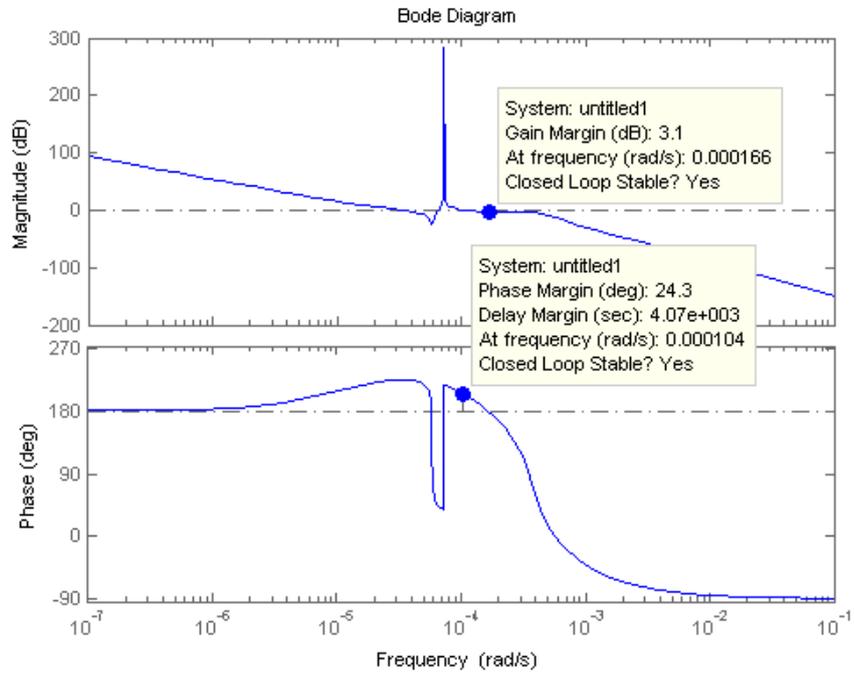
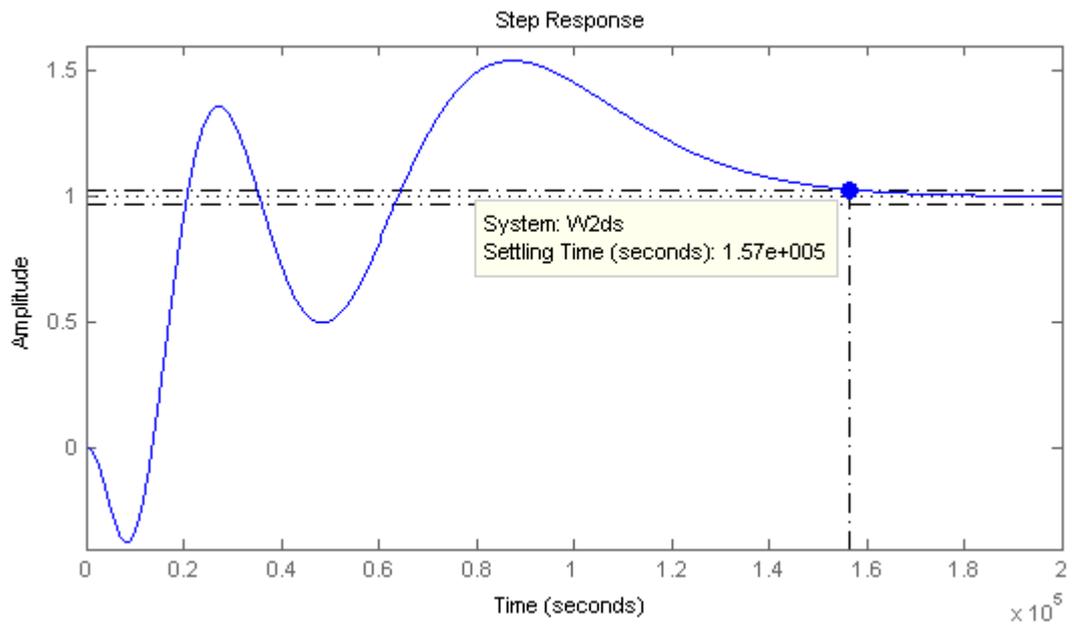


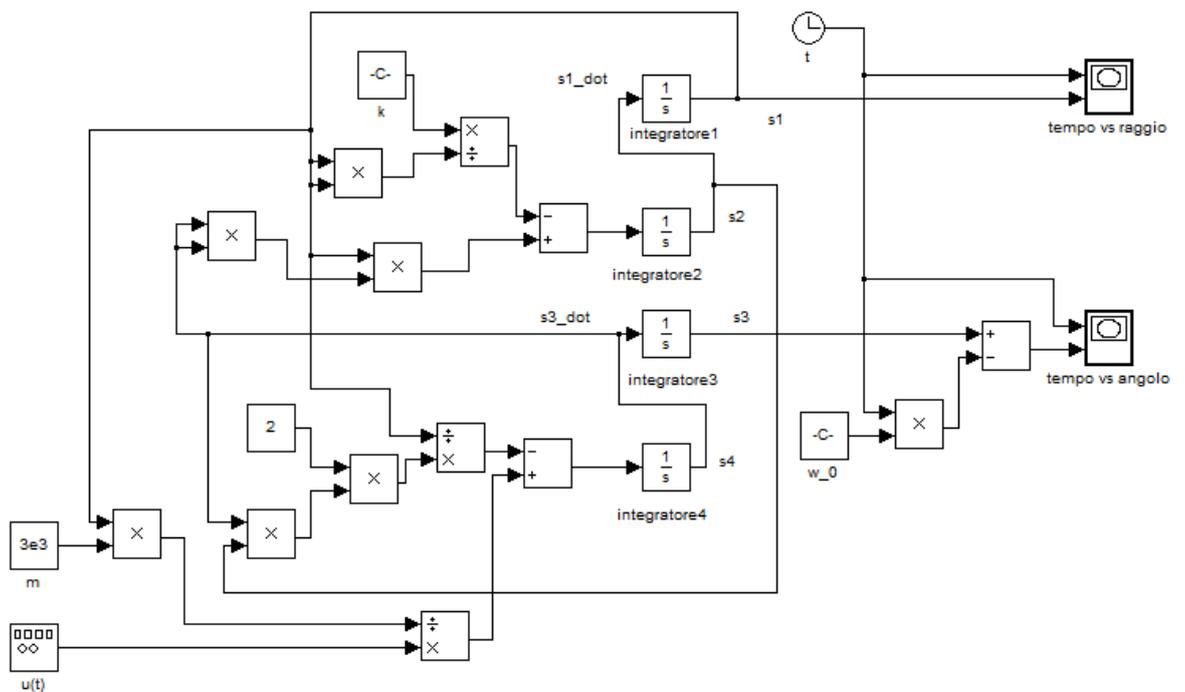
Figura 12: Risposta al gradino unitario del sistema a catena chiusa W_2^{DS}



5 Applicazione del controllo

La presente sezione, che richiede il trasferimento di segnali tra sistemi lineari e sistemi non lineari, è stata basata non solo su MATLAB, ma soprattutto sul software ad esso collegato: Simulink. Trattandosi di un programma per la modellazione, la simulazione e l'analisi di sistemi dinamici, e basato sulla filosofia degli schemi a blocchi, costituisce un ottimo strumento per studiare l'attuale caso, rappresentato da Σ ed i controllori di cui sopra. La figura 13 mostra l'implementazione Simulink del sistema non lineare di partenza. Si noti la presenza di quattro integratori, relativi agli stati del sistema, ai quali vengono fornite le condizioni iniziali, e due *scopes* che permettono di visionare l'evoluzione nel tempo di raggio dell'orbita ed angolo rispetto alla Terra.

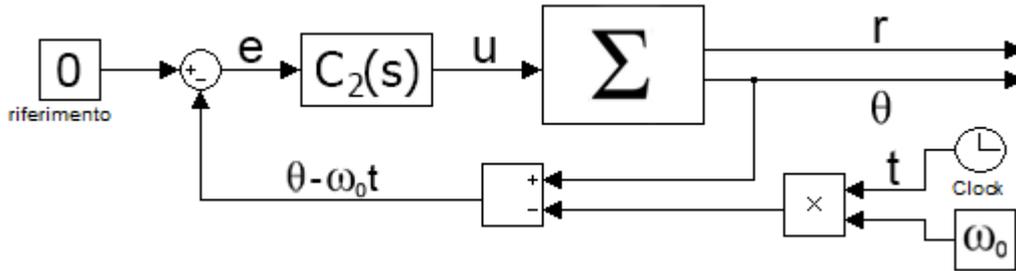
Figura 13: Realizzazione in Simulink del sistema non lineare Σ



Bisogna ora decidere il modo in cui organizzare il sistema complessivo Σ^c (sistema Σ controllato in *feedback*): essendo Σ di tipo *single input multiple outputs*, una possibile soluzione consiste in un sistema di controllo a cascata, comprendente l'anello di retroazione principale ed anelli secondari[15]. Tuttavia il caso in questione ha una particolarità che fa sì che il controllo in retroazione sia analogo a quello per un sistema *SISO*: il raggio dell'orbita geostazionaria è unico, e si ricava direttamente dalla velocità di rotazione terrestre, cosicché queste due grandezze non sono affatto indipendenti. Quindi controllando solo velocità o raggio di rotazione, la restante grandezza viene automaticamente aggiustata.

Ciò nonostante per la retroazione di Σ la modalità migliore è quella di controllare l'angolo θ tra satellite e terra. A giustificazione di ciò si consideri il seguente esempio: se si utilizzasse C_1 , facendo evolvere Σ^c da condizioni iniziali perturbate, il raggio verrebbe portato a R_0 e la velocità a w_0 , ma niente si potrebbe dire sulla posizione angolare del satellite, principale grandezza di interesse. Al contrario se θ è corretto istante per istante, sono corretti di conseguenza anche ω ed r . Va notato infine che ci sono due metodi equivalenti per impostare Σ^c : si può fornire in ingresso, vedi figura 1, l'angolo terrestre $\omega_0 t$ che cresce linearmente e quindi usare θ come segnale di retroazione, oppure si può dare come riferimento il valore costante nullo, e confrontarlo con $\theta - \omega_0 t$. Scegliendo quest'ultima opzione, si è ottenuto lo schema a blocchi in figura 14.

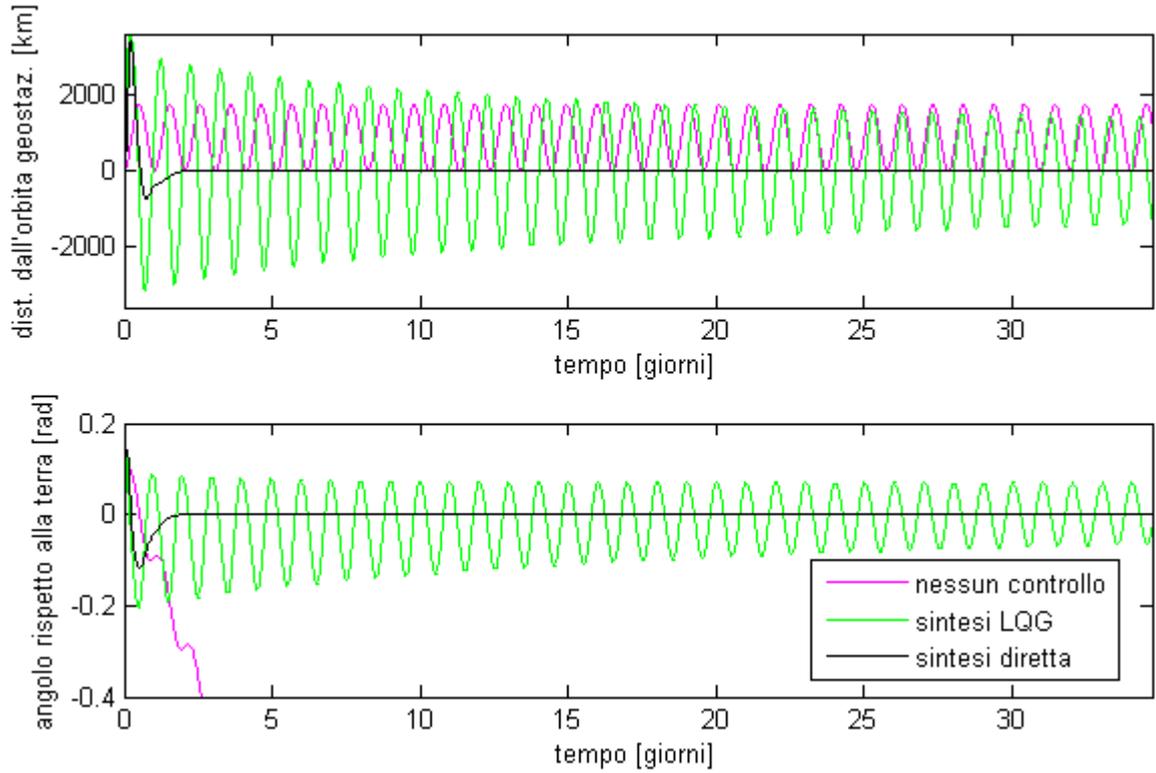
Figura 14: Schema del controllo in retroazione del satellite



È stato riportato un solo confronto tra C_2^{LQG} e C_2^{DS} , poiché le varie simulazioni effettuate hanno confermato quanto espresso in figura 15. La sintesi LQG fornisce un controllore che fa oscillare il satellite sia radialmente che tangenzialmente con periodo di 24 ore, restando comunque mediamente nell'orbita corretta. Tuttavia per il controllo di Σ la sintesi diretta vince di gran lunga il confronto: l'assestamento di posizione e velocità avviene in maniera esatta ed in un tempo finito, il contrario di quanto si ha con l'utilizzo di C_2^{LQG} . Questo fatto non era evidente nei diagrammi di Bode e nelle risposte al gradino presentate in precedenza, si spiega però col fatto che in tutto questo lavoro non si sono assunti errori nei dati, mentre la sintesi LQG viene usata in problemi recanti sistemi lineari e non[17], perturbati da rumore gaussiano bianco additivo. La sintesi diretta invece, sebbene presenti un certo grado di laboriosità, fornisce risultati molto buoni, che permettono al satellite geostazionario di mantenere l'orbita circolare a velocità costante, anche a fronte di eventuali perturbazioni. Per quanto riguarda l'assenza di controllo è inutile commentare quanto era facile aspettarsi.

I grafici che seguono mostrano chiaramente il comportamento del satellite controllato da C_2^{DS} , nelle figure 16 e 17 si è voluto riportare anche il comportamento di Σ_L controllato da C_2^{DS} , questo ribadisce quanto detto in precedenza sul confronto tra Σ e la sua linearizzazione, dal momento che il comportamento dei due sistemi, soprattutto il tempo della risposta, è simile.

Figura 15: Moto del satellite con vari controllori, partenza da condizioni iniziali perturbate: $r(0) = R_0 + 1\text{km}$, $\theta(0) = 0.1\text{rad}$, $\omega(0) = 1.01 \cdot \omega_0$



I grafici 18 e 19 permettono di vedere cosa accade portando ‘lontano’ dall’equilibrio una sola variabile di stato, mentre le altre sono in equilibrio. Accade quindi quanto era lecito aspettarsi, ossia all’aumentare della differenza tra condizione iniziale ed equilibrio, aumentano ampiezza dell’oscillazione e tempo di assestamento del satellite rispetto alla posizione corretta.

Figura 16: Evoluzione dei sistemi controllati, condizioni iniziali $r(0) = R_0 - 10$ km, $\omega(0) = 95\% \omega_0$

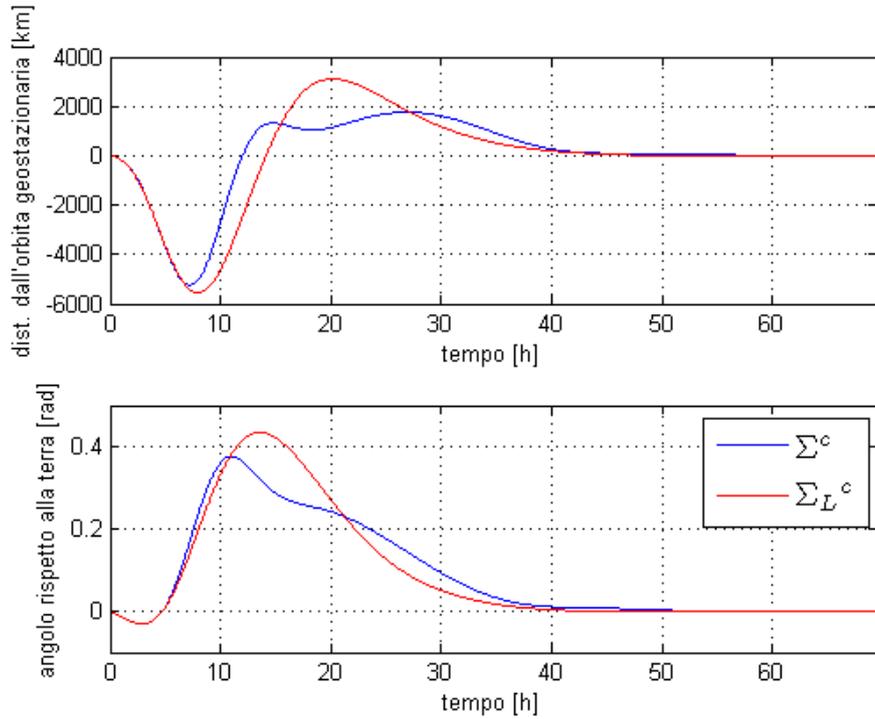


Figura 18: Evoluzione di Σ^c , raggio di rotazione iniziale via via minore

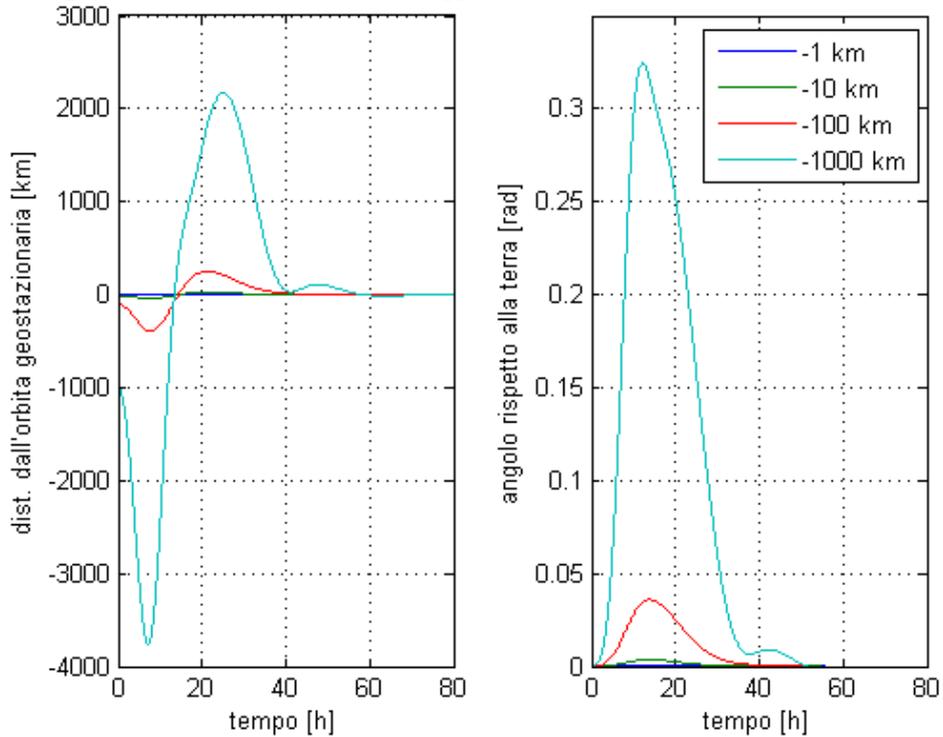


Figura 17: Evoluzione dei sistemi controllati, condizioni iniziali $\theta(0) = 0.2$ rad

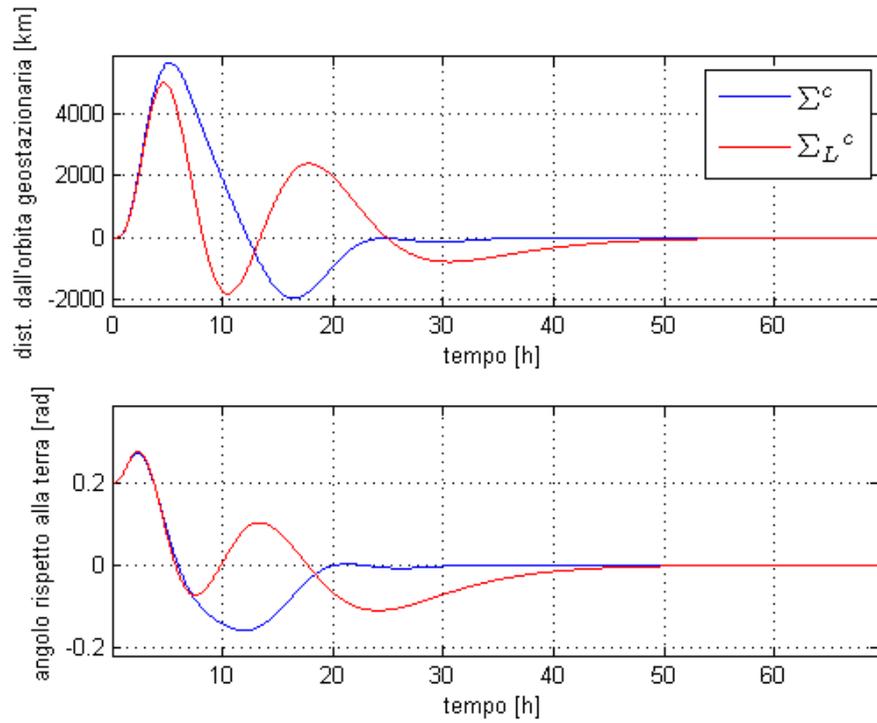
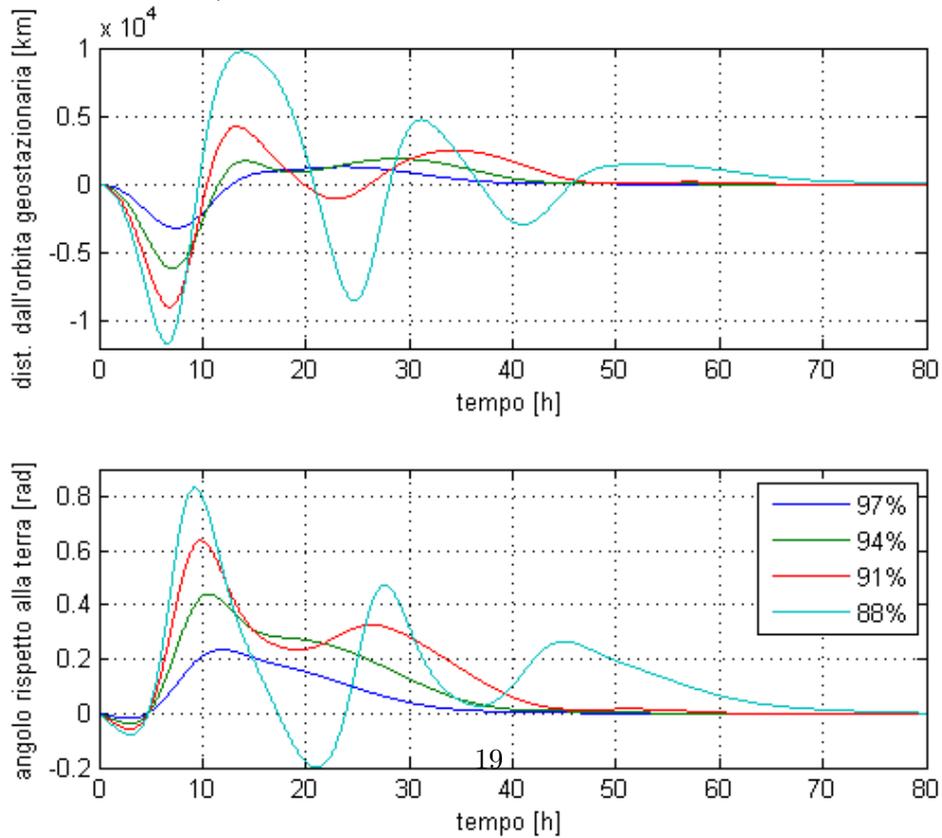


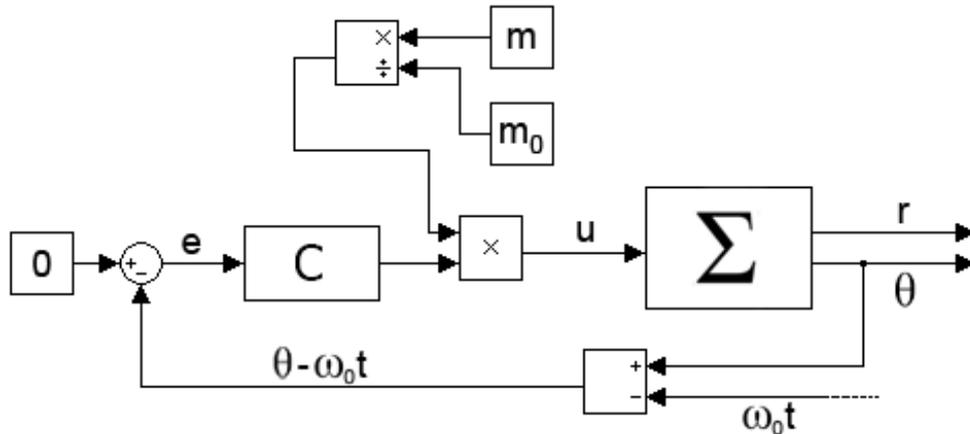
Figura 19: Evoluzione di Σ^c , velocità angolare iniziale via via minore (in percentuale di ω_0)



5.1 Aggiustamento della massa del satellite

Come si accennato in precedenza, la massa del satellite può essere scelta in modo arbitrario. Tuttavia i controllori progettati non possono prescindere dal valore di m , il che, in assenza di accorgimenti, risulta in un satellite che se dovesse, per un qualsivoglia motivo, variare la propria massa in orbita, non funzionerebbe più a dovere. Portando un esempio banale, e probabilmente inverosimile, se si volesse costruire un satellite geostazionario che raccoglie i cosiddetti ‘rifiuti spaziali’ che incontra, è indispensabile tener conto dell’aumento della massa. Fortunatamente questo influisce solamente sul guadagno del controllore, e non sulla posizione di zeri e poli nello stesso, quindi si tratta di un intervento minimo sullo schema di controllo: l’ingresso di $\Sigma u(t)$ deve essere amplificato o attenuato di un fattore che tiene conto della massa attuale e della massa ‘di riferimento’ sulla quale è stato basato il progetto dei controllori, quanto appena detto è visibile in figura 20.

Figura 20: Semplice adattamento del sistema di controllo ad un satellite di massa variabile



In conclusione si può affermare che l’esempio proposto con questo lavoro è valido, dal momento che è verificato in ambito di simulazione il funzionamento del sistema di controllo, pensato per il modello nonlineare e realizzato sulla versione linearizzata dello stesso. Il tener conto della massa è una prima, sebbene minima, aggiunta di informazione al sistema complessivo, che si avvicinerà tanto più alla realtà quante saranno le aggiunte di questo tipo di elementi in gioco.

Riferimenti bibliografici

- [1] *Basics of Space Flight, Section 1 Part 5, Geostationary Orbits*. NASA. Retrieved 2009-06-21. 1
- [2] *Extra-Terrestrial Relays – Can Rocket Stations Give Worldwide Radio Coverage?*. Arthur C. Clarke, October 1945. Retrieved 2009-03-04. 1
- [3] <http://www.satsig.net/sslist.htm> 1
- [4] *Fisica – Volume 1*. P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci. Edises, 2 ed., 2000
- [5] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1963-031A> 1
- [6] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1964-047A> 1
- [7] Appunti delle lezioni di Fondamenti di Automatica, Augusto Ferrante, a.a. 2012-2013. <http://www.dei.unipd.it/~augusto/FdA-2012-13/Appunti/>
- [8] *Teoria dei Sistemi Dinamici*, Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto. Esculapio, 2010
- [9] A. Ferrante, A. Lepschy, U. Viaro, *Introduzione ai Controlli Automatici*, Città Studi, Torino, 2008.
- [10] S. Zampieri. Dispense di Controlli automatici. <http://www.dei.unipd.it/~zampi/dispensa/>
- [11] *Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB*. Dingyü Xue, YangQuan Chen, Derek P. Atherton. Springer-Verlag, 2002, e riferimenti ivi contenuti.
- [12] <http://www.building-automation-consultants.com/building-automation-history.html>
- [13] *PID Control – New Identification and Design Methods*, Michael A. Johnson, J. Crowe, Mohammad H. Moradi. Springer, 2006 11
- [14] <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>
- [15] http://www.technion.ac.il/~dlewin/054461/LECTURE_4.pdf 15
- [16] *Linear-Quadratic Control: An Introduction*. Dorato P., Abdallah C. and Cerone V., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995, e riferimenti ivi contenuti. 11
- [17] Athans M. *The role and use of the stochastic Linear-Quadratic-Gaussian problem in control system design*. IEEE Transaction on Automatic Control. Volume 16, Issue 6, December 1971, pages 529-552, e riferimenti ivi contenuti. 16