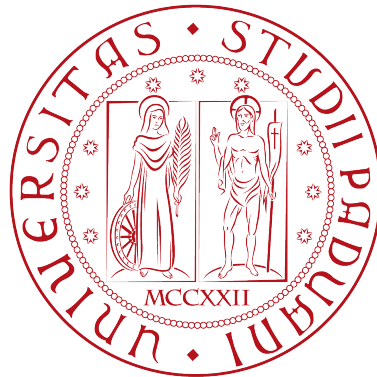


UNIVERSITÀ' DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

TESI DI LAUREA IN
INGEGNERIA BIOMEDICA

Compressed Sensing e sue applicazioni alla tomografia

Relatore:
Prof. Enrico Grisan

Candidato:
Marialuisa Bullo

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1. Introduzione	3
2. Tomografia Computerizzata	4
2.1 Introduzione.....	4
2.2 Radiologia convenzionale e storia della tomografia computerizzata.....	4
2.3 Principio di funzionamento.....	5
2.4 Geometrie di scansione.....	6
2.4.1 Prima generazione: geometria a raggi paralleli.....	6
2.4.2 Seconda generazione: fascio a ventaglio parziale, rivelatori multipli.....	6
2.4.3 Terza generazione: fasci a ventaglio, rivelatori rotanti.....	7
2.4.4 Quarta generazione: fasci a ventaglio, rivelatori fissi.....	8
2.4.5 Dynamic Spatial Reconstructor (DSR).....	8
2.4.6 Tomografia a raggio elettronico.....	9
2.4.7 Tomografia elicoidale (Spiral CT).....	10
2.4.8 Tomografia multistrato (Multislice CT).....	11
2.5 Rivelatori di raggi X e sensori TC	11
2.6 Sorgente di raggi X.....	11
2.7 Sistema di acquisizione dati.....	12
2.8 Formazione e visualizzazione dell'immagine.....	13
3. Compressed Sensing	14
3.1 Introduzione.....	14
3.2 Storia del Compressed Sensing.....	15
3.3 Il problema del sensing (rilevamento).....	16
3.4 Norme l_2 e l_1 come soluzione di un sistema lineare indeterminato.....	17
3.5 Sparsità e Incoerenza.....	18
3.6 Sottocampionamento e recupero del segnale sparso.....	19
3.7 Isometria ristretta.....	22
3.8 Recupero del segnale da segnali sottocampionati.....	23
3.9 Recupero del segnale da campioni rumorosi.....	24
3.10 Progettazione delle matrici di sensing.....	24
3.11 Vantaggi del Compressed Sensing.....	25
4. Compressed Sensing nella Tomografia Computerizzata	26
4.1 Introduzione.....	26
4.2 Sparsità e operatore Gradiente.....	27
4.3 Incoerenza nel campionamento.....	28
4.4 Campionamento random con densità variabile.....	29
4.5 Quanti campioni è necessario acquisire?.....	29

4.6 Ricostruzione dell'immagine.....	30
4.7 Presenza di rumore e artefatti.....	30
4.8 Applicazioni del Compressed Sensing nella Tomografia Computerizzata.....	31
4.8.1 Tomografia ottica molecolare a bioluminescenza.....	31
4.8.2 Tomosintesi 3D da immagini TC e rimozione degli artefatti inter-piano..	32
4.8.3 Rimozione di artefatti metallici nella tomografia dentale.....	34
5. Conclusione	36
6. Bibliografia	37

Capitolo 1

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questa tesi è di mostrare come la tecnica del Compressed Sensing (CS) sia applicata alla Tomografia Computerizzata (TC) come algoritmo per migliorarne le prestazioni.

Il Compressed Sensing è un metodo innovativo che consente di acquisire segnali e immagini con molti meno campioni di quanto è stato fatto finora. Si basa sul fatto che in alcuni domini, cioè spazi vettoriali, come nel dominio della Trasformata di Fourier, la rappresentazione del segnale appare sparsa, ovvero ci sono pochi “picchi” di valori mentre il resto può essere approssimato a zero. Si può allora ricostruire l'immagine proprio in questi domini, sfruttando solo la parte del segnale che porta l'informazione, riportando poi il tutto nel dominio di partenza, cioè quello del segnale o dell'immagine. È un approccio alternativo al paradigma di campionamento di Shannon-Nyquist, che impone un numero decisamente maggiore di campioni necessari per ricostruire in modo esatto il segnale o l'immagine.

La Tomografia Computerizzata è una tecnica diagnostica che, utilizzando i raggi X, permette di formare immagini di strati dell'oggetto in esame e ricostruire un'immagine in tre dimensioni. Derivata dalla radiologia, è una tecnologia molto efficace, perché produce immagini ad alta risoluzione di parti interne del corpo in modo non invasivo. Tutto ciò però ha un costo, cioè l'alta dose di radiazioni che investono il paziente.

Sono state studiate molte geometrie che nel tempo hanno drasticamente ridotto i tempi dell'esame e la dose di radiazioni, ma la quantità di raggi X sul paziente è ancora molto alta. Si è pensato allora di applicare la tecnica del compressed sensing alla tomografia, come è stato già fatto per la risonanza magnetica, in modo da ridurre in modo significativo la dose di radiazioni senza peraltro modificare la qualità dell'immagine. È una tecnologia ancora all'inizio, ma ci sono i presupposti per degli sviluppi enormi: il CS, anche se nato solo nel 2006, ha già trovato posto in innumerevoli applicazioni in quasi tutti gli ambiti in cui si campionano segnali, ed ha avuto un grande sviluppo nell'imaging con risonanza magnetica.

Nei capitoli 2 e 3 della tesi viene spiegato in dettaglio come funzionano la tomografia computerizzata ed il compressed sensing, mentre nel 4 sono trattati l'integrazione dei due metodi e qualche esempio specifico di tecnologia già esistente. L'ultimo breve capitolo è riservato alla conclusione.

Capitolo 2

TOMOGRAFIA COMPUTERIZZATA

2.1 Introduzione

La tomografia computerizzata (TC) è una tecnica diagnostica per immagini che sfrutta i raggi X per riprodurre strati del corpo del paziente, consentendo poi una ricostruzione tridimensionale.

Lo sviluppo della tomografia computerizzata nei primi anni '70 ha rivoluzionato la radiologia medica: per la prima volta si è stati in grado di ottenere immagini tomografiche di alta qualità delle strutture interne del corpo. Si sono sviluppate tecniche sempre più sofisticate e ancora oggi la TC continua a maturare .

Le immagini tomografiche sono ricostruite da un grande numero di trasmissioni di raggi X, chiamate proiezioni, attraverso il paziente. Le immagini risultanti sono delle “mappe” tomografiche dell'attenuazione dei raggi X. Ogni strato corporeo viene suddiviso in unità di volume elementari (Volume x element = voxel) e per ogni voxel viene ricostruita l'attenuazione del fascio di raggi X che lo attraversa; l'attenuazione varia in modo proporzionale alla densità elettronica dei tessuti. La scala di Hounsfield associa ad ogni valore di densità un valore numerico che può essere visualizzato come un livello di grigio. Più piccolo è il volume rappresentato da un pixel, maggiore sarà poi la risoluzione spaziale dell'immagine.

Il compito fondamentale di un sistema TC è di fare un grande numero di misure di trasmissioni di raggi X attraverso il paziente con una geometria precisamente controllata. Un sistema TC base generalmente consiste in un gantry, cioè la parte cilindrica che contiene i componenti per produrre e raccogliere i raggi X (sorgente e rivelatori) e il sistema di acquisizione dati, un lettino per il paziente, una console di controllo e un computer. In alcuni casi viene somministrato al paziente un mezzo di contrasto endovenoso per differenziare meglio le strutture con densità simile [1].

Le immagini ottenute vengono utilizzate in ambito medico a scopo diagnostico, ma anche per fare test non distruttivi di materiali e in archeologia per analizzare contenuti di sarcofaghi o mummie.

2.2 Radiologia convenzionale e storia della tomografia computerizzata

La radiografia è una proiezione in due dimensioni di una struttura invece a tre dimensioni, dunque molti piani nell'immagine risultano sovrapposti, perdendo così informazioni sulla

profondità. Piccole lesioni o strutture in questo modo risultano invisibili. Inoltre con la radiografia è difficile distinguere i tessuti molli, in quanto c'è scarsa risoluzione in densità. Altri svantaggi della radiografia sono che parte della dose di radiazioni viene persa per diffusione mentre attraversa il paziente e che non è possibile avere delle informazioni di densità quantitative.

La stratigrafia è un progresso della radiologia che permette di rappresentare un solo strato del corpo su una pellicola radiografica. Una sorgente di raggi X trasla creando delle proiezioni su pellicola di un piano focale del paziente. Ha però comunque degli svantaggi, perché risolve solo l'aspetto della sovrapposizione degli strati, ma non migliora la risoluzione, i punti fuori fuoco aumentano il rumore e non si risolve l'indistinguibilità dei tessuti molli.

Per ovviare a tali problemi nasce allora la tomografia (assiale) computerizzata [2].

Il termine comunemente usato *TAC* è una viene dall'inglese da *computed assisted tomography*, tomografia assistita dal computer, che però è stato tradotto come tomografia assiale computerizzata. Ora si usa invece il termine TC in italiano e CT in inglese.

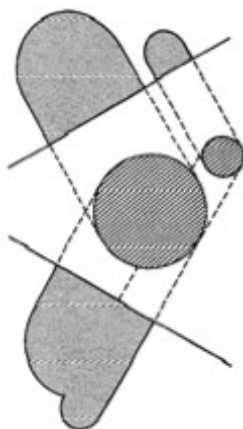


Figura 1: Due proiezioni di un oggetto che consiste in una coppia di cilindri [3].

2.3 Principio di funzionamento

L'idea della tomografia è di ricostruire un oggetto dalle sue proiezioni mediante la trasformata di Radon. Per acquisire le proiezioni necessarie per una ricostruzione tridimensionale della rappresentazione del corpo umano si usano dei movimenti di rotazione e traslazione. Con la traslazione è possibile acquisire le proiezioni, cioè i profili di assorbimento dei raggi X attraverso il paziente. Si hanno proiezioni multiple con un movimento di rotazione del piano transassiale. In seguito si ottiene l'immagine con degli algoritmi di ricostruzione dalle proiezioni.

La TC a raggi X ha molti vantaggi: si possono ottenere immagini di strati trasversi di piccolo spessore (1-10 mm), ha un'elevata capacità di distinguere i tessuti molli (con risoluzione 0.2-0.5 %) ed è possibile eseguire un'ottimizzazione della dose di radiazioni. Esiste anche la TC a contrasto: viene iniettato nel corpo del paziente un mezzo di contrasto, che aumenta la

capacità di distinguere i tessuti molli in cui si presenta il liquido dal resto, dato che c'è maggior contrasto rispetto ad una radiografia proiettiva. Ci sono tuttavia degli svantaggi anche con questa tecnica: il paziente è sottoposto all'assorbimento di una quantità di radiazioni ionizzanti maggiore rispetto ad una radiografia tradizionale, c'è un possibile disagio del paziente dovuto alla necessità di rimanere immobile a lungo e un possibile rischio di allergia al mezzo di contrasto [2].

2.4 Geometrie di scansione

I dati delle proiezioni possono essere acquisiti con molte possibili geometrie, basate sulla configurazione e sui movimenti della scansione e sulla disposizione dei detector (rivelatori). L'evoluzione di queste geometrie è descritta in termini di “generazioni”:

2.4.1 Prima generazione: geometria a raggi paralleli

È il prototipo che inventò Hounsfield nel 1970 ed ha alla base il principio più semplice tra i vari tomografi. Si ottengono misure multiple di trasmissioni di raggi X usando un singolo fascio di raggi X collimati a pennello (*pencil beam*) e un singolo rivelatore. Il fascio è traslato di 160 passi con movimento lineare da una parte all'altra del paziente per ottenere una singola proiezione. La sorgente e il rivelatore sono poi ruotati attorno al paziente facendo 180 rotazioni di 1° , ottenendo tutti i profili delle proiezioni. Si ottengono alla fine 2 strati di 13 mm. Il fascio collimato fornisce un'eccellente reiezione delle radiazioni disperse nel paziente. Il tempo di acquisizione totale è maggiore a 24 ore: questa geometria fu usata da Hounsfield nel suo esperimento originale, ma non è usata negli scanner moderni [1] [2].

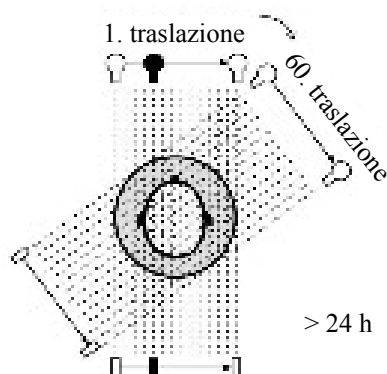


Figura 2: Scanner di Prima generazione [2].

2.4.2 Seconda generazione: fascio a ventaglio parziale, rivelatori multipli

Nel 1972 viene introdotto lo scanner di seconda generazione, che prevede l'uso di fasci di raggi X collimati a ventaglio parziale (*partial fan beam*), con un'apertura di 3° - 20° , e di n rivelatori con disposizione lineare. Questo permette la creazione della prima CT commerciale,

con tempi di acquisizione ridotti a circa 300 secondi. È impiegato ancora un movimento di scansione di traslazione-rotazione, tuttavia usando un angolo di apertura del fascio maggiore, si avrà un tempo di scansione minore [1] [2].

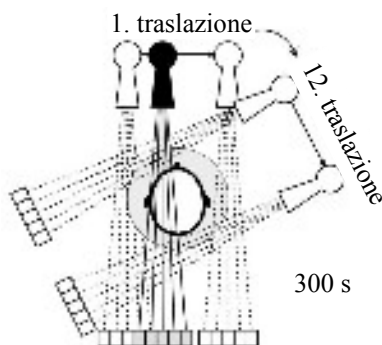


Figura 3: Scanner di Seconda generazione [2].

2.4.3 Terza generazione: fasci a ventaglio, rivelatori rotanti

Gli scanner di terza generazione, introdotti nel 1976, prevedono che un fascio di raggi X collimato a ventaglio (*fan beam*), con apertura di 30° - 50° , sia ruotato di 360° . Non viene usato un movimento di traslazione come nello scanner precedente, perché il fascio è abbastanza largo da contenere completamente il paziente. Un array di rivelatori, formato da molte centinaia di rivelatori indipendenti, è accoppiato meccanicamente alla sorgente di raggi X, ruotando con essa simultaneamente. Il risultato è che questi movimenti di sola rotazione acquisiscono dati di proiezioni nel tempo di 5-10 secondi. Questo design dà inoltre il vantaggio che dei sottili setti di tungsteno possono essere posizionati tra due rivelatori, in modo da focalizzare il raggio per eliminare radiazioni sparse [1] [2].

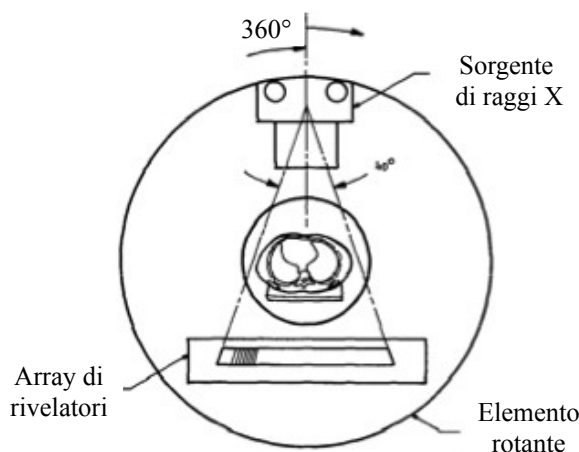


Figura 4: Scanner di Terza generazione [2].

2.4.4 Quarta generazione: fasci a ventaglio, rivelatori fissi

Negli scanner di quarta generazione, introdotti nel 1978, solo la sorgente di raggi X e il fascio a ventaglio ruotano attorno all'isocentro, mentre l'insieme dei rivelatori rimane stazionario. L'array dei rivelatori è formato da un numero tra 600 e 2000 (dipende dal produttore) di rivelatori indipendenti, collocati in un anello che circonda completamente il paziente. Il fascio di raggi X è collimato a ventaglio (*fan beam*) con apertura di 40° - 50° e i tempi di scansione sono simili a quelli degli scanner di terza generazione, cioè di circa 5 secondi. I rivelatori non sono più accoppiati alla sorgente di raggi X e quindi non si può più fare uso dei setti per eliminare le radiazioni sparse, tuttavia sono calibrati due volte durante ogni rotazione della sorgente di raggi X, fornendo un sistema che si auto-calibra; i sistemi di terza generazione vengono calibrati invece solo ogni qualche ora di utilizzo.

Sono in commercio entrambe le geometrie di terza e quarta generazione ed entrambe sono state di grande successo clinico; nessuna delle due può essere considerata di design superiore all'altra. Entrambi i sistemi di terza e quarta generazioni hanno una tecnologia di auto-lubrificazione con contatti *slip-ring* (contatti striscianti) per fare le connessioni elettriche con i componenti rotanti. Ciò toglie il bisogno di avere cavi per l'alimentazione e per i segnali, che altrimenti sarebbero dovuti essere riavvolti tra una scansione e l'altra. Si permette così un movimento continuo di rotazione del fascio di raggi X. Vengono acquisite immagini multiple mentre il paziente è traslato attraverso il gantry con un movimento morbido e continuo, invece di fermarsi ad ogni immagine. I dati delle proiezioni per immagini multiple per un volume del paziente possono essere acquisite mentre il paziente tiene il fiato una volta sola, con tempi di circa uno strato al secondo [1] [2].

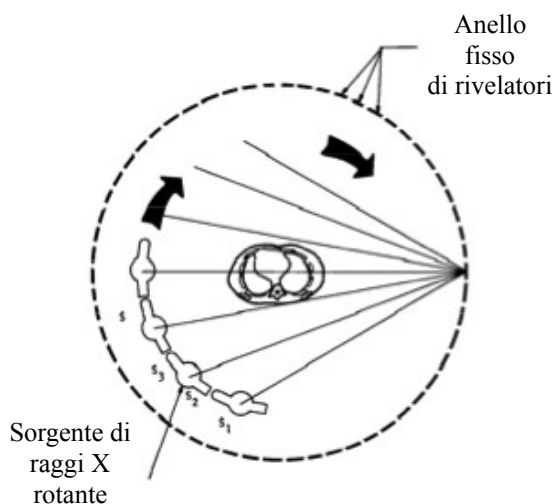


Figura 5: Scanner di Quarta generazione [2].

2.4.5 Dynamic Spatial Reconstructor (DSR)

Conosciuto anche con il nome di "Mayo Monster", nato nel 1983, questo tomografo ha 28 sorgenti (che sono poi in realtà 14) e degli schermi a fluorescenza in rotazione della

dimensione di 30x30 cm. Il risultato è di 240 strati di 0.9 mm di spessore (da un volume con altezza assiale di 22 cm), con immagini acquisite in 2.2 secondi. Questa tecnologia però non ha avuto sviluppi, in quanto aveva un costo elevato, vari problemi tecnici e bassa qualità delle immagini [2].

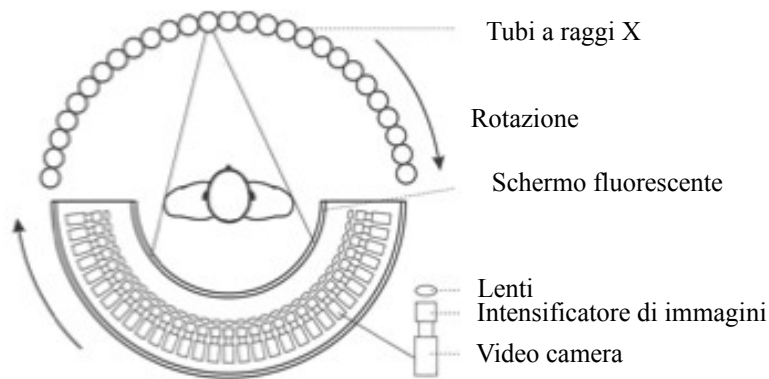


Figura 6: Scanner DSR [2].

2.4.6 Tomografia a fascio elettronico

Questo tipo di scanner è unico per il fatto che la sorgente di raggi X diventa una parte integrale del sistema di design; è nato nel 1983 e la sua tecnologia è chiamata anche CardioVascular Computed Tomography (CVCT) oppure Electron Beam Tomography (EBT). Negli esami cardiaci c'è una difficoltà data dal movimento del cuore durante l'acquisizione dell'immagine: con questo tipo di tomografo si eliminano tutti i movimenti meccanici. Il sistema di rivelatori rimane stazionario, mentre un fascio di elettroni ad alta energia è spazzato elettronicamente lungo un anodo di tungsteno semicircolare. I raggi X sono prodotti nel punto in cui il fascio di elettroni colpisce l'anodo, creando così una sorgente di raggi X che ruota attorno al paziente senza che nessuna parte del tomografo si muova. I dati di una proiezione possono essere acquisiti in 33-100 ms (per un'acquisizione su 216°), che è un tempo abbastanza rapido da catturare l'immagine del cuore che batte senza significativi artefatti da movimento [1] [2].

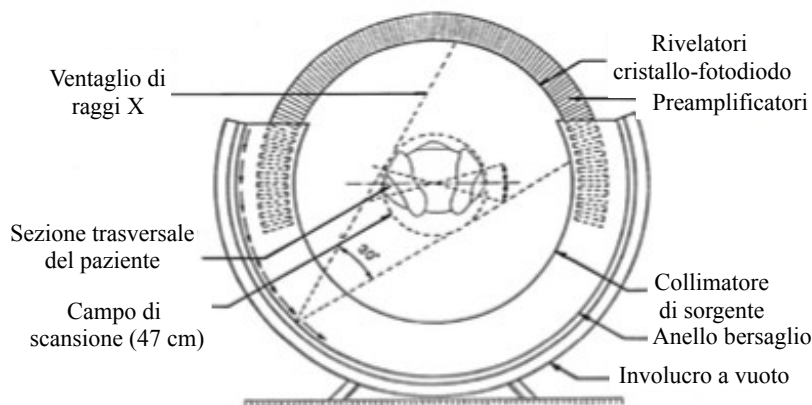


Figura 7: Scanner a fascio elettronico [2].

2.4.7 Tomografia elicoidale (Spiral CT)

La necessità di avere tempi più rapidi di scansione, in particolare per scansioni multiple per l'imaging tridimensionale, si è direzionata nello sviluppo di sistemi di scansione a spirale. La tecnologia di TC convenzionale infatti deve considerare nel tempo totale il meccanismo di *start-stop*, oltre ad un tempo di scan di circa 1 secondo e un tempo per ogni strato di 4-6 secondi; inoltre la risoluzione spaziale lungo l'asse z è peggiore rispetto a quella nel piano trasversale x-y. La tomografia computerizzata elicoidale, nata nel 1978, prevede una traslazione del lettino e una rotazione del tubo radiogeno continue, in modo da ridurre la dose di radiazione e per evitare il riscaldamento. Questi movimenti continui sono sviluppati con una tecnologia *slip ring* (contatti striscianti) sia per l'alimentazione che per i dati. I sensori ad alta efficienza a stato solido e ad alta densità (12-18/grado) permettono una dose ridotta di radiazioni. Le velocità di rotazione sono molto alte, fino a 120 rotazioni per minuto. I dati vengono poi interpolati con degli algoritmi e il tempo totale dell'esame è di 20-80 secondi. I vantaggi di questo tomografo sono che il tempo per ogni strato è molto ridotto (circa di 1 secondo), la risoluzione dell'asse z è molto migliore grazie all'interpolazione e non ci sono artefatti da movimento [1] [2].

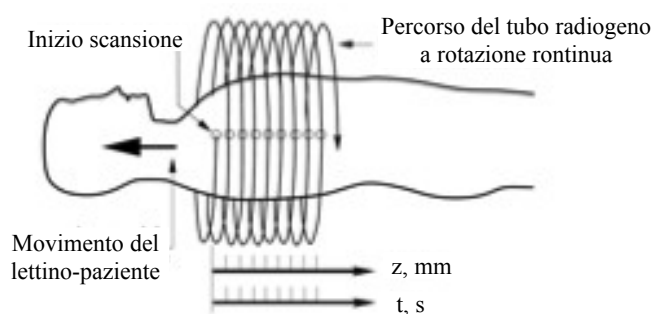


Figura 8: Scanner elicoidale [2]

Il *pitch* è un parametro molto importante per la TC elicoidale ed è definito come:

$$pitch = \frac{d}{M \cdot S}$$

con d pari al passo di avanzamento del lettino in una rotazione di 360° (in mm), S è lo spessore dello strato collimato (in mm) e M il numero di strati per scansione. Se il parametro *pitch* è minore di 1, vuol dire che il passo è minore della larghezza del fascio e le sezioni si sovrappongono: serve una dose maggiore; se il *pitch* invece è maggiore di 1 allora il passo è maggiore della larghezza fascio e alcune sezioni non vengono acquisite, dunque servirà una dose minore. La velocità del lettino è pari a:

$$velocità\ lettino = \frac{R}{T} = \frac{pitch \cdot M \cdot S}{t_{rot}}$$

con R uguale allo *scan range* (in mm), T uguale allo *scan time* (in s) e t_{rot} uguale al tempo di rotazione di 360° (in s).

Ci sono delle limitazioni per l'uso di questo tomografo elicoidale: la scansione di volumi

estesi (come torace e addome) richiede collimazioni larghe per evitare artefatti da movimento e la risoluzione lungo l'asse z è molto bassa rispetto a quella in x-y [2].

2.4.8 Tomografia multistrato (Multislice CT)

Questo tipo di tomografo riesce ad acquisire contemporaneamente più strati: dai 2 strati che si riuscivano ad acquisire nel 1992 con il primo tomografo multistrato, ora possiamo averne addirittura 128 durante la stessa scansione. Tutto ciò è possibile grazie ad una matrice di sensori bidimensionale e un fascio che da una collimazione planare (*fan beam*) passa ad una collimazione tridimensionale (*cone beam*). Il movimento può essere convenzionale oppure a spirale e il tempo di acquisizione è molto basso, tra 2 e 6 secondi. Le caratteristiche di questo dispositivo sono la velocità di acquisizione, la scelta flessibile della risoluzione lungo z e l'isotropia spaziale [2].

2.5 Rivelatori di raggi X e sensori TC

I rivelatori di raggi X usati nei sistemi TC devono avere alta efficienza per minimizzare la dose di radiazione al paziente, un largo range dinamico, essere molto stabili nel tempo e insensibili alle variazioni di temperatura dentro il gantry.

I sensori che si usano nella tomografia computerizzata sono digitali e il loro compito è di contare i fotoni che li colpiscono. Possono essere allo stato solido (cristallo scintillante, fotodiodo) oppure a gas (camera di ionizzazione, Xenon ad alta pressione, oppure misurano la differenza di potenziale tra due piastre) [1] [2].

2.6 Sorgente di raggi X

Con l'eccezione dei tomografi a fascio elettronico, tutti gli scanner TC usano tubi a raggi X di bremsstrahlung come sorgente della radiazione. Questi tubi sono tipici nell'imaging diagnostico e producono raggi X accelerando un fascio di elettroni su un anodo bersaglio. L'area dell'anodo da cui il raggio X è emesso, proiettata lungo la direzione del fascio, è chiamata punto focale. Viene usato un gruppo collimatore per controllare la larghezza del fascio, e ciò comporta il controllo della profondità dello strato dell'immagine.

La collimazione nella sorgente determina la dimensione e il profilo del fascio (*dose profile*), mentre nel sensore determina la dimensione e il profilo dello strato (*slice profile*). La collimazione in un tomografo può essere fissa o variabile. Un tipo di filtro usato è il *bow-tie filter* (a farfallino), in teflon, che riduce il range dinamico dei sensori, lo scattering e la dose periferica di radiazioni.

La produzione di raggi X in tubi di bremsstrahlung è un processo inefficiente, la maggior parte della potenza riservata ai tubi va a finire nel riscaldamento dell'anodo. Viene usato uno scambiatore di calore nel gantry rotante per raffreddare il tubo. Le scansioni a spirale, in particolare, richiedono grandi capacità di immagazzinamento di calore e di raffreddamento del

tubo.

L'intensità del fascio di raggi X è attenuata dall'assorbimento e il processo di attenuazione avviene passando attraverso il paziente. Il grado di attenuazione dipende dall'energia dello spettro dei raggi X e dalla media della densità del numero atomico e di massa dei tessuti del paziente.

L'interazione tra raggi X e materia segue la legge di Lambert-Beer:

$$N = N_0 e^{-\mu x},$$

legge che sul piano del rivelatore, perpendicolare al fascio, diventa:

$$I_d = \int_0^{E_{max}} I_i(E) e^{-\int_0^d \mu(s; E) ds} dE$$

con I_d uguale all'intensità del fascio con il rivelatore a distanza d , I_i è l'intensità incidente, E l'energia dei raggi X, s una coordinata sulla linea sorgente-rivelatore, d la distanza sorgente-rivelatore e μ il coefficiente di attenuazione. Per risolvere l'integrale, introduciamo il concetto di *effective energy* E_{eff} (energia effettiva), come l'energia da una sorgente mono-energetica che produce la medesima misura di intensità:

$$I_d = I_i(E_{eff}) e^{-\int_0^d \mu(s; E_{eff}) ds},$$

che provoca un'attenuazione complessiva lungo la linea $s(i)$ sorgente-rivelatore pari a:

$$att_d = -\ln\left(\frac{I_d}{I_i}\right) = \int_0^d \mu(s; E_{eff}) ds$$

Ciò è valido per un singolo valore sul profilo di proiezione. Assumendo che la discretizzazione del volume lungo la i -esima linea $s(i)$ sia in volumetti di lunghezza Δx e facendo un'ipotesi di omogeneità di densità, e quindi attenuazione, all'interno dei singoli volumetti, allora:

$$I_d = I_i(i; E_{eff}) e^{-\int_0^d \mu(s(i); E_{eff}) ds},$$

$$I_d = I_i(i; E_{eff}) e^{-\sum_i \mu_{ij} \Delta x},$$

$$att_d = -\ln\left(\frac{I_d(i)}{I_i(i)}\right) = \sum_j \mu_{ij} \Delta x.$$

att_d , l'attenuazione complessiva lungo la linea $s(i)$, fornisce un singolo valore sul profilo di proiezione; dall'insieme dei profili di proiezione vengono poi stimati i vari μ_{ij} , cioè i coefficienti di attenuazione per i singoli volumetti [1] [2].

2.7 Sistema di acquisizione dati

La frazione I_d/I_i trasmessa attraverso un paziente di grossa corporatura può avere un valore inferiore a 10^{-4} , dunque è compito del sistema di acquisizione dati (DAS) di misurare I_d su un range dinamico di più di 10^4 , di codificare il risultato in valori digitali e trasmettere i valori al computer per la ricostruzione. Alcuni produttori usano approccio diverso, che usa

preamplificatori di precisione, convertitori corrente-tensione, integratori analogici, multiplexer e convertitori analogico-digitali. Altri produttori usano invece il preamplificatore per controllare un convertitore analogico-digitale sincrono, eliminando il bisogno di integratori, multiplexer e convertitori analogico-digitali. La conversione logaritmica richiesta per calcolare l'integrale di del coefficiente di attenuazione è eseguita da un amplificatore logaritmico digitale oppure con una lookup table digitale, a seconda dal produttore.

La velocità di trasferimento dei dati al computer può essere anche di 10 Mbytes/s per alcuni scanner; questo risultato può essere ottenuto con una connessione diretta per sistemi che hanno un gruppo di rivelatori fissi. Alcuni produttori usano trasmettitori ottici sul gantry rotante per mandare i dati a ricevitori ottici fissi [1].

2.8 Formazione e visualizzazione dell'immagine

Ogni voxel (elemento di volume) nel campo di scansione corrisponde ad un pixel dell'immagine digitale dello strato, rappresentata da una matrice di M righe e N colonne. Un'immagine digitale in bianco e nero è la rappresentazione di una matrice i cui elementi hanno un valore che va da 0 a 2^n-1 , con n pari al numero di bit per pixel (di solito 8 e quindi 256 valori), e rappresentano i vari livelli di grigio. Le immagini tomografiche hanno una loro scala, la *Scala di Hounsfield* (HU): L'unità HU è definita come:

$$HU = 1000 \left(\frac{\mu_t - \mu_w}{\mu_w} \right),$$

con μ_t pari al coefficiente di attenuazione del tessuto in esame e μ_w al coefficiente di attenuazione dell'acqua all'energia $E=73$ KeV. Il range tipico di valori è tra -1000 e +1000 (a 12 bit), dove $HU=+1000$ rappresenta l'osso denso, $HU=0$ l'acqua, mentre $HU=-1000$ l'aria. La zona più utile però è tra i -100 e i +200 HU: comprende le strutture a componenti lipidici (da -100 a -10 HU), edema o necrosi e liquido cefalo rachidiano (tra + 4 e +24 HU), materia grigia e bianca (tra +24 e +50 HU), ematomi recenti e coaguli (tra +50 e +70 HU) e strutture debolmente calcificate, come l'ipofisi, il plesso coroideo e vecchi ematomi (tra -70 e +200).

La visualizzazione dell'immagine avviene assegnando un livello di grigio ad ognuno di questi valori della scala di Hounsfield: nell'immagine all'osso denso corrisponderà il colore bianco, all'aria il nero e al resto i livelli di grigio intermedi [1].

Capitolo 3

TEORIA DEL COMPRESSED SENSING

3.1 Introduzione

Gli approcci convenzionali per il campionamento di segnali o immagini seguono il famoso Teorema di Shannon: esso definisce che la minima frequenza necessaria per campionare un segnale dev'essere almeno il doppio della frequenza del segnale, per non perdere le informazioni necessarie a ricostruire il segnale stesso (aliasing). Questo teorema è alla base di quasi tutti i protocolli di acquisizione dei segnali, dall'elettronica audio e video ai dispositivi medici [4]. Per alcuni segnali, come le immagini, che non hanno una banda limitata, l'indice di campionamento non è determinato dal Teorema di Shannon, ma dalla risoluzione spaziale o temporale desiderata. Tuttavia in questi sistemi è necessario usare un filtro passa basso antialiasing per limitare la banda prima del campionamento ed evitare artefatti, così il teorema di Shannon gioca un ruolo implicito anche in questo caso [5] [6].

Il Compressed Sensing (CS) introduce un nuovo paradigma di campionamento: sotto opportune ipotesi si possono ricostruire segnali e immagini da molti meno campioni o misure rispetto al metodo tradizionale. Per rendere possibile ciò si sfrutta il fatto che la maggior parte dei dati che vengono acquisiti possono essere eliminati senza avere una perdita significativa di informazione. Tramite una rappresentazione del segnale in un'opportuna base (ad esempio nel dominio della frequenza attraverso le Trasformate di Fourier), è possibile avere la gran parte dell'informazione utile attraverso un numero molto piccolo di campioni [5]. I vantaggi che porta questo nuovo teorema sono enormi: in campo medico, nella tomografia, si traduce nel poter ottenere un'immagine con un ridotto numero di campioni a parità di risoluzione riducendo in modo significativo la dose di radiazioni sul paziente.

Il Compressed Sensing si basa su due principi: la sparsità, che riguarda il segnale di interesse, e l'incoerenza, che riguarda invece la modalità di rilevamento (sensing).

La **sparsità** esprime l'idea che la percentuale di informazione di un segnale a tempo continuo sia molto minore di quanto suggerisce la sua larghezza di banda, oppure che un segnale a tempo discreto dipenda da un numero di gradi di libertà molto minore della sua lunghezza (finita). Più precisamente il CS sfrutta il fatto che molti segnali naturali sono sparsi o comprimibili, nel senso che hanno una rappresentazione concisa quando sono espressi nella giusta base, Ψ .

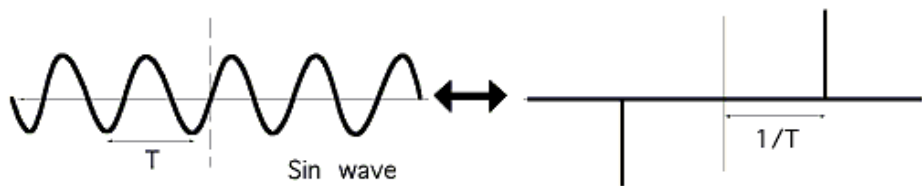


Figura 9: Grafici della funzione seno e della sua rappresentazione nel dominio della Trasformata di Fourier. L'informazione nel secondo grafico è concentrata in soli due punti mentre nel primo si sparge per tutto l'asse x.

L'**incoerenza**: estende la dualità tra tempo e frequenza ad altre basi, esprimendo l'idea che oggetti che hanno una rappresentazione sparsa in una base Ψ saranno distribuiti nel dominio in cui sono acquisiti come un impulso nel dominio del tempo è distribuito nel dominio della frequenza. In poche parole l'incoerenza esprime il fatto che, al contrario del segnale di interesse, le forme d'onda di campionamento in una certa base Ψ hanno una rappresentazione estremamente densa: tutta l'informazione è concentrata in pochi punti.

Con questi due principi si può vedere che una stretta relazione tra domini permette di passare da uno all'altro senza difficoltà, come con le trasformate di Fourier tra dominio del tempo e delle frequenze. Quando però sono note solo alcune informazioni a priori sul segnale, il procedimento di antitrasformazione porta a dover risolvere un sistema indeterminato di equazioni. Per trovare la soluzione corretta il problema si traduce allora nella minimizzazione con norma l_1 del sistema indeterminato di equazioni [5].

3.2 Storia del Compressed Sensing

Sebbene il termine *Compressed Sensing* sia stato coniato solo di recente da un articolo di Dave Donoho, (noto però anche come *Compressed Sampling* e *Compressive Sensing* o *Sampling*), il concetto, seguito da innumerevoli ricerche, non è nato dal nulla: ci sono state radici e concetti precedenti in svariate aree, come l'elaborazione delle immagini, l'imaging medico, la geofisica, la matematica e l'informatica.

Il primo algoritmo collegato alla ricostruzione di segnali sparsi, la *sparse recovery*, è da attribuire presumibilmente a Gaspard de Prony, matematico francese (1775-1839). Questo metodo, chiamato *metodo de Prony*, consisteva nello stimare le ampiezze non nulle e le corrispondenti frequenze di un polinomio trigonometrico sparso da un piccolo numero di campioni equispaziati, risolvendo un problema di autovalori. L'uso della minimizzazione mediante norma l_1 invece è apparso per la prima volta nella tesi di dottorato di B. Logan in connessione con la stima di frequenze sparse: osservò che questa minimizzazione riusciva a recuperare in modo esatto un segnale a frequenza sparsa da dati sottocampionati, a patto che la sparsità fosse sufficientemente piccola. Negli anni '70 e '80 i geofisici osservarono la minimizzazione con norma l_1 poteva essere applicata con successo alla sismologia: indicava i cambiamenti tra substrati della crosta terrestre. Nella spettroscopia NMR (Nuclear Magnetic Resonance, risonanza magnetica nucleare) l'idea di recuperare spettri di Fourier sparsi da

campioni non equispaziati sottocampionati fu introdotta per la prima volta negli anni '90 e ha avuto molti sviluppi da allora. Nell'elaborazione di immagini viene usata la minimizzazione di variazione totale (TV, total-variation minimization), che è strettamente correlata alla minimizzazione con norma l_1 e al Compressed Sensing, è apparsa negli anni '90 nel lavoro di Rudin, Osher e Fatemi e da quel momento fu ampiamente applicata.

Ha sicuramente contribuito alla teoria del Compressed Sensing anche il lavoro sulle tecniche di compressione come JPEG, JPEG-2000, MPEG o MP3, che sfruttano l'osservazione empirica che segnali audio e immagini digitali hanno una rappresentazioni sparsa in una base adatta. Il problema di compressione viene risolto semplicemente prendendo i coefficienti più grandi in modo selettivo, ma è un approccio costoso.

Nei lavori di Candès, Romberg e Tao sono state poi formalizzate le proprietà chiave del Compressed Sensing [4].

3.3 Il problema del sensing (rilevamento)

Le informazioni sul segnale f che vogliamo campionare sono ottenute facendo delle misure dei valori: $y_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ con $k = 1, \dots, m$.

Questo vuol dire che semplicemente correliamo l'oggetto che desideriamo acquisire con la forma d'onda $\varphi_k(t)$. Ad esempio se le forme d'onda di sensing sono δ di Dirac (impulsi), allora y sarà un vettore di valori campionati di f nel dominio dello spazio o del tempo; se le forme d'onda sono funzioni indicatrici dei pixel, allora y sarà l'insieme dei dati dell'immagine tipicamente raccolti in una fotocamera digitale; se sono sinusoidi, y sarà un vettore di coefficienti di Fourier. Quest'ultima è la modalità di sensing usata nell'imaging della risonanza magnetica.

Sebbene la teoria del CS si possa sviluppare con segnali continui in tempo o spazio, focalizziamo l'attenzione su segnali discreti $f \in \mathbb{R}^n$. Le ragioni principali di ciò sono sia che è concettualmente più semplice, sia che la teoria del CS discreta è molto più sviluppata. Detto questo, siamo interessati alle situazioni sottocampionate, nelle quali il numero m di misure disponibili è molto più piccolo della dimensione n del segnale f . Problemi di questo genere sono estremamente comuni in tante situazioni, ad esempio se il numero di sensori è limitato, oppure quando in un processo di imaging la misura è molto dispendiosa, oppure quando il processo di sensing è molto lento e si possono misurare solo pochi oggetti alla volta. Nel caso della tomografia questo è un problema molto importante, perché riducendo il numero di scansioni, si riduce notevolmente la dose di radiazioni per il paziente e si velocizza il processo di acquisizione.

Queste circostanze sollevano domande importanti: è possibile fare una ricostruzione accurata da soltanto $m \ll n$ misure? È possibile progettare $m \ll n$ forme d'onda di sensing che riescano a catturare quasi tutta l'informazione di f ? E come si può approssimare f da questa informazione? Certo, la situazione sembra scoraggiante, perché si dovrebbe risolvere un sistema lineare indeterminato di equazioni.

Definiamo A la matrice $m \times n$ di sensing, con i vettori $\varphi_1^*, \dots, \varphi_m^*$ come colonne (a^* è il complesso trasposto di a). Il processo di ricostruzione di $f \in \mathbb{R}^n$ da $y = Af \in \mathbb{R}^m$ è in generale mal posto quando $m < n$: ci sono infiniti candidati \bar{f} per cui $A\bar{f} = y$, ma forse si può immaginare una via d'uscita, basandosi su modelli realistici di oggetti f che esistono naturalmente. La teoria di Shannon ci dice che, se $f(t)$ ha una banda molto stretta, allora per la ricostruzione sarà sufficiente un piccolo numero di campioni (uniformi). Come vedremo, la ricostruzione di segnali può essere resa possibile per una classe molto più ampia di modelli di segnale [5].

3.4 Norme l_2 e l_1 come soluzione di un sistema lineare indeterminato

Quando un segnale viene trasformato in un'altra base, per poi ricostruirlo facendo l'antitrasformata, abbiamo bisogno di informazioni su tutti i coefficienti delle trasformate. Idealmente vorremmo misurare tutti gli n coefficienti di trasformazione di f , ma possiamo osservarne solo un sottoinsieme:

$$y_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k \in M \text{ con } M \subset [1, \dots, n] \text{ sottoinsieme di cardinalità } m < n.$$

Si crea così un sistema indeterminato di equazioni che è necessario risolvere per ricostruire il segnale. Cerchiamo di trovare la soluzione in due modi: minimizzando il sistema con le norme l_2 e l_1 .

Definizione 3.1: Norma l_2 o norma Euclidea. Preso un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ si definisce norma l_2 o norma Euclidea:

$$\|x\|_{l_2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_N|^2}$$

Definizione 3.2: Norma l_1 . Preso un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ si definisce norma l_1 :

$$\|x\|_{l_1} = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

Quale delle due minimizzazioni è migliore per risolvere il nostro problema? Consideriamo $b = Ax$, dove A è una matrice di m righe e n colonne, $n > m$ e supponiamo di voler trovare $x \in \mathbb{R}^N$ a partire da $b \in \mathbb{R}^M$. Proviamo le due minimizzazioni:

♣ Minimizzazione con norma l_2 (metodo dei minimi quadrati):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|b - Ax\|_{l_2}$$

In questo modo si attribuisce molto peso ai residui grandi e poco a quelli piccoli

♣ Minimizzazione con norma l_1 :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|b - Ax\|_{l_1}$$

Viene dato maggior peso ai residui piccoli e minore a quelli grandi rispetto alla minimizzazione con i minimi quadrati, perchè i termini non sono più elevati al quadrato.

Si può dimostrare empiricamente che quest'ultima è la soluzione più indicata. Questo fatto è anche visibile, rappresentando le due norme geometricamente: la norma Euclidea in tre dimensioni è rappresentata da una palla unitaria, mentre la norma l_1 da un tetraedro, che intercetta perfettamente la retta di equazione $y = Ax$. La norma Euclidea invece non fornisce un risultato altrettanto soddisfacente. Si faccia riferimento alla Fig. 11 per convincersene [4] [8].

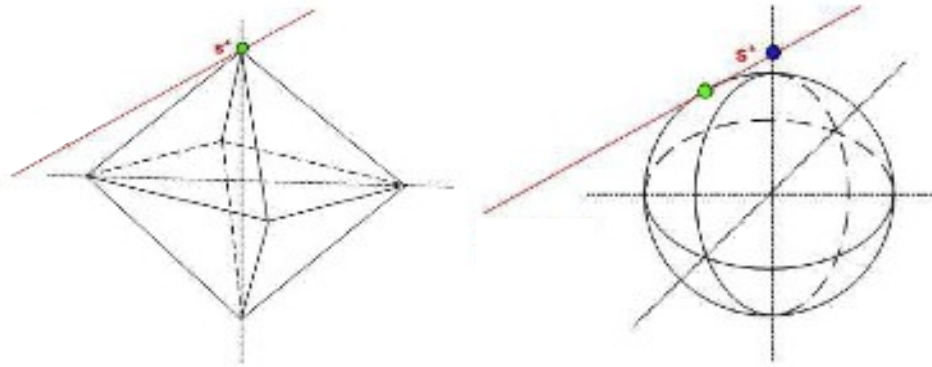


Figura 11: Rappresentazioni geometriche delle norme l_1 e l_2 [8].

3.5 Sparsità e Incoerenza

Riprendiamo i concetti di sparsità e incoerenza che avevamo visto nell'introduzione del capitolo. Molti segnali naturali hanno una rappresentazione concisa quando sono espressi in una base conveniente. Si pensi ad esempio ad un'immagine in bianco e nero: praticamente tutti i pixel avranno un valore diverso da zero, molti coefficienti saranno piccoli e invece i relativamente pochi grandi porteranno il più dell'informazione. Matematicamente parlando, prendiamo il vettore $f \in \mathbb{R}^n$ (come può essere un'immagine di n pixel) ed espandiamolo in una base ortonormale $\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n]$ così:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i(t),$$

dove x è la sequenza di coefficienti di f , $x_i = \langle f, \psi_i \rangle$. Sarà conveniente esprimere f in termini di Ψx , dove Ψ è la matrice $n \times n$ con i vettori ψ_1, \dots, ψ_n come colonne. L'implicazione della sparsità ora è chiara: quando un segnale ha espansione sparsa, i coefficienti piccoli possono essere eliminati senza grande perdita percentuale. In modo più formale, definiamo $f_S(t)$, ottenuto tenendo solo i termini corrispondenti agli S valori maggiori di (x_i) come $f_S := \Psi x_S$, dove x_S è il vettore dei coefficienti (x_i) con tutti i valori posti a zero tranne gli S maggiori. Questo vettore è sparso in senso stretto, dato che tutti i suoi valori sono pari a zero tranne qualcuno.

Definizione 3.3: Sparsità. Sono definiti S -sparsi gli oggetti che hanno al massimo S elementi non nulli.

Siccome Ψ è una base ortonormale, abbiamo che $\|f - f_s\|_{l_2} = \|x - x_s\|_{l_2}$; se x è sparso, allora è bene approssimato da x_s e dunque l'errore $\|f - f_s\|_{l_2}$ è piccolo. In termini più semplici, si potrebbe “buttare via” una grande frazione dei coefficienti senza avere una grande perdita percentuale.

Questo principio sta alla base di gran parte degli algoritmi di compressione lossy, come JPEG2000 e molti altri: questi processi richiedono la conoscenza di tutti gli n coefficienti x , della posizione degli elementi significativi dell'informazione e degli zeri di x , che potrebbe non essere nota a priori. Il Compressed Sensing porta ad una conseguenza sorprendente, ovvero che la sparsità ha significative implicazioni sul processo stesso di acquisizione, perché non ha bisogno di conoscere necessariamente tutti i coefficienti x .

Supponiamo ora di avere una coppia (Φ, Ψ) di basi ortonormali in \mathbb{R}^n . La prima base, Φ , è usata per l'acquisizione delle misure $y_k = \langle f, \varphi_k \rangle$, mentre la seconda, Ψ , è usata per rappresentare il segnale f .

Definizione 3.4: Coerenza. La coerenza tra la base di rilevamento Φ e la base di rappresentazione Ψ è definita come:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |(\varphi_k, \psi_j)|$$

In altre parole, la coerenza misura il grado di correlazione tra due qualsiasi elementi di Φ e Ψ ; la correlazione indica quanti elementi hanno in comune le due basi. Se Φ e Ψ contengono elementi correlati, la coerenza è grande, altrimenti è piccola. I valori che può assumere la correlazione sono nell'intervallo $[0, 1]$, quelli che può assumere la coerenza μ sono invece nell'intervallo $[1, \sqrt{n}]$. Ad esempio, se consideriamo Φ come base classica $\varphi_k(t) = \delta(t-k)$ e Ψ come base di Fourier $\psi_j(t) = n^{-1/2} e^{j \cdot 2\pi \cdot jt/n}$, la coerenza tra le due basi sarà $\mu(\Phi, \Psi) = 1$ e quindi avremo massima incoerenza.

In generale si può dire che matrici random sono largamente incoerenti con una qualsiasi altra base Ψ fissata: prendiamo una base Φ ortonormale random in modo uniforme (ciò si può fare ortonormalizzando n vettori campionati in modo indipendente e uniforme con valori nella sfera unitaria). Si dimostra che, con alta probabilità, la coerenza tra le basi Φ e Ψ è di circa $\sqrt{2 \log n}$. Si può estendere questo risultato al fatto che forme d'onda random $\varphi_k(t)$ con elementi indipendenti e identicamente distribuiti (i.i.d.), come forme d'onda Gaussiane o Bernoulliane, avranno una coerenza molto bassa con ogni base Ψ fissata [5].

3.6 Sottocampionamento e recupero del segnale sparso

Abbiamo detto che per ricostruire il segnale f^* , invece di misurare tutti gli n coefficienti di f , osserviamo e acquisiamo solo un sottoinsieme di essi: $y_k = \langle f, \varphi_k \rangle$, $k \in M$

dove $M \subset [1, \dots, n]$ è un sottoinsieme di cardinalità $m < n$.

Con questa informazione, ricostruiamo il segnale mediante la minimizzazione con la norma l_1 ;

la ricostruzione di f^* proposta è data da $f^* = \Psi x^*$, dove x^* è la soluzione della minimizzazione:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\bar{x}\|_{l_1} \text{ soggetto a } y_k = \langle \varphi_k, \Psi \bar{x} \rangle, \quad \forall k \in M.$$

Questo vuol dire che tra tutti gli oggetti $\bar{f} = \Psi \bar{x}$ coerenti con i dati, scegliamo quello che ha una sequenza di coefficienti con norma l_1 minima. La minimizzazione con norma l_1 non è tuttavia l'unico modo per trovare una soluzione sparsa, sono stati usati ad esempio anche algoritmi di tipo *greedy*, che però non analizziamo qui.

Il risultato che abbiamo raggiunto è che quando f è sufficientemente sparso, si può dimostrare che il recupero mediante la minimizzazione con norma l_1 è esatto.

Teorema 3.2: Si fissi $f \in \mathbb{R}^n$ e si supponga che la sequenza di coefficienti x di del segnale f in una opportuna base Ψ sia S -sparsa ($f = \Psi x$); si selezionino m misure nel dominio Φ in modo casuale. Allora se

$$m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot S \cdot \log n$$

per qualche costante positiva C , la soluzione alla minimizzazione con norma l_1 è esatta con probabilità molto alta.

È dimostrato che la probabilità di successo supera $1 - \delta$ se $m \geq C \cdot \mu^2(\Phi, \Psi) \cdot S \cdot \log(n/\delta)$; il risultato è garantito per quasi tutte le sequenze x con un supporto fissato.

Il ruolo della coerenza qui è molto visibile: più è piccola, meno campioni saranno necessari per avere una ricostruzione (probabilmente) esatta. Non c'è alcuna perdita di informazione misurando un qualsiasi sottoinsieme di m coefficienti, anche se la dimensione di m può apparire molto minore di quella del segnale. Se $\mu(\Phi, \Psi)$ è uguale o vicino a 1, allora sarà sufficiente un numero di campioni dell'ordine di $S \log n$, invece che n . Il segnale f può essere esattamente ricostruito da un insieme di dati condensati, senza avere nessuna informazione a priori sulla posizione e sull'ampiezza dei coefficienti x : basta avviare l'algoritmo e, se il segnale è sufficientemente sparso, avremo una ricostruzione esatta.

Questo teorema di campionamento incoerente estende il risultato al campionamento di segnali con spettro sparso: la sparsità può essere uno strumento di sensing molto efficace, dimostrato da prove rigorose. Supponiamo di voler campionare un segnale che ha uno spettro sparso e una banda molto larga, di forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{i2\pi j t/n}, \quad t = 0, \dots, n-1;$$

n è molto grande, ma il numero di componenti di x_j diverse da zero è minore o uguale a S (dunque molto sparso). Non sappiamo quali siano le frequenze attive e neppure l'ampiezza di questo insieme attivo. Siccome l'insieme attivo non è necessariamente un sottoinsieme di interi consecutivi, il teorema di Shannon-Nyquist non ci è utile: dato che non possiamo restringere la banda a priori, potrebbero esserci utili tutti gli n campioni nel tempo. Si può ricostruire un segnale di banda arbitraria e non nota a priori con numero di campioni nel tempo necessari pari a $S \log n$. Possiamo dire di più: questi campioni non devono essere scelti con attenzione, qualsiasi insieme di campioni di questa dimensione andrà bene.

Per avere dei risultati utili e consistenti, è necessario ricorrere anche all'aspetto probabilistico, poiché non si può sperare in risultati comparabili per tutti gli insiemi di misura di dimensione m . Ci sono segnali sparsi speciali che svaniscono praticamente ovunque nel dominio Φ ; in altre parole si possono trovare segnali f sparsi e un grande sottoinsieme di dimensione almeno pari a n (ad esempio $n - S$) per i quali $y_k = \langle f, \varphi_k \rangle = 0$ per tutti i $k \in M$. Da un lato, dati tali sottoinsiemi, si potrebbe pensare di vedere solo un flusso di zeri e che nessun algoritmo possa essere in grado di ricostruire il segnale, dall'altro il teorema garantisce che la frazione di insiemi per i quali non si verifica un recupero esatto è veramente trascurabile. Dobbiamo tollerare infatti una probabilità di errore estremamente bassa.

È interessante il fatto che lo studio di speciali segnali sparsi discusso in precedenza mostra che c'è bisogno di un numero di campioni dell'ordine almeno pari a $\mu^2 \cdot S \cdot \log n$. Esistono sottoinsiemi di cardinalità $2S$ nel dominio del tempo che possono ricostruire qualsiasi segnale S -sparso nel dominio della frequenza, ma non è ciò che ci interessa: vogliamo che la maggior parte degli insiemi di una certa dimensione forniscano un'esatta ricostruzione. Con meno campioni della quantità detta prima, la probabilità che l'informazione venga persa è troppo alta e la ricostruzione, usando un metodo qualsiasi, diventa impossibile. Insomma, quando la coerenza è pari a 1 non servono più di $S \cdot \log n$ campioni, ma non possiamo fare niente se i campioni sono di numero inferiore.

In generale i segnali non sono esattamente sparsi, ma solo approssimativamente: è possibile dunque ottenere una ricostruzione accurata dato il piccolissimo numero di campioni? Inoltre nelle applicazioni reali i dati misurati sono invariabilmente soggetti da almeno una piccola quantità di rumore, visto che i dispositivi di sensing non hanno precisione infinita. È dunque inevitabile che piccole perturbazioni nei dati causino perturbazioni nella ricostruzione. Consideriamo il problema del recupero di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ dalle misure

$$y = Ax + z,$$

dove A è la matrice di sensing di dimensione $m \times n$, che ci dà informazioni sulla dimensione di x , e z è un termine di errore deterministico o stocastico.

Siccome avevamo detto che $f = \Psi x$ e che $y = R\Phi f$ (R è una matrice $m \times n$ che estrae le coordinate di campionamento in M), possiamo scrivere che

$$y = Ax \text{ con } A = R\Phi\Psi.$$

Ci si ricordi che x potrebbe essere la sequenza di coefficienti dell'oggetto in una base appropriata [4] [5].

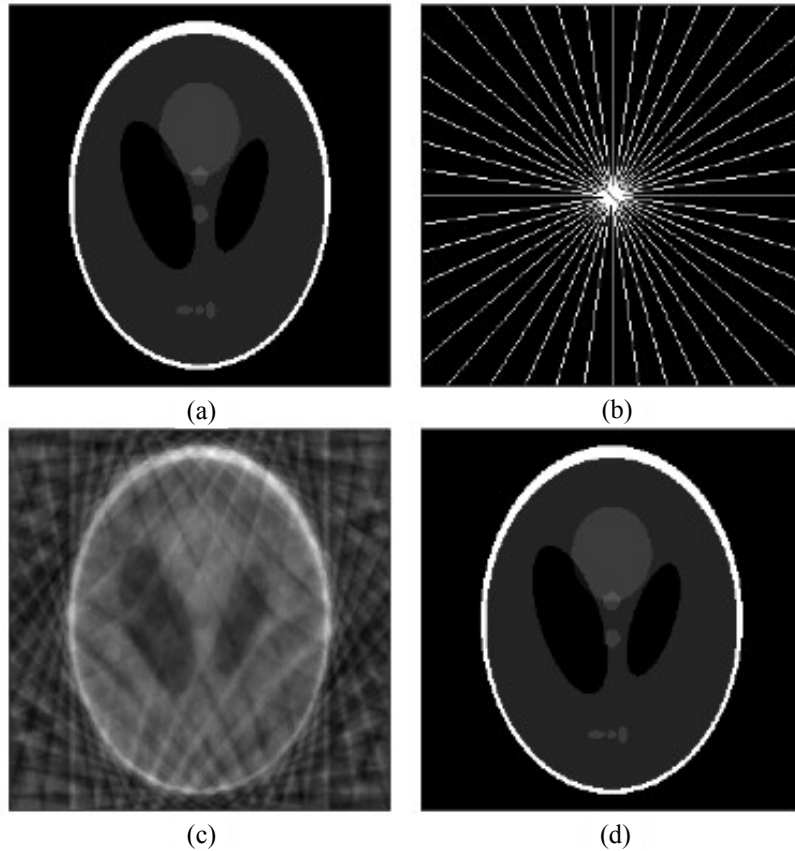


Figura 12: Esempio di recupero di un'immagine. (a) L'immagine di test *Logan-Shepp phantom*, il fantasma di Logan-Shepp. (b) Campionamento nel dominio della frequenza. I coefficienti di Fourier sono campionati sulle 22 linee, al di fuori delle linee sono posti a zero. (c) Ricostruzione con norma l_2 . (d) Ricostruzione con norma l_1 . [4]

3.7 Isometria ristretta

Definizione 3.5: Costante di isometria. Per ogni intero $S = 1, 2, \dots$ si definisce costante di isometria δ_S di una matrice A il più piccolo numero tale che

$$(1 - \delta_S) \|x\|_{l_2}^2 \leq \|Ax\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S) \|x\|_{l_2}^2$$

sia valida per tutti i vettori x S -sparsi.

Diremo che la matrice A obbedisce alla proprietà dell'**isometria ristretta (RIP)** di ordine S se δ_S non è troppo vicino a 1. Quando questa proprietà è valida, A conserva approssimativamente la norma euclidea del segnale S -sparso, che a sua volta significa che tutti i sottoinsiemi di S colonne prese da A sono approssimativamente ortogonali (solo approssimativamente perché ci sono più colonne che righe).

Per vedere la connessione tra la RIP e il Compressed Sensing immaginiamo di acquisire segnali S -sparsi con la matrice di sensing A e supponiamo che δ_{2S} sia sufficientemente minore

di uno. Questo implica che tutte le distanze tra i vari segnali S-sparsi devono essere preservate nello spazio di misura, cioè che

$$(1 - \delta_{2S}) \|x_1 - x_2\|_{l_2}^2 \leq \|Ax_1 - Ax_2\|_{l_2}^2 \leq (1 + \delta_S) \|x_1 - x_2\|_{l_2}^2$$

vale per tutti i vettori S-sparsi x_1 e x_2 .

In parole povere se le colonne di A non sono ortogonali succede che

$$Ax = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = 0 \rightarrow Ax_1 = Ax_2$$

La ricostruzione diventerebbe impossibile in quanto non saremmo in grado di distinguere i due vettori. Questo incoraggiante fatto garantisce l'esistenza di un algoritmo efficiente e robusto per discriminare segnali S-sparsi basandosi sulle loro misure di compressione [4] [5].

3.8 Recupero del segnale da segnali sottocampionati

Se la RIP (proprietà dell'isometria ristretta) vale, allora c'è un'accurata ricostruzione dei segnali:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{x}\|_{l_1} \text{ soggetto a } A\tilde{x} = y = Ax$$

Teorema 3.3: Assumiamo che $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$. Allora la soluzione di x^* obbedisce a:

$$\|x^* - x\|_{l_2} \leq \frac{C_0 \cdot \|x - x_S\|_{l_1}}{\sqrt{S}} \quad \text{e}$$

$$\|x^* - x\|_{l_1} \leq C_0 \cdot \|x - x_S\|_{l_1}$$

per qualche costante C_0 , dove x_S è il vettore con solo gli S valori maggiori e il resto posto a zero.

Questo vuol dire che se x è S-sparso, allora $x = x_S$ e dunque la ricostruzione è esatta. Questo teorema però può lavorare con tutti i segnali: se x non è S-sparso, allora la qualità del segnale ricostruito è buona come se già si conoscesse la posizione degli S valori maggiori di x e si decidesse di misurare direttamente quelli. In altre parole la ricostruzione è buona quasi quanto quella fornita da un oracolo che, con conoscenza di x piena e perfetta, estragga per noi gli S pezzi di informazione più importanti.

Il teorema, inoltre, dà risultati deterministici e non probabilistici. Se siamo abbastanza fortunati da avere una matrice A che obbedisce alle ipotesi del precedente teorema, possiamo applicarla, sicuri di ricostruire *tutti* gli S-vettori sparsi in modo esatto, e sostanzialmente avere gli S valori maggiori di *tutti* i vettori senza probabilità di fallire.

A questo punto quello che manca è la relazione tra S , il numero di componenti che possiamo effettivamente recuperare, e m , il numero di misure o righe della matrice. Per avere dei risultati consistenti vorremmo trovare una matrice che obbedisce alla RIP con dei valori di S molto vicini a m . Si possono progettare matrici del genere? La risposta fortunatamente è sì [5].

3.9 Recupero del segnale da campioni rumorosi

Supponiamo di avere un segnale rumoroso e usare la minimizzazione con norma l_1 con vincoli ampi per la ricostruzione:

$$\min \|\tilde{x}\|_{l_1} \text{ soggetta a } \|A\tilde{x} - y\|_{l_2} \leq \varepsilon,$$

dove ε delimita la quantità di rumore nei dati.

Teorema 3.4: Assumiamo che $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$. Allora la soluzione di x^* alla precedente minimizzazione con rumore obbedisce a:

$$\|x^* - x\|_{l_2} \leq C_0 \cdot \|x - x_S\|_{l_1} / \sqrt{S} + C_1 \cdot \varepsilon \text{ per qualche costante } C_0 \text{ e } C_1.$$

L'errore di ricostruzione è legato alla somma di due termini: il primo è l'errore che si avrebbe con dati privi di rumore, il secondo è proporzionale al livello di rumore. Le costanti C_0 e C_1 hanno tipicamente un valore piccolo.

Questo teorema stabilisce che il Compressed Sensing è un meccanismo di sensing pratico e robusto, lavora con tutti i tipi di segnali sparsi e gestisce il rumore con grazia [5].

3.10 Progettazione delle matrici di sensing

Quello che resta da fare ora è progettare una matrice di sensing efficiente e che obbedisca alla RIP (proprietà dell'isometria ristretta), ovvero che abbia dei vettori colonna, presi da sottoinsiemi arbitrari, che siano circa ortogonali. Più grandi sono questi sottoinsiemi, più facile sarà questo compito. Se si prende una matrice di sensing in modo casuale (formata ad esempio dal campionamento di n vettori colonna in modo random uniforme sulla sfera unitaria di \mathbb{R}^m , oppure dalla distribuzione normale con media 0 e varianza $1/m$, ecc), questa con grandissima probabilità obbedirà alla RIP, a condizione che

$$m \geq C \cdot S \log(n/S),$$

con C pari a qualche costante che dipende dall'insieme. La probabilità di campionare una matrice che non obbedisce alla RIP è davvero piccola.

Non ci sono altre matrici di misura o altri algoritmi di ricostruzione che giungono alla conclusione che da segnali sparsi si arriva ad una perfetta ricostruzione del segnale.

Se si desidera avere una probabilità di fallire non più grande di $O(n^{-\beta})$ per qualche $\beta > 0$, allora possiamo trovare m così:

$$m \geq C \cdot S (\log n)^5,$$

anche se probabilmente la relazione vale anche solo per $\log n$. Questo prova che si possono ricostruire in modo stabile ed accurato tutti i segnali quasi sparsi da dati estremamente sottocampionati in un dominio incoerente.

Infine possiamo dire che la RIP vale anche per matrici di sensing nella forma $A = \Phi\Psi$, dove Ψ è una base ortonormale arbitraria e Φ una matrice di misura di dimensione $m \times n$ presa in modo random da una distribuzione adatta. In un certo senso queste matrici Φ di misura

random sono universali, la base sparsa non deve nemmeno essere nota quando si progetta il sistema di misura! [5] [7]

Ecco i due esempi più rilevanti di matrici di sensing A casuali, da cui si possono ottenere stime ottimali per le costanti RIP in termini del numero m di misure che soddisfano la RIP con una concentrazione diseguale:

- ♣ Matrici Gaussiane: gli elementi di A sono variabili aleatorie Gaussiane indipendenti e identicamente distribuite con media 0 e varianza $1/m$.
- ♣ Matrici Bernoulliane: gli elementi di A sono realizzazioni indipendenti di $\pm 1/\sqrt{m}$ variabili aleatorie di Bernoulli, cioè ogni elemento prende il valore di $+1/\sqrt{m}$ oppure $-1/\sqrt{m}$ con uguale probabilità [4].

3.11 Vantaggi del Compressed Sensing

L'acquisizione dei dati di solito funziona così: una quantità massiccia di dati viene raccolta solo per essere in larga parte scartata nella fase della compressione per facilitare l'archiviazione e la trasmissione. Per acquisire un array f di pixel ad alta risoluzione dunque si calcola la serie completa dei coefficienti di trasformazione, si codificano i coefficienti maggiori e si scartano tutti gli altri, per finire in sostanza ad avere f_S : questo processo massiccio di acquisizione di dati, seguito dalla compressione, è estremamente dispendioso.

Il Compressed Sensing invece opera in maniera diversa, secondo la filosofia del “se è possibile, acquisire direttamente solo le informazioni importanti del segnale di interesse tralasciando il resto”. Prendendo un numero di misure nell'ordine di $O(S \log(n/S))$, si hanno sufficienti informazioni per ricostruire il segnale con un'accuratezza almeno buona quanto quella fornita da f_S , la migliore approssimazione (rappresentazione compressa) dell'oggetto di S termini. In altre parole, il protocollo di misura con il CS essenzialmente traduce dati analogici in forma digitale già compressa, in modo da ottenere, almeno in linea di principio, segnali ad alta risoluzione con pochissimi sensori.

C'è bisogno solo di “decomprimere” i dati misurati dopo l'acquisizione [5].

Capitolo 4

COMPRESSED SENSING NELLA TOMOGRAFIA COMPUTERIZZATA

4.1 Introduzione

Tutti gli scanner TC espongono il paziente a delle radiazioni, la quantità precisa dipende dalla risoluzione dell'immagine e dalla qualità desiderata, dalla dimensione del volume scansionato, dalla corporatura del paziente e il protocollo di scansione usato. In generale la tecnologia TC richiede una dose di radiazioni molto maggiore rispetto ad una radiografia convenzionale: per un esame TC addominale serve una dose di radiazioni pari a quella di 50 radiografie! Dunque per questo tipo di esame così largamente usato c'è un costo: l'incremento di radiazioni e i rischi associati ad esso. Infatti la TC ha contribuito in modo spropositato al problema dell'esposizione alle radiazioni: uno studio inglese, ad esempio, mostra che sebbene la TC costituisce il 4% degli esami diagnostici, provoca il 40% di esposizione alle radiazioni [17]. Non ci sorprende allora che ci sia una grande area di ricerca volta alla diminuzione della dose di radiazioni senza però compromettere la qualità dell'immagine [18].

La tomografia computerizzata, che acquisisce una serie di proiezioni di oggetti da varie angolazioni, produce i tomogrammi degli oggetti tramite una tecnologia di ricostruzione delle immagini. Quando le proiezioni sono densamente campionate, le immagini possono essere ricostruite in modo accurato attraverso un metodo analitico obbedendo al teorema di Nyquist-Shannon; questo metodo è ampiamente usato nei sistemi di TC attuali. Se consideriamo dati contenenti un numero ridotto di proiezioni campionate in modo sparso, gli algoritmi analitici renderanno delle immagini ricostruite con inaccettabili artefatti di aliasing. Si possono ridurre il tempo di scansione e la dose di radiazioni diminuendo il tempo di esposizione ai raggi X ad ogni proiezione, tuttavia ciò porta ad avere un rapporto segnale-rumore (SNR) molto minore e di conseguenza una minor qualità dell'immagine ricostruita. Un altro approccio è quello di diminuire il numero di proiezioni.

Si può pensare di ricostruire immagini da un numero significativamente ridotto di proiezioni, diminuire il tempo di scansione e minimizzare la dose di radiazioni senza compromettere la qualità dell'immagine utilizzando il CS [9].

L'ipotesi iniziale per usare questo tipo di algoritmo è che il segnale dev'essere sparso. Le domande che dobbiamo porci quindi sono: le immagini mediche come quelle TC sono sparse? E se non sono sparse possiamo renderle tali attraverso qualche trasformata?

La risposta è che le immagini TC spesso non sono sparse nella rappresentazione originale, cioè in pixel, tuttavia usando operazioni di sottrazione si possono rendere significativamente più sparse. Nella teoria del CS vengono applicate delle trasformate per rendere l'immagine sparsa, dette trasformate di sparsità, come ad esempio l'operatore gradiente discreto o semplicemente la trasformata di Fourier [18].

4.2 Sparsità e operatore Gradiente

La sparsità è un vincolo potente, ma generale, perché nel CS l'immagine (o il dato) dev'essere sparsa solamente in un certo dominio, non serve che lo sia nel dominio di partenza dell'immagine. Le immagini naturali hanno una buona predisposizione alla compressione con perdita di informazioni visibile nulla o minima e le immagini mediche sono comprimibili allo stesso modo.

Ricordiamo che una trasformata di sparsità è un operatore che mappa un vettore di un'immagine in un vettore sparso. Ad esempio le immagini costanti a tratti possono essere rappresentate in modo sparso da differenze finite nello spazio (come possono essere le differenze tra pixel vicini); queste differenze però svaniranno lontano dai bordi. Le immagini della vita reale, come anche tomografie e risonanze magnetiche, ovviamente non sono regolari a tratti, ma in alcuni problemi in cui i bordi sono l'informazione più importante, facendo operazioni di differenze finite si può arrivare ad una rappresentazione sparsa.

Quando si passa da un'immagine completamente campionata nel dominio del tempo alla sua trasformata in un dominio in cui l'immagine risulta sparsa, la ricostruzione di un'approssimazione dell'immagine avviene considerando il sottoinsieme dei coefficienti più grandi della trasformata. La sparsità dell'immagine è rappresentata dalla percentuale di coefficienti della trasformata sufficienti per una ricostruzione dell'immagine di buona qualità diagnostica. La *qualità diagnostica* è di certo un termine soggettivo, ma è possibile una stima empirica della sparsità facendo test clinici e valutando la ricostruzione delle immagini quantitativamente e qualitativamente.

Una buona trasformata di sparsità per le immagini tomografiche, oltre alla trasformata di Fourier, può essere l'**operatore gradiente**, definito come:

$$\nabla_{m,n} X(m,n) = \sqrt{(D_x X)^2 + (D_y X)^2},$$

dove $X(m,n)$ è il valore dell'immagine nel pixel (m, n) , mentre

$$D_x X = X(m+1, n) - X(m, n) \text{ e } D_y X = X(m, n+1) - X(m, n)$$

sono le differenze tra pixel vicini in senso orizzontale e verticale. Il gradiente $\nabla X(m,n)$ è un operatore differenziale del primo ordine, che, facendo differenze tra pixel adiacenti, tiene solamente le informazioni sui bordi dell'immagine, rendendo uniformi le zone senza discontinuità. Esistono operatori anche del secondo ordine, come l'operatore Laplaciano, che amplificano in maniera molto maggiore le discontinuità, creando però una situazione di bordo doppio, amplificando in maniera maggiore anche il rumore. È da notare che l'operatore

gradiente genererà un'immagine in cui le regioni uniformi sono nere (la differenza dei valori è zero), mentre i bordi saranno bianchi o grigi.

L'immagine con il gradiente discreto è molto più sparsa dell'immagine originale. Come si può vedere in Fig. 13, l'immagine originale, con a fianco l'istogramma dei suoi pixel, può essere confrontata con l'immagine del gradiente, con il relativo istogramma.

Per quantificare però, definiamo che un pixel è significativo se il suo valore è maggiore del 10% di quello del pixel di valore maggiore nell'immagine; gli istogrammi mostrano solo i pixel significativi. Dagli istogrammi vediamo che l'immagine gradiente è ben 3 volte più sparsa dell'originale, dunque l'informazione sui bordi di un'immagine medica può essere resa sparsa anche se nell'originale non lo era.

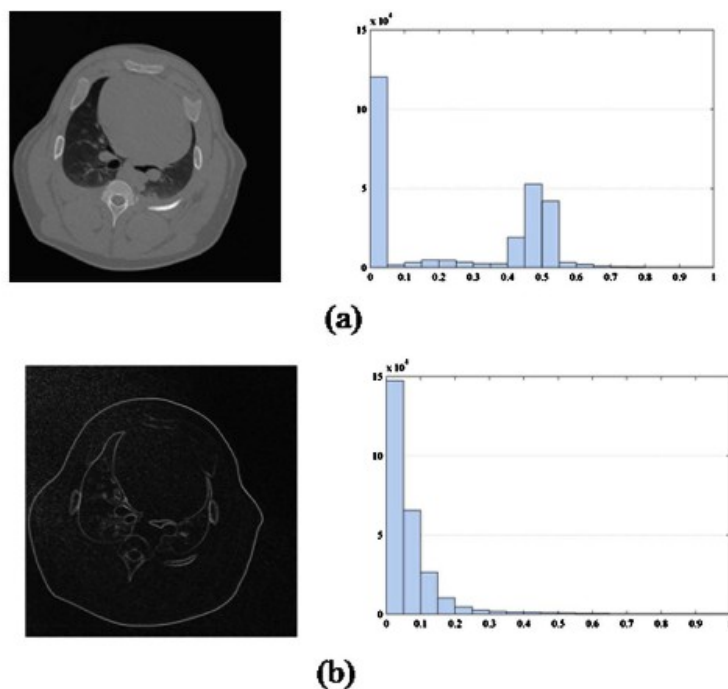


Figura 13: (a) immagine tomografica originale e il suo istogramma della rappresentazione dei pixel e (b) rappresentazione dell'immagine con l'operatore gradiente e il suo istogramma dei pixel [12].

Le trasformate di sparsità più usate nella ricostruzione delle immagini con il CS sono le trasformate gradiente discreto e le trasformate wavelet; la trasformata gradiente discreto è stata recentemente utilizzata per ricostruire immagini di tomografie computerizzate [12].

4.3 Incoerenza nel campionamento:

“Randomness is too important to be left to chance” [11]

L'incoerenza è un ingrediente essenziale nel Compressed Sensing nel dominio sparso di

trasformazione. Nei primi articoli sul CS i sottoinsiemi di dati sono stati campionati completamente a caso solo per semplificare i conti, ma ciò ha garantito un elevato grado di incoerenza.

Campionare punti a caso però non è molto pratico, dato che le traiettorie devono essere relativamente regolari per motivi fisiologici e di hardware, dunque vorremmo progettare uno schema di campionamento incoerente pratico, che imiti il più possibile le proprietà dell'incoerenza del campionamento random puro e allo stesso tempo consenta un rapido raccoglimento dei dati.

Ci sono molti modi per progettare delle traiettorie incoerenti di campionamento, ma per semplificare considereremo solo il caso della griglia Cartesiana di campionamento, dove il campionamento è limitato al sottocampionamento della fase e di letture completamente campionate. Anche se sono possibili altre traiettorie di campionamento molto promettenti, ci concentriamo sul campionamento Cartesiano perché è sicuramente il più usato nella pratica [11].

4.4 Campionamento random con densità variabile

La nostra analisi dell'incoerenza fino ad adesso assumeva che i pochi valori diversi da zero fossero sparpagliati tra i vari valori nella rappresentazione del dominio di trasformazione. La rappresentazione di immagini naturali mostra una varietà di strutture non random significative. Per prima cosa spesso gran parte dell'energia è concentrata vicino all'origine dello spazio nel dominio di rappresentazione, poi si può osservare che i componenti dell'immagine con una scala grezza tendono ad essere meno sparsi di quelli con scala più raffinata. Queste osservazioni mostrano che, per una miglior prestazione con le immagini reali, si dovrebbe sottocampionare meno vicino all'origine dello spazio del dominio di rappresentazione e più in periferia. Per esempio si potrebbero scegliere campioni in modo random con densità di campionamento in relazione alla distanza dall'origine.

In passato sono stati proposti schemi a densità variabile per imaging Cartesiano, radiale e elicoidale, visto che l'aliasing appare incoerente. In questi schemi le componenti dell'immagine ad alta energia e bassa frequenza hanno più aliasing di quelle a energia minore e frequenza maggiore, quindi l'interferenza appare come rumore bianco nel dominio dell'immagine. Questo è proprio il caso che desideriamo nel CS: solo nel CS è anche possibile rimuovere l'interferenza dell'aliasing senza degradare la qualità dell'immagine [11].

4.5 Quanti campioni è necessario acquisire?

Un vincolo teorico sul numero di campioni di Fourier indica che c'è bisogno di campionare rispettando il numero di coefficienti sparsi. Tuttavia, come hanno osservato molti ricercatori nella pratica, per una buona ricostruzione il numero di campioni dovrebbe essere grossomodo dalle 2 alle 5 volte il numero di coefficienti sparsi S .

Trovare uno schema di campionamento ottimale che minimizzi l'incoerenza per un numero dato di campioni è un problema di ottimizzazione combinatoria e potrebbe non essere risolvibile. Tuttavia, scegliendo dei campioni casuali il problema ha spesso una soluzione buona, incoerente e quasi ottimale [11].

4.6 Ricostruzione dell'immagine

L'essenza del metodo proposto è di formulare la ricostruzione dell'immagine TC attraverso una struttura di campionamento CS che comporta due grandi passi. Il primo è fare la misura della matrice A dalla mappa che rappresenta l'attenuazione dei raggi X attraverso l'oggetto. Il secondo consiste nel derivare la misura b dalle proiezioni ottenute secondo angoli differenti. Quando A e b sono noti, il problema di CS può essere risolto con algoritmi di ottimizzazione adeguati.

Si supponga che l'immagine di interesse sia un vettore x ; siano Ψ l'operatore lineare che trasforma da rappresentazione in pixel a rappresentazione sparsa e F_u la trasformata di Fourier sottocampionata, che corrisponde a uno degli schemi di sottocampionamento discussi in precedenza. La ricostruzione è ottenuta risolvendo il noto problema di ottimizzazione:

$$\min \|\Psi x\|_{l_1}, \text{ soggetto a } \|F_u x - y\|_{l_2} < \varepsilon$$

Qui x è l'immagine ricostruita, y è il dato misurato dallo scanner e ε controlla il grado di fedeltà della ricostruzione rispetto al dato misurato. Il parametro di soglia ε è solitamente fissato sotto il livello di rumore atteso. La minimizzazione promuove la sparsità, il secondo vincolo invece dà consistenza ai dati: tra tutte le soluzioni accettabili tra i dati acquisiti, si trova la soluzione più sparsa nel dominio della trasformata Ψ .

Quando vengono usate differenze finite come trasformata di sparsità, l'equazione di minimizzazione è riferita spesso alla Variazione Totale (TV, total variation), visto che è la somma delle variazioni assolute dell'immagine e viene scritta come $TV(x)$. Anche quando vengono usate altre trasformate di sparsità sull'obiettivo, è spesso utile includere il termine TV : può essere considerato come richiedere che l'immagine sia sparsa sia nel dominio della trasformata specifica che da quella a differenze finite allo stesso tempo. In questo caso l'equazione diventa:

$$\min \|\Psi x\|_{l_1} + \alpha TV(x), \text{ soggetto a } \|F_u x - y\|_{l_2} < \varepsilon$$

dove α bilancia la sparsità in Ψ con la sparsità alle differenze finite [11].

4.7 Presenza di rumore e artefatti

La ricostruzione con norma l_1 tende a ridurre leggermente la grandezza dei coefficienti sparsi ricostruiti rispetto ai coefficienti del segnale originale. Questa riduzione dei coefficienti diminuisce quando il parametro ε della consistenza della ricostruzione è piccolo. In alcune ricostruzioni CS basate su wavelet possono apparire piccoli artefatti oscillatori ad alta

frequenza, dati dal falso rilevamento della scala più raffinata dei componenti del wavelet. Per attenuare questi artefatti si aggiunge un piccolo termine TV per avere sparsità nelle trasformate di wavelet e di differenze finite.

Nel CS il contrasto nell'immagine gioca un grande ruolo nell'abilità di sottocampionare e poi ricostruire le immagini. Un alto contrasto spesso porta ad avere coefficienti sparsi molto distinti e quindi si può ricostruire l'immagine con grande accelerazione. Alla stessa accelerazione immagini con caratteristiche di contrasto minore saranno profondamente sommerse dall'interferenza, tanto da non essere più recuperabili. Così, con accelerazione aumentata, gli artefatti più distinti nel CS non corrispondono più all'usuale perdita di risoluzione o incremento dell'interferenza dell'aliasing, ma a perdita di caratteristiche di basso contrasto nell'immagine.

Dunque il CS è particolarmente invitante nelle applicazioni che mostrano immagini con caratteristiche di alta risoluzione, alto contrasto e in cui è richiesto un imaging veloce, come le immagini tomografiche [11].

4.8 Applicazioni del Compressed Sensing nella Tomografia Computerizzata

Vediamo ora alcuni esempi di applicazioni specifiche del CS nella TC.

4.8.1 Tomografia ottica molecolare a bioluminescenza [13]

L'imaging ottico molecolare, come la tomografia molecolare a fluorescenza (FMT) e la tomografia a bioluminescenza (BLT), rappresenta i cambiamenti biologici e fisiologici in piccoli animali *in vivo* attraverso il ripristino delle informazioni di una sorgente luminosa, utilizzando sonde molecolari. Le informazioni *a priori* giocano un ruolo fondamentale nella ricostruzione dell'immagine; come tipo di informazione *a priori*, la caratteristica di sparsità della sorgente di luce non è considerata sufficientemente nota. Questo metodo usa la natura sparsa della sorgente per migliorare la qualità della ricostruzione, con un'implementazione di regolarizzazione.

L'imaging ottico *in vivo* in piccoli animali è diventato uno strumento importante per scoperte biologiche e applicazioni pre-cliniche. Quando vengono usati dei modelli sui topi con sonde molecolari ottiche, le sonde, che fungono da sorgenti di luce, riflettono le corrispondenti informazioni biologiche attraverso l'emissione di fotoni nel campo visibile o vicino alla luce infrarossa. La strumentazione di imaging ottico molecolare è usata per rivelare la distribuzione dei fotoni sulla superficie del piccolo animale in modo non invasivo. Negli ultimi anni l'imaging ottico molecolare planare e la bioluminescenza sono stati applicati in modo estensivo in studi di tumorigenesi (generazione di nuovi tumori), diagnosi di cancro, rilevamento di metastasi, scoperta e sviluppo di farmaci e terapie geniche.

Un parametro indispensabile per la tomografia a bioluminescenza è l'informazione *a priori*, che può essere usata per localizzare la sorgente ottica. In teoria la prova di unicità della sorgente fornisce un riferimento importante: più ricca è l'informazione *a priori* che si applica, più la BLT può produrre miglioramenti nella ricostruzione. Le informazioni *a priori* che

vengono più utilizzate sono informazioni anatomiche, per assegnare proprietà ottiche rilevanti agli organi, misure con risoluzione nello spettro, per considerare la sorgente dello spettro e le caratteristiche di assorbimento del tessuto e di scattering, e la distribuzione di fotoni sulla superficie, per migliorare la ricostruzione vincolando la posizione ammessa della sorgente. Per ridurre gli effetti del rumore e avere una buona ricostruzione delle immagini si usa il Compressed Sensing: viene garantita un'esatta ricostruzione da un numero molto ridotto di misure. Nel BLT le sorgenti non note sono contenute nel dominio di ricostruzione; le misure non invasive acquisiscono solamente la distribuzione sulla superficie di fotoni emessi da sorgenti bioluminescenti. Quando si usano piccoli elementi per discretizzare l'intero dominio, il numero di punti di discretizzazione della superficie è significativamente minore rispetto a quello dei punti di discretizzazione volumetrica e quindi è inevitabile avere un sottocampionamento per la ricostruzione BLT. Si ha bisogno inoltre di avere viste da più angolazioni per avere delle buone ricostruzioni, a causa dei limiti ottici. Fortunatamente quando si usano sonde ottiche per osservare processi biologici specifici, il dominio della sorgente di luce è relativamente piccolo e sparso rispetto all'intero dominio di ricostruzione, in questo caso del corpo del topo. Dunque, con una combinazione tra informazioni a priori e teoria del CS, viene proposto un nuovo algoritmo di ricostruzione a bioluminescenza a risoluzione nello spettro.

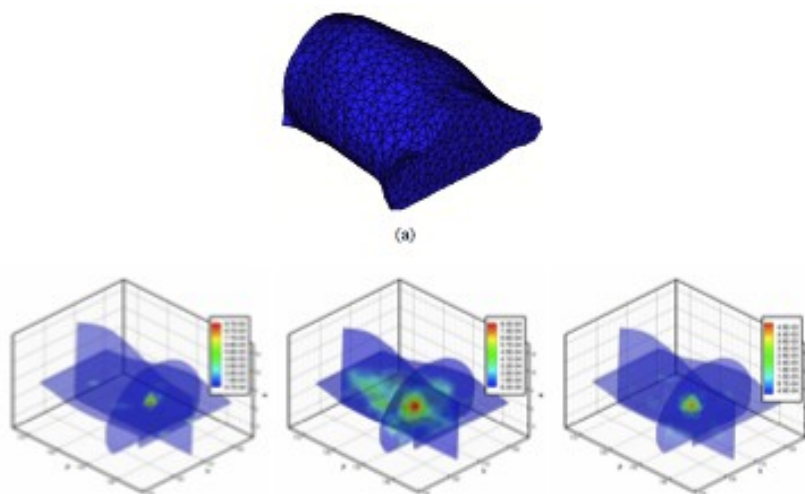


Figura 14: Ricostruzione di BLT sperimentale con uno spettro a forma di topo. (a) Maglia volumetrica usata per la ricostruzione. Le altre figure sono le ricostruzioni (b) senza regolarizzazione, (c) usando la norma l_2 e (d) usando la norma l_1 [13].

4.8.2 Tomosintesi 3D da immagini TC e rimozione degli artefatti inter-piano [14]

La tomosintesi sta guadagnando un ruolo importante nelle diagnosi cliniche, grazie alle caratteristiche duali di tomografia computerizzata e radiografia, è un metodo per eseguire tomografie ad alta risoluzione e ad angolazione limitata. Siccome i dati acquisiti sono incompleti, la tomosintesi non riesce a fornire strati sottili quanto le TC convenzionali, ma vengono usati dei rivelatori ad alta risoluzione, che permettono una buona risoluzione planare

anche se la risoluzione dell'asse x è bassa. L'interesse primario della tomosintesi è l'imaging del seno, come estensione alla mammografia, specialmente per la ricerca di cancro al seno, offrendo una maggiore risoluzione con lo svantaggio di un aumento di radiazioni [15].

La tomosintesi può essere incorporata nei molti tipi di sistemi di imaging con raggi X che hanno come dispositivo di acquisizione dell'immagine un pannello di rivelatori piatto (FPD, flat panel detector). Un grande vantaggio degli FPD è che non hanno distorsione spaziale nell'acquisizione dell'immagine, il che è essenziale per una ricostruzione accurata dell'immagine nella tomosintesi. Al contrario delle immagini con TC, dove la risoluzione assiale è la preoccupazione principale, la tomosintesi ha lo scopo di avere immagini con alta risoluzione laterale. La tomosintesi, oltre ad avere una risoluzione laterale superiore, ha un grande potenziale clinico perché ha bisogno di una dose minore di radiazioni in confronto alla TC.

A causa del limitato angolo di scansione della tomosintesi, solitamente minore di 60° , i componenti fuori dal piano focale non vengono completamente cancellati nella ricostruzione dell'immagine. La cancellazione parziale dei componenti fuori dal piano focale limita il potere di risoluzione di profondità e crea un profilo dello strato nella direzione della profondità lontano dal piano focale. Il profilo esteso dello strato spesso crea artefatti tra i vari piani, in modo particolare esistono strutture con alta intensità nei piani non a fuoco. Questi artefatti inter-piano, chiamati anche artefatti fantasma, possono fuorviare la diagnosi, compromettendo gravemente l'utilità clinica della tomosintesi.

Con una tecnologia TC con fascio di raggi X a cono e un dispositivo di acquisizione dell'immagine FPD si possono eseguire scansioni di tomosintesi semplicemente limitando l'angolo di scansione. Per ottenere questo tipo di immagini si fanno delle proiezioni ad alta risoluzione ad angolazioni multiple con una geometria di scansione TC e poi si combinano le proiezioni multiple, facendo in modo che vengano aggiunte nel piano focale in maniera coerente.

Quando è necessario fare ripetute immagini di una regione di interesse (ROI), dopo aver localizzato la ROI con scansioni TC, come nel caso della radioterapia e degli impianti dentali, la tomosintesi è adatta per fare un follow-up delle immagini, dato il suo tempo di scansione minore e una minor dose di radiazioni rispetto alla TC. In questi casi i dati dell'immagine TC possono essere incorporati nella ricostruzione dell'immagine di tomosintesi per rimuovere gli artefatti inter-piano. Una volta che vengono eliminati dalle immagini TC 3D i componenti fuori dal piano focale, che rappresentano le componenti delle proiezioni fuori dalla ROI, i componenti fuori fuoco possono essere sottratti dai dati delle proiezioni della tomosintesi per rimuovere gli artefatti. Questa tecnica è chiamata tomosintesi locale; qui i componenti delle proiezioni che derivano da una ROI locale sono coinvolti solo nella ricostruzione dell'immagine di tomosintesi. Il concetto di tomosintesi locale è stato verificato attraverso simulazioni ed esperimenti reali con micro TC.

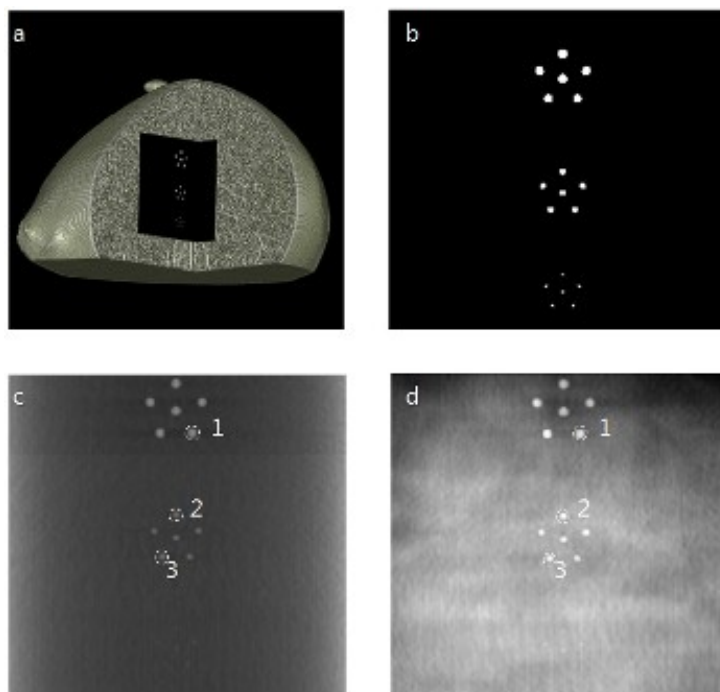


Figura 14: Lo spettro dell'imitazione di un seno e le sue immagini di tomosintesi simulata. (a) Imitazione 3D dello spettro del seno per la simulazione. (b) Caratteristiche del pattern ad alta intensità all'interno dello spettro 3D dell'imitazione del seno. (c) Simulazione di tomosintesi locale ottenuta con il metodo proposto. (d) Immagine di tomosintesi simulata convenzionale [14].

4.8.3 Rimozione di artefatti metallici nella tomografia dentale [16]

Nella tomografia computerizzata dentale la rimozione di artefatti metallici (MAR, metal artifact removal) è stata una questione importante a causa della presenza di impianti ed otturazioni metallici. Ci sono però delle limitazioni nell'uso di metodi MAR esistenti. Il problema MAR si può formulare però come un problema di recupero di dati sparsi nel contesto del Compressed Sensing, data la sparsità dell'occupazione del volume degli inserti metallici. Uno dei vantaggi maggiori nell'uso del CS nei problemi di MAR è che la sparsità degli oggetti metallici permette di ridurre i campioni in modo significativo senza perdere la qualità dell'immagine, accelerando enormemente l'algoritmo MAR. Gli esperimenti fatti usando misure da scanner TC mostrano che l'algoritmo può rimuovere gli artefatti metallici in modo accurato e molto velocemente.

Usando una traiettoria a sorgente circolare, è molto usato l'algoritmo FDK (Feldkamp, Davis e Kress) per acquisire immagini TC dentali. In presenza di artefatti metallici, però, i fotoni dei raggi X non riescono a penetrare l'oggetto metallico costantemente a causa dell'indurimento del fascio, di un piccolo indice segnale-rumore (SNR), dell'effetto del volume parziale non lineare (NLPV), dello scatter, del rumore, ecc. L'inconsistenza delle proiezioni introduce artefatti come striature e ombre nell'immagine ricostruita.

Uno dei modi più semplici e tradizionali per rimuovere questi artefatti è l'interpolazione lineare (LI), che però fa perdere l'intera informazione sugli impianti metallici sostituendo alle

parti metalliche i soli valori interpolati linearmente dai bordi. Sono stati proposti altri metodi di interpolazione, ma tutti avevano complessità computazionale estremamente elevata e avevano bisogno di requisiti per un processo accurato di modellamento delle misure fisiche.

La sparsità degli inserti metallici ci permette di usare il CS: anche se il problema di rimozione di artefatti metallici originale nella TC dentale non pone un limite legato al numero di misure, visto che sono sufficienti le misure fatte durante l'acquisizione, il CS fornisce lo stesso grandi vantaggi pratici. In modo più specifico, sfruttando la sparsità degli oggetti metallici il CS garantisce l'accurata ricostruzione anche da un sottocampionamento pesante. Questo riduce in modo significativo il fardello computazionale del processo iterativo, anche senza usare alcuna accelerazione dell'hardware. Anche se non è prevista l'accurata calibrazione dei parametri del modello che invece è richiesta nei MAR convenzionali iterativi, l'algoritmo del CS porta una grande consistenza del tomogramma data la sparsità degli oggetti metallici, rendendo molto potente l'algoritmo in tutte le complicate geometrie di scanner.

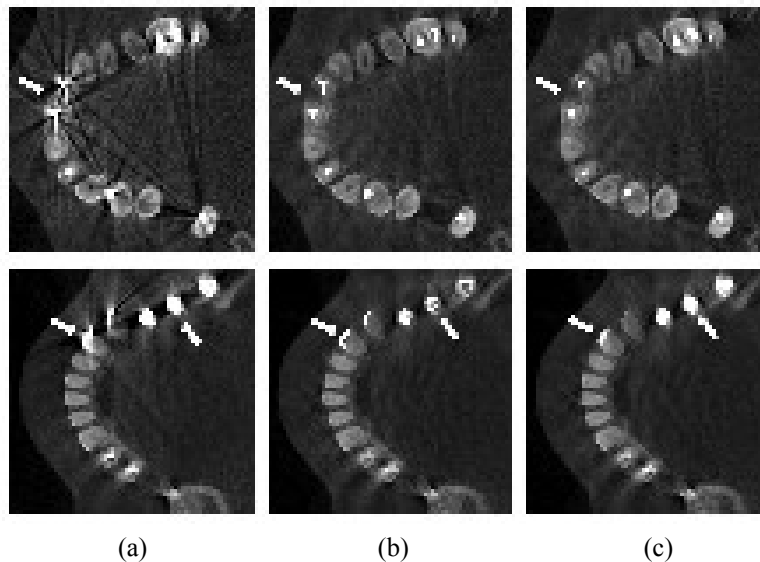


Figura 15: Sezioni assiali della ricostruzione di due campioni *in vivo* in alto e in basso. Per ogni campione è mostrata la rappresentazione usando gli algoritmi (a) FDK, (b) LI e (c) CS-MAR. Tutti gli strati sono allo stesso livello di grigio [16].

Capitolo 5

CONCLUSIONE

La tomografia computerizzata è uno degli strumenti diagnostici più importanti e più largamente usati della medicina moderna. Abbiamo visto come è possibile ricostruire da proiezioni di strati del corpo un'immagine tridimensionale della struttura interna in modo non invasivo, risultato che non si ottiene con altre tecniche di imaging tradizionali. Insieme alla risonanza magnetica è sicuramente il futuro delle tecniche di imaging diagnostiche.

Il Compressed Sensing dall'altra parte è uno degli avanzamenti più stimolanti nelle scienze informatiche attuali, ha degli effetti che paiono miracolosi. Rispettando alcune ipotesi iniziali, cioè sparsità e incoerenza, che poi si rivelano dei limiti non troppo restrittivi, si può bypassare il teorema di Shannon-Nyquist e si può alla fine campionare senza dover considerare la banda del segnale. Poter campionare poca informazione potendo poi ricostruire completamente tutto il segnale è di importanza cruciale in molti settori, come nelle telecomunicazioni, nei controlli, nell'astronomia e, come abbiamo visto, in ambito medico.

In questa tesi si è voluto mostrare come, unendo queste due tecniche, si possano avere i vantaggi della tomografia per una fascia più larga di popolazione e per altre procedure diagnostiche, attraverso una significativa riduzione nel numero di proiezioni necessarie per ricostruire l'immagine e dunque esponendo il paziente ad una dose di radiazioni proporzionalmente minore. Questo fatto ha molta importanza, perché la dose di radiazioni che un paziente subisce nelle tomografie attuali è molto alta e limita il numero di esami che è possibile fare per la salute del paziente. Il CS permette poi di velocizzare il processo di acquisizione dei dati, riducendo così anche il costo totale dell'esame in termini di tempo e denaro.

La tecnica del CS continua ad evolvere ed espandersi anche in altri settori, migliorando ed affinandosi. Allo stesso modo le varie geometrie degli scanner tomografici sono sempre più avanzate e all'avanguardia, riducendo tempi e costi dell'esame. Si può dire dunque con ragione che ci sono grandi margini di miglioramento per entrambe le tecniche, in termini di accuratezza e velocità di ricostruzione e che il futuro della Tomografia Computerizzata si baserà sul Compressed Sensing.

Bibliografia

- ▲ [1] I.A. Cunningham, P.F. Judy: *The Biomedical Engineering Handbook Second Edition*, Ed. Joseph e D. Bronzino, chapter 62 “Computed Tomography”.
- ▲ [2] Dispense del prof. A.Ruggeri “*Tomografia Computerizzata raggi X*”.
- ▲ [3] A.C. Kak e M. Stanley: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press.
- ▲ [4] M. Fornasier e H. Rauhut: *Compressive Sensing*, 18 Aprile 2008.
- ▲ [5] E.J. Candès e M.B. Wakin: *An introduction to Compressed Sampling*, IEEE Signal Processing Magazine.
- ▲ [6] M.J. Roberts: *Signal and System*, McGraw-Hill.
- ▲ [7] J. Romberg e M.B Wakin: *Compressed Sensing: A Tutorial*, IEEE Statistical Signal Processing Workshop Madison, Wisconsin August 26 2007.
- ▲ [8] *Compressed Sensing*: Tesi di laurea di A. Celin, relatore prof. M. Pavon.
- ▲ [9] X. Li e S. Luo: *A compressed sensing-based iterative algorithm for CT reconstruction and its possible application to phase contrast imaging*, BioMedical Engineering OnLine 2011, 10:73.
- ▲ [10] H. Yu e G. Wang: *Compressed Sensing based interior tomography*, Physics in Medicine and Biology, Volume 54, number 9.
- ▲ [11] M. Lustig, D. Donoho, J.M. Pauly: *Sparse MRI: The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging*, Magnetic Resonance in Medicine.
- ▲ [12] G.H. Chen, J. Tang, S. Leng: *Prior image constrained compressed sensing (PICCS): A method to accurately reconstruct dynamic CT images from highly undersampled projection data sets*, Med Phys, Febbraio 2008.
- ▲ [13] Y. Lu, X. Zhang, A. Douraghy, D. Stout, J. Tian, T.F. Chan e A.F. Chatziioannou: *Source Reconstruction for Spectrally-resolved Bioluminescence Tomography with Sparse A priori Information*, Optical Society of America 2009.
- ▲ [14] J.G. Kim, S.O. Jin, M.H. Cho e S.Y. Lee: *Inter-plane artifact suppression in tomosynthesis using 3D CT image data*, BioMedical Engineering Online, vol. 10, Gennaio 2011.
- ▲ [15] A.P. Smith, L. Niklason, B. Ren, T. Wu, C. Ruth, Z. Jing: *Lesion Visibility in Low*

Dose Tomosynthesis, Digital mammography: 8th international workshop, IWDM 2006, Manchester, UK, June 18-21, 2006.

- ▲ [16] J. Choi, M.W. Kim, W. Seong, J.C. Ye: *Compressed sensing metal artifact removal in dental CT*, IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: from Nano to Macro, 2009.
- ▲ [17] P.C. Shrimpton e S. Edyvean: *CT scanner dosimetry*, British Journal of Radiology, 71:1-3, 1998.
- ▲ [18] N.S. Aybat e A. Chakraborty: *Reconstruction of CT images from parsimonious angular measurements via Compressed Sensing*, SIAM J. Imaging Sci, 2009.
- ▲ Una vasta letteratura sul CS è disponibile al sito <http://www.compressedsensing.com>.