



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei Sistemi Industriali

TESI DI LAUREA DI PRIMO LIVELLO

**TECNICHE DI OTTIMIZZAZIONE DI PROGETTO A
RISORSE LIMITATE: TEORIA ED ESEMPI**

Relatore:

CH.MO PROF. GIORGIO ROMANIN JACUR

Laureando:

PILOTTO ENRICO

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

"Chi progetta sa di aver raggiunto la perfezione non quando non ha più nulla da aggiungere ma quando non gli resta più niente da togliere"

Antoine de Saint-Exupery

INDICE

INTRODUZIONE	7
CAPITOLO 1 – Ottimizzazione nella gestione dei progetti	
1.1. Generalità	11
1.2. Caratteristiche di un progetto	12
1.3. Il ciclo di vita di un progetto	13
CAPITOLO 2 – Modelli reticolari e tecniche di programmazione	
2.1. Generalità	17
2.2. Esempio di modello reticolare con attività sugli archi.....	18
2.3. Esempio di modello reticolare con attività sui nodi.....	21
CAPITOLO 3 – Durata di un progetto	
3.1. Generalità	25
3.2. Formulazione come programmazione lineare del progetto.....	26
CAPITOLO 4 – Tecnica C.P.M.	
4.1. Generalità	29
4.2. Algoritmo per un reticolo ad attività sugli archi	30
4.3. Algoritmo per un reticolo ad attività sui nodi	32
4.4. Tecnica C.P.M. su un reticolo ad attività sugli archi	36
4.5. Tecnica C.P.M. su un reticolo ad attività sui nodi	41
4.6. Problema di pianificazione di progetto a risorse limitate	45
4.7. Tecnica parallela per la pianificazione a risorse limitate.....	47
CAPITOLO 5 – Tecnica P.E.R.T.	
5.1. Generalità	61
5.2. Tecnica P.E.R.T. su un reticolo ad attività sugli archi.....	63
CONCLUSIONI	71
BIBLIOGRAFIA	73

INTRODUZIONE

In questa esposizione viene trattata l'ottimizzazione di progetti a risorse limitate mediante l'uso di due tecniche reticolari principali, CPM e PERT, che potranno essere di supporto al Project Manager ai fini decisionali. Verrà quindi discusso il concetto di progetto come scomposizione, sufficientemente omogenea, di più attività, dapprima considerando casi in cui vi è una disponibilità illimitata di risorse, per poi passare a casi in cui vi sono dei vincoli su tale disponibilità. Quindi si può definire preliminarmente il "progetto" come un insieme di attività che vanno dall'individuazione di una o più esigenze (interne o provenienti dal cliente) fino all'ottenimento di un certo risultato. Parlando di tecniche reticolari sarà necessario ricondurre i progetti, da pianificare e controllare, a delle rappresentazioni grafiche (modelli reticolari) che associano ad ogni progetto un grafo orientato (o reticolo). Verranno forniti degli esempi di ottimizzazione relativamente a due rappresentazioni principali, ossia:

- rappresentazione americana con reticolo ad attività sugli archi (activity on arrows);
- rappresentazione europea con reticolo ad attività sui nodi (activity on nodes).

Ci si riferirà al termine progetto volutamente in maniera generica in quanto le tipologie di progetto realizzabili sono infinite, ma è comunque possibile operare una generalizzazione in quanto sono tutte accomunate da cinque principali caratteristiche:

- unicità: un progetto (anche quelli ripetibili) è unico per disponibilità di risorse e per ambiente di sviluppo;
- temporaneità: i progetti hanno date di inizio e termine prestabilite e le organizzazioni vengono create appositamente per la durata del progetto;
- multidisciplinarietà: i progetti richiedono molteplici competenze che devono necessariamente essere coordinate. Le relazioni fra i vari compiti (task) all'interno del progetto possono essere molto complicate;
- incertezza: i progetti sono pianificati *prima* della loro realizzazione;
- risorse limitate: un progetto utilizza risorse che solitamente sono disponibili in quantità limitata, o sono costose.

Detto che per ogni attività è definita una durata per la relativa esecuzione, entrambe le tecniche reticolari si occupano soprattutto degli aspetti temporali del progetto e quindi vanno viste come dei metodi di ottimizzazione del tempo di realizzazione di un progetto. La differenza sostanziale tra le due tecniche consiste nel fatto che il C.P.M. utilizza stime deterministiche delle durate delle attività, senza considerare incertezze relativamente a tali stime, mentre nel P.E.R.T. le durate delle varie attività sono rappresentate da variabili aleatorie di cui occorre stimare la distribuzione di

probabilità. L'obiettivo di tali tecniche sarà quindi la cosiddetta "schedulazione" delle attività, ossia stabilire l'istante di tempo in cui iniziare un'attività, tenuto conto della sua durata, delle sue relazioni di precedenza e della sua richiesta di risorse.

Il problema di pianificazione e controllo dei progetti è sempre più presente sia nel campo della produzione, sia nel campo dei servizi. Negli ultimi anni l'ottimizzazione di progetti si è raggiunta sempre più con l'introduzione del Project Management, definito come l'azione di coordinamento tra le attività svolte da gruppi diversi, mediante la quale il responsabile (Project Manager) pianifica, organizza, dirige e controlla l'attuazione di un progetto complesso. Abbiamo accennato che mediante l'uso delle tecniche reticolari considerate per la trattazione, l'obiettivo di tale azione consisterà nel completamento dell'intero progetto nel tempo minimo, rispettando vincoli diversi. E' intuitivo però che, in altri casi, l'obiettivo potrebbe essere la minimizzazione del costo totale del progetto, una volta noti i legami fra costo e durata di ogni attività. In altri casi ancora l'obiettivo potrebbe essere legato all'ottenimento di un certo livello di qualità o di un certo livello di sicurezza (ad esempio per adeguarsi a delle nuove normative).

Detto questo, si può preliminarmente intuire a quali campi sarà necessario riferirsi per la gestione di un progetto più o meno complesso, ossia:

- definizione del progetto;
- definizione delle attività (elementari);
- determinazione delle relazioni tra le attività;
- schedulazione delle attività;
- controllo dell'evoluzione delle attività;

CAPITOLO 1

Ottimizzazione nella gestione dei progetti

1.1. Generalità

Negli ultimi anni il Project Management si sta sempre più affermando come disciplina autonoma che, racchiudendo in sè un vasto insieme di concetti, nozioni, strumenti, metodi ed esperienze, presenta dei confini abbastanza sfumati. Fondamentalmente è per questo motivo che negli ultimi anni si è riscontrata l'esigenza, da parte degli operatori del settore, di pervenire ad una sorta di standardizzazione terminologica per definire con una sufficiente accuratezza ciò che rientra o meno nell'area di interesse del Project Management. Tra le proprie metodologie ricadono i concetti e i modelli matematici necessari per la gestione temporale delle attività di un progetto (che costituiscono la base storica della disciplina), ma vi appartengono anche tutta una serie di concetti e metodi, di carattere più qualitativo, che investono altri aspetti, quali l'organizzazione aziendale, la gestione dei rischi, la comunicazione interpersonale, oltre che, in ultima analisi, aspetti specificamente psicologico/culturali. Quindi nel momento in cui si vuole considerare il project manager come una figura professionale a sè (al pari del progettista elettronico, del sistemista informatico, dell'account manager, del responsabile del marketing ...), il suo bagaglio culturale va identificato con un insieme di concetti e nozioni, alle volte piuttosto eterogeneo, e che si sono in buona misura sviluppati autonomamente e indipendentemente, ma che assumono una rilevanza nuova e particolare, rivisitati nel quadro unificatore della gestione dei progetti.

Project Management (PM): processo di gestione, allocazione e temporizzazione delle risorse per ottenere obiettivi predefiniti in modo efficiente (*Badiru 1991*)

E' intuitivo quindi che tale concetto sia molto radicato nella cultura umana e presente già nelle antiche civiltà (si pensi alla costruzione delle Piramidi Egizie o alla realizzazione del Colosseo), tuttavia ha avuto un vero e proprio riconoscimento solo negli ultimi cinquant'anni. Nel 1969 venne fondato il Project Management Institute (PMI) con l'obiettivo di diffondere e rafforzare le prassi di project management attraverso l'affermazione di uno standard, sulla base della convinzione che i diversi campi di applicazione del project management, dall'edilizia all'ingegneria del software, avessero una larga base comune nelle tecnologie e nelle metodologie di gestione dei progetti. Nel 1981 il Comitato Direttivo del PMI autorizzò lo sviluppo della Guida al "Project Management Body of Knowledge" (altrimenti noto come PMBOK), contenente una guida completa e sintetica degli standard e delle linee guida indispensabili per le prassi di project

management. L'International Project Management Association (IPMA), fondata in Europa nel 1967, ha intrapreso una direzione simile istituendo l'IPMA Competence Baseline (ICB). Entrambe le organizzazioni stanno partecipando ora allo sviluppo di uno standard ISO per il project management.

1.2. Caratteristiche di un progetto

Il termine *progetto* può evocare molte cose diverse, vale perciò la pena di spendere alcune parole per precisare cosa sia da intendersi con questo termine. Una definizione abbastanza condivisa, fornita dal PMI, è la seguente: "Un progetto è un'iniziativa temporanea intrapresa per creare un prodotto o un servizio con caratteristiche di unicità".

Dunque, il team di progetto viene creato per ottenere uno specifico obiettivo, in una certa misura mai realizzato prima, e questa costituzione ha una scadenza temporale, che può essere più o meno esplicita. Con questa definizione restano quindi evidenziati due degli aspetti caratteristici di un progetto (temporaneità e unicità), che lo discriminano rispetto ad altre attività svolte in ambito aziendale che potrebbero essere definite come "maggiormente routinarie".

Per quanto riguarda la *temporaneità*, un progetto è caratterizzato da una data di completamento, che può essere una specifica assolutamente inviolabile oppure una specifica indicativa, però è evidente che il progetto si riferisce anche ad obiettivo ben preciso, il cui raggiungimento pone fine al progetto stesso (e conseguentemente all'organizzazione chiamata a realizzarlo).

L'*unicità* è una questione meno immediata. Un progetto per essere definito tale deve essere caratterizzato da un certo livello di innovazione, da una specifica richiesta di risorse e da un caratteristico ambiente di sviluppo.

Rimane così evidenziato il fatto che, nella quasi totalità dei casi, un progetto è caratterizzato da *risorse limitate*, in quanto ogni risorsa ha una certa tipologia di costo legata alla sua natura.

Alcuni (Damiani et al 2004) fanno notare che un aspetto altamente caratteristico del lavorare per progetti è la cosiddetta elaborazione progressiva, ossia il fatto che, pur essendo il progetto unico e a termine, sia l'obiettivo che la tempistica sono in realtà oggetto di un continuo processo di revisione. Di qui l'espressione "in un progetto si sa quando si parte, ma non si sa quando, e dove, si arriva" che è alla base della caratteristica di *incertezza*, dovuta al fatto che la pianificazione di un progetto precede la sua realizzazione.

Risulta infine intuitivo che per progetti complessi ha senso parlare di *multidisciplinarietà*, legata alla molteplicità di competenze necessaria alla loro realizzazione e che viene raggiunta con un'organizzazione di vari compiti.

Una caratteristica fondamentale di un progetto è, infine, che l'obiettivo complessivo da realizzare sia suddivisibile in fasi, le quali si compongono di molteplici *attività* elementari. Ogni attività comprende tutte quelle operazioni, aventi carattere di omogeneità e continuità, effettuate dalla stessa ditta, dalla stessa officina, dallo stesso ufficio, dalla stessa squadra o dalla stessa persona. E' ovvio che la scomposizione del progetto in attività può essere diversa a seconda del livello di dettaglio che si vuole raggiungere, inoltre due project manager differenti possono avere una percezione diversa su che cosa sia necessario fare, in termini di fasi e attività, per raggiungere un determinato obiettivo.

Un'attività è caratterizzata da una certa durata, che può essere deterministica o aleatoria, da un impiego di risorse e da un costo, inoltre alcune attività devono soddisfare dei vincoli di precedenza.

Quindi la soluzione del problema di pianificazione del progetto indica gli istanti di inizio e di fine per ogni attività di cui il progetto si compone.

1.3. Il ciclo di vita di un progetto

Come è stato detto, dal momento che i progetti hanno come obiettivo la realizzazione di qualcosa di nuovo e unico, essi sono caratterizzati da un livello di incertezza piuttosto elevato; per questo motivo il controllo dell'evoluzione dei progetti, per essere efficace, deve riferirsi ad una scomposizione in fasi (e in conseguenti attività) degli stessi, le quali vanno a delinearne e identificarne il ciclo di vita. In generale il ciclo di vita di un progetto può essere altamente variabile, ma è possibile individuare alcune caratteristiche che solitamente valgono per la stragrande maggioranza dei casi. Infatti nelle fasi iniziali la possibilità di influenzare il prodotto/servizio finale, oggetto del progetto è massima, e decresce progressivamente, all'avvicinarsi della conclusione, in quanto i costi di riconfigurazione e di correzione di eventuali errori sono sempre più alti. Vi è quindi un concetto di irrigidimento legato al fatto che un'ipotesi tecnica risulta sempre più vincolante e irreversibile man mano che viene portata avanti. Va fatta infine un'ultima precisazione sulla differenza che sussiste tra ciclo di vita di un prodotto e ciclo di vita di un progetto, infatti il progetto ha come obiettivo lo sviluppo di un nuovo prodotto e coincide con la prima fase del ciclo di vita del prodotto stesso.

Non esistono regole fisse per stabilire il corretto numero delle fasi che dovrebbero comporre un progetto, infatti si possono avere progetti semplici con unica fase e progetti molto complessi che si compongono di svariate fasi. In genere il passaggio da una fase a quella successiva è piuttosto marcato e individuabile. Solitamente è possibile scomporre il ciclo di vita di un progetto in 4 fasi fondamentali, ossia:

-Ideaione: è la fase in cui si delineano le caratteristiche principali del progetto. A partire da un'idea, si determinano gli obiettivi, i destinatari, il piano di lavoro, i prodotti, i risultati attesi, i partner, i tempi, i luoghi e le risorse. La fase di ideaione si

conclude quando gli aspetti principali del progetto sono delineati e condivisi dal team di progetto. Questa fase quindi parte da un'idea intangibile e si conclude con un documento, la scheda progetto, che riassume il contesto del progetto, i suoi elementi costitutivi e una prima stima delle risorse necessarie per realizzarlo.

-Pianificazione: a partire dalla scheda di progetto è possibile dettagliare la struttura, la strategia, il processo e le risorse necessarie alla realizzazione del progetto. La pianificazione è la fase in cui l'idea del progetto viene analizzata in ogni suo aspetto per indicare il piano, chiaro e definitivo, delle attività, descrivere il suo svolgimento temporale, definire il team di progetto, stabilire il budget preventivo. Il risultato finale di questa fase è la descrizione in dettaglio del progetto che costituirà il punto di riferimento per la sua realizzazione.

-Realizzazione: questa fase segna il passaggio dalla definizione teorica del progetto alla sua attuazione operativa. La realizzazione si configura come un processo di attività finalizzate a rispettare il piano previsto e a controllare che gli obiettivi del progetto vengano conseguiti. Durante questa fase, vengono compiute le attività previste dal progetto che avranno come scopo la realizzazione dei prodotti e dei servizi, posti come obiettivo. Alcune di queste attività sono continue, altre ripetitive. Ad esempio, le attività di gestione, comunicazione, monitoraggio e valutazione di un progetto partono contemporaneamente al suo avvio e si estendono per tutta la sua durata. Queste sono attività comuni a tutti i progetti indipendentemente dai loro contenuti. Altre invece, si sviluppano solamente per una porzione del progetto e sono parte costituente della sua specificità e della sua originalità.

-Chiusura: si possono distinguere due principali tipologie di chiusura, ossia la consegna dei prodotti/servizi realizzati e la chiusura amministrativa del progetto. Quest'ultima fase spesso viene trascurata o osservata solo per obblighi contrattuali. Invece la verifica finale riveste un ruolo cruciale e rappresenta una vera e propria ricapitolazione dell'intero percorso fatto. In base ai risultati di tale verifica finale, si potrà decidere se il progetto ha raggiunto i risultati auspicati, che cosa si dovrebbe eventualmente modificare per meglio adeguare il progetto alla realtà o per estenderlo ad altri contesti. È la fase in cui si capitalizza il lavoro svolto per il futuro e si potrebbe addirittura dire che una chiusura ben gestita del progetto è un'ottima apertura per nuovi progetti. In questo modo si chiude il ciclo di vita di un progetto, passando dalla chiusura di un progetto all'ideazione di un altro.

Riassumendo vediamo una rappresentazione grafica generale di queste quattro fasi principali che accomunano i progetti.



Figura 1.1

Si sono dunque visti i concetti che stanno alla base dei progetti e le modalità e le tempistiche con cui si interviene per ottenere le massime efficienze e per creare le condizioni per un continuo miglioramento futuro. Tutto ciò sta alla base concettuale dell'ottimizzazione dei progetti e vedremo nel capitolo seguente alcune modalità, in termini più operativi, per predisporre a tale fine.

CAPITOLO 2

Modelli reticolari e tecniche di programmazione

2.1. Generalità

Abbiamo visto che un progetto consiste in un insieme di attività, le quali devono essere svolte in accordo con dei vincoli di precedenza esistenti tra le stesse. Le attività sono caratterizzate da una certa *durata* e richiedono uno o più tipi di *risorse* per la loro esecuzione. Allo scopo di rappresentare tali attività e le relazioni tra di esse, è pratica comune quella di utilizzare un cosiddetto *project network* costituito solitamente da un grafo orientato o *reticolo*. Un "grafo orientato" D (o digrafo, grafo diretto) è un insieme $D = (\mathbf{V}, \mathbf{A})$, dove \mathbf{V} è l'insieme dei vertici di D e \mathbf{A} è l'insieme degli archi orientati di D . Un "arco orientato" è un arco caratterizzato da una *direzione*. In particolare, è composto da una "testa" (rappresentata solitamente dalla punta di una freccia), che raggiunge un nodo in entrata, e una "coda", che lo lascia in uscita.

I modelli reticolari sono delle rappresentazioni grafiche dei progetti da pianificare e da controllare, essi associano ad ogni progetto un grafo orientato seguendo una delle seguenti metodologie principali:

- Rappresentazione *americana* con reticolo ad attività sugli archi (*activity on arrows*); ad ogni attività è associato un arco orientato, la cui valutazione corrisponde alla durata della relativa attività. Ogni nodo rappresenta un *evento*, ossia l'istante di tempo che separa la fine di tutte le attività associate agli archi entranti nel nodo stesso, dall'inizio di tutte le attività associate agli archi uscenti;
- Rappresentazione *europea* con reticolo ad attività sui nodi (*activity on nodes*); ad ogni attività è associato un nodo, mentre il generico arco (i,j) rappresenta la relazione di precedenza che ha l'attività i nei confronti dell'attività j .

Alla base delle tecniche reticolari di programmazione c'è quindi la costruzione di questo diagramma reticolare, che in sintesi rappresenta la successione temporale e la reciproca dipendenza delle varie attività che concorrono all'esecuzione del progetto, attività che devono essere completate prima che il progetto possa considerarsi eseguito. Il primo passo nella costruzione del diagramma reticolare consiste perciò nell'individuazione e nell'elencazione di tutte le attività coinvolte nell'esecuzione del progetto, con un livello di disaggregazione tale per cui le si possano considerare ciascuna distinta da tutte le altre. Una volta individuate le varie attività bisogna valutare l'ordine temporale con il quale queste attività devono essere completate. E' necessario cioè sapere quali attività devono essere già state completate prima di poterne iniziare un'altra. Devo cioè fissare i vincoli di precedenza. La determinazione di tali vincoli può essere un'operazione molto complicata ed è di fondamentale

importanza per poter applicare i metodi di ottimizzazione con successo. Come vedremo, sia nel P.E.R.T. che nel C.P.M. i vincoli sono del tipo *Finish to Start (FS)*, questo vuol dire che un'attività potrà iniziare ad essere svolta solo dopo che tutte quelle che la precedevano nella sequenza siano già state realizzate. I vincoli nei casi pratici sono determinati oltre che da condizioni logiche e tecniche che impediscono la realizzazione di un'attività se non è stata completata la precedente anche da problemi relativi alla disponibilità di risorse. Ad esempio dei macchinari potrebbero non essere disponibili contemporaneamente per più attività e quindi bisognerà attendere che una sia terminata per poterne iniziare un'altra. Segue una fase di rappresentazione grafica, che dà luogo al disegno del grafo orientato.

Le tecniche reticolari più note, impiegate per la soluzione del problema di pianificazione e controllo sono le seguenti:

- Il C.P.M. (*Critical Path Method*);
- Il P.E.R.T. (*Program Evaluation and Review Technique*);
- Il MPM (*Metra Potential Method*);
- Il G.E.R.T. (*Graphical Evaluation and Review Technique*);

2.2. Esempio di modello reticolare con attività sugli archi

Una volta suddiviso il progetto in attività continue e sufficientemente omogenee, si può procedere alla costruzione grafica del reticolo delle attività. Come detto, nella rappresentazione con attività sugli archi (AOA), gli archi continui orientati rappresenteranno le attività mentre i nodi rappresenteranno gli eventi. Ridefiniamo l'*evento* come l'istante di tempo in cui tutte le attività entranti nel nodo stesso siano state completate e tutte le attività uscenti abbiano inizio. In ogni reticolo AOA devono essere distinguibili gli eventi di inizio e di fine dell'intero progetto.

Volendo tracciare il reticolo con attività sugli archi possono sorgere alcune difficoltà che è conveniente vedere nel dettaglio:

- le attività che non sono precedute da alcun'altra attività vengono dette *iniziali* ed è consuetudine assegnare a tali attività il medesimo *evento di inizio progetto*. In modo analogo, a tutte le attività *finali* (ossia quelle che non precedono alcun'altra attività) viene assegnato un unico evento detto *evento di fine progetto*;
- due nodi non possono essere collegati da più di un ramo, altrimenti l'intero reticolo non sarebbe più un grafo perché verrebbe a mancare la corrispondenza biunivoca fra archi (attività) e coppie ordinate di nodi (eventi). Supponiamo di avere due attività, B e C, precedute dalla stessa attività A e seguite dalla stessa attività D. Questo suggerirebbe una rappresentazione del tipo di Figura 2.1.

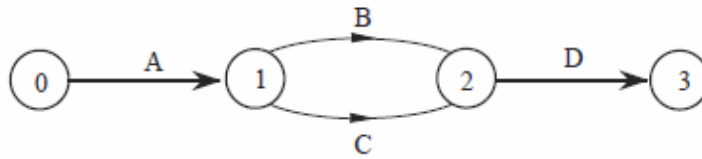


Figura 2.1

La difficoltà si supera introducendo un'attività *fittizia* (*dummy activity*) di durata nulla, come nella Figura 2.2 seguente.

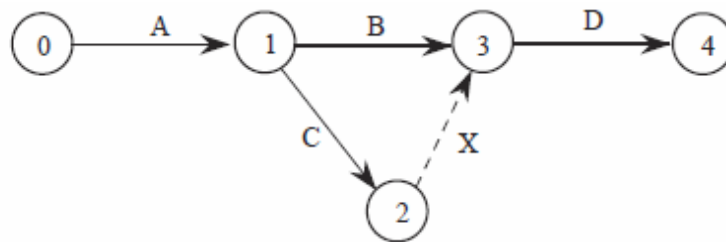


Figura 2.2

- Un altro caso in cui è richiesta l'introduzione di un'attività fittizia si verifica quando due attività, B e C, precedono entrambe una terza attività D, e una sola delle due (C) ne precede una quarta (E). In questo caso è solo l'introduzione di un'attività fittizia che rende possibile la costruzione del grafo, come si vede nel prossimo esempio di Figura 2.3.

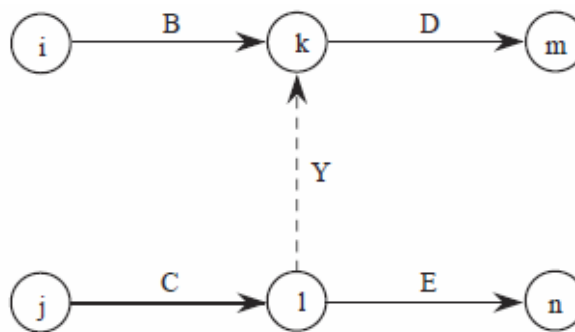


Figura 2.3

Esempio 1: Costruzione di un palazzo

Supponiamo di aver definito il progetto, le varie attività di cui si compone e di aver studiato i vincoli di precedenza, giungendo quindi alla *Tabella 2.1*. Notiamo che la tabella riporta il nome attribuito all'attività, la sua descrizione, la sua durata e i suoi

vincoli di precedenza. Supponiamo che le durate delle varie attività siano state stimate deterministicamente e che i vincoli di precedenza siano del tipo FS visto precedentemente.

ATTIVITA'

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	ATTIVITA' PRECEDENTI
A	Scavi	2	\
B	Fondamenta	4	A
C	Muri esterni	10	B
D	Costruzione tetto	6	C
E	Tubazioni esterne	4	C
F	Impianto elettrico	6	C
G	Tubazioni interne	5	E
H	Rivestimenti esterni	7	D
I	Pannelli	8	F,G
L	Verniciatura esterna	9	E,H
M	Pavimentazione	4	I
N	Verniciatura	5	I
O	Infissi esterni	2	L
P	Infissi interni	6	M,N

Tabella 2.1

Al fine della costruzione del reticolo delle attività notiamo che l'attività A non è preceduta da alcun'altra e quindi è l'attività iniziale alla quale andrà assegnato l'evento di inizio progetto. Analogamente le attività O e P non precedono alcun'altra attività e corrispondono quindi alle attività finali del progetto, alle quali sarà assegnato il medesimo evento di fine progetto. Notiamo poi che le attività G e L sono entrambe precedute dalla E, ma la G è preceduta anche dall'attività H. Si porrà quindi un'attività fittizia X di durata nulla tra l'evento di inizio dell'attività G e l'evento di fine dell'attività H (rispettivamente i nodi 5 e 8 della Figura 2.4). Inoltre vi sono due attività, N e M, precedute dalla stessa attività I e seguite dalla stessa attività O. Per quanto visto precedentemente (corrispondenza biunivoca fra archi e coppie ordinate di nodi), viene inserita un'attività fittizia Y di durata nulla tra l'evento di fine dell'attività M e l'evento di inizio dell'attività O (rispettivamente i nodi 11 e 12 della Figura 2.4).

Fatte queste considerazioni si può ora disegnare il reticolo delle attività relativamente al progetto di costruzione di un palazzo, che sarà rappresentato in Figura 2.4 alla pagina seguente.

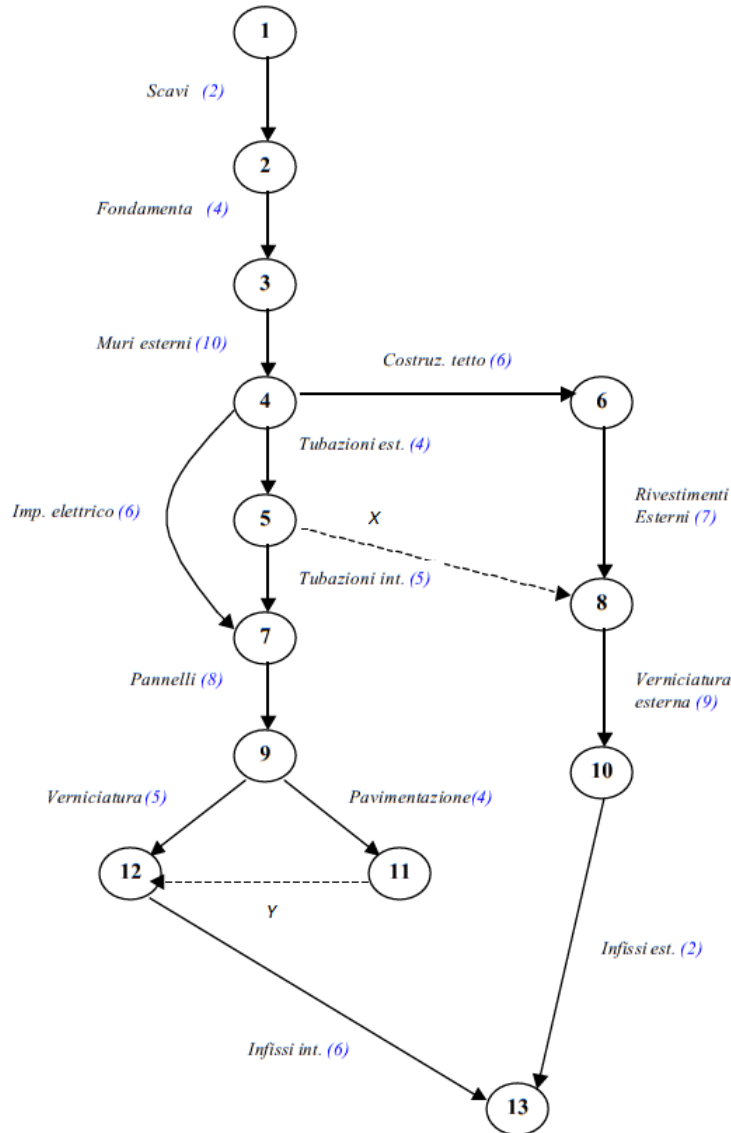


Figura 2.4

Si ha così un grafo ordinato aciclico con il nodo sorgente 1, corrispondente all'evento di inizio progetto, e il nodo terminale 9, corrispondente all'evento di fine progetto.

2.3. Esempio di modello reticolare con attività sui nodi

Volendo rappresentare il reticolo con attività sui nodi, non insorge nessuna difficoltà per la rappresentazione reticolare; è necessario però aggiungere una attività fittizia iniziale di durata nulla tutte le volte che sono presenti più attività prive di precedenti, e rispettivamente un'attività fittizia finale di durata nulla tutte le volte che sono presenti più attività prive di seguenti. Si fa tutto ciò allo scopo di ottenere un reticolo (grafo) aciclico con una sola attività iniziale ed una sola attività finale (un solo nodo

sorgente ed un solo nodo terminale). Si osservi che le attività possono essere raggruppate in *strati*. Nello strato iniziale si pone l'unica attività iniziale, mentre nel generico strato *s* si pongono tutte quelle attività non ancora inserite in altri strati, ma le cui attività precedenti siano già state tutte inserite nei precedenti strati *s-1*, *s-2*, ecc.

Esempio 2: Sostituzione caldaia

Immaginiamo che si debba sostituire la vecchia caldaia a gasolio di un impianto di riscaldamento con una nuova con una nuova caldaia a gas, dotata di centralina di regolazione automatica. Anche qui il progetto viene suddiviso in attività fra le quali esistono vincoli di precedenza del tipo FS (una attività vincolata da precedenza può iniziare solo se tutte le attività vincolanti rispetto ad essa sono state completate). Le durate delle attività sono stime deterministiche. Le attività in cui è stato scomposto il progetto sono quelle riportate in Tabella 2.2.

ATTIVITA'

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	ATTIVITA' PRECEDENTI
A	Sconnessione vecchia caldaia e tubi	4 gg	\
B	Smontaggio quadri elettrici	1 gg	\
C	Ordinazione nuova caldaia	40 gg	\
D	Ordinazione elettrovalvole	10 gg	\
E	Ordinazione centralina automatica	30 gg	\
F	Asporto vecchia caldaia	2 gg	A
G	Opere edili (base, finestre, ecc.)	8 gg	B,F
H	Montaggio quadri elettrici	2 gg	G
I	Montaggio nuova caldaia	3 gg	C,G
L	Montaggio tubi ed elettrovalvole	3 gg	D,I
M	Montaggio collegamento centralina	1 gg	E,L
N	Collegamento impianto gas	11 gg	G
O	Collaudo	1 gg	H,M,N

Tabella 2.2

E' possibile ora tracciare il reticolo con attività sui nodi per il problema di sostituzione della caldaia, notando che le attività A,B,C,D ed E sono prive di attività precedenti e quindi sarà necessario aggiungere a monte di esse un'attività fittizia iniziale di durata nulla X. Inoltre le attività H,M ed N sono prive di attività seguenti, pertanto bisognerà aggiungere un'attività fittizia finale di durata nulla O.

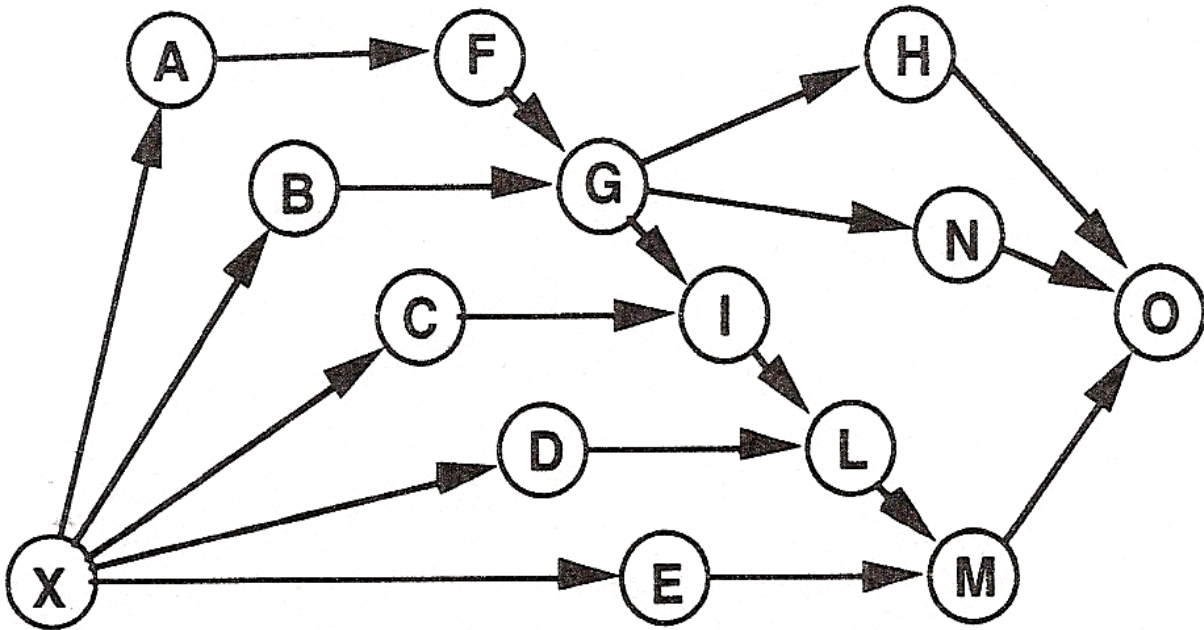


Figura 2.5

Notiamo infine che gli strati individuati sono otto e sono formati rispettivamente dalle attività $\{X\}, \{A, B, C, D, E\}, \{F\}, \{G\}, \{H, N, I\}, \{L\}, \{M\}, \{O\}$.

Vedremo nei prossimi capitoli la formalizzazione del problema di ottimizzazione e due tecniche reticolari di ottimizzazione di progetti, che si basano sui reticoli delle attività finora visti, per calcolare il tempo minimo di completamento dell'intero progetto.

CAPITOLO 3

Durata di un progetto

3.1. Generalità

Consideriamo un progetto rappresentato mediante un reticolo ad attività sui nodi $G = (V;A)$, in cui V rappresenta l'insieme delle attività del progetto, e A l'insieme dei vincoli di precedenza. E' dato inoltre un vettore delle durate d , in cui d_i è la durata (nota e deterministica) dell'attività i . Un piano temporale (*schedule*) delle attività è un'assegnazione di istanti di inizio alle attività. Dal momento che tali attività si considerano *non interrompibili*, tale assegnazione specifica completamente l'allocazione temporale delle attività. Dunque, uno *schedule* è un vettore s , in cui s_i rappresenta l'istante iniziale dell'attività i . Chiaramente, affinché un vettore s possa corrispondere a uno *schedule* ammissibile, andranno soddisfatti tutti i vincoli del problema (precedenze, risorse, ecc.). Ad esempio, se la durata dell'attività a è d_a , tale attività si suppone abbia inizio (venga schedulata) all'istante s_a e inoltre vi è un vincolo di precedenza FS imponente che l'attività b sia vincolata dalla completa realizzazione dell'attività a , ovviamente non potrà essere che $s_b \geq s_a + d_a$, in quanto b inizierebbe prima del completamento di a . Risulta evidente, come sarà chiarito in seguito, che l'attività b dovrà iniziare almeno a $s_a + d_a$ per coerenza con il vincolo descritto.

Definiamo inoltre, per comodità rappresentativa, la variabile f_i che rappresenta l'istante finale dell'attività i , ossia l'istante di tempo in cui tale attività sarà completata, coerentemente con la durata che la caratterizza. Infatti, essendo in presenza di ipotesi di durata deterministica, si avrà che $f_i = s_i + d_i$. Poichè stiamo considerando solamente relazioni di precedenza del tipo FS, senza ritardi (*time lags*) tra due attività successive i e j , si avrà che l'attività j potrà essere schedulata nell'istante in cui la sua attività precedente i sarà terminata oppure in istanti temporalmente successivi (non precedenti!). Pertanto si è in presenza di un vincolo lineare del tipo $s_j \geq f_i$ e, sostituendo l'espressione di f_i , quindi

Vogliamo ora porre le condizioni per determinare quale sia la durata minima richiesta per il completamento dell'intero progetto. Essendo, per le ipotesi di trattazione, in presenza di un reticolo AON, sicuramente vi sarà un'attività di fine progetto. Pertanto possiamo equivalentemente dire che la durata minima coincide con il minimo valore della differenza tra l'istante di inizio dell'attività conclusiva e dell'attività iniziale, siano tali attività fittizie o reali, ovvero $\min_i (f_j - s_i)$. Tale obiettivo è noto in letteratura come *makespan*.

3.2. Formulazione come programmazione lineare del progetto

Da quanto esposto nella discussione precedente, si ha che, avendo per ora trascurato la presenza di risorse limitate o di altri vincoli che non siano di precedenza, l'unico fattore che vincola l'esecuzione di ciascuna attività è il completamento delle attività che la precedono. Quindi, per formulare il problema di minimizzare il makespan del progetto sarà necessario introdurre un vincolo per ciascuna attività. Dato dunque il grafo aciclico $G(V;A)$, in cui indichiamo con 1 il nodo iniziale e con n il nodo finale, si ha quanto segue.

Ricordando che A e V sono rispettivamente gli insiemi dei vincoli di precedenza e delle attività del progetto. Notiamo che sono stati imposti anche i vincoli di non negatività in quanto non sarebbe sensato parlare di schedulazione in istanti di tempo negativi.

Per chiarire ulteriormente i concetti, consideriamo l'esempio di reticolo AON di Figura 3.1 nel quale l'attività 1 coincide con quella di inizio progetto e l'attività 8 con quella di fine progetto. Vengono indicate tra parentesi le varie durate relativamente alle attività.

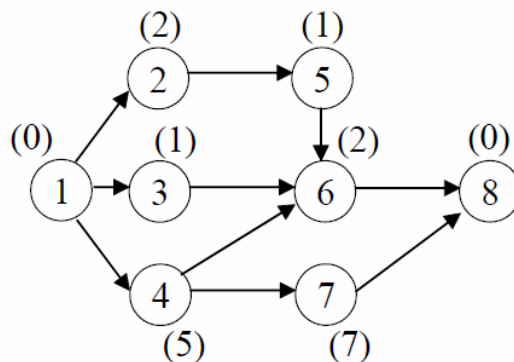


Figura 3.1

Il problema si formula come segue:

Notiamo infine che ora è piuttosto intuitivo pensare alla minimizzazione del tempo di completamento dell'intero progetto, facendo iniziare al più presto le attività, compatibilmente con i vincoli del problema in esame. Ciò sarà argomento principe dei prossimi capitoli.

CAPITOLO 4

Tecnica C.P.M.

4.1. Generalità

C.P.M. è l'acronimo di Critical Path Method, ovvero *metodo del percorso critico*. È uno strumento di gestione progetti sviluppato nel 1957 dalla Catalytic Construction Company per la manutenzione degli impianti della Du Pont de Nemours.

Il C.P.M. è caratterizzato da:

- attività di durata deterministica;
- vincoli di precedenza del tipo Finish to Start;
- minimizzazione del tempo di completamento dell'intero progetto quale obiettivo.

Si tratta di una tecnica usata per individuare, nell'ambito di un diagramma reticolare (grafo aciclico orientato), la sequenza di attività più critica ai fini della realizzazione di un progetto, ossia quella di durata massima. Individuato il percorso critico si tengono sotto stretto controllo le attività che lo compongono, in quanto un ritardo (maggiore durata del previsto) di una qualsiasi di queste comporta inevitabilmente un ritardo dell'intero progetto. È una tecnica molto nota e utilizzata specialmente nelle imprese di costruzione (strade, ponti, gallerie, grandi infrastrutture, ecc.).

Abbiamo visto, nel capitolo precedente, come il problema di determinare il tempo minimo di completamento dell'intero progetto nel rispetto dei vincoli può essere espresso in forma di programma lineare. Considerando un generico progetto composto da un'insieme di attività, soggette ad un insieme di vincoli di precedenza, il problema viene ricondotto ad un problema lineare di minimizzazione del tipo:

,

dove sono rispettivamente gli istanti di inizio (le schedule) dell'attività di inizio e dell'attività di fine progetto. Riformuleremo il problema relativamente alle due tipologie di modello reticolare vedendo, per ognuna di queste, l'algoritmo di risoluzione.

4.2. Algoritmo per un reticolo ad attività sugli archi

Se consideriamo questa volta un reticolo ad attività sugli archi, si tratterà quindi di un problema di cammino massimo fra gli eventi di inizio e fine progetto, ossia i nodi 1 ed n , su un grafo orientato e aciclico con valutazioni non negative, per il quale sarà più conveniente ricorrere ad un algoritmo specifico, anziché utilizzare l'algoritmo del semplice.

Supponiamo che i nodi (eventi) siano ordinati in modo che il nodo sorgente sia numerato con 1 e che per ogni arco del grafo (ossia per ogni attività tra i generici eventi i e j) si abbia che il numero d'ordine i assegnato a sia minore del numero d'ordine j assegnato a . Indicando con A l'insieme degli archi (attività) e con la durata della generica attività , siano:

Quindi per l'evento v considerato, $P(v)$ e $S(v)$ sono rispettivamente gli insiemi degli eventi precedenti e successivi a v .

L'algoritmo consiste di due fasi:

- fase *in avanti*, è la prima fase e serve a definire i *tempi minimi*;
- fase *all'indietro*, è la seconda fase e serve a definire i *tempi massimi*.

La fase in avanti, quindi, definisce per ogni nodo il tempo minimo, ossia l'istante di tempo in cui l'evento corrispondente può avere luogo al più presto, rispettando le durate delle attività e i vincoli di precedenza. Il problema può essere espresso come la ricerca del cammino più lungo dalla sorgente ad ognuno degli altri nodi.

ALGORITMO: FASE IN AVANTI

Passo 1:

Passo 2:

Passo 3: se è l'evento di fine progetto allora la prima fase dell'algoritmo ha termine, altrimenti si ritorna al Passo 2.

Quindi al Passo 1 si inizializza l'evento di inizio progetto che, non essendo preceduto da altre attività per definizione, può essere schedulato al tempo zero. Al Passo 2 un generico evento, successivo a quello di inizio progetto, viene schedulato in un istante che corrisponde al massimo valore delle somme tra gli istanti di schedulazione degli eventi precedenti e la durata dell'attività che sta tra l'evento precedente e l'evento considerato. Il Passo 3 prevede la reiterazione del Passo 2 fintanto che non siano stati assegnati gli istanti di schedulazione ad ogni evento del progetto.

E' evidente che il tempo minimo dell'ultimo nodo considerato (evento di fine progetto) corrisponde al tempo minimo di completamento dell'intero progetto.

Dal punto di vista applicativo il tempo minimo associato ad ogni evento corrisponde all'istante in cui le attività precedute dall'evento stesso possono iniziare *al più presto*. Tali attività, in un'ottica reticolare, saranno quelle associate agli archi uscenti dal nodo corrispondente all'evento considerato. I tempi minimi così determinati costituiscono dunque una soluzione al problema formalizzato precedentemente, però non costituiscono l'unica soluzione. Infatti, come vedremo, alcuni eventi potranno *ritardare* senza causare ritardi sul tempo di completamento dell'intero progetto.

Vediamo ora la fase all'indietro, che servirà a determinare per ogni evento l'ampiezza del ritardo ammissibile. Definiamo il tempo massimo di un evento come l'istante oltre il quale la realizzazione dell'evento stesso (l'inizio delle attività successive, associate agli archi in uscita dall'evento stesso) provoca un aumento (ritardo) del tempo di completamento dell'intero progetto. Il problema consiste quindi nella ricerca del cammino massimo fra ogni nodo ed il nodo finale e quindi viene risolto con la seconda fase dell'algoritmo, analoga alla prima. Ricordiamo che n è il numero d'ordine associato all'evento di fine progetto.

ALGORITMO: FASE ALL'INDIETRO

Passo 1:

Passo 2:

Passo 3: se t_i è l'evento di inizio progetto allora la seconda fase dell'algoritmo ha termine, altrimenti si ritorna al Passo 2.

Dalla conoscenza del tempo minimo e massimo per ogni evento si può quindi definire il *ritardo* (ritardo totale) di ogni evento:

Gli eventi a ritardo nullo sono detti *eventi critici*, infatti qualora tali eventi si realizzino più tardi del tempo minimo per essi definito, si avrà un aumento del tempo di completamento dell'intero progetto. Definiamo poi il *tempo di ritardo di un'attività (i,j)* come:

,

dove i è l'evento precedente, j è l'evento successivo e d_{ij} è la durata dell'attività tra gli eventi considerati. Tale tempo di ritardo si può considerare come il massimo ritardo che potrà subire la durata dell'attività stessa senza che il tempo di completamento dell'intero progetto subisca ritardi. Le attività a ritardo nullo saranno quindi dette *attività critiche*. Tutti i cammini da i a j che attraversano solo eventi critici e solo attività critiche sono detti *cammini critici*. E' pertanto evidente che un qualsiasi aumento della durata di un'attività critica provoca un uguale ritardo nel tempo di completamento dell'intero progetto. Quindi il completamento di tali attività entro la durata prevista dovrà essere verificato con la massima attenzione dal Project Manager per realizzare il progetto nel tempo minimo.

4.3. Algoritmo per un reticolo ad attività sui nodi

Il reticolo con attività sui nodi è un grafo valutato sui nodi e non sugli archi, infatti le durate delle attività sono associate ai nodi. L'algoritmo risolutivo prevede tre fasi:

- *stratificazione*, serve ad assegnare uno strato ad ogni attività del progetto;

- fase *in avanti*, serve a definire le *date minime di inizio (d.m.i.)* o *early start (ES)* e le *date minime di fine (d.m.f.)* o *early finish (EF)*;

- fase *all'indietro*, serve a definire le *date massime di fine (D.M.f.)* o *late finish (LF)* e le *date massime di inizio (D.M.i.)* o *late start (LS)*.

Quindi la data minima di inizio di un'attività indicherà l'istante in cui tale attività potrà essere schedulata al più presto, nel rispetto dei vincoli di precedenza e delle durate. La lunghezza di un cammino, a livello reticolare, viene definita come la somma delle durate associate ai nodi attraversati dal cammino stesso, per cui la data minima è la lunghezza del cammino massimo dall'attività iniziale compresa (nodo sorgente) all'attività considerata esclusa (nodo corrente), posto che la data minima di inizio dell'attività iniziale è pari a zero. La data minima di fine indicherà quindi l'istante in cui l'attività considerata può essere completata al più presto e si ottiene aggiungendo alla data minima di inizio la durata di tale attività. Di conseguenza la data minima di fine dell'attività terminale coincide con la data di completamento dell'intero progetto.

La data massima di fine di un'attività indica l'istante in cui tale attività può essere completata al più tardi, pena un ritardo nella data di completamento dell'intero progetto. Si ottiene sottraendo dalla data di completamento del progetto la lunghezza del cammino massimo dall'attività considerata esclusa (nodo corrente) all'attività terminale compresa (nodo terminale). La data massima di inizio indica l'istante in cui un'attività può essere schedulata al più tardi, pena un ritardo nel completamento dell'intero progetto e si ottiene sottraendo dalla data massima di fine la durata dell'attività stessa.

Chiamiamo K l'insieme delle attività e per ogni $k \in K$, siano:

- d_k la sua durata;
- ES_k e EF_k rispettivamente le sue date minime e massime di inizio e di fine;
- P_k e S_k rispettivamente gli insiemi delle sue attività precedenti e successive;
- Q_k lo strato di cui k fa parte.

ALGORITMO: STRATIFICAZIONE

Passo 1:

si pone $Q = Q_k$;

Passo 2:

si pone ;

Passo 3: iterare il Passo 2 fino a che tutte le attività siano assegnate ad uno strato. Sia lo strato dell'attività terminale.

Riassumendo con il Passo 1 si pongono nel primo strato tutte quelle attività prive di precedenti, mentre con il Passo 2 si assegnano allo strato i -esimo tutte quelle attività che hanno come precedenti le attività già raggruppate nello strato $(i-1)$ -esimo.

ALGORITMO: FASE IN AVANTI

Passo 4:

si pone ;

Passo 5:

si pone con ;

Passo 6: iterare il Passo 5 fino a che viene definita anche la dmf dell'attività terminale, che coincide con il tempo di completamento dell'intero progetto .

ALGORITMO: FASE ALL'INDIETRO

Passo 7:

si pone ;

Passo 8:

si pone

con

;

Passo 9: iterare il Passo 8 fino a che si definisce la DMi dell'attività iniziale, data che coincide con il tempo di inizio dell'intero progetto.

Dalla conoscenza delle date relative ad ogni attività si possono definire i seguenti ritardi:

- *Ritardo totale (total float)*, è il massimo ritardo ammissibile che può avere il tempo di completamento di un'attività, pena il ritardo nel completamento dell'intero progetto, nell'ipotesi che le attività precedenti terminino alla loro data minima di fine e le attività successive possano iniziare alla loro data massima di inizio. Le attività a ritardo totale nullo sono *critiche* e ogni cammino dall'attività iniziale a quella terminale, che attraversa solo attività critiche è un *cammino critico*.

- *Ritardo libero (free float)*, è il confine superiore al ritardo ammissibile per una attività, nell'ipotesi che le attività precedenti e seguenti inizino e terminino alla loro data minima.

- *Ritardo indipendente (independent float)*, è il confine superiore al ritardo ammissibile per una attività se le attività precedenti terminano alla loro data massima e le seguenti iniziano alla data minima. E' il meno usato.

con

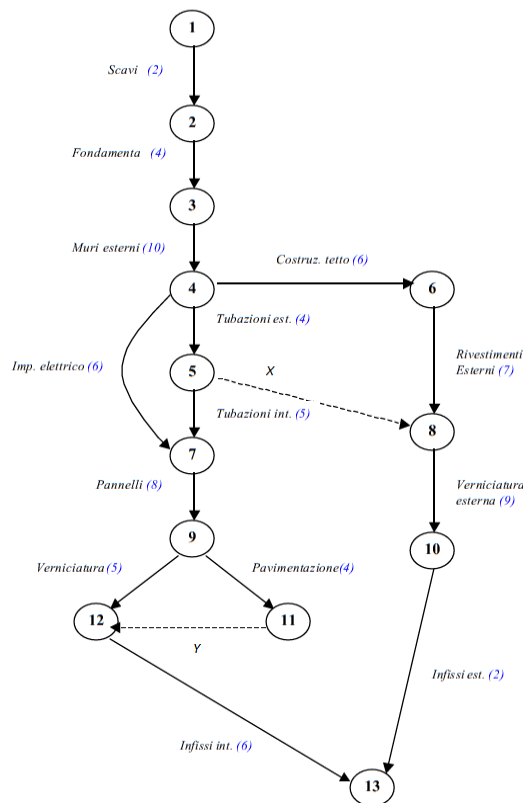
Per ogni attività si avrà:

4.4. Tecnica C.P.M. su un reticolo con attività sugli archi

Ritorniamo all'*Esempio 1* del Capitolo 2 relativamente alla costruzione di un palazzo. Il progetto era stato scomposto in attività per le quali è stata fatta una stima deterministica delle durate. Considerando i vincoli di precedenza si era giunti al modello reticolare ad attività sugli archi. Richiamiamo quanto visto precedentemente.

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	ATTIVITA' PRECEDENTI
A	Scavi	2	\
B	Fondamenta	4	A
C	Muri esterni	10	B
D	Costruzione tetto	6	C
E	Tubazioni esterne	4	C
F	Impianto elettrico	6	C
G	Tubazioni interne	5	E
H	Rivestimenti esterni	7	D
I	Pannelli	8	F,G
L	Verniciatura esterna	9	E,H
M	Pavimentazione	4	I
N	Verniciatura	5	I
O	Infissi esterni	2	L
P	Infissi interni	6	M,N

Tabella 2.1



Applichiamo ora l'algoritmo visto nel paragrafo 4.2. Ciò che si vuole arrivare a determinare è, per ogni evento, il tempo minimo, il tempo massimo e il ritardo totale.

Con la fase in avanti dell'algoritmo si ottengono i tempi minimi per ogni evento, riportati in *Tabella 4.1*.

Evento	Evento precedente	Tempo minimo precedente	+ Durata dell'attività	<u>Tempo minimo</u>
1	-	-	-	0
2	1	0	+ 2	2
3	2	2	+ 4	6
4	3	6	+ 10	16
5	4	16	+ 4	20
6	4	16	+ 6	22
7	4	16	+ 6	25
	5	20	+ 5	
8	5	20	+ 0	29
	6	22	+ 7	
9	7	25	+ 8	33
10	8	29	+ 9	38
11	9	33	+ 4	37
12	9	33	+ 5	38
	11	37	+ 0	
13	10	38	+ 2	44
	12	38	+ 6	

Tabella 4.1

Da questa tabella si vede che il tempo di completamento dell'intero progetto, ossia il tempo minimo dell'evento di fine progetto, è di 44 mesi.

Successivamente, con la fase all'indietro, si ottengono i tempi massimi per ogni evento, riportati in *Tabella 4.2*.

Evento	Evento successivo	Tempo massimo precedente	- Durata dell'attività	<u>Tempo massimo</u>
13	-	-	-	44
12	13	44	- 6	38
11	12	38	- 0	38
10	13	44	- 2	42
9	11	38	- 4	
	12	38	- 5	33
8	10	42	- 9	33
7	9	33	- 8	25
6	8	33	- 7	26
5	7	25	- 5	20
	8	33	- 0	
4	5	20	- 4	16
	6	26	- 6	
	7	25	- 7	
3	4	16	- 10	6
2	3	6	- 4	2
1	2	2	- 2	0

Tabella 4.2

Una volta calcolati i tempi minimi e i tempi massimi per ogni evento, è possibile definire il ritardo totale ammissibile per ogni evento che, come visto precedentemente, sarà dato dalla relazione:

I ritardi per ogni evento, calcolati quindi come differenza tra tempi massimi e tempi minimi, sono riportati in *Tabella 4.3*.

Evento	Tempo minimo	Tempo massimo	Ritardo totale
1	0	0	0
2	2	2	0
3	6	6	0
4	16	16	0
5	20	20	0
6	22	26	4
7	25	25	0
8	29	33	4
9	33	33	0
10	38	42	4
11	37	38	1
12	38	38	0
13	44	44	0

Tabella 4.3

Notiamo quindi che gli eventi 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 13 sono a ritardo totale nullo e quindi sono eventi critici. Ricordiamo il *tempo di ritardo di un'attività (i,j)* come:

,

dove è l'evento precedente, è l'evento successivo e è la durata dell'attività tra gli eventi considerati. Tale tempo di ritardo si può considerare come il massimo ritardo che potrà subire la durata dell'attività stessa senza che il tempo di completamento dell'intero progetto subisca ritardi. Le attività a ritardo nullo saranno quindi attività critiche.

Riportiamo per ogni attività, associata ad una coppia ordinata di eventi, il relativo tempo di ritardo sopra definito. I risultati ottenuti sono visualizzati in *Tabella 4.4*.

Attività	Eventi	Ritardo attività
A	1,2	$2-(0+2)=0$
B	2,3	$6-(2+4)=0$
C	3,4	$16-(6+10)=0$
D	4,6	$26-(16+6)=4$
E	4,5	$20-(16+4)=0$
F	4,7	$25-(16+6)=3$
G	5,7	$25-(20+5)=0$
H	6,8	$33-(22+7)=4$
I	7,9	$33-(25+8)=0$
L	8,1	$42-(29+9)=4$
M	9,11	$38-(33+4)=1$
N	9,12	$38-(33+5)=0$
O	10,13	$44-(38+2)=4$
P	12,13	$44-(38+6)=0$

Tabella 4.4

Dalla tabella si evince che le attività critiche sono A, B, C, E, G, I, N, P. Ora è possibile individuare il cammino critico per il progetto considerato, ossia quel cammino, dall'attività di inizio all'attività di fine progetto, che attraversa solamente eventi ed attività critiche. In questo caso il cammino critico sarà quindi rappresentato dagli eventi 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 13 corrispondenti alle attività A, B, C, E, G, I, N, P. Si noti che il cammino che attraversa, dall'attività iniziale a quella terminale, gli eventi critici 1, 2, 3, 4, 7, 9, 12, 13 non è un cammino critico in quanto l'attività F, corrispondente alla coppia ordinata di eventi (4,7), non è un'attività critica (a ritardo nullo).

Il completamento delle attività critiche A, B, C, E, G, I, N, P entro la durata prevista (stima deterministica) dovrà essere costantemente monitorato e verificato con la massima cura dal Project Manager, per poter completare il progetto nel tempo minimo (44 mesi).

Il cammino critico viene rappresentato graficamente in rosso, sul reticolo ad attività sugli archi del progetto di costruzione di un palazzo.

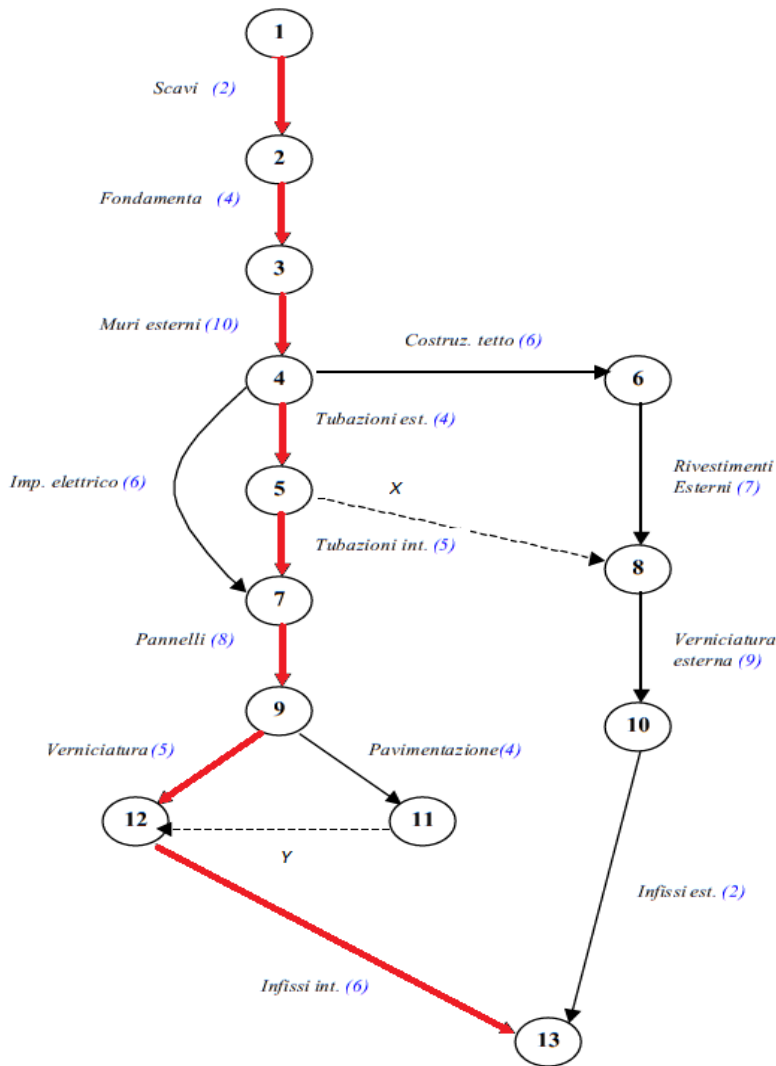


Figura 4.1

4.5. Tecnica C.P.M. su un reticolo con attività sui nodi

Ritorniamo all'Esempio 2 del Capitolo 2 relativo al problema di sostituzione di una caldaia. Le attività in cui era stato scomposto il progetto sono elencate in *Tabella 2.2*, che riportiamo per completezza. Abbiamo visto nel Paragrafo 4.3 come la risoluzione di un problema, rappresentato con le attività sui nodi, miri ad individuare le date minime e massime, di inizio e di fine, per ogni attività, in modo di arrivare a definire, sempre per ognuna di esse, i ritardi totale, libero e indipendente.

ATTIVITA'

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	ATTIVITA' PRECEDENTI
A	Sconnessione vecchia caldaia e tubi	4 gg	\
B	Smontaggio quadri elettrici	1 gg	\
C	Ordinazione nuova caldaia	40 gg	\
D	Ordinazione elettrovalvole	10 gg	\
E	Ordinazione centralina automatica	30 gg	\
F	Asporto vecchia caldaia	2 gg	A
G	Opere edili (base, finestre, ecc.)	8 gg	B,F
H	Montaggio quadri elettrici	2 gg	G
I	Montaggio nuova caldaia	3 gg	C,G
L	Montaggio tubi ed elettrovalvole	3 gg	D,I
M	Montaggio collegamento centralina	1 gg	E,L
N	Collegamento impianto gas	11 gg	G
O	Collaudo	1 gg	H,M,N

Tabella 2.2

Di solito quando si lavora manualmente, per chiarezza descrittiva e semplicità, le quattro date vengono indicate vicino ai nodi del grafo nell'ordine seguente:

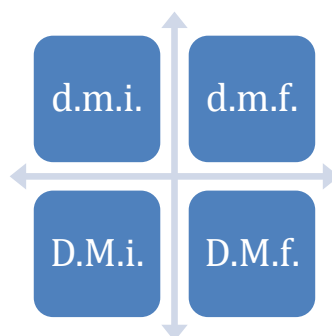


Figura 4.2

Avevamo visto che gli strati individuati erano otto e sono formati rispettivamente dalle attività {X}, {A,B,C,D,E}, {F}, {G}, {H,N,I}, {L}, {M}, {O}. Procedendo con le altre due fasi (in avanti e all'indietro) dell'algoritmo per la risoluzione dei reticoli ad attività sui nodi, si perviene all'individuazione delle quattro date per ogni attività. Il reticolo ottenuto è rappresentato in *Figura 4.3*.

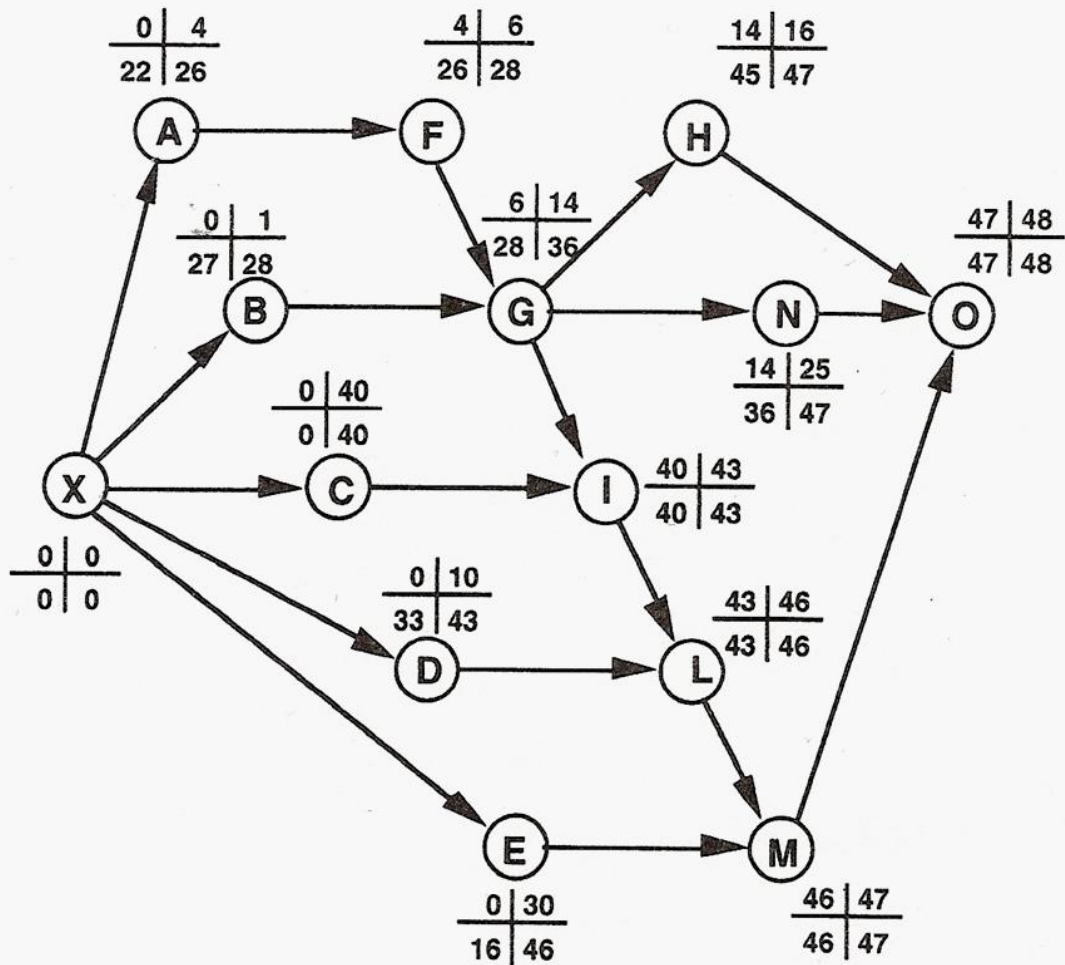


Figura 4.3

Si vede che la data di completamento dell'intero progetto (data minima di fine dell'attività terminale) è pari a 47 giorni.

Per chiarire meglio quanto si è fatto prendiamo, ad esempio, l'attività G. Essa è preceduta dalle attività B, F e seguita dalle attività H, N, I. Per quanto riguarda le attività precedenti B ed F, esse sono caratterizzate da

Le attività H, N, I hanno , pertanto:

;

E' ora possibile andare a valutare i ritardi relativi ad ogni attività secondo le relazioni viste nel Paragrafo 4.3, che saranno elencati nella seguente tabella:

Attività	r tot	r lib	r ind
A	22	0	0
B	27	5	5
C	0	0	0
D	33	33	33
E	16	16	16
F	22	0	0
G	22	0	0
H	31	31	9
I	0	0	0
L	0	0	0
M	0	0	0
N	22	22	0
O	0	0	0

Tabella 4.5

Anche qui facciamo un esempio di calcolo per meglio chiarire quanto ottenuto. Consideriamo ad esempio l'attività H preceduta dall'attività G e seguita dall'attività O.

Le attività a ritardo totale nullo X (attività fittizia iniziale di durata nulla), C, I, L, M ed O sono quindi le attività critiche del progetto, le quali formano anche il cammino critico. Il risultato complessivo della tecnica C.P.M. viene in genere presentato sottoforma di *diagramma a barre di Gantt*: su una scala temporale, ogni attività è rappresentata da una barra di lunghezza pari all' durata, posizionata in modo che l'estremo sinistro della barra corrisponda alla d.m.i.; spesso si prolunga la barra con un tratto discontinuo pari al ritardo totale.

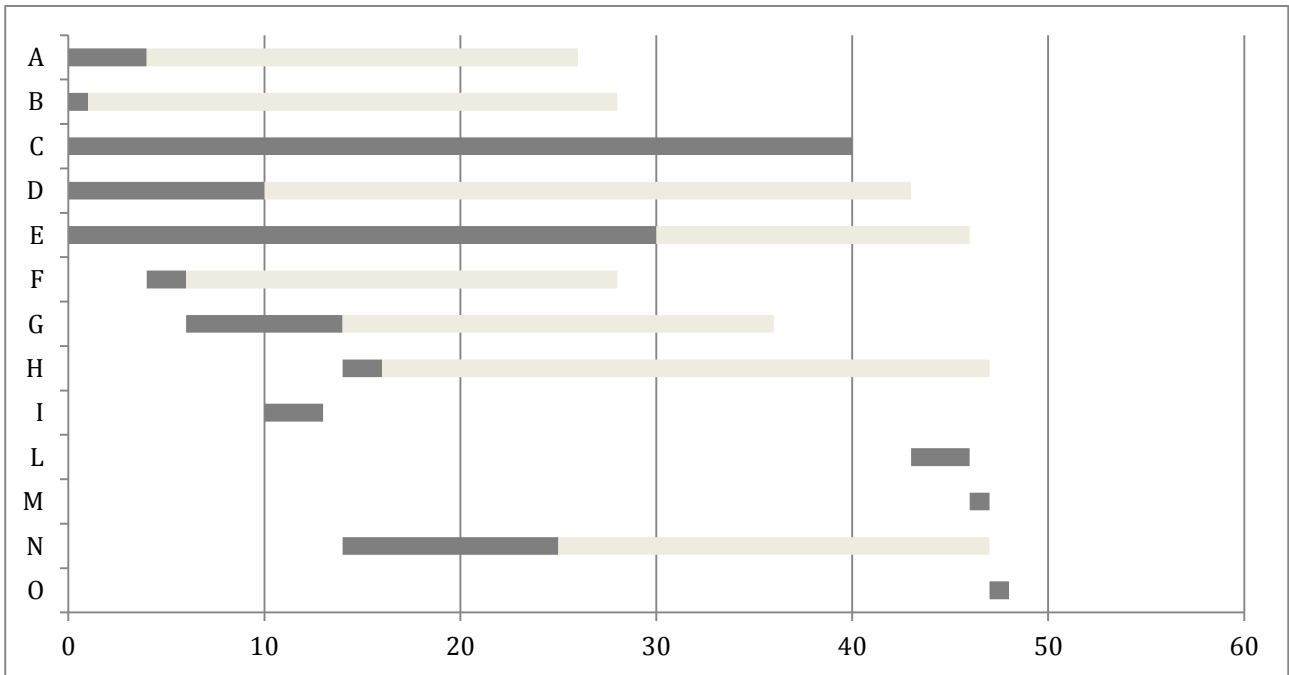


Figura 4.4

4.6. Problema di pianificazione di progetto a risorse limitate

Per spiegare il problema si ricorre ad un esempio in cui le attività sono caratterizzate, oltre che dalla loro durata, anche da una richiesta di risorse. Tali risorse devono essere condivise tra più attività. Per semplicità si suppone che vi sia una sola risorsa disponibile in quantità limitata. Tale quantità viene posta pari a 7. Si prenda ad esempio il progetto scomposto nelle attività elencate in *Tabella 4.6* di cui si è ricavato il reticolo ad attività sui nodi, rappresentato in *Figura 4.5*. Si noti che nel reticolo sono presenti le attività fittizie X e Y di durata nulla che vengono associate rispettivamente alle attività iniziali (prive di precedenti) A, D, G e alle attività finali (prive di successive) C, F, I.

Attività	Durata	Attività precedenti	Richiesta risorsa
A	7	\	3
B	5	A	2
C	2	B	4
D	3	\	6
E	2	D	5
F	1	E,H	1
G	4	\	3
H	6	G	5
I	3	H	2

Tabella 4.6

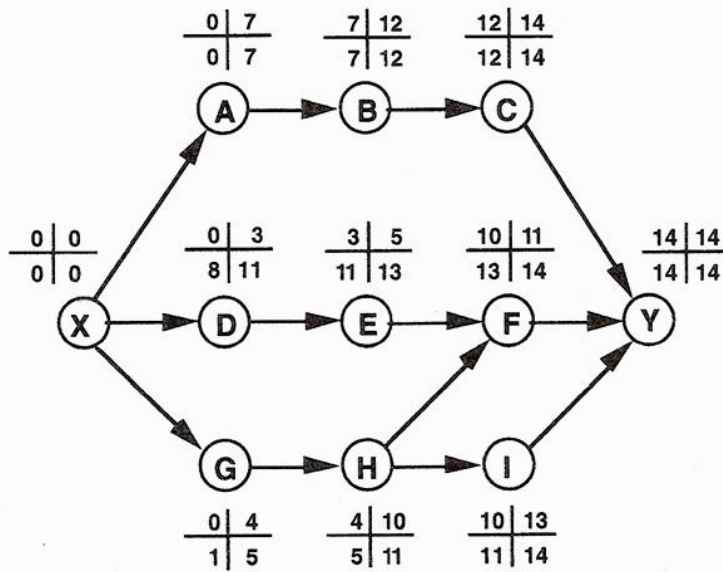


Figura 4.5

Dato il problema, la tecnica risolutiva da applicare è il cosiddetto C.P.M. risorse, che può nel caso generale essere utilizzata anche in presenza di più risorse limitate. Se ci si ponesse nell'ipotesi di risorsa disponibile in quantità illimitata, e si risolvesse quindi il problema con la tecnica C.P.M. per reticoli ad attività sui nodi, le date massime e minime, di inizio e di fine, sarebbero quelle riportate nel reticolo in figura 4.5. In questo modo se si decidesse di iniziare ogni attività alla sua data minima, in accordo con i vincoli di precedenza, la quantità di risorse impegnata in funzione del tempo sarebbe quella riportata in *Figura 4.6*.

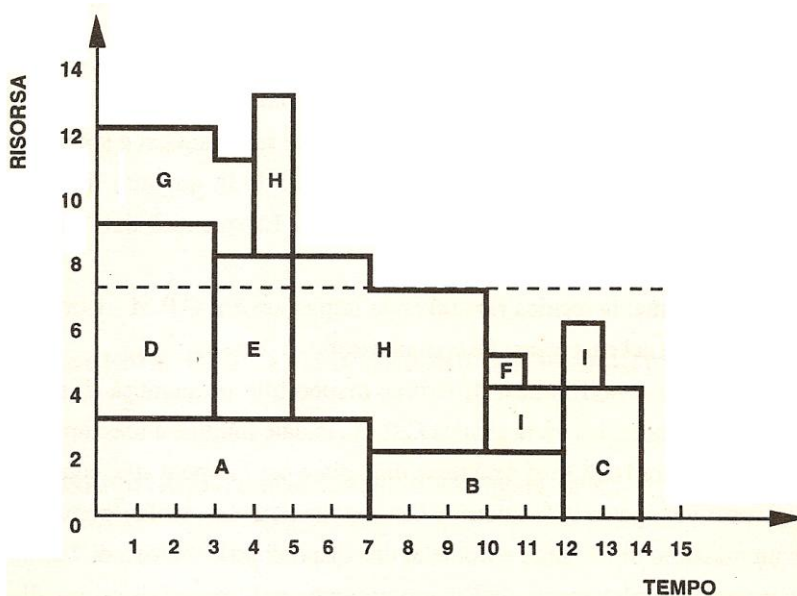


Figura 4.6

Notiamo dal reticolo che, nell'ipotesi di risorsa illimitata, il tempo minimo di completamento dell'intero progetto, che coincide con la data minima di fine dell'attività terminale Y, risulta pari a 14.

In realtà però la risorsa è limitata e ciò aggiunge un ulteriore vincolo al problema, infatti si vede come in certi istanti la richiesta di risorse, dettata dalle attività schedate nell'istante considerato, superi il limite di disponibilità della risorsa stessa. Pertanto l'ulteriore vincolo impone che non è più ammissibile far iniziare tutte le attività alla loro data minima. Il problema, come dimostrato ad esempio nel libro di Elmaghraby, è NP-hard e di conseguenza è possibile trovare una soluzione ottima solo per casi di piccole dimensioni (dell'ordine di qualche decina di attività), con procedure di tipo Branch and Bound. Per i casi più frequentemente affrontati in pratica, si ricorre a tecniche euristiche, che sono implementate su alcuni pacchetti software commerciali, generalmente impiegati per applicazioni industriali di dimensione media e grande.

Le tecniche euristiche più diffuse sono le tecniche *parallela, seriale e strettamente seriale*. Esse operano la schedulazione (*scheduling*), ossia l'assegnazione della data di inizio, di tutte le attività in modo sequenziale e definitivo. La sequenza secondo cui le attività vengono esaminate e, in accordo con i vincoli del problema, schedate, risulta da una lista dinamica detta *decision set*. In relazione alla scelta iniziale di un certo criterio di priorità e alla scelta di una particolare tecnica euristica da utilizzare, le attività subiscono un processo che prevede:

- inserimento nel decision set;
- ordinamento nel decision set (secondo il criterio di priorità adottato);
- estrazione dal decision set e schedulazione.

4.7. Tecnica parallela per la pianificazione a risorse limitate

Vediamo ora l'algoritmo che sta alla base di una delle tecniche euristiche, menzionate sopra, per la risoluzione di progetti in presenza di risorse limitate: la tecnica parallela. Assumendo che il tempo sia discreto (le durate delle attività sono intere), essa costruisce un diverso decision set per ogni istante di tempo. Come detto, sarà necessario stabilire un criterio di priorità, che viene solitamente deciso dal Project Manager in base all'*urgenza* che si vuole attribuire a ciascuna attività. Supponiamo che tale criterio sia quello del cosiddetto *total float parallelo* basato sulle date massime di inizio calcolate con la tecnica C.P.M. a risorse illimitate. Per ogni attività k , al generico istante di tempo t , il total float è dato dalla seguente relazione:

E' evidente che il total float può anche essere negativo. Le attività presenti in un certo istante di tempo t vengono quindi ordinate per valori crescenti di TF . In tal modo si pongono in testa alla lista le attività che potrebbero ritardare maggiormente il tempo di completamento del progetto. In caso di parità del total float fra più attività, l'ordine può avvenire in modo arbitrario o seguendo un secondo criterio di priorità stabilito dal Project Manager.

ALGORITMO: SCHEDULING PARALLELO

Passo 1:

Passo 2: le attività inserite in L vengono ordinate in base al criterio di priorità scelto.

Passo 3: le attività vengono estratte dalla lista ordinata L e schedulate al tempo t , se vi è risorsa sufficiente; le attività che possono quindi essere schedulate vengono tolte dalla lista, mentre le attività rimaste vanno inserite in L .

Passo 4:

ogni attività le cui precedenti siano tutte terminate al tempo t , viene aggiunta a L .

Passo 5: se L è vuoto allora STOP, altrimenti si ritorna al Passo 2.

Ricordiamo che K è l'insieme delle attività e che $P(k)$ è l'insieme delle attività precedenti all'attività k considerata.

Esempio 3: Pianificazione a risorse limitate con scheduling parallelo

Consideriamo l'esempio proposto precedentemente e rappresentato nel reticolo di Figura 4.5. Il progetto è stato scomposto nelle attività elencate in Tabella 4.6, le quali sono caratterizzate, oltre che dalla loro durata e dai vincoli di precedenza del tipo FS, da una richiesta di risorse. Si suppone che vi sia un'unica risorsa disponibile in quantità limitata e si ipotizza tale quantità pari a 7. Applicando la tecnica C.P.M. per reticoli ad attività sui nodi, ipotizzando dapprima la risorsa disponibile in quantità illimitata, si è arrivati a definire, per ogni attività, le date minime e massime, di inizio e di fine. Si è visto come, facendo iniziare le attività alla loro data minima, si vada contro al vincolo di risorse definito inizialmente (Figura 4.6). Supponiamo infine di ordinare le attività in secondo valori crescenti del total float parallelo e applichiamo l'algoritmo di scheduling parallelo.

Passo 1: si inseriscono nella lista le attività prive di precedenti, ossia A, D, G.

Passo 2: le attività vengono ordinate in , si ha che e quindi ;

Passo 3: le attività A e G vengono schedulate al tempo , dato che richiedono rispettivamente 3 e 3 unità di risorsa. D, richiedendo 6 unità di risorsa non può essere schedulata a e viene quindi inserita nella lista dell'istante di tempo successivo .

Passo 4: al tempo nessuna attività può essere inserita in , perchè nessuna attività ha le sue precedenti terminate a .

Passo 5: e quindi si ritorna al Passo 2.

Passo 2: è già ordinato perchè comprende una sola attività.

Passo 3: l'attività D non può essere schedulata perchè A e G sono ancora in atto e quindi non vi è risorsa sufficiente.

La sequenza dei Passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta, senza che vari, fino a . Si riprende quindi con il Passo 4.

Passo 4: , l'attività G è completata, infatti richiedeva una durata pari a 4. Essendo che G è l'unica attività a precedere H, H viene aggiunta a .

Passo 5: e quindi si ritorna al Passo 2.

Passo 2: e quindi

Passo 3: a , l'attività A è ancora in atto (durata 7) e richiede 3 unità di risorsa. H e D ne richiedono rispettivamente 5 e 6, quindi se ne schedulassi anche solo una delle due andrei contro il vincolo di disponibilità limitata di risorse (pari a 7). Nessuna attività può essere schedulata in questo istante di tempo.

La sequenza dei Passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta, senza che vari, fino a

L'algoritmo viene iterato e si ha che, analogamente a quanto appena visto, vengono schedulate le attività H e B al tempo ; l'attività D al tempo ; le attività E ed I al tempo ; le attività C ed F al tempo . A questo punto avremo quindi:

Passo 4: , tutte le attività sono state schedulate e quindi ho una lista vuota.

Passo 5: e quindi STOP.

Il termine delle attività si ha per , infatti le ultime attività C ed F venono schedulate al tempo e hanno durata rispettivamente di 1 e 2 unità di tempo. Il grafico che riporta gli istanti di schedulazione e l'impiego della risorsa viene riportato in *Figura 4.7*.

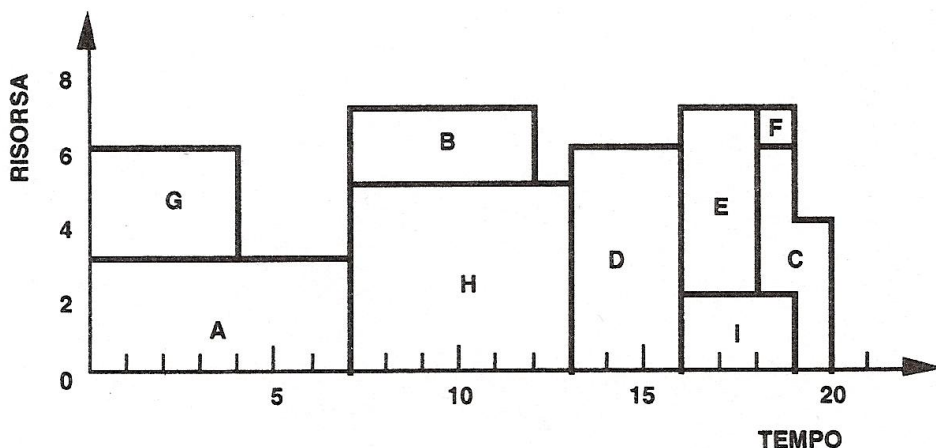


Figura 4.7

Il tempo di completamento dell'intero progetto così ottenuto è ottimo, ma in generale ciò non è garantito. Tuttavia la tecnica parallela dà soluzione subottime molto buone. Per contro vi sono alcuni svantaggi piuttosto evidenti:

- i calcoli sono laboriosi anche se la complessità dell'algoritmo è polinomiale;
- da un punto di vista applicativo, se la risorsa è ben sfruttata, ci sono frequenti *tempi morti* fra attività adiacenti (ad esempio fra G e H, H e I, B e C). Ciò può costituire uno svantaggio dal punto di vista organizzativo.

Esempio 3: Costruzione di un palazzo con risorsa limitata

Supponiamo ora di considerare, per l'esempio visto in precedenza, che lo svolgimento di ogni attività richieda la supervisione del responsabile di cantiere in una misura che dipende dalla tipologia dell'attività stessa. Riportiamo nella seguente tabella tale richiesta, espressa in ore mensili, per ogni attività.

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	ATTIVITA' PRECEDENTI	RISORSA
A	Scavi	2	\	40
B	Fondamenta	4	A	80
C	Muri esterni	10	B	120
D	Costruzione tetto	6	C	120
E	Tubazioni esterne	4	C	80
F	Impianto elettrico	6	C	40
G	Tubazioni interne	5	E	80
H	Rivestimenti esterni	7	D	40
I	Pannelli	8	F,G	40
L	Verniciatura esterna	9	E,H	20
M	Pavimentazione	4	I	100
N	Verniciatura	5	I	20
O	Infissi esterni	2	L	40
P	Infissi interni	6	M,N	60

Tabella 4.7

Si suppone che il responsabile di cantiere sia disponibile per un massimo di 120 ore mensili. Riportiamo ora il problema in forma di reticolo ad attività sui nodi, per predisporci all'utilizzo della tecnica C.P.M. parallela. Per ogni attività sarà quindi necessario calcolare le date minime e massime, di inizio e di fine. In questo caso si nota che l'attività A, essendo priva di precedenti, costituisce l'attività di inizio progetto. Inoltre, le attività O e P, essendo prive di attività successive, verranno associate alla medesima attività fittizia Y di durata nulla, che costituirà quindi l'attività di fine progetto. Si ricordi che per calcolare le quattro date con la tecnica C.P.M. per reticoli ad attività sui nodi è necessario ipotizzare inizialmente che la risorsa si disponibile in quantità illimitata. Si ottiene quindi il reticolo di *Figura 4.8*.

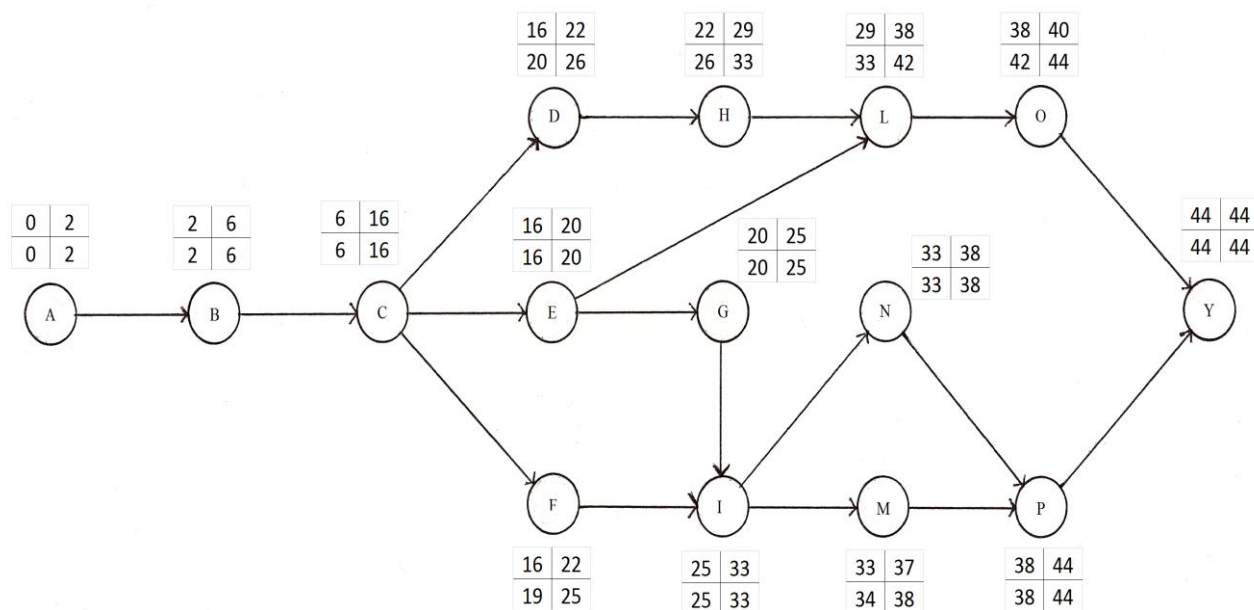


Figura 4.8

Si noti, per completezza, che le date minime di inizio di ogni attività coincidono con i tempi minimi dei relativi eventi di inizio attività. Analogamente le date massime di inizio di ogni attività coincidono con i tempi massimi dei relativi eventi di inizio attività. Si noti inoltre che il risultato ottenuto (il tempo di completamento dell'intero progetto) è indipendente dal tipo di rappresentazione utilizzata ed è sempre pari a 44 mesi. E' possibile quindi individuare le attività critiche (a ritardo totale nullo), ricordando che:

Riportiamo i ritardi totali e indipendenti per ogni attività in *Tabella 4.8*.

NOME	r tot	r ind
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	4	0
E	0	0
F	7	7
G	0	0
H	4	0
I	0	0
L	4	0
M	1	1
N	0	0
O	4	0
P	0	0

Tabella 4.8

Le attività critiche sono ancora A, B, C, E, G, I, N, P e individuano il cammino critico. Ipotizzando la risorsa disponibile in quantità illimitata si avrebbero i seguenti istanti di schedulazione e il relativo impiego di risorsa.

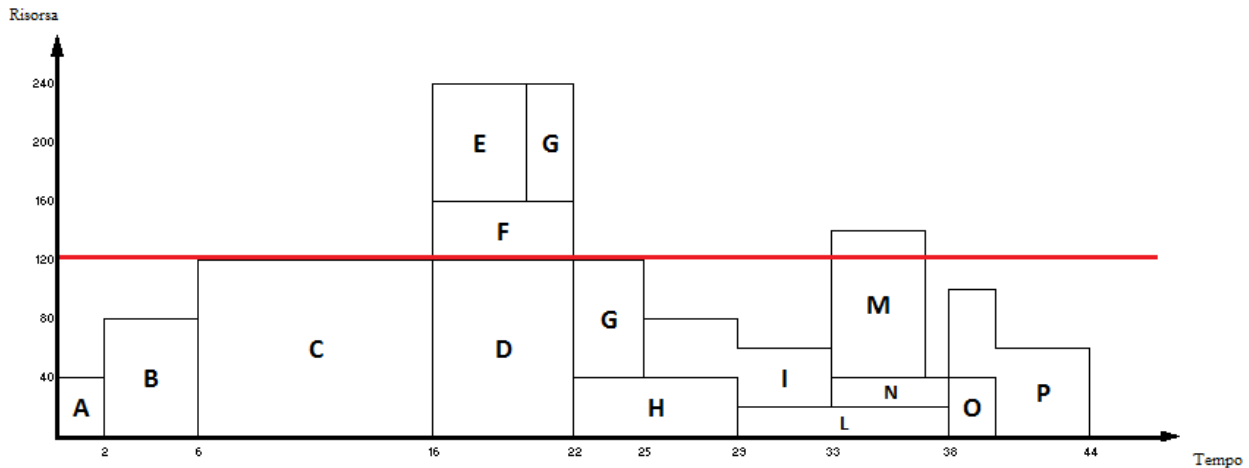


Figura 4.9

Si nota che vi sono istanti di tempo nei quali, rilasciando l'ipotesi di risorsa illimitata, si va oltre la capacità disponibile di risorsa. E' quindi necessario applicare la tecnica parallela per avere una schedulazione che tenga conto anche del vincolo di risorsa.

Si consideri anche il questo caso il criterio di precedenza del total float parallelo. Le attività A,B,C vengono schedulate alla corrispondente data minima di inizio, in quanto i vincoli di precedenza esistenti (A precede B, B precede C) non causano il superamento della capacità disponibile di risorsa. Quindi iniziamo a vedere cosa accade a partire dal completamento dell'attività C ().

Passo 4: , C è stata completata ed è l'unica attività a precedere (direttamente) le attività D, E, F.

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2:

Quindi si riordina la lista:

Passo 3: vengono schedulate E ed F, che richiedono rispettivamente 80 e 40 unità di risorsa. D non viene schedulata perchè ho saturato la capacità disponibile.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari , fino a .

Passo 4: , E viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: . Sappiamo che G è un attività critica per cui la si ritiene più urgente.

Passo 3: F (40) è ancora in atto. Viene schedulata G (80).

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari , fino a , perchè sebbene F venga completata a , non sarebbe disponibile risorsa sufficiente per schedulare D.

Passo 4: , F viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: .

Passo 3: Viene schedulata D (120).

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari , fino a .

Passo 4: , D viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: .

Passo 3: Vengono schedulate I (40) e H (40).

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari , fino a .

Passo 4: , H viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: la lista è già ordinata.

Passo 3: I (40) è ancora in atto. viene schedulata L (20).

Passo 4: , I viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2:

Passo 3: Viene schedulata N (20) ma è ancora in atto L (20) e quindi M (100) non può essere schedulata.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari, fino a .

Passo 4: , N viene completata.

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: la lista è già ordinata.

Passo 3: L (20) è ancora in atto. viene schedulata M (100).

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari, fino a .

Passo 4: , L viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: la lista è già ordinata.

Passo 3: M (100) è ancora in atto e quindi O (40) non viene schedulata.

Passo 4: , M viene completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2:

Passo 3: Vengono schedulate P (60) e O (40).

Tutte le attività sono state schedulate e l'ultima a terminare è P di durata 6, che essendo stata schedulata a , sarà completata a . Quest'ultima sarà la data di completamento dell'intero progetto nel caso di risorsa limitata.

E' possibile vedere gli istanti di schedulazione e l'impiego della risorsa in *Figura 4.10*. Con il vincolo aggiuntivo considerato si ha quindi un aumento del tempo di completamento dell'intero progetto pari a 10 mesi.

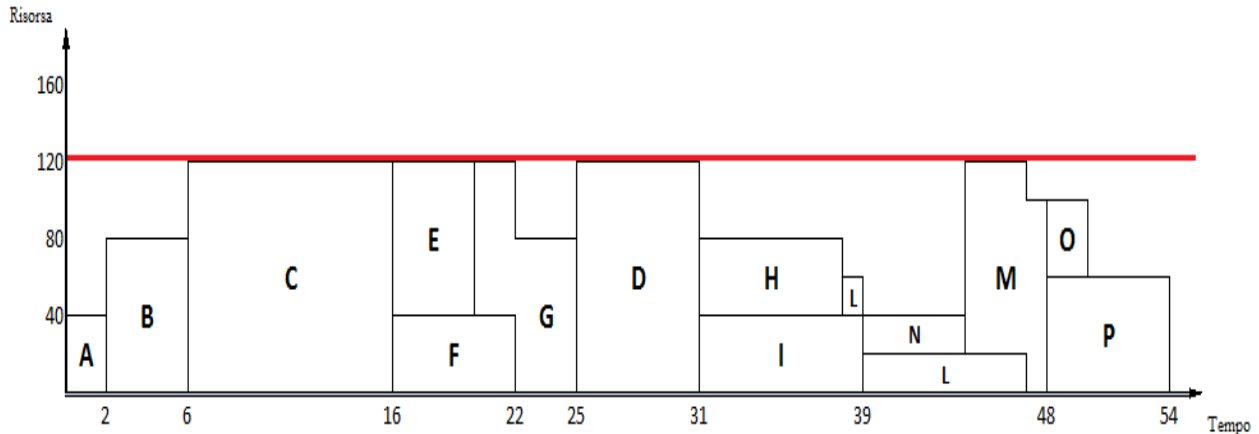


Figura 4.10

Esempio: Progetto dell'ospedale St. Adolf

Questo esempio riguarda il trasferimento di una struttura ospedaliera in una zona diversa dell'area metropolitana. Il trasferimento implica la costruzione di un nuovo ospedale nel nuovo sito e comporta la pianificazione di tutte le attività necessarie per renderlo operativo. Judith Kramer, nominata Project Manager dal consiglio di amministrazione dell'Ospedale, deve predisporre una bozza preliminare della pianificazione del progetto. Con l'aiuto del Team di progetto, J. Kramer ha elaborato una WBS (work breakdown structure, ossia struttura di scomposizione del lavoro) articolata in 11 macro-attività. Il Team ha specificato anche tutti i predecessori immediati delle macro-attività e quindi i vincoli di precedenza (del tipo FS) per ogni attività. Inoltre sono state stimate in modo deterministico le durate di tali attività. Ogni attività richiede il controllo e la supervisione del Project Manager, durante il suo svolgimento, per un certo quantitativo di ore settimanali. Tenuto conto che il Project Manager può essere disponibile per un massimo di 50 ore settimanali, il problema ha quindi un vincolo di risorsa e quindi la pianificazione dovrà essere fatta in modo tale da considerare anche questo aspetto.

In *Tabella 4.9* vengono descritte quindi le attività che compongono il progetto, le loro durate (esprese in settimane), le relazioni di precedenza del tipo FS e la loro richiesta settimanale di risorsa.

NOME	DESCRIZIONE	DURATA	PRECEDENZE	RISORSA
A	Selezionare lo staff medico e il personale amministrativo	12	\	20
B	Selezionare il sito e svolgere una indagine preliminare	9	\	20
C	Selezionare le attrezzature	10	A	10
D	Preparare I piani finali di costruzione e il layout	10	B	30
E	Allacciare il sito ai servizi pubblici	24	B	5
F	Coprire le posizioni di lavoro (pers. Tecnico e Infermieristico)	10	A	15
G	Acquistare e seguire la consegna delle attrezzature	35	C	30
H	Costruire l'ospedale	40	D	20
I	Sviluppare il sistema informativo	15	A	5
J	Installare le attrezzature	4	E,G,H	5
K	Formare gli infermieri e il personale di supporto	6	F,I,J	5

Tabella 4.9

Essendo un progetto a risorsa limitata è conveniente riferirsi ad un reticolo ad attività sui nodi nel quale, per ogni attività, saranno calcolate le date minime e massime, di inizio e di fine, con l'algoritmo della tecnica C.P.M. per reticoli AON. Allo scopo di costruire il reticolo, si nota che vi sono due attività (A e B) che non sono precedute da alcun'altra attività, pertanto si riferiranno entrambe alla medesima attività fittizia X di durata nulla, che costituirà l'attività di inizio progetto. Inoltre si nota che K non ha attività successive e quindi costituisce l'attività di fine progetto. Si ricorda che per ottenere il reticolo ad attività sui nodi descritto, è necessario dapprima considerare la risorsa disponibile in quantità illimitata. Il reticolo ottenuto è rappresentato in *Figura 4.11* e mostra che il tempo di completamento dell'intero progetto è pari a 69 settimane (data minima di fine dell'attività terminale). Le attività critiche individuate sono X, B, D, H, J, K (per ognuna di queste la data minima di inizio coincide con la data massima di inizio e la data minima di fine coincide con la data massima di fine, pertanto sono tutte attività a ritardo totale nullo) e individuano il cammino critico evidenziato in rosso.

Una volta determinate le quattro date, considerando la risorsa illimitata, è possibile valutare l'utilizzo della capacità disponibile per ogni istante in cui il progetto viene svolto. Gli istanti di schedulazione e la capacità utilizzata sono rappresentati nel grafico di *Figura 4.12*. Da tale figura si nota come vi siano vari istanti in cui l'utilizzo della risorsa è però superiore alla capacità disponibile della risorsa stessa (50 ore settimanali). Sarà pertanto necessario ricorrere all'utilizzo della tecnica C.P.M. parallela per la risoluzione del problema a risorsa limitata.

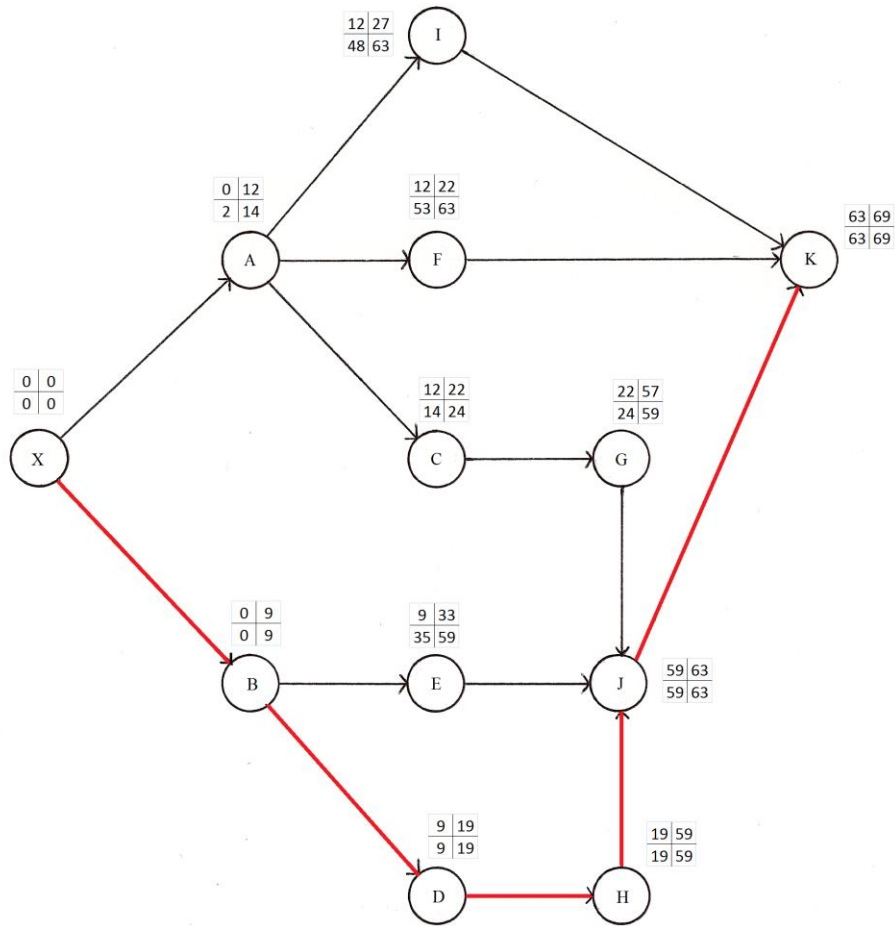


Figura 4.11

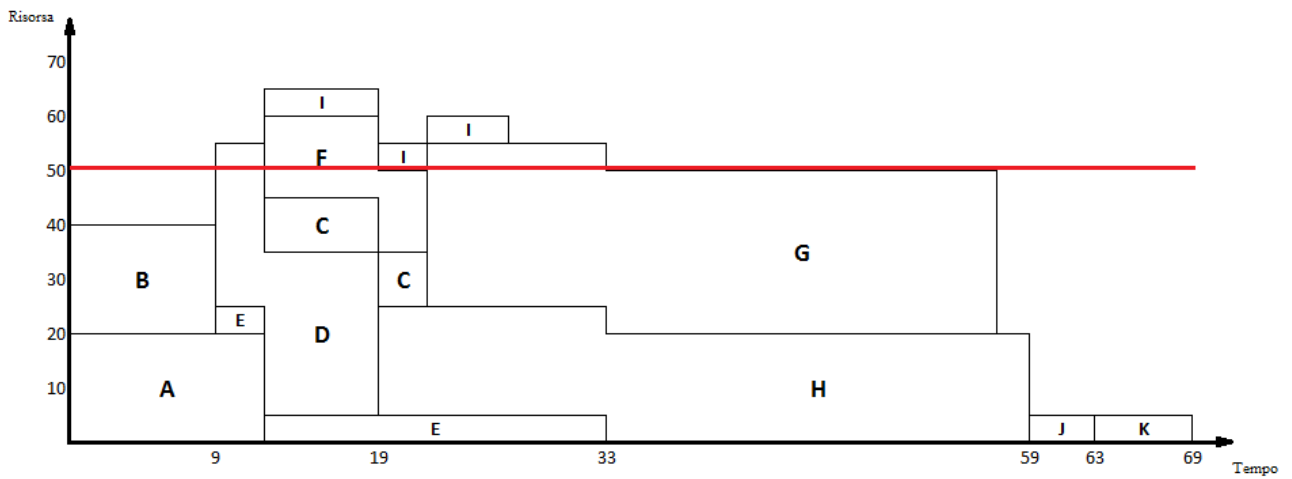


Figura 4.12

A partire da quanto ricavato nel caso di risorsa illimitata si procede ad applicare la tecnica parallela, ricordando il limite di 50 ore settimanali di disponibilità della risorsa. Anche qui il criterio di precedenza utilizzato sarà quello del total float parallelo.

Passo 1:

Passo 2:

quindi si ordina la lista

Passo 3:

A (20) e B (20) vengono entrambe schedulate al tempo

Per i vincoli di precedenza esposti in tabella, non può essere schedulata alcun'altra attività fintanto che A o B non siano terminate.

Passo 4:

, B è stata completata ed è l'unica attività a precedere (direttamente) le attività D, E.

Passo 5:

, si va al Passo 2.

Passo 2:

la lista è già ordinata.

Passo 3:

viene schedulata D (30). E (5) non viene schedulata perchè A (20) è ancora in atto.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che

vari , fino a

Passo 4:

, A è stata completata ed è l'unica attività a precedere (direttamente) le attività C, F, I.

Passo 5:

, si va al Passo 2.

Passo 2:

Passo 3:

vengono schedulate C (10), E (5), I (5). F (15) non viene schedulata perchè D (30) è ancora in atto.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che

vari , fino a

Passo 4:

, D è stata completata e quindi

Passo 5:

, si va al Passo 2.

Passo 2:

Passo 3: H (20) viene schedulata. F (15) non viene schedulata perchè C (10), E (5), I (5) sono ancora in atto.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari, fino a .

Passo 4: , C è stata completata e quindi .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2:

Passo 3: G (30) non viene schedulata perchè H (20), E(5), I (5) sono ancora in atto. F (15) viene schedulata.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari, fino a .

Passo 4: , E è stata completata. .

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: la lista è già ordinata.

Passo 3: G (30) viene schedulata.

A questo punto è necessario che G venga completata per poter schedulare J. Essendo che G ha inizio a e ha durata pari a 35 settimane, J (5) viene schedulata a . Analogamente K (5) può iniziare solo quando è terminata J (di durata pari a 4 settimane) e ciò avviene per . Il progetto, essendo che l'attività terminale K ha durata pari a 6 settimane, ha tempo di completamento settimane (ossia 12 settimane più tardi rispetto al caso di risorsa illimitata). Gli istanti di schedulazione e l'utilizzo della risorsa sono riportati in *Figura 4.13*.

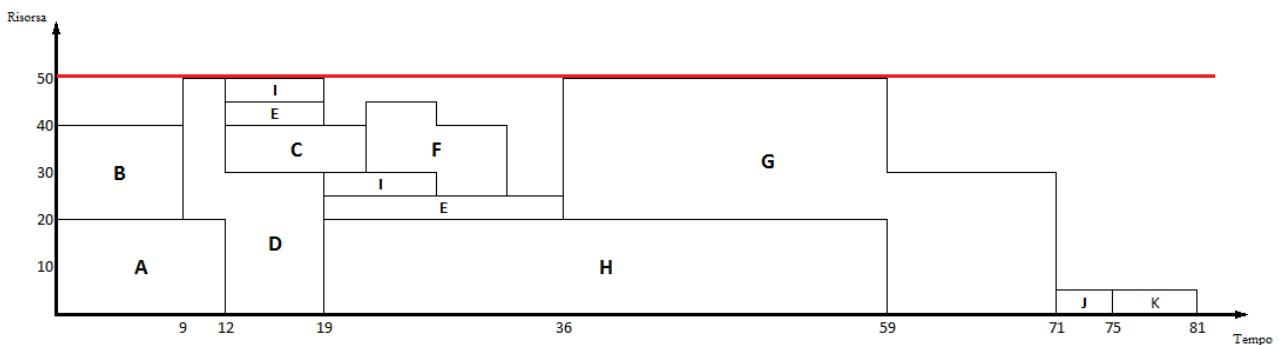


Figura 4.13

CAPITOLO 5

Tecnica P.E.R.T.

5.1. Generalità

P.E.R.T., acronimo dalla lingua inglese che sta per *Program Evaluation and Review Technique*. È una tecnica (formalismo grafico) di Project Management sviluppata nel 1958 dalla Booz, Allen & Hamilton, Inc. (una ditta di consulenza ingegneristica), per l'ufficio Progetti Speciali della Marina degli Stati Uniti. L'obiettivo era quello di ridurre i tempi ed i costi per la progettazione e la costruzione dei sottomarini nucleari armati con i missili Polaris, coordinando nel contempo diverse migliaia di fornitori e di subappaltatori. Con questa tecnica si tengono sotto controllo le attività di un progetto utilizzando una rappresentazione reticolare che tiene conto della interdipendenza tra tutte le attività necessarie al completamento del progetto.

Questa tecnica considera sempre vincoli di precedenza del tipo FS, ma, a differenza del C.P.M., considera attività di durata aleatoria. Risulta adatta a progetti fortemente influenzati da eventi prevedibili solo in termini probabilistici, come ad esempio progetti di costruzioni civili soggetti a ritardi dovuti a cause meteorologiche. Il metodo prevede che per ogni attività si conoscano le stime della durata ottimistica (caso migliore, se tutto ha funzionato bene e nei tempi previsti), della durata pessimistica (caso peggiore) e della durata più probabile. Il calcolo di queste stime viene effettuato da esperti delle specifiche attività basandosi sull'esperienza e sulle conoscenze possedute. Quindi si suppone che le durate delle attività abbiano una funzione densità di probabilità di tipo Beta, con deviazione standard data dalla seguente formula:

–

dove:

- stima della durata ottimistica;
- stima della durata pessimistica;
- K insieme delle attività in cui viene scomposto il progetto.

Questa espressione della deviazione standard deriva dal fatto che, per la maggior parte delle distribuzioni di probabilità, la probabilità che il valore della variabile cada in un intervallo di ampiezza pari a 6σ centrato attorno al valor medio è praticamente unitaria. Allora se la durata dell'attività è distribuita secondo la distribuzione Beta il suo valore atteso sarà approssimato dalla formula:

dove m è la stima del valore più probabile della durata dell'attività, cioè la stima della moda della variabile aleatoria (si ricordi che la distribuzione Beta è monomodale). Quindi il valore medio della durata dell'attività è una media pesata tra il punto medio dell'intervallo $\frac{a+b}{2}$ e il valore della moda. Nella figura seguente è riportato l'andamento della densità di probabilità di una distribuzione Beta.

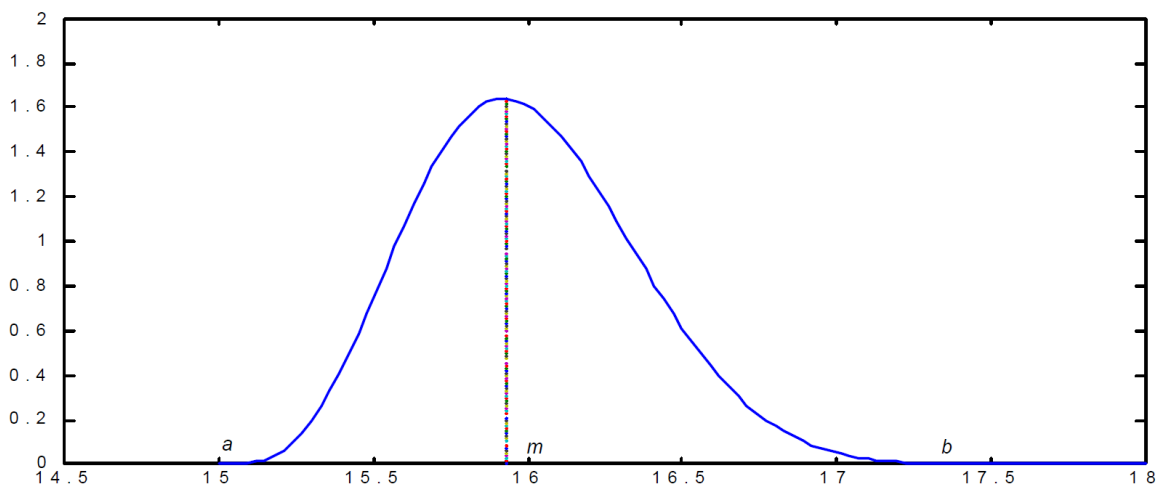


Figura 5.1

Nel modo appena descritto il P.E.R.T. calcola i valori attesi e le deviazioni standard delle variabili aleatorie relative alle durate di tutte le attività.

Si risolve quindi un problema di tipo C.P.M. a risorse illimitate, considerando per ogni attività la durata media sopra definita: si trova così il tempo di fine progetto T , che viene accettato come *durata attesa (o durata media) del progetto*. Inoltre la somma delle varianze delle attività contenute nel cammino critico è accettata come varianza della durata dell'intero progetto (se vi è più di un cammino critico si considera quello cui corrisponde la massima varianza). In definitiva nel P.E.R.T. il tempo di realizzazione del progetto sarà una stima affetta da incertezza, che si vuole valutare. In particolare si definisce *dead line* il tempo massimo entro il quale il progetto deve essere terminato, allora quello che ci interessa è la probabilità che il progetto sia terminato senza aver superato la dead line. Per procedere nel calcolo si suppone *che i tempi di durata delle varie attività siano tra loro statisticamente indipendenti*. Fatta questa ipotesi si può ricorrere allora al teorema del limite centrale, cioè si può assumere che la somma delle variabili aleatorie corrispondenti alla durata delle attività del cammino critico sia ancora una variabile aleatoria avente *distribuzione normale* con media pari alla somma delle medie e varianza pari alla somma delle varianze.

Sia la trattazione teorica che l'esperienza pratica concordano nell'affermare che è *sempre* errata per difetto (ordine del 5%), mentre è errata in modo diverso da caso a caso (ciò può essere dovuto alla non indipendenza fra le durate delle attività). A tali errori generalmente si rimedia con correzioni empiriche.

5.2. Applicazioni della tecnica P.E.R.T.

Consideriamo l'esempio della costruzione di un palazzo visto. Il cammino critico trovato con la tecnica C.P.M. è rappresentato dagli eventi 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 13 corrispondenti alle attività A, B, C, E, G, I, N, P. Il tempo di completamento dell'intero progetto, ossia il tempo minimo dell'evento di fine progetto, è di 44 mesi. Nella seguente tabella sono riportati i valori dei vari parametri relativi ad alcune attività (sono solo quelle del cammino critico trovato in precedenza).

Attività	DURATA DELL' ATTIVITA'			Valore atteso	Varianza
	Stima ottimistica	Stima più probabile	Stima pessimistica		
A	1	2	3	2	1/9
B	2	3,5	8	4	1
C	6	9	18	10	4
E	1	4,5	5	4	4/9
G	4	4	10	5	1
I	3	9	9	8	1
N	1	5,5	7	5	1
P	5	5,5	9	6	4/9
Totale	23	43	69	44	9

Tabella 5.1

Quindi, se stiamo usando il P.E.R.T., i numeri scritti tra parentesi nel reticolo rappresenteranno i valori attesi delle durate delle attività e non il loro valore esatto. Infatti si può notare come la somma dei valori attesi delle durate delle attività dia 44, che è il tempo di completamento dell'intero progetto già calcolato precedentemente. La durata totale del progetto sarà allora una variabile aleatoria con distribuzione normale avente media uguale a 44 e varianza uguale a 9. Quindi dato il tempo massimo *DL* entro il quale il progetto deve essere realizzato (dead line), e chiamato *T* il tempo di realizzazione del progetto, consultando le tabelle della distribuzione normale avente media nulla e varianza unitaria potremo facilmente calcolare la probabilità:

Ponendo ad esempio una dead line pari a 47 giorni si avrà:

Nel grafico di *Figura 5.2* è riportato l'andamento della probabilità che il progetto venga realizzato (entro il tempo massimo) al variare del tempo massimo di completamento (dead line). In particolare si vede come tale probabilità cresca all'aumentare della dead line DL.

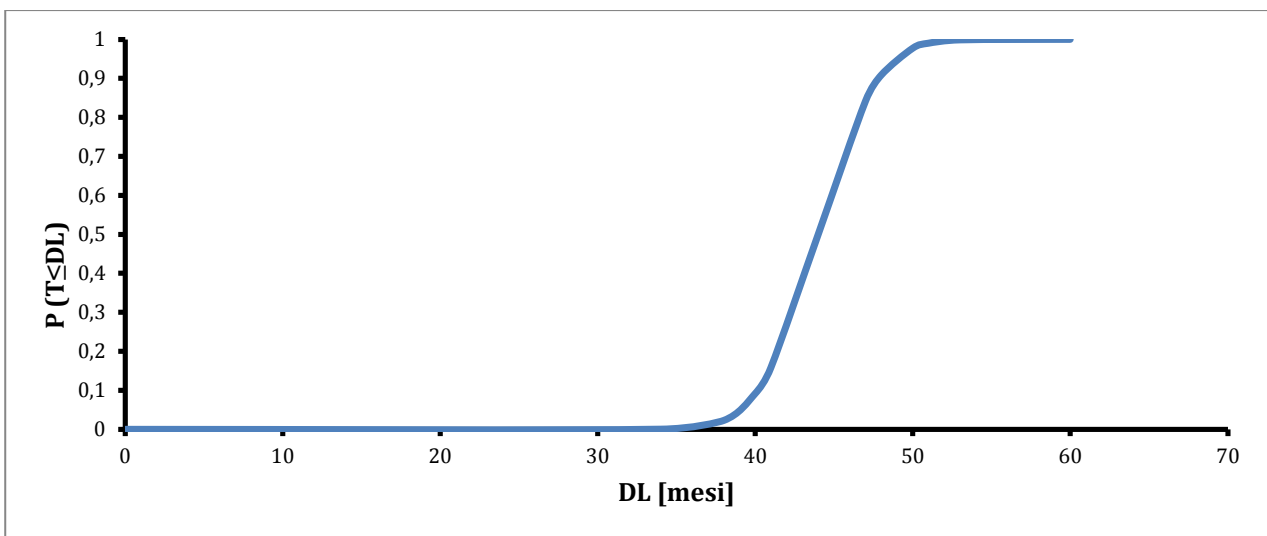


Figura 5.2

Un'ultima osservazione riguarda l'aver assunto come tempo di realizzazione del progetto quello del cammino critico. Nel caso del P.E.R.T. avendo a che fare con variabili aleatorie questo non sarà del tutto vero, perché in particolari condizioni potrebbe esserci un altro cammino avente durata maggiore. In genere comunque l'approssimazione che facciamo considerando il cammino critico è valida, e lo sarà tanto di più quanto più la durata del cammino critico sarà maggiore delle durate degli altri percorsi.

Esempio: Applicazione ai processi

Vediamo ora un'applicazione delle tecniche P.E.R.T. e C.P.M. non più ai progetti, ma questa volta ai *processi*. Processi e progetti aziendali hanno finalità e caratteristiche profondamente diverse infatti un processo ha caratteristiche di continuità che un progetto non ha. Un progetto vive all'interno di un perimetro preciso in termini di tempo, costo ed obiettivi. Un processo è invece costituito da attività correnti che non hanno un termine. Si può dire che un processo aziendale è costituito da un flusso procedurale più o meno complesso di attività divisionali o di settore finalizzato al perseguimento di indirizzi strategici oppure operativi in maniera continua.

Consideriamo il processo relativo ad un centro di riparazione dei computer. Esso riceve i computer difettosi inviati o recapitati dai clienti, li ripara e li restituisce ai proprietari. Ogni computer è soggetto agli stessi test e alle stesse attività di riparazione (politica di standardizzazione aziendale) e il tempo per la singola riparazione dipenderà dai risultati dei test. Inoltre essendo la componente umana molto presente e la variabilità dei problemi riscontrabili nei computer abbastanza elevata, si decide di ricorrere a stime probabilistiche per il calcolo della durata delle attività, espresse in minuti, di cui si compone il processo. Le attività presentano delle interdipendenze del tipo FS e sono riportate in *Tabella 5.2*.

Si tratterà quindi di operare una tecnica C.P.M. a risorse illimitate utilizzando i valori attesi, calcolati con il metodo P.E.R.T., come durate delle attività. Il reticolo ad attività sui nodi sarà quello di *Figura 5.3* nel quale si nota che l'attività A coincide con l'attività di inizio processo (priva di precedenti) e l'attività G con quella di fine processo (priva di successive).

NOME	DESCRIZIONE	DURATA DELL'ATTIVITA'				VARIANZA	PRECEDENZE
		STIMA OTTIMISTICA	STIMA PIU' PROBABILE	STIMA PESSIMISTICA	VALORE ATTESO		
A	Test preliminare 1	3	4,5	9	5	1	\
B	Test preliminare 2	3	6,5	7	6	4/9	A
C	Smontaggio	3	4	5	4	1/9	B
D	Test e riparazione 1	7	7,5	11	8	4/9	C
E	Test e riparazione 2	2	6,5	8	6	1	C
F	Test e riparazione 3	2	9,5	8	4	1	C
G	Pulizia/Rimontaggio	9	9,75	12	10	1/4	D,E,F

Tabella 5.2

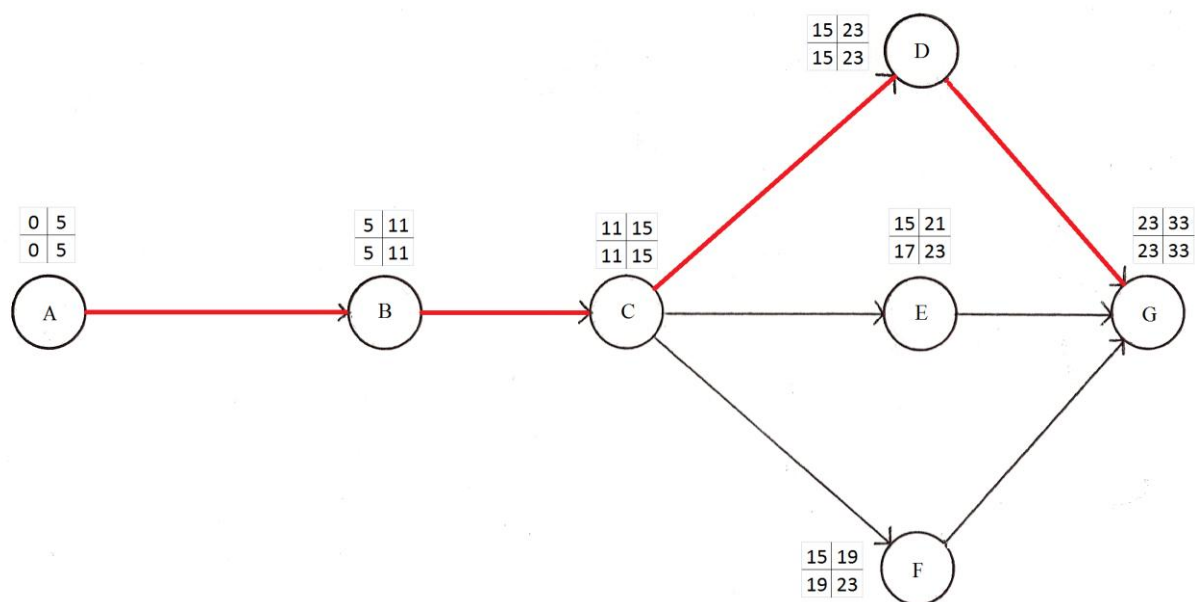


Figura 5.3

Si vede che le attività critiche sono quindi A, B, C, D, G e individuano il cammino critico evidenziato in rosso. Il tempo di completamento dell'intero processo è di 33 minuti.

Riportiamo in *Tabella 5.3* i dati relativi alle attività critiche e individuiamo la durata attesa del processo come somma dei valori attesi di ogni attività e, analogamente, la varianza del processo come somma delle varianze delle singole attività.

NOME	DESCRIZIONE	DURATA DELL'ATTIVITA'			VALORE ATTESO	VARIANZA	PRECEDENZE
		STIMA OTTIMISTICA	STIMA PIU' PROBABILE	STIMA PESSIMISTICA			
A	Test preliminare 1	3	4,5	9	5	1	\
B	Test preliminare 2	3	6,5	7	6	4/9	A
C	Smontaggio	3	4	5	4	1/9	B
D	Test e riparazione 1	7	7,5	11	8	4/9	C
G	Pulizia/Rimontaggio	9	9,75	12	10	1/4	D,E,F
TOT		25	24,75	44	33	9/4	

Tabella 5.3

Supponendo che i tempi di durata delle varie attività siano tra loro statisticamente indipendenti, si può ricorrere allora al teorema del limite centrale e quindi si può

assumere che la somma delle durate delle attività (variabili aleatorie) del cammino critico sia una variabile aleatoria avente distribuzione normale con media pari a 33 settimane e varianza pari alla somma delle varianze, ossia 4/9. Chiamato T il tempo di realizzazione del progetto, consultando le tabelle della distribuzione normale avente media nulla e varianza pari a 1, potremo facilmente calcolare l'andamento della probabilità che il processo si realizzi in funzione del tempo massimo di completamento (*Figura 5.4*). Ricordando che:

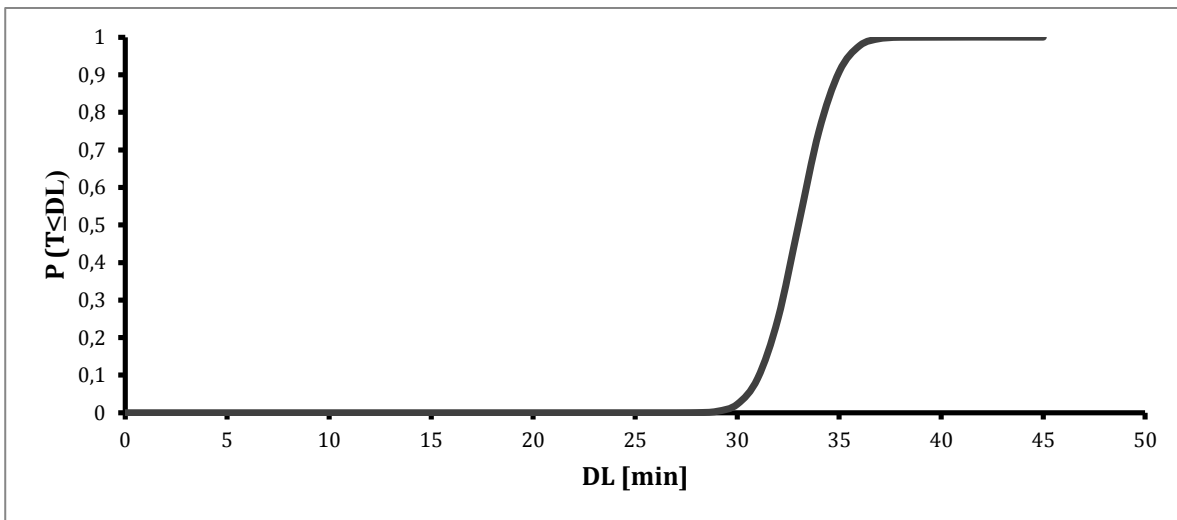


Figura 5.4

Si supponga ora che le attività che prevedano almeno un test, condividano l'uso di una medesima risorsa, disponibile in quantità limitata e pari a 5 unità/min. Le richieste di risorsa, espresse in unità, sono riportate in *Tabella 5.4*.

NOME	DESCRIZIONE	VALORE ATTESO	PRECEDENZE	RISORSA
A	Test preliminare 1	5	\	2
B	Test preliminare 2	6	A	1
C	Smontaggio	4	B	\
D	Test e riparazione 1	8	C	5
E	Test e riparazione 2	6	C	2
F	Test e riparazione 3	4	C	3
G	Pulizia/Rimontaggio	10	D,E,F	\

Tabella 5.4

Considerando dapprima la risorsa disponibile in quantità illimitata, gli istanti di schedulazione e l'utilizzo della risorsa sono descritti in *Figura 5.5*.

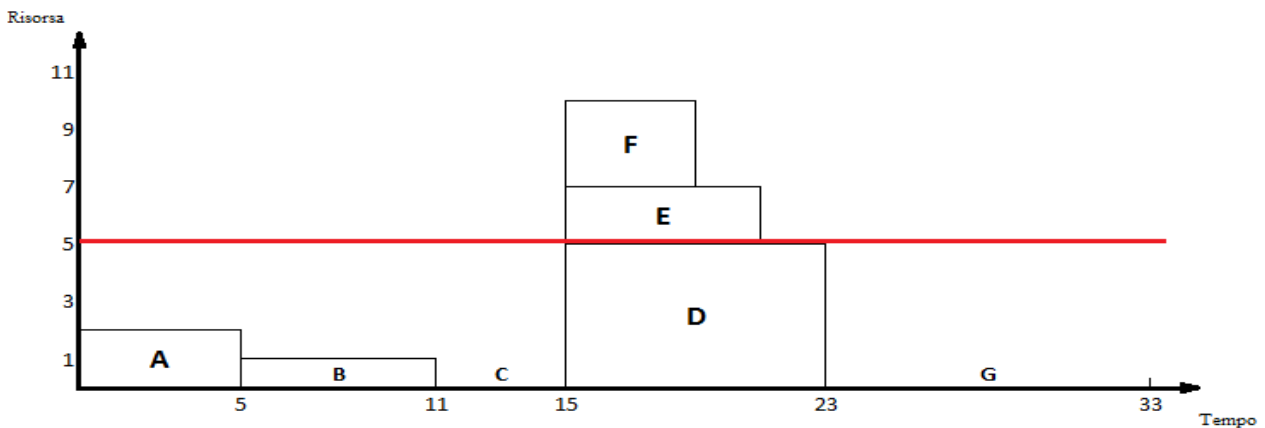


Figura 5.5

Applicando la tecnica parallela e utilizzando il criterio del total float parallelo per definire i livelli di urgenza delle attività per ogni istante, si ottiene l'andamento di *Figura 5.6*. Entrando nel dettaglio, le attività A, B, C vengono schedulate come nel caso a risorsa illimitata visto i loro vincoli di interdipendenza, per cui vediamo cosa accade a partire dall'istante .

Passo 4: , C è stata completata ed è l'unica attività a precedere (direttamente) le attività D, E, F.

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2:

Quindi la lista è già ordinata.

Passo 3: D (5) viene schedulata saturando la capacità di risorsa disponibile, quindi E (2) e F (3) non vengono schedulate.

La sequenza dei passi 4, 5, 2, 3 viene ripetuta senza che vari , fino a .

Passo 4: , D è completata.

Passo 5: , si va al Passo 2.

Passo 2: la lista è già ordinata.

Passo 3: E (2) e F (3) vengono schedulate.

Perchè l'attività G possa iniziare, devono essere terminate le attività D, E, F e ciò avviene per . G viene quindi schedulata in questo istante e, avendo valore atteso della durata pari a 10, il tempo di completamento dell'intero processo, sotto vincolo di risorsa, è pari a 39 minuti.

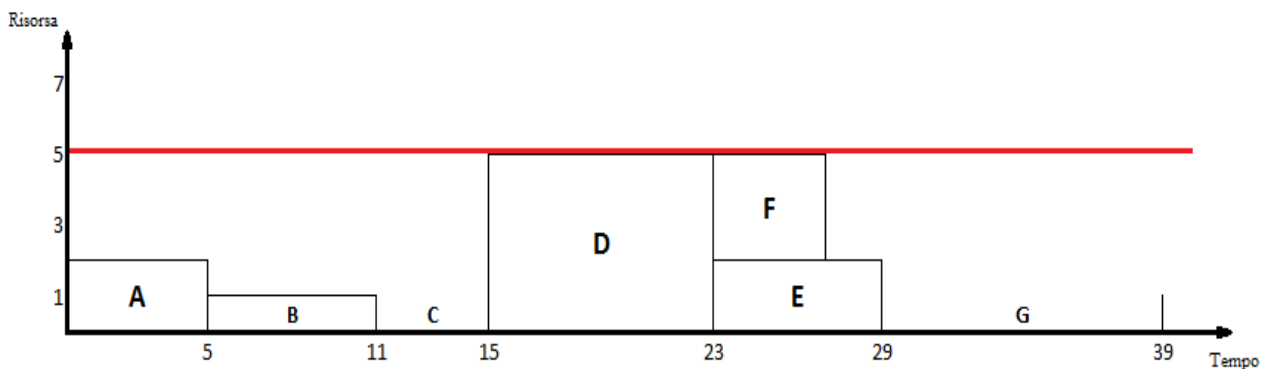


Figura 5.6

Essendo ora che il valore atteso della durata dell'attività E determina anch'esso il tempo di completamento dell'intero processo, si avrà una nuova distribuzione normale, di media pari a 39 e varianza pari a $13/4$ (Tabella 5.5), della probabilità che il processo venga realizzato entro un certo tempo massimo. Chiamato T il tempo di realizzazione del progetto, consultando le tabelle della distribuzione normale avente media nulla e varianza pari a _____, si potrà facilmente calcolare l'andamento della probabilità che il processo si realizzi in funzione del tempo massimo di completamento, ricordando che:

$$\frac{P(T \leq t)}{\sigma} = \frac{t - \mu}{\sigma}$$

		DURATA DELL'ATTIVITA'				
NOME	DESCRIZIONE	STIMA OTTIMISTICA	STIMA PIU' PROBABILE	STIMA PESSIMISTICA	VALORE ATTESO	VARIANZA
A	Test preliminare 1	3	4,5	9	5	1
B	Test preliminare 2	3	6,5	7	6	4/9
C	Smontaggio	3	4	5	4	1/9
D	Test e riparazione 1	7	7,5	11	8	4/9
E	Test e riparazione 2	2	6,5	8	6	1
G	Pulizia/Rimontaggio	9	9,75	12	10	1/4
TOT		27	31,25	52	39	13/4

CONCLUSIONI

In questa esposizione è stata trattata l'ottimizzazione di progetti nel caso di risorse illimitate e nel caso di risorse disponibili in quantità limitata, utilizzando due tecniche reticolari principali, ossia C.P.M. e P.E.R.T. L'ottimizzazione è stata principalmente interpretata come la ricerca del tempo minimo di completamento dell'intero progetto compatibilmente con i vincoli imposti dal problema, ma si è chiarito che in altri casi l'obiettivo potrebbe essere diverso da quest'ultimo. Si è visto il concetto di ciclo di vita del progetto per capire quali siano le fasi che caratterizzano il progetto stesso nell'arco della sua durata in modo da stabilire quali siano i momenti migliori per le decisioni e gli interventi da parte del Project Management.

Si è discusso il concetto di progetto come suddivisione, sufficientemente omogenea, in un certo numero di attività, vedendo come ogni attività sia caratterizzata da una certa durata, stimabile in modo deterministico o probabilistico, da dei vincoli di precedenza con le altre attività e da una certa richiesta di risorsa nell'arco del suo svolgimento. In particolare abbiamo quindi dato una formulazione del problema vedendo le possibili rappresentazioni e mostrato quali siano le tecniche risolutive da applicare in relazione al metodo di stima delle durate delle attività, al tipo di rappresentazione utilizzata e ai vincoli sulle risorse. Si è chiarito il concetto di attività critica in relazione al fatto che se tale attività iniziasse in ritardo rispetto a quanto stabilito, oppure si avesse un incremento della sua durata, si avrebbe inevitabilmente un ritardo nel tempo di completamento dell'intero progetto. Qualora la durata fosse una variabile aleatoria si sono viste le probabilità che il progetto venga realizzato entro un certo tempo massimo.

Si è quindi visto come l'utilizzo delle tecniche reticolari descritte possa costituire un forte strumento decisionale per il Project Management durante la fase di pianificazione. In particolare, essendo i progetti caratterizzati da un certo grado di incertezza per loro definizione, tali tecniche possono mostrare i risultati previsti, in termini temporali e di utilizzo della risorsa, dando un'indicazione su quali possano essere le strade principali di intervento per il raggiungimento dell'obiettivo prefissato. Una delle vie fondamentali è l'attento controllo della durata delle attività critiche per il completamento del progetto da parte del Project Manager, però è possibile fare anche delle valutazioni in merito ai possibili esiti qualora fosse aumentata, o diminuita, la disponibilità della risorsa. Si è cercato di fissare i concetti fornendo degli esempi applicativi per ogni caso discusso nella trattazione ed è stata data una rappresentazione quanto più possibilmente tangibile tramite l'utilizzo di diagrammi di Gantt e di diagrammi che descrivessero l'utilizzo della risorsa in funzione del tempo di svolgimento di tutte le attività componenti il progetto.

Si è visto infine come l'utilizzo delle tecniche viste possa essere esteso anche al caso di processi, e quindi a fenomeni caratterizzati dal fatto di essere ripetibili nel tempo.

BIBLIOGRAFIA

- G. Andreatta, F. Mason, G. Romanin Jacur, 1996, *Ottimizzazione su reti*, Padova, Italia: Edizioni Libreria Progetto Padova.
- L. Bianco, M. Caramia, 2006, *Metodi Quantitativi per il Project Management*, Italia: HOEPLI.
- N. Slack, S. Chambers, R. Johnston, A. Betts, P. Danese, P. Romano, A. Vinelli, 2007, *Gestione delle operations e dei processi*, Italia: Pearson Paravia Bruno Mondadori S.p.A.