

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Relazione per la prova finale
***«Sulla stabilità dei punti di Lagrange nel
problema dei tre corpi ristretto»***

Tutor universitario: Prof.ssa Gabriella Pinzari

Laureando: *Riccardo Zanon*

Matricola: 2105742

Padova, 24/09/2026

Il Modello (CR3BP)

Descrive il moto di un punto materiale attratto da due primari che evolvono su orbite circolari attorno al loro centro di massa. Si assume massa trascurabile per il terzo corpo:

$$m_A \gg m_P, m_B \gg m_P$$

Configurazioni di Equilibrio

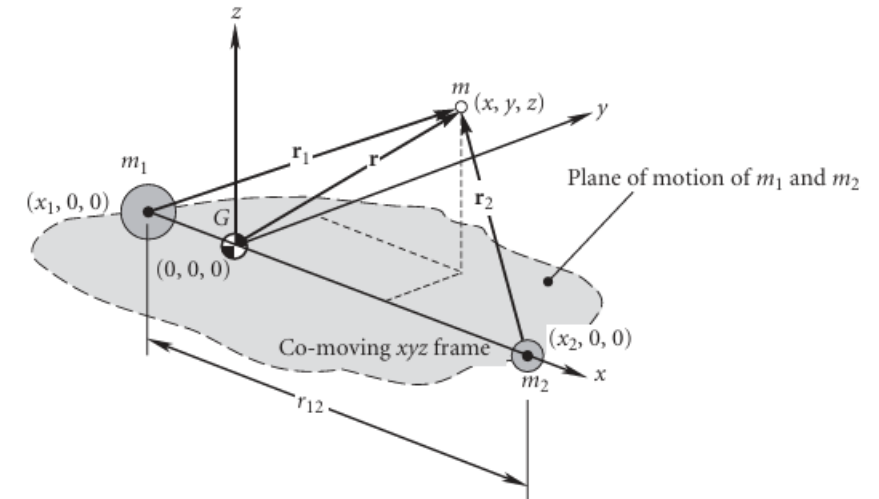
Nel sistema di riferimento rotante emergono **cinque punti di Lagrange** in cui il terzo corpo permane in quiete.

Obiettivo dinamico: Comprendere la reazione del sistema a piccole perturbazioni (stabilità).

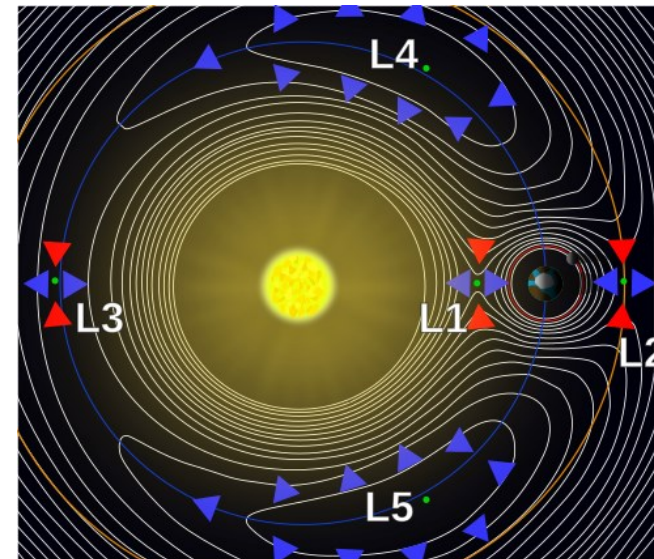
Stabilità Spettrale

Lo studio non si basa su traiettorie globali, bensì sul **sistema linearizzato** tramite lo spettro della matrice Jacobiana. Classificazione dei punti:

- **Iperbolici:** Autovalori con parte reale (Instabili).
- **Ellittici:** Autovalori immaginari puri (Stabili/Marginali).



Curtis, H. D. (2013). *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth Heinemann.



https://it.wikipedia.org/wiki/File:Lagrange_points2.svg

Il Sistema Dinamico

Modello matematico deterministico. Analizziamo il comportamento in prossimità di un **punto di equilibrio** introducendo una piccola perturbazione locale.

$$\dot{z}(t) = X(z(t)), \quad X(\bar{z}) = 0$$

Linearizzazione (Taylor)

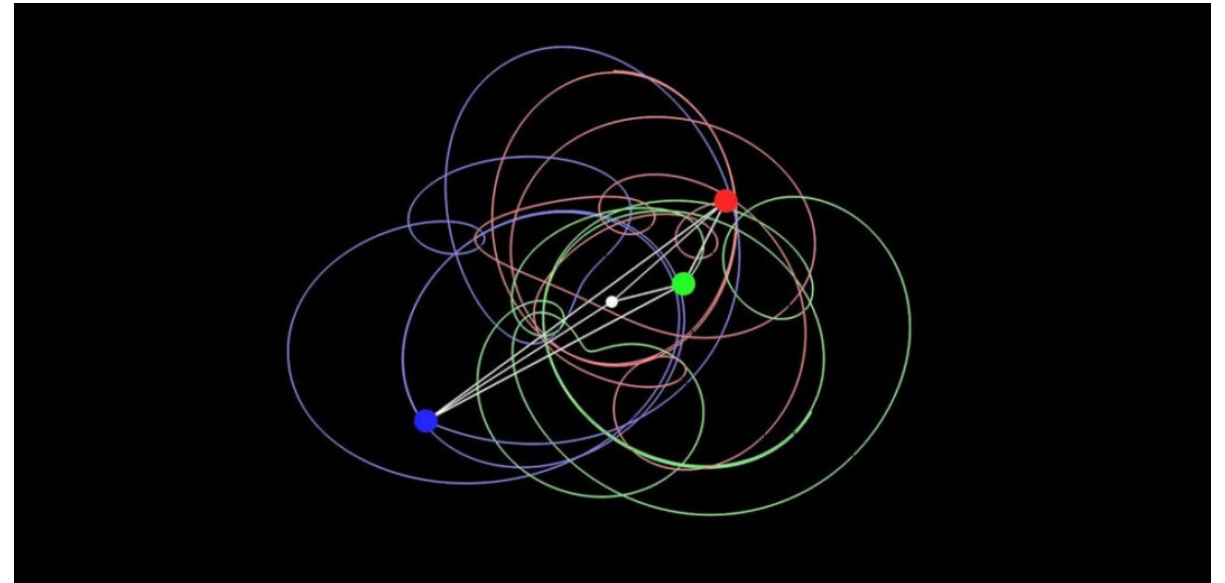
Sviluppando in serie il campo vettoriale e troncando al primo ordine (prima approssimazione di Lyapunov), otteniamo un sistema differenziale lineare.

$$\delta \dot{z}(t) = A \delta z(t), \quad A = D_z X(\bar{z})$$

Teorema di Grobman-Hartman

Garantisce l'equivalenza topologica locale tra sistema lineare e non lineare se il punto di equilibrio è **iperbolico**. In tal caso, l'analisi dello spettro di A descrive fedelmente la stabilità del sistema reale.

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$



<https://www.justnerd.it/wp-content/uploads/2024/04/simulazioni-orbite-il-problema-dei-tre-corpi.jpg>



La Soluzione Analitica

Un'equazione differenziale lineare ammette soluzione unica fissato il dato iniziale. La soluzione formale richiede l'**esponenziale di matrice**, un operatore il cui calcolo esplicito tramite serie è spesso operativamente complesso.

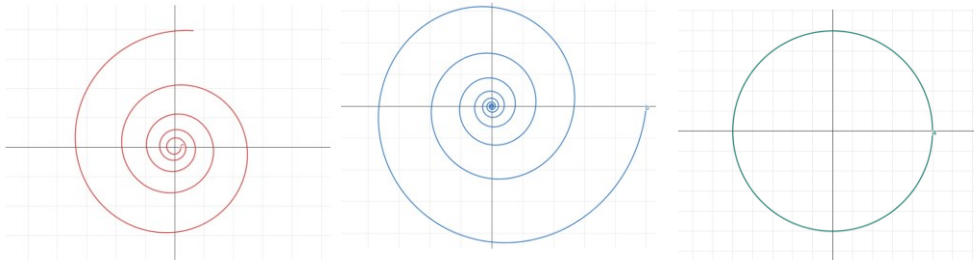
$$z(t) = \exp(tA)z_0$$



Il Ruolo degli Autovalori

L'evoluzione temporale dipende unicamente dagli **autovalori** $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$. La loro parte reale governa il fattore di scala esponenziale $e^{\alpha t}$, la parte immaginaria governa le frequenze di oscillazione.

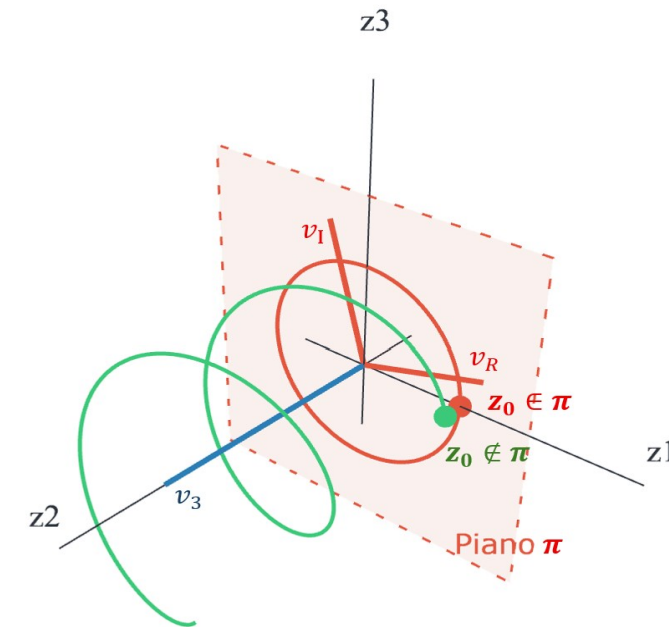
$$\exp(t\Lambda_{\text{Real}}) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$



Decomposizione Spettrale

Per superare tale complessità, si ricorre agli autovettori v_j . Se A è diagonalizzabile, l'esponenziale di matrice si riduce all'esponenziale di una matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$A = P \Lambda P^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = P \exp(t\Lambda) P^{-1} = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} v_j w_j^T$$



Stabilità spettrale

Un punto di equilibrio $\bar{z}$ si definisce **spetttralmente stabile** se $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0, \forall j = 1, \dots, n$

Risulta necessario tradurre le proprietà spettrali della matrice Jacobiana A in entità geometriche. Ciò si realizza attraverso la definizione di sottospazi vettoriali invarianti $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Partizione dello Spettro

Per studiare la topologia globale delle orbite, dividiamo lo spettro della matrice Jacobiana in tre insiemi, in base al segno della **parte reale** degli autovalori.

- $\sigma_s = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Re}(\lambda) < 0\}$
- $\sigma_u = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Re}(\lambda) > 0\}$
- $\sigma_c = \{\lambda \in \sigma(A) \mid \text{Re}(\lambda) = 0\}$

Sottospazi Invarianti

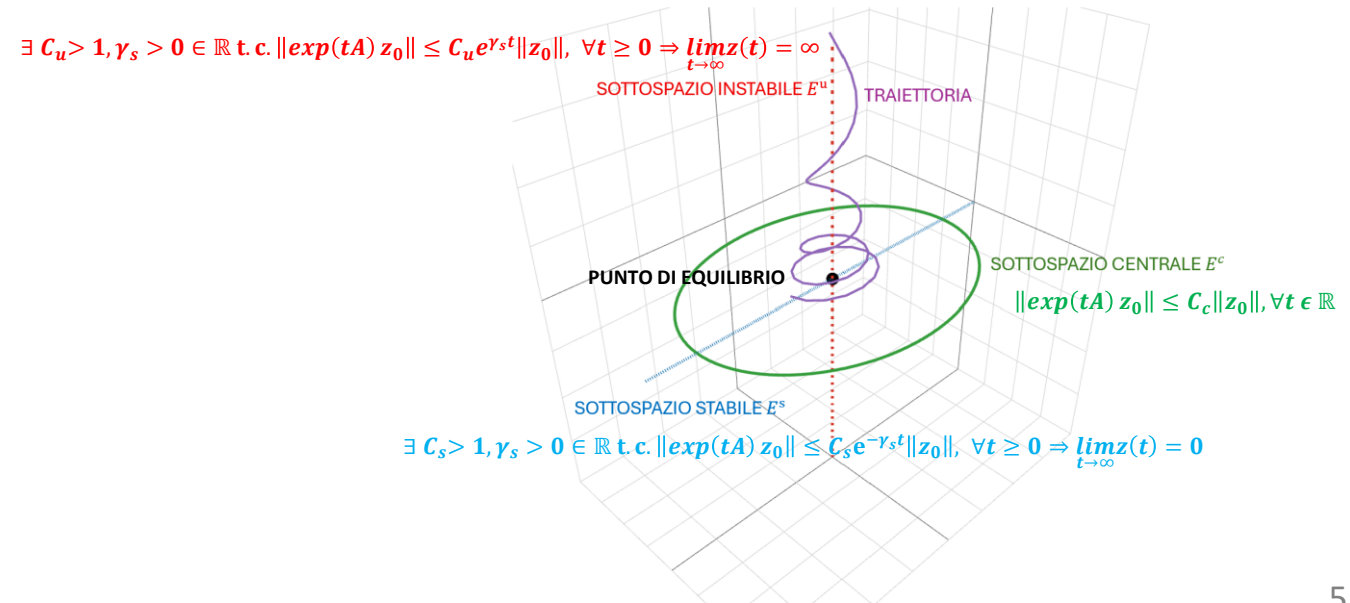
Queste proprietà spettrali si traducono in entità geometriche tangibili: i sottospazi vettoriali invarianti. L'intero spazio delle fasi si scompone nella loro **somma diretta**.

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

Evoluzione Asintotica

L'evoluzione temporale di un'orbita è governata dal sottospazio di appartenenza:

- **Stabile E^s** : converge al punto di equilibrio per $t \rightarrow \infty$
- **Instabile E^u** : diverge all'infinito per $t \rightarrow \infty$
- **Centrale E^c** : il moto è limitato e dominato da termini armonici (se A è diagonalizzabile).





Invarianti della Matrice

Considerando il sistema linearizzato planare (2D), le proprietà intrinseche della matrice dipendono esclusivamente da due invarianti: la **Traccia** τ e il **Determinante** Δ . Il polinomio caratteristico si riduce a:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$



Radici Caratteristiche

La natura degli autovalori (reali o complessi) e il loro segno dipendono analiticamente dalla combinazione dei due invarianti secondo la formula risolutiva:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

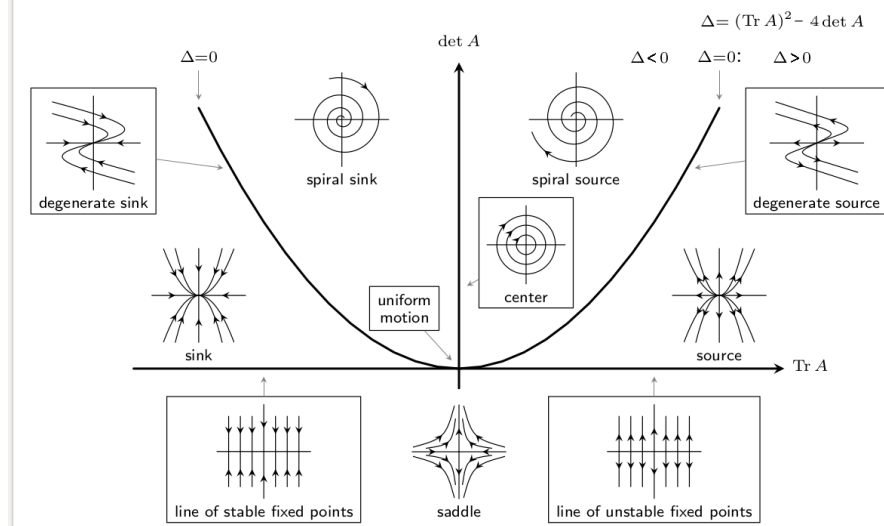


Diagramma di Poincaré

Suddivide il piano dei parametri nelle seguenti configurazioni dinamiche:

- **Iperbolici:** Punti di Sella, Nodi o Fuochi Stabili o Instabili
- **Ellittici:** Autovalori puramente immaginari. La dinamica lineare è retta da **moti armonici** (centri stabili).

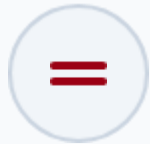
Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane



Stability Diagram - Stability theory - Wikipedia

Punti di sella ($\Delta < 0$)	Nodi o Fuochi instabili ($\Delta > 0, \tau > 0$)	Nodi o fuochi stabili ($\Delta > 0, \tau < 0$)

Le equazioni del moto nel CR3BP, altamente non lineari, introducendo un sistema rotante il campo $\dot{z} = X(z)$ si esplicita in uno spazio delle fasi a quattro dimensioni (limitando l'analisi al piano orbitale): $z = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^T$. In questo contesto, la ricerca dei punti critici $X(\bar{z}) = 0$ conduce all'individuazione dei cinque noti punti di Lagrange (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5). L'applicazione della metodologia esposta nel presente capitolo permetterà di calcolare la matrice Jacobiana del sistema in corrispondenza di ciascun punto di equilibrio, traducendo la fisica in proprietà spettrali delineando due macro-scenari:



Punti Collineari

L_1, L_2, L_3

Lo spettro calcolato presenterà sempre una coppia di autovalori reali e opposti, accompagnata da una coppia di immaginari puri.

Conclusione Topologica: La presenza strutturale di un autovalore reale positivo garantisce un comportamento locale a sella. Questi punti mappano la dinamica nel sottospazio E^u , decretandone un'instabilità intrinseca e assoluta.



Punti Triangolari

L_4, L_5

La struttura algebrica della Jacobiana rivela che la natura (iperbolica o centrale) non è assoluta, ma è una funzione dipendente dal rapporto di massa dei primari:

$$\mu = \frac{m_B}{m_A + m_B}$$

Conclusione Topologica: L'analisi del discriminante del polinomio caratteristico permetterà di ricavare analiticamente il limite di stabilità di Routh.

⚖ Assunzioni e Parametro di Massa

I due primari descrivono orbite kepleriane circolari e complanari, mentre il terzo corpo ha massa infinitesima. Riscriviamo le coordinate definendo il **parametro di massa** adimensionale:

$$\mu = \frac{m_B}{m_A + m_B}$$

√x Lagrangiana nel Riferimento Rotante

Sviluppando i calcoli e ponendo $m_p = 1, \omega = 1, r = 1$, si ottiene l'espressione compatta dipendente dal potenziale efficace :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} |\dot{q}|^2 + \dot{q} \cdot Jq - V(q)$$

- $\frac{1}{2} |\dot{q}|^2$ è l'energia cinetica nel riferimento rotante
- $q \cdot J\dot{q}$ è il termine di accoppiamento girostatico
- $V(q) = \frac{1}{2} |q|^2 + \frac{1-\mu}{|q-q_A|} + \frac{\mu}{|q-q_B|}$ è il potenziale efficace

🔄 Dal Sistema Inerziale al Sinodico

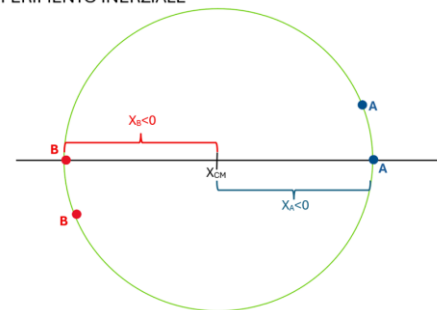
Nel riferimento inerziale la Lagrangiana è esplicitamente dipendente dal tempo.

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, t) = T - V = \frac{1}{2} m_p |\dot{x}|^2 + \frac{Gm_A m_p}{|x - R_{\omega t} y_A|} + \frac{Gm_B m_p}{|x - R_{\omega t} y_B|}$$

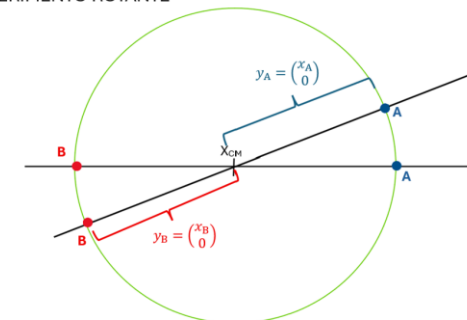
Introduciamo una trasformazione di coordinate, attraverso una matrice di rotazione per passare al **sistema rotante (sinodico)**, rendendo il sistema dinamico autonomo.

$$x = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} q$$

RIFERIMENTO INERZIALE



RIFERIMENTO ROTANTE





Dinamica e Punti Stazionari

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange, si ricavano le equazioni del moto per il terzo corpo. Cercando le **soluzioni stazionarie** ($\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$ nel sistema rotante), il problema si riduce all'annullamento del gradiente del potenziale efficace:

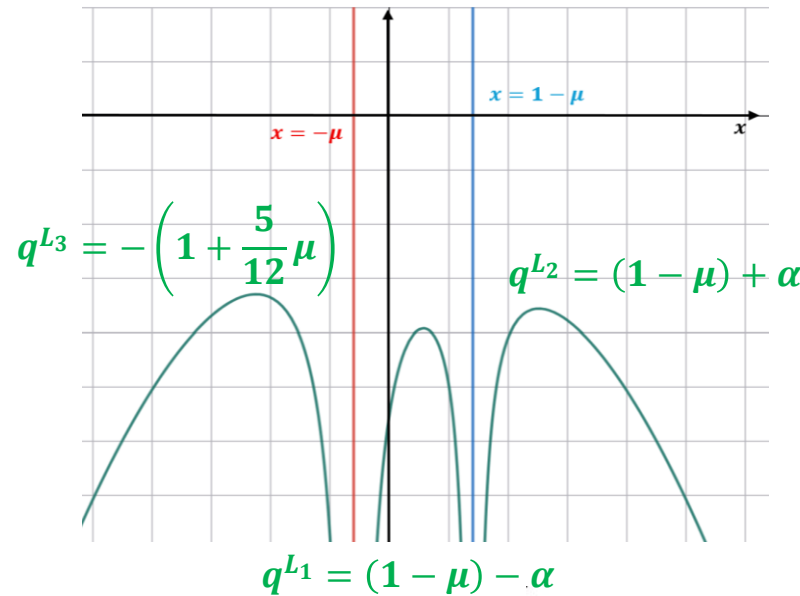
$$\nabla V(q) = \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q_1}, \frac{\partial V(q)}{\partial q_2} \right) = \vec{0}$$



I Cinque Punti di Lagrange

Lo studio dei punti critici di $\nabla V(q)$ dimostra l'esistenza di esattamente cinque configurazioni di equilibrio per il sistema, divisibili in due categorie geometriche:

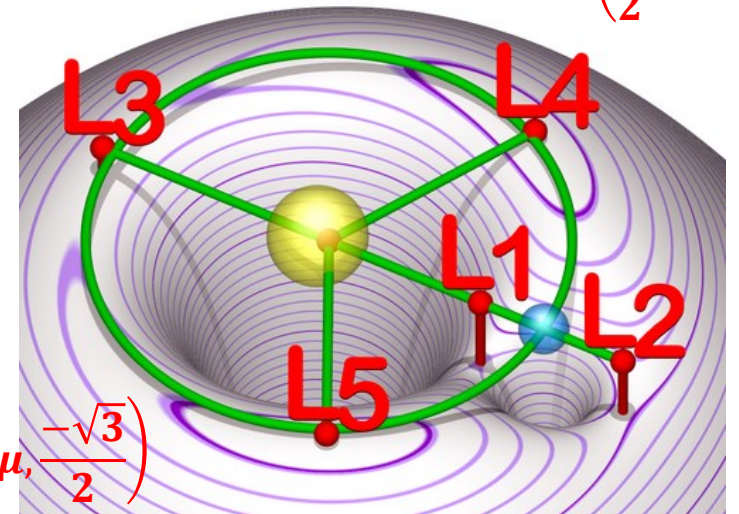
- **Punti Collineari (L_1, L_2, L_3):** Giacciono sull'asse congiungente i due primari. Si individuano annullando la coordinata trasversale e massimizzando la funzione scalare risultante.
- **Punti Triangolari (L_4, L_5):** Disposti ai vertici di due triangoli equilateri aventi come base il segmento che unisce i corpi primari.



$$\alpha \approx \left(\frac{M_B}{3M_A} \right)^{1/3}$$

$$q^{L4} = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$q^{L5} = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$$



Lagrangian points equipotential - Punti di Lagrange - Wikipedia

⚡ Linearizzazione nell'intorno di L_4

A partire dall'equazione del moto $\ddot{q} = 2J\dot{q} - \nabla V(q)$ focalizzandosi, senza perdita di generalità, su L_4 e introduciamo il vettore perturbazione infinitesima $\delta q = q - q^{L_4}$. Sviluppiamo in serie di Taylor $\nabla V(q)$ e arrestando lo sviluppo al prim'ordine risulta che $V'(q) \approx V''(q^{L_4})\delta q$. Sostituendo l'approssimazione nell'equazione del moto, operando un cambio di variabili che permetta di ridurre l'ordine dell'equazione differenziale dal secondo al primo ordine e scrivendo il tutto in forma compatta si ha:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta q \\ v \end{pmatrix} \text{ con } A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{2 \times 2} & \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ V''(q^{L_4}) & 2J \end{pmatrix} \text{ dove } V''(q^{L_4}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V(q^{L_4})}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V(q^{L_4})}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V(q^{L_4})}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V(q^{L_4})}{\partial q_2^2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \gamma \\ \gamma & \frac{9}{4} \end{pmatrix}, \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$$

⚡ Autovalori e Discriminante

Il polinomio caratteristico del sistema $P_4(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 + \lambda^2 + b = 0$, con $b = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$ può essere ricondotto a un'equazione di 2° grado introducendo una variabile ausiliaria. La natura delle radici dipende dal segno del discriminante:

$$\Delta = 1 - 4b$$

- **Stabilità Lineare $\Delta = 1 - 4b > 0$** : 4 autovalori puramente immaginari coniugati. Il punto è un **centro ellittico** (stabilità marginale).
- **Instabilità $\Delta = 1 - 4b < 0$** : Almeno un autovalore con parte reale positiva, sufficiente a decretare l'instabilità dinamica.

⚡ Il Limite di Routh μ_r

Annullando il discriminante ($\Delta = 0$) si individua analiticamente la massa critica di transizione di fase tra dominio stabile e instabile:

$$\mu_r = \frac{1}{18}(9 - \sqrt{69}) \approx 0,0386$$

P Stabilità Naturale (L4, L5)

Applicando il modello al sistema Sole-Terra, il calcolo delle masse conferma ampiamente la condizione di stabilità lineare:

$$\mu = 3,0025 \times 10^{-6} \ll \mu_r = 0.0386$$

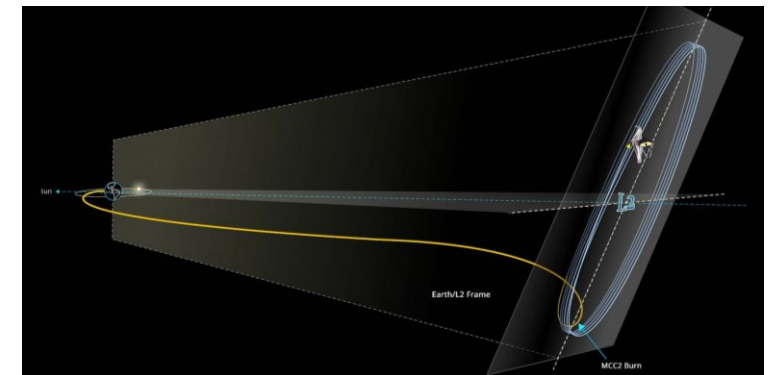
Si ha $b = 2,0267 \times 10^{-5}$, $\Delta = 0,9999189 > 0$. Le radici ausiliarie risultano $x_1 = -0.000020275$, $x_2 = -0,9999797$. Ritornando alla variabile originaria si deduce che i quattro autovalori del sistema valutato in L_4 e L_5 sono $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{|x_1|}$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{|x_2|}$.

Con autovalori immaginari puri confermati, queste regioni si configurano come "parcheggi naturali" a bassissimo costo propulsivo.

✈ Sfruttare l'Instabilità (JWST in L2)

Perché posizionare il Telescopio James Webb in L_2 se è instabile?

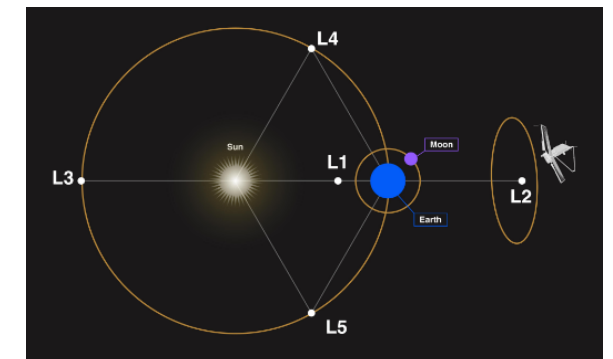
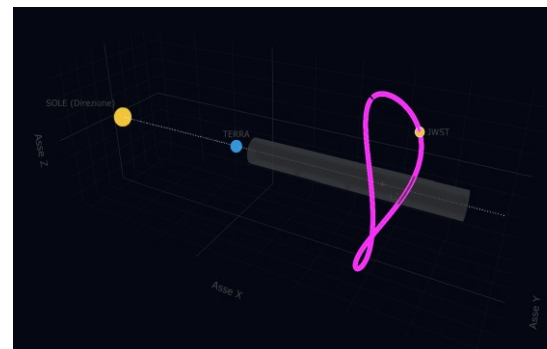
- **Ambiente Termico:** Permette di avere Sole, Terra e Luna dallo stesso lato, bloccando i flussi termici con un unico scudo termico passivo (ambiente < 50K).
- **Orbite Halo:** Il JWST non è fermo, ma sfrutta la dinamica oscillante del *sottospazio centrale* per muoversi in 3D attorno a , evitando così il cono d'ombra terrestre (energia solare ininterrotta).



Webb_trajectory_diagram_pillars.jpg (1978x1080)

🚀 Dinamica delle Varietà Invarianti

La Pressione di Radiazione Solare spinge costantemente il JWST verso l'esterno lungo la *varietà instabile*. Le manovre di **Station-Keeping** consistono in micro-impulsi periodici volti a reinserire il veicolo sulla *varietà stabile*, lasciando che sia la gravità naturale a riportarlo in orbita, minimizzando il consumo di propellente.



- [1] Fassò, F., Dispense del corso di Dynamical Systems, Università degli Studi di Padova.
- [2] Guzzo, M., Dispense del corso di Meccanica Razionale, Università degli Studi di Padova.
- [3] Pinzari, G., Appunti del corso di Meccanica Razionale, Università degli Studi di Padova.
- [4] Curtis, H. D. (2013). Orbital Mechanics for Engineering Students. Butterworth Heinemann.
- [5] Szebehely, V. (1967). Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. Academic Press.
- [6] NASA Goddard Space Flight Center, Sun Fact Sheet e Earth Fact Sheet. [Online].
- [7] Dichmann, D. J., et al. (2014). Stationkeeping of the James Webb Space Telescope. 24th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Santa Fe, NM.