UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Un primo sguardo ai modelli cosmologici esatti e non-omogenei

Relatore

Dr. Daniele Bertacca

Laureando

Mattia Saccon

Anno Accademico 2024/2025

Abstract

Nell'era della cosmologia di precisione, diventa fondamentale comprendere l'impatto delle inomogeneità e delle dinamiche non lineari della relatività generale sulla crescita delle strutture e sulla propagazione della luce. I modelli analitici inomogenei forniscono un laboratorio teorico ideale per esplorare questi effetti in un contesto controllato, senza ricorrere ad approssimazioni perturbative. L'uso di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein con costante cosmologica e materia priva di pressione consente di analizzare distribuzioni di densità arbitrarie lungo la linea di vista e di valutare le deviazioni rispetto alla relazione distanza-redshift del modello FLRW. Questi risultati hanno implicazioni dirette per l'interpretazione delle osservazioni e per una corretta stima dei parametri cosmologici.

Indice

Abstract **iii**

1 Modelli cosmologici **1**
1.1 Principio Cosmologico . . . 1
1.1.1 Metrica FLRW . . . 2
1.2 Modello ΛCDM . . . 3
1.3 Perché usare modelli non omogenei? . . . 4
1.4 Elementi di teoria . . . 5
1.4.1 Equazioni di campo di Einstein . . . 5
1.4.2 Classificazione di Petrov . . . 6
1.4.3 Variabili cinematiche . . . 6
1.4.4 Equazioni ottiche di Sachs . . . 7

2 Modelli non omogenei **9**
2.1 Famiglia di soluzioni di Szekeres-Szafron . . . 9
2.1.1 Modello LTB . . . 10
2.2 Famiglia di soluzioni di Stephani-Barnes . . . 10
2.3 Modelli G_3 con azione su S_2 . . . 11
2.4 Soluzioni con un fluido "rigido" . . . 11
2.5 Modelli Swiss-cheese . . . 12

3 Cosmologia ΛCDM con inomogeneità non lineari **13**
3.1 Soluzione delle equazioni di Einstein . . . 13
3.1.1 Formulazione delle equazioni di campo . . . 13
3.1.2 Equazione di continuità . . . 15
3.1.3 Equazioni di Friedmann . . . 15
3.1.4 Equazioni differenziali per $F(t, z)$ . . . 16
3.1.5 Risoluzione delle funzioni metriche . . . 17
3.2 Interpretazione e classificazione delle soluzioni . . . 18
3.2.1 Classificazione delle singolarità . . . 20
3.2.2 Classificazione di Petrov . . . 21
3.3 Variabili covarianti . . . 21
3.3.1 Analisi nello spazio delle fasi . . . 23

4 Tracciamento dei fasci luminosi **25**
4.1 Equazioni geodetiche nulle . . . 25
4.2 Equazioni ottiche di Sachs . . . 26
4.3 Risultati del tracciamento dei fasci luminosi . . . 28
4.3.1 Modo singolo . . . 28
4.3.2 Modo doppio . . . 30

5 Conclusioni **31**

Bibliografia **33**

Capitolo 1

Modelli cosmologici

Un modello cosmologico descrive l'universo utilizzando le leggi fisiche note per prevederne le proprietà osservabili e, in particolare, i fenomeni dell'universo primordiale. Deve spiegare l'omogeneità e l'isotropia al tempo del disaccoppiamento del *Cosmic Microwave Background* (CMB), nonché l'origine delle strutture (galassie e stelle). In senso più stretto, i modelli cosmologici corrispondono a soluzioni esatte delle equazioni di campo di Einstein per un fluido perfetto, capaci di riprodurre le caratteristiche fondamentali del cosmo [1]. Poiché l'universo accessibile alle osservazioni è solo una frazione di quello complessivo, e i dati sperimentali sono sempre soggetti a incertezza, diverse formulazioni teoriche risultano compatibili con l'evidenza empirica. Un esempio significativo è fornito dalla cosiddetta *Hubble tension* [16], dove stime indipendenti della costante di Hubble H_0 (un parametro cosmologico che descrive l'espansione dell'universo), ottenute da osservazioni del CMB e da misure locali, risultano tra loro incompatibili a più sigma, tale discrepanza si è trovata grazie alla precisione raggiunta nelle singole misure. Oggetto di studio sono anche soluzioni delle equazioni di campo che non riproducono correttamente le proprietà dell'universo. Ogni modello costituisce infatti una forte semplificazione della realtà, e solo l'analisi comparata di molte soluzioni permette di distinguere le ipotesi essenziali da quelle superflue. In senso ampio, quasi ogni soluzione esatta (con fluido perfetto) delle equazioni di Einstein può essere definita un modello cosmologico.

1.1 Principio Cosmologico

Il modello di universo più semplice lo si può trovare a partire dal Principio Cosmologico; tale principio afferma che l'universo sia spazialmente omogeneo e isotropo [21]. Ciò significa che, da una scala sufficientemente grande (nell'ordine delle centinaia di Mpc), le proprietà fisiche e geometriche dell'universo risultano uguali ovunque ci si trovi. In particolare significa che tali proprietà sono indipendenti dalla posizione (omogeneità) e dalla direzione (isotropia) in cui si osserva l'universo.

Storicamente, una prima applicazione del Principio Cosmologico la si può collegare a Newton in *Principia Mathematica* [42], che descrisse un universo uniforme e statico, ma il primo a formulare tale principio per come lo si conosce oggi fu Milne [48]. Per completezza si può citare anche un passo ulteriore fatto da Bondi [5] che estese il Principio Cosmologico al 'Principio Cosmologico Perfetto' affermando che non solo lo spazio ma anche il tempo sia omogeneo, ma ciò non è supportato dalle osservazioni cosmologiche moderne che mostrano una chiara espansione nel tempo dell'universo [32].

Il Principio Cosmologico, che si può considerare puramente filosofico, lo si può giustificare a partire dal più *debole*[1] principio copernicano che afferma che la Terra non occupi una posizione privilegiata all'interno dell'universo intero. Partendo da quest'ultimo principio si può affermare che, nell'ipotesi che la posizione in cui ci si trova non sia l'unica da cui si osserva l'isotropia, l'universo deve essere anche omogeneo. Questa affermazione la si può dimostrare matematicamente [21] e può essere enunciata in maniera più formale dal seguente teorema:

[1] L'aggettivo *debole* segnala che il principio copernicano richiede assunzioni meno vincolanti rispetto al Principio Cosmologico

Teorema 1.1.1 (Omogeneità dall'isotropia)**.** *Se tutti gli osservatori vedono un universo isotropo, allora segue che è anche omogeneo; di fatto, l'omogeneità segue anche se solo tre osservatori separati vedono l'isotropia.*

Dal punto di vista della cosmologia osservativa, uno degli argomento a sostegno del Principio Cosmologico è l'evidenza che, indipendentemente dalla direzione di osservazione, la distribuzione e le proprietà statistiche degli oggetti celesti risultano simili. Da ciò si può dedurre che tali oggetti devono aver attraversato fasi evolutive simili, comprese le fasi termiche, ma trasformare ciò in un test per l'omogeneità, per ora, non ha avuto successo [21]. L'indicazione più robusta a favore dell'isotropia cosmica proviene dallo studio del CMB, le cui le anisotropie di temperatura sono estremamente ridotte, dell'ordine di $|\Delta T/T| \approx 10^{-5}$ K. Le misure più accurate a riguardo sono state ottenute dalla missione Planck (si veda fig. 1.1).

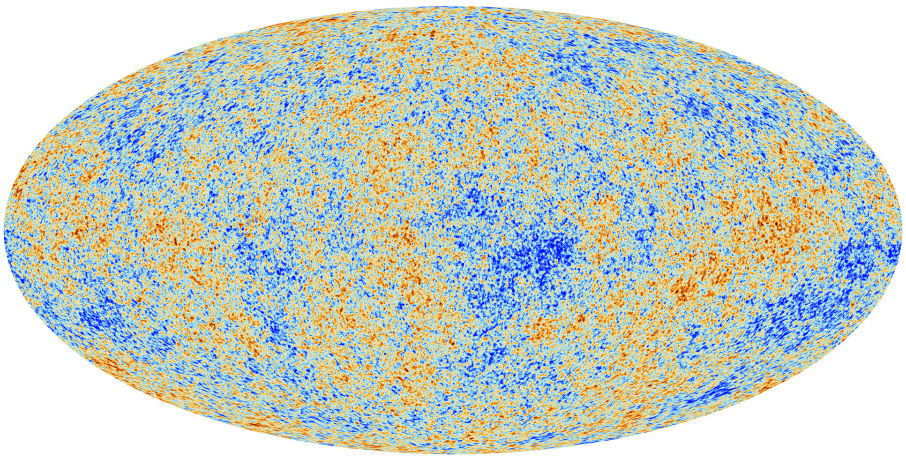

Figura 1.1: Mappa del CMB misurata dalla collaborazione Planck (la figura proviene da [45])

Inoltre, grazie a survey di galassie, si trova che l'universo risulta omogeneo a partire da $70h^{-1}$ Mpc (e.g. [50, 25]). Altri studi, invece, propongono scale più ampie (e.g. 260 h^{-1} Mpc [59]), ma la questione è tuttora oggetto di indagine. Tuttavia, si conoscono strutture cosmiche estese (e.g. U1.11, un gruppo di 38 quasar [12], e Giant Arc, una struttura cosmica composta da amassi di galassie [34]) che si avvicinano o superano tali scale, rendendo complessa la definizione operativa di omogeneità.

Il principio cosmologico impone vincoli estremamente stringenti sulla forma ammessa per la metrica spazio-temporale in Relatività Generale, dai quali si ricava la metrica di Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW). Tali soluzioni rappresentano i modelli cosmologici più semplici e , al contempo, i più rilevanti. Essi si sono dimostrati estremamente efficaci nello spiegare una vasta gamma di effetti cosmologici, ad esempio espansione ed evoluzione dell'universo [1]. Se si vuole però analizzare in dettaglio, ad esempio, le anisotropie del CMB o la formazione di strutture cosmiche è necessario non solo considerare il modello esattamente omogeneo, ma anche le sue perturbazioni cosmologiche, cioè piccole deviazioni scalari, vettoriali o tensoriali della metrica FLRW e della distribuzione di materia, che si possono trattare linearmente o anche ad ordini superiori per aumentare la precisione [40].

1.1.1 Metrica FLRW

In questa sezione, seguendo il testo di Ellis [21], si può iniziare ad introdurre il concetto di metrica. La metrica Riemanniana[2] $g_{\mu\nu}$ è un'importante struttura per lo spazio-tempo in Relatività Generale, essa è un campo tensoriale simmetrico di tipo $(0, 2)$ che fornisce una specifica mappa tra vettori ed uno-forme, si assume sia biunivoca. La metrica che opera su una coppia di vettori corrisponde al prodotto scalare

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu. \tag{1.1}$$

[2]Spesso si usa il termine Riemannia quando la metrica risulta definita positiva, chiamando invece le metriche indefinite pseudo-Riemanniane

Se si considera una base, la metrica fornisce una forma quadratica,

$$\mathbf{g}(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.2}$$

in uno spostamento infinitesimale, spesso chiamato elemento di linea. Un vettore non zero è detto di tipo spazio, di tipo tempo, di tipo luce (o nullo) se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ è rispettivamente positivo, negativo o zero.

Per un modello FLRW, usando le coordinate comoventi $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, la metrica risulta essere

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + f_K^2(r) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right], \tag{1.3}$$

in cui $a(t)$ è il fattore di scala e per $K = -1, 0, 1$ (costante di curvatura) si ha $f_{-1} = \sinh r$, $f_0 = r$ e $f_{+1} = \sin r$, che corrispondono rispettivamente ad un universo iperbolico, piatto o sferico. Inoltre per essere un modello FLRW è richiesto che, nelle stesse coordinate, il fluido cosmico sia a riposo e la sua quadrivelocità risulti puramente temporale, cioè $u^\mu = \delta_0^\mu$ con u^μ la quadrivelocità. La metrica (1.3) ha perciò che tutte le simmetrie richieste sono rispettate in quanto, per ogni ipersuperficie con $t = const$, tutte le proprietà fisiche e geometriche sono identiche in ogni punto. Volendo essere più precisi si può enunciare il seguente teorema [21]:

Teorema 1.1.2 (Simmetrie FLRW)**.** *I modelli di universo FLRW sono caratterizzati in modo univoco come invarianti rispetto a un gruppo di simmetria G_6 che agisce su spazi 3-dimensionali, con un sottogruppo semplicemente transitivo G_3 di isometrie e un gruppo di isotropia G_3 attorno a ogni punto. G_n è il gruppo di Lie n-dimensionale di isometrie*[3] *le cui trasformazioni preservano la metrica.*

Si noti che, in un universo FLRW, l'omogeneità e l'isotropia sono garantite solo sulle ipersuperfici di tempo comovente $t = const$, mentre in altre sezioni spaziali tale simmetria non è più assicurata. Un altro elemento interessante da considerare è la topologia dell'universo perché va oltre la geometria locale e fornisce informazioni sulla struttura globale dello spazio-tempo. Per esempio, nel caso piatto ($K = 0$) si ha che, la topologia, potrebbe essere un volume infinito ($\mathbb{R}^3$) ma nulla vieta una forma più particolare come una topologia a toro o una generalizzazione del nastro di Möbius, e questi due esempi evidenziano come anche l'universo piatto possa essere chiuso [21].

1.2 Modello ΛCDM

Nel contesto dei modelli FLRW, non è stato ancora specificato in dettaglio il contenuto dell'universo. Tra i modelli cosmologici, quello più semplice e in grado di spiegare un ampio insieme di fenomeni osservativi, tra cui l'accelerazione, il CMB, l'abbondanza di idrogeno ed elio, è il modello ΛCDM [15]. Il modello ΛCDM risulta essere il modello standard della cosmologia, esso afferma che l'universo sia costituito principalmente da tre componenti:

- **Energia oscura**, che corrisponde ad avere la costante cosmologica Λ nelle equazioni di Einstein. Essa è responsabile dell'espansione accelerata dell'universo recente (circa 5 miliardi di anni fa) [32]. Si stima che oggi componga il 70.0 ± 0.4 % della densità dell'universo[35].

- **Materia oscura**, è una forma di materia che non interagisce direttamente con la luce. La sua esistenza è provata da molte evidenze osservative, alcuni di questi effetti sono formazione ed evoluzione delle galassie, lenti gravitazionali e anisotropie del CMB [32]. Il modello ΛCDM suggerisce che la materia oscura sia fredda (*Cold Dark Matter*, CDM), ovvero composta da particelle che si muovono lentamente. Inoltre, essa non è barionica e interagisce con la materia ordinaria esclusivamente tramite l'interazione gravitazionale. Si stima che oggi componga il 25.1 ± 0.3 % della densità dell'universo [35].

- **Materia ordinaria**, in cosmologia molto spesso ci si riferisce solo alla materia barionica in quanto molto più pesante delle altre particelle subatomiche che si possono quindi trascurare, quali fotoni e neutrini [32]. Si stima che oggi componga il 4.82 ± 0.03 % della densità dell'universo [35].

[3] Un'isometria è una trasformazione che preserva le distanze tra i punti di uno spazio metrico.

Le percentuali della composizione dell'universo sono fornite dalla più recente stima fatta combinando i dati CMB ad alta risoluzione di *Atacama Cosmology Telescope* (ACT), i dati a grande scala di Planck e la likelihood di polarizzazione a basse multipoli aggiornata di Planck, usando il modello ΛCDM [35].

Il modello ΛCDM si basa a partire da tre postulati sulla struttura dello spaziotempo [33]:

- Il principio cosmologico, che è già stato trattato nella sezione precedente.
- La Relatività Generale, che collega lo spaziotempo alla distribuzione di materia ed energia attraverso le equazioni di campo di Einstein (1.6).
- Il postulato di Weyl, che afferma che le geodetiche dello spazio tempo, lungo le quali è possibile definire una sincronizzazione del tempo coerente, si intersecano in un solo punto. Si assume inoltre che il loro comportamento possa essere approssimato da quello di un fluido perfetto in espansione [58].

Partendo da queste ipotesi, che portano alla metrica FLRW, si possono risolvere le equazioni di Einstein ottenendo le equazioni di Friedmann[4] [32]:

$$\left(\frac{\partial_t a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{1.4a}$$

$$\frac{\partial_t^2 a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{1.4b}$$

in cui si ha che $a(t)$ è il fattore di scala con $H = \partial_t a/a$ parametro di Hubble, ρ è la densità di materia, p la pressione del fluido, G la costante gravitazionale, c la velocità della luce, K la costante di curvatura e Λ la costante cosmologica. La prima equazione (1.4a) lega il tasso di espansione istantaneo dell'universo alla sua composizione. Tuttavia, essa non permette da sola di determinare se l'espansione stia accelerando o rallentando. Tale informazione è fornita dalla seconda equazione (1.4b), in cui il primo termine (se p positiva, come nel caso della radiazione o della materia) agisce da forza frenante, mentre la costante cosmologica Λ produce una spinta repulsiva che accelera l'espansione. Partendo da queste due equazioni si può ottenere l'equazione di continuità, che a volte viene chiamata terza equazione di Friedmann

$$\partial_t \rho + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \tag{1.5}$$

essa rappresenta la conservazione dell'energia-impulso del fluido cosmico.

1.3 Perché usare modelli non omogenei?

I modelli non omogenei in cosmologia estendono il quadro standard assumendo variazioni spaziali della densità e della geometria dell'universo su scale cosmologiche. Questi modelli consentono di studiare effetti locali e globali trascurati dalle soluzioni omogenee FLRW. La domanda se usare modelli omogenei sia corretto è storica, tra i vari fisici contrari (e.g. *Dingle 1933* [17], *Tolman 1934* [56], *Kristian e Sachs 1966* [30]) si trova anche Dirac [43] che afferma che "la sostituzione dell'attuale posizione dei corpi celesti a favore di una distribuzione di materia uniforme è una pessima approssimazione in quanto, essendo le equazioni di Einstein non lineari, il disturbo nel campo gravitazionale prodotto dalle varie stelle non può essere semplicemente aggiunto o mediato in alcuna maniera". Inoltre, lo studio di modelli non omogenei, oltre ad avere una rilevanza cosmologica, può essere anche applicato a strutture astrofisiche più piccole, come mostrato successivamente.

Nel lavoro di Krasinski [29] vengono riportate numerose evidenze osservative che non trovano una spiegazione soddisfacente all'interno dei modelli FLRW. Tra questi vi è, ad esempio, la presenza delle già citate strutture cosmiche estese. Krasinski sottolinea inoltre che esiste un'evidenza sperimentale diretta che l'universo non possa essere descritto in maniera fedele da un modello FLRW, almeno entro gli attuali limiti degli errori sperimentali. Per chiarire questo punto, si consideri che nello spazio-tempo di Minkowski due eventi appartenenti allo stesso cono di luce possono essere connessi soltanto da curve

[4] Si noti comunque che per ottenere le equazioni di Friedmann non è necessaria la Relatività Generale [32]

nulle o spaziali. La presenza di lenti gravitazionali introduce una violazione fondamentale di questa proprietà. Infatti, in un sistema di lente gravitazionale, il cono di luce emesso da una sorgente subisce una distorsione dietro la lente, generando più traiettorie ottiche che collegano la sorgente all'osservatore. Di conseguenza, raggi luminosi emessi dalla stessa sorgente possono giungere all'osservatore in tempi diversi. In termini geometrici, ciò implica che la linea di universo dell'osservatore può intersecare il cono di luce futuro dell'evento di emissione in più punti, rendendo quindi possibile collegare due eventi sullo stesso cono di luce mediante una curva temporale. Poiché le trasformazioni conformi preservano le relazioni causali tra gli eventi, i modelli conformemente piatti[5], che includono i modelli FLRW, non possono riprodurre fenomeni di lenti gravitazionali. Tuttavia, le osservazioni mostrano l'esistenza di lenti gravitazionali a distanze cosmologicamente significative (e.g. [26]). Si conclude pertanto che i modelli FLRW non sono in grado di descrivere accuratamente l'universo entro l'attuale livello di precisione.

Per concludere, è importante sottolineare che le equazioni alla base dei modelli cosmologici sono equazioni differenziali. In tali sistemi, anche una variazione minima nei parametri o nelle condizioni iniziali può determinare cambiamenti sostanziali nel comportamento delle soluzioni [55]. Questo può portare, ad esempio, a transizioni da regimi periodici a regimi caotici (e.g. l'universo *mixmaster* [13]). Tale carattere instabile implica che lo spazio dei modelli cosmologici non possieda una struttura semplice e regolare, ma presenti invece una complessità che necessita di essere approfondita.

Partendo da queste considerazioni, nel capitolo 2 verranno presentati per primi i modelli cosmologici non omogenei più importanti. Nel capitolo 3 continuerà la discussione prendendo in esame un caso specifico e risolvendo le equazioni di Einstein, e poi nel capitolo 4 si confronteranno i risultati trovati con quelli attesi dal modello FLRW. Infine, nel capitolo 5 saranno riassunti e commentati i risultati principali ottenuti nei capitoli 3 e 4.

1.4 Elementi di teoria

Nella sezione seguente verranno presentati alcuni concetti teorici rilevanti per la comprensione degli argomenti trattati.

1.4.1 Equazioni di campo di Einstein

Le equazioni di campo di Einstein sono le equazioni fondamentali della teoria della relatività generale. Esse descrivono la curvatura dello spaziotempo in funzione della densità di materia, dell'energia e della pressione, rappresentate tramite il tensore energia-impulso. Usando la notazione tensoriale, le equazioni di campi di Einstein risultano essere [21]

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.6}$$

in cui G è la costante cosmologica, c la velocità della luce, $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso, Λ la costante cosmologica e $G_{\mu\nu}$ il tensore di Einstein. Quest'ultimo in particolare lo si può scrivere e scomporre come

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad \text{(tensore di Einstein)}, \tag{1.7a}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\mu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \qquad \text{(tensore di Ricci)}, \tag{1.7b}$$

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \qquad \text{(scalare di curvatura)}, \tag{1.7c}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \qquad \text{(simboli di Christoffel)}. \tag{1.7d}$$

[5] Uno spazio-tempo si dice conformemente piatto se la sua metrica può essere espressa come un fattore di scala (la funzione conforme Ω) moltiplicato per la metrica piatta di Minkowski: $g(x^\mu)_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu)\eta_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$

1.4.2 Classificazione di Petrov

La classificazione di Petrov è utilizzata per distinguere le diverse metriche di spazio-tempo analizzando le proprietà algebriche del tensore di Weyl [44]. È importante notare che queste proprietà sono puramente geometriche, cioè non dipendono dalla teoria gravitazionale che si sta considerando, ma solo dalla metrica. Questa classificazione aiuta anche nell'interpretazione fisica, come ha mostrato Szekeres [53] (anche se tale interpretazione ammette eccezioni [24]).

L'interpretazione classica si basa sugli scalari complessi di Weyl che sono definiti come [11]:

$$\Psi_0 = -C_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\mu m^\nu l^\lambda m^\sigma, \tag{1.8a}$$

$$\Psi_1 = -C_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\mu n^\nu l^\lambda m^\sigma, \tag{1.8b}$$

$$\Psi_2 = -C_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\mu m^\nu \bar{m}^\lambda n^\sigma, \tag{1.8c}$$

$$\Psi_3 = -C_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\mu n^\nu \bar{m}^\lambda n^\sigma, \tag{1.8d}$$

$$\Psi_4 = -C_{\mu\nu\lambda\sigma} n^\mu \bar{m}^\nu n^\lambda \bar{m}^\sigma. \tag{1.8e}$$

Dove $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ è il tensore di Weyl e l^μ, n^μ, m^μ, $\bar{m}^\mu$ costituiscono la tetrade nulla, ossia una base di quattro vettori nulli, due dei quali complessi: m^μ ed il suo complesso coniugato $\bar{m}^\mu$. Questi ultimi risultano ortogonali alla coppia di vettori reali l^μ e n^μ, ma non tra loro. In modo analogo, anche la coppia l^μ e n^μ non è ortogonale. I cinque scalari complessi di Weyl rappresentano le dieci componenti del tensore di Weyl. In termini essenziali, per fare la classificazione bisogna trovare la tetrade nulla tale che il numero degli scalari di Weyl si riduca a un insieme minimale.

In particolare, la classificazione si basa sul trovare gli autobivettori del tensore di Weyl [1], che possono essere trovati risolvendo il polinomio caratteristico, che in questo caso è al quarto ordine. Se ci sono tre autobivettori si ha il tipo I (con casi speciali D,O), se ce ne sono due si ha il tipo II (con caso speciale N), mentre se ce n'è uno solo si ha il tipo III. Inoltre questi autobivettori possono essere associati ad autovettori nulli nello spazio-tempo originario, essi vengono anche chiamati principali direzioni nulle (PND), e da questi ultimi si trovano poi le relazioni con gli scalari di Weyl che permettono una classificazione più semplice mostrata nella tabella 1.1.

Tipo	Molteplicità degli autovettori nulli	Scalari che si annullano
I	$(1,1,1,1)$	Ψ_0, Ψ_2
II	$(2,1,1)$	Ψ_0, Ψ_1, Ψ_3
D	$(2,2)$	$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4$
III	$(3,1)$	$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_4$
N	(4)	$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$
O	-	$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$

Tabella 1.1: Classificazione di Petrov

1.4.3 Variabili cinematiche

Le variabili cinematiche servono a descrivere l'evoluzione temporale e spaziale dei fluidi, fornendo informazioni fondamentali sulla geometria dello spazio-tempo e sulle proprietà dinamiche dei sistemi considerati [21]. Le variabili da prendere in considerazione sono

$$\Theta = \nabla_\mu u^\mu \qquad \text{(scalare di espansione)}, \tag{1.9a}$$

$$\dot{u}_\mu = \nabla_\nu u_\mu u^\nu \qquad \text{(vettore di accelerazione)}, \tag{1.9b}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \nabla_{(\nu} u_{\mu)} - \frac{1}{3}\Theta_{\mu\nu} + \dot{u}_{(\mu} u_{\nu)} \qquad \text{(tensore di deformazione)}^6, \tag{1.9c}$$

$$\omega_{\mu\nu} = \nabla_{[\nu} u_{\mu]} + \dot{u}_{[\mu} u_{\nu]} \qquad \text{(tensore di rotazione)}^7, \tag{1.9d}$$

$$E_{\mu\nu} = C_{\mu\nu\lambda\sigma} u^\lambda u^\sigma \qquad \text{(parte elettrica tensore di Weyl)}, \tag{1.9e}$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda\sigma} C^{\lambda\sigma}_{\nu\rho} u^\rho \qquad \text{(parte magnetica tensore di Weyl)}, \tag{1.9f}$$

dove u_μ è la quadrivelocità del fluido (3.2), $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ il tensore di Weyl e sono stati definiti

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu \qquad \text{(proiettore ortogonale)}, \tag{1.10a}$$

$$\eta_{\mu\nu\lambda} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}u^\sigma \qquad \text{(tensore di volume spaziale)}, \tag{1.10b}$$

con $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ tensore di Levi-Civita.

1.4.4 Equazioni ottiche di Sachs

Per descrivere l'evoluzione di un fascio luminoso bisogna conoscere l'espansione θ, la deformazione σ e la rotazione ω [49]. In questa sezione si farà riferimento alla notazione di Chandrasekhar [11] che formulò le equazioni scalari ottiche nel contesto del formalismo di Newman-Penrose. Inoltre, poiché il presente studio si concentrerà esclusivamente su sorgenti di luce puntiformi, è possibile trascurare la rotazione ω dei fasci luminosi. L'espansione e la deformazione scalare sono definiti più precisamente come

$$\theta = \frac{1}{2}\nabla_\mu l^\mu, \tag{1.11a}$$

$$|\sigma|^2 = \frac{1}{2}\nabla_{(\mu}l_{\nu)}\nabla^\mu l^\nu - \theta^2. \tag{1.11b}$$

Il vettore l^μ è parametrizzato in maniera affine dal vettore tangente alla geodetica nulla definito come[8]

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \tag{1.12}$$

inoltre si definisce m^μ, il vettore complesso nullo ortogonale a l^μ. Questi due vettori fanno parte della tetrade canonica complessa nulla di Newman-Penrose. Data l'espansione e la deformazione, le equazioni ottiche di Sachs assumono la forma

$$\frac{d\theta}{d\lambda} + \theta^2 + |\sigma|^2 = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = \phi_{00}, \tag{1.13a}$$

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} + 2\sigma\theta = -C_{\mu\nu\lambda\sigma}l^\mu m^\nu l^\lambda m^\sigma = \Psi_0, \tag{1.13b}$$

dove Ψ_0 e ϕ_{00} sono rispettivamente il primo scalare di Weyl e uno degli scalari di Ricci scritti nel formalismo di Newman-Penrose, essi rappresentano la convergenza di Weyl e la convergenza di Ricci nella direzione l^μ.

L'espansione di un fascio di raggi luminosi non è un'osservabile diretta per cui si preferisce considerare la distanza di diametro angolare[9] d_A e la distanza di luminosità[10] d_L. In particolare, queste due nuove quantità sono messe in relazione dal teorema di Etherington [22] che stabilisce l'uguaglianza

$$d_L = (1+z)^2 d_A, \tag{1.14}$$

in cui z è il redshift. Inoltre, partendo dalla definizione dell'espansione e usando il parametro affine λ, si può trovare una relazione di tale scalare con la distanza di diametro angolare:

$$\theta = \frac{1}{d_A}\frac{d(d_A)}{d\lambda}. \tag{1.15}$$

In termini della distanza di diametro angolare, le equazioni di Sachs assumono la forma

$$\frac{d^2(d_A)}{d\lambda^2} = (\phi_{00} - |\sigma|^2)d_A, \tag{1.16a}$$

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} + 2\frac{1}{d_A}\frac{d(d_A)}{d\lambda}\sigma = \Psi_0. \tag{1.16b}$$

[6] La notazione con parentesi tonde negli indici denota la simmetrizzazione, ovvero $A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

[7] La notazione con parentesi quadre negli indici denota l'antisimmetrizzazione, ovvero $A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$

[8] In questo caso, per il momento, l^μ punta ad una direzione qualsiasi, per cui non è lo stesso considerato nella sezione precedente

[9] La distanza di diametro angolare è una misura usata in astronomia che calcola una distanza apparente definita come il rapporto tra la dimensione reale dell'oggetto e la dimensione angolare vista dalla terra

[10] In astronomia la distanza di luminosità di un corpo celeste è la sua distanza definita sulla base della sua magnitudine apparente e della magnitudine assoluta

Capitolo 2

Modelli non omogenei

In questo capitolo verrà presentata un'introduzione generale ai principali gruppi di soluzioni di modelli non omogenei. Per una classificazione più dettagliata e rigorosa si rimanda al lavoro di Krasiński [29], dal quale è tratta la suddivisione riportata di seguito. In particolare, le perturbazioni dei modelli FLRW non saranno considerate in quanto l'obiettivo è lo studio di modelli esatti completamente non lineari. Si noti infine che alcune soluzioni presentano caratteristiche che le collocano simultaneamente in più famiglie di modelli, evidenziando come le diverse classificazioni non siano disgiunte ma possano sovrapporsi in base alle proprietà geometriche o fisiche considerate [21]. La trattazione seguente userà le unità naturali in cui $c = 8\pi G = 1$.

2.1 Famiglia di soluzioni di Szekeres-Szafron

La famiglia di soluzioni di Szekeres-Szafron si ricava assumendo l'esistenza di un sistema di coordinate in cui la metrica può essere espressa nella forma [29]

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\beta}(dx^2 + dy^2) + e^{2\alpha}dz^2, \tag{2.1}$$

dove le funzioni α e β dipendono in generale da tutte le variabili (t, x, y, z), si osservi che queste coordinate non hanno un significato fisico diretto ma possono assumere interpretazioni diverse a seconda del contesto. Tali funzioni sono determinate a partire dalle equazioni di Einstein assumendo che la sorgente sia un fluido perfetto (secondo il postulato di Weyl), e le coordinate in cui è scritta sono assunte essere comoventi, quindi $u^\mu = \delta^\mu_0$ con u^μ la quadrivelocità. Ne consegue contemporaneamente che il vettore di accelerazione è nullo ($\dot{u}_\mu = 0$) e che la pressione dipende unicamente dal tempo ($p = p(t)$) [29]. Si noti che, in generale, questa famiglia di soluzioni non possiede simmetrie [7], eccetto nei casi in cui si trova che le funzioni metriche α e β ne presentino alcune.

Storicamente, la prima soluzione appartenente a questa famiglia ad essere stata individuata fu proposta da Lemaître [31]. In particolare si tratta di una soluzione a simmetria sferica, con polvere e costante cosmologica, per un approfondimento si rimanda alla sezione 2.1.1. Il passo più grande fu fatto da Szekeres [54] che risolse le equazioni di Einstein per (2.1) con una sorgente di polvere incomprimibile (cioè con pressione costante) e $\Lambda = 0$, senza nessun'altra assunzione. Il risultato fu poi generalizzato da Szafron [52] al caso di polvere con pressione dipendente unicamente dal tempo.

Le soluzioni della famiglia di Szekeres-Szafron si suddividono in due classi, indicate come classi I e II, a seconda che la derivata parziale della funzione $\beta(t, x, y, z)$ rispetto a z sia nulla o non nulla, rispettivamente ($\partial_z\beta = 0$ per la classe I, $\partial_z\beta \neq 0$ per la classe II). La distinzione nasce dal fatto che, nel caso $\partial_z\beta \neq 0$, il limite $\partial_z\beta \to 0$ risulta singolare, e quindi deve essere studiato separatamente [29]. La classe I, pur non avendo generalmente applicazioni utili in cosmologia, viene talvolta utilizzata per modellare il collasso non sferico di nubi di polvere non omogenee [6]. La classe II, invece, è principalmente impiegata in modelli cosmologici; come verrà illustrato nel capitolo 3. Inoltre questa classe di soluzioni può, in un tempo finito, approssimare con elevata precisione il modello FLRW [8]. Nonostante la distinzione tra le due classi, Gode e Wainwright [23], introducendo un formalismo differente, hanno mostrato che l'evoluzione temporale lungo una particolare linea comovente del fluido

è identica in entrambi le classi. In particolare, tale evoluzione è governata dalla stessa funzione che descrive l'espansione del fondo FLRW.

2.1.1 Modello LTB

I modelli LTB furono prima introdotti da Lemaître [31], poi generalizzati da Tolman [56] ed infine Bondi [4] li riformulò in maniera più chiara dal punto di vista fisico. I modelli LTB (a cui spesso ci si riferisce solo con LT) fanno parte della prima classe di soluzioni della famiglia di Szekeres-Szafron perchè in questa classe si ha $\partial_z \beta \neq 0$, condizione che consente di includere la simmetria sferica e la struttura radiale [29]. Questi modelli rappresentano le cosmologie non omogenee più semplici, poiché mantengono la simmetria sferica attorno a un punto privilegiato dello spazio. Tale assunzione implica l'esistenza di un centro di simmetria, che nei confronti osservativi viene spesso identificato con la posizione della Terra, così da garantire coerenza con l'isotropia misurata nelle osservazioni cosmologiche. Per cui, l'isotropia di questi modelli, permette la non omogeneità solo nella direzione radiale. La metrica per la polvere viene generalmente espressa in coordinate sincrone comoventi (t, r, θ, ϕ), dove t è il tempo proprio degli osservatori comoventi, r la coordinata radiale e θ, ϕ le coordinate angolari, come

$$ds^2 = -dt^2 + X^2 dr^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \qquad u^\mu = \delta^\mu_0, \tag{2.2}$$

con $X(t, r)$, $R(t, r)$ funzioni generali di tempo e coordinata radiale e u^μ la quadrivelocità del fluido cosmico rappresentato dalla polvere. In particolare, $R(t, r)$ rappresenta il raggio areale, cioè la quantità geometrica che determina l'area delle 2-sfere centrali tramite $A = 4\pi R^2$.

Questi modelli si usano principalmente per lo studio di strutture cosmologiche, come nebulose o muri di galassie, ma può essere impiegato anche per testare proprietà dell'universo su larga scala, ad esempio mediante l'analisi del CMB, facendo uso anche di perturbazioni della metrica stessa (si veda [21] e i riferimenti ivi contenuti). In particolare, l'analisi di questi modelli consente di investigare la validità del principio copernicano.

2.2 Famiglia di soluzioni di Stephani-Barnes

Stephani [51] studiò le soluzioni conformemente piatte contenenti un fluido perfetto irrotazionale e senza deformazioni in espansione, ovvero con quantità cinematiche $\sigma = \omega = 0 \neq \Theta$ (a differenza della famiglia di Szekeres-Szafron, in cui $\omega = \dot{u}^\mu = 0$). Barnes [2] trovò soluzioni analoghe nel caso non conformemente piatto. L'unione di queste due classi di soluzioni costituisce quella nota come famiglia di Stephani-Barnes. In particolare, considerando la classificazione di Petrov, Stephani trovò le soluzioni di tipo O, mentre Barnes quelle di tipo D.

In coordinate comoventi generali (t, x, y, z) la metrica associata alla famiglia di soluzioni di Stephani-Barnes può essere scritta nella forma [29]

$$ds^2 = D^2(t, x, y, z)dt^2 - \frac{1}{V^2(y, x, y, z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{2.3}$$

dove $D = F(t)\partial_t V/V$, con $F(t)$ una funzione arbitraria del tempo mentre V è determinata da un'equazione differenziale che coinvolge una variabile ausiliaria u

$$\frac{\partial_u^2 w}{w^2} = f(u), \tag{2.4}$$

dove $f(u)$ è una funzione arbitraria che caratterizza la specifica soluzione all'interno della famiglia. La variabile u è una combinazione delle coordinate (x, y, z), mentre la funzione $w(t, x, y, z)$ è una funzione ausiliaria legata a V attraverso una relazione analitica che dipende dal sottocaso in esame. Questa parametrizzazione delle funzioni metriche è costruita in modo da soddisfare tutte le equazioni di Einstein non banali per il fluido perfetto considerato. Il tensore di Weyl si trova essere proporzionale a $f(u)$, per cui la soluzione risulta conformemente piatta quando $f(u) = 0$ [29]. Si trova anche che la funzione $F(t)$ è legata allo scalare di espansione da $\Theta = 3/F$.

Storicamente, la prima soluzione trovata appartenente alla famiglia di Stephani-Barnes fu trovata da McVittie [37]. Questa soluzione risulta comunque una delle più interessanti in quanto si tratta di una sovrapposizione tra la metrica FLRW e la soluzione di Schwarzschild [29]. La metrica di McVittie è data in coordinate sferiche comoventi da

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu(t,r)}{1+\mu(t,r)}\right)^2 dt^2 + \frac{(1+\mu(t,r))^4}{\left(1+\frac{1}{4}Kr^2\right)^2} R^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 d\theta^2), \tag{2.5a}$$

$$\text{con} \quad \mu(t,r) = \frac{m}{2rR}\sqrt{1+\frac{1}{4}Kr^2}, \tag{2.5b}$$

in cui m, K sono costanti arbitrarie e $R(t)$ una funzione arbitraria. Si può notare che quando $k = 0$ ed $R(t) = 1$, la soluzione di McVittie riproduce la soluzione di Schwarzschild in coordinate isotrope; quando $m = 0$ riproduce i modelli FLRW. Per cui, questa metrica può essere interpretata come la descrizione del campo gravitazionale generato da una massa puntiforme m immersa in un universo FLRW. In tale contesto, K rappresenta la costante di curvatura, $R(t)$ il fattore di scala e $\mu(t,r)$ la densità di massa comovente [29]. McVittie utilizzò questo modello per una discussione preliminare riguardo all'influenza dell'espansione cosmica sulle orbite dei pianeti.

2.3 Modelli G_3 con azione su S_2

Si ricorda che G_n è il gruppo di Lie n-dimensionale di isometrie le cui trasformazioni preservano la metrica, invece S^2 è una superficie bidimensionale che può essere ad esempio $\mathbb{R}^2$ (piano euclideo bidimensionale), $\mathbb{H}^2$ (piano iperbolico bidimensionale) o $\mathbb{S}^2$ (sfera bidimensionale). Nei modelli G_3 con azione su S_2, lo spazio ammette un gruppo di simmetria tridimensionale che agisce transitivamente sulla superficie bidimensionale, ossia tale che per ogni coppia di punti sulla superficie esista sempre un elemento del gruppo che mappa l'uno nell'altro. In tal modo, la simmetria riduce le variabili dinamiche a gradi di libertà dipendenti solo dal tempo cosmico, cioè il tempo proprio degli osservatori comoventi, riflettendo l'omogeneità angolare e preservando l'isotropia di S_2. La metrica, in coordinate comoventi sferiche generalizzate, risulta essere [21]

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + R^2(d\theta^2 + f^2(\theta)d\phi^2), \tag{2.6}$$

dove $f(\theta) = \sin\theta$, θ, $\sinh\theta$ rispettivamente per i casi con simmetria sferica, piana o iperbolica. Inoltre ν, λ ed R sono funzioni di r e t.

Il caso che ha simmetria sferica con un fluido perfetto privo di deformazioni rientra nella famiglia di Stephani-Barnes, in particolare nella sotto-famiglia che nella classificazione di Petrov è di tipo D, un esempio è la soluzione di McVittie già trattata. Invece il caso a simmetria planare è stato considerato per modellare i muri di dominio (e.g [57]).

2.4 Soluzioni con un fluido "rigido"

Un fluido "rigido" è un modello ideale caratterizzato da un'equazione di stato peculiare: $\rho = p$, cioè il caso limite in cui la pressione è uguale alla densità di energia dove p è la pressione e ρ la densità di energia. In questo caso limite, la velocità del suono nel fluido coincide con la velocità della luce c. Questo modello può essere usato ad esempio per indagare l'universo primordiale, dato che l'alta densità presente dopo il Big Bang [60].

Nei modelli cosmologici basati su fluidi rigidi si studiano principalmente soluzioni delle equazioni di Einstein con simmetria G_2. Tali soluzioni risultano particolarmente interessanti poiché possono essere generate a partire da soluzioni di spazio vuoto con simmetria G_2. Questo è possibile grazie al fatto che il tensore energia-impulso di un fluido rigido è algebricamente equivalente a quello di un campo scalare privo di massa, cioè senza termine di auto-interazione [29]. In coordinate generiche (t, x, y, z), la metrica di tali soluzioni può essere scritta nella forma

$$ds^2 = g_{00}(dt^2 - dx^2) - g_{ab}dx^a dx^b, \tag{2.7}$$

dove $a, b = 2, 3$, $(x^2, x^3) = (y, z)$, e tutte le componenti $g_{\mu\nu}$ dipendono unicamente da t e x.

2.5 Modelli Swiss-cheese

I modelli Swiss-cheese consistono in una o più regioni di vuoto sfericamente simmetriche, ognuna descritta dalla metrica di Schwarzschild, unite attraverso i bordi sferici ad un modello di polvere FLRW. Spesso si considerano anche modelli più generalizzati, in cui le regioni di vuoto vengono descritte tramite i modelli LTB o, più in generale, mediante modelli appartenenti alla famiglia di Szekeres-Szafron [21].

I modelli Swiss-cheese vennero originariamente sviluppati da Einstein e Straus [18] per studiare l'effetto dell'espansione cosmica sul sistema solare. In particolare, essi considerarono un modello FLRW con una singola regione di vuoto con una massa puntiforme al suo interno. Lo studio dimostrò che, nella regione di vuoto e in coordinate locali, il campo gravitazionale della massa puntiforme è statico ed è descritto dalla soluzione Schwarzschild. Inoltre, la dipendenza temporale implicita dall'espansione cosmica non influisce direttamente sul campo locale della massa. L'unico elemento che evolve nel tempo è il confine della regione vuota, dove il campo di Schwarzschild si sovrappone con il campo FLRW.

In questi modelli, è necessario prestare particolare attenzione alle condizioni di giunzione, poiché, in generale, discontinuità di prima specie (funzione a gradino o di Heaviside) nella metrica comporterebbe una funzione δ di Dirac nei simboli di Christoffel e, di conseguenza, prodotti di funzioni δ nel tensore di curvatura (secondo (1.7)), i quali non sono generalmente considerati fisicamente significativi. Per questo motivo, l'attenzione è di solito limitata al caso in cui il tensore di curvatura presenti al massimo una funzione δ. In questi casi, una funzione δ nel tensore di Ricci modella ad esempio un muro di dominio, mentre una funzione δ nel tensore di Weyl descrive un'onda gravitazionale impulsiva (si veda [21] e i riferimenti ivi contenuti).

Capitolo 3

Cosmologia ΛCDM con inomogeneità non lineari

In questo capitolo sarà trattata una particolare soluzione di cosmologia con inomogeneità non lineari seguendo il lavoro fatto da Meures e Bruni [38]. In particolare si considererà la metrica appartenente alla classe II della famiglia Szekeres-Szafron nella forma introdotta da Goode e Wainwright [23], il cui elemento di linea risulta essere

$$ds^2 = -dt^2 + S(t)^2[e^{2\alpha(\vec{x})}(dx^2 + dy^2) + Z(t, \vec{x})^2 dz^2], \tag{3.1}$$

dove compaiono tre funzioni libere da determinare. In particolare, $S(t)$ è il fattore di scala (come $a(t)$ nel caso FLRW (1.3)), $e^{2\alpha(\vec{x})}$ è una funzione collegata solo alla curvatura (si veda equazione (3.3)), mentre $Z(t, \vec{x})$ è la funzione che introduce le inomogeneità. La metrica è scritta in coordinate sincrone. Il fluido cosmico, modellato come polvere senza pressione, si muove lungo geodetiche le cui linee di flusso sono ortogonali all'ipersuperficie del tempo cosmico t con una quadrivelocità

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0). \tag{3.2}$$

Le coordinate sono quindi comoventi con la polvere ed il flusso del fluido risulta irrotazionale. Il tensore energia-impulso ha tutte le componenti nulle tranne $T^{00} = \rho$, con $\rho(\vec{x}, t)$ la densità di energia della polvere.

3.1 Soluzione delle equazioni di Einstein

Assumendo il modello ΛCDM l'universo osservabile risulta essere in ottima approssimazione piatto (e.g. si veda [46] che misura una curvatura di $\Omega_K = 0.001 \pm 0.002$) per cui la seguente trattazione si limiterà a questo caso. Per fare ciò si può trovare [38] dalle equazioni di campo di Einstein che

$$e^\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2)} = 1, \tag{3.3}$$

in cui $K = 0$ è la costante di curvatura, ciò lo si dimostra osservando che la funzione inversa $K(\alpha)$ risulta essere costante nel tempo. Il tensore metrico risulta per cui essere

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(t)^2 Z(\vec{x}, t)^2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

3.1.1 Formulazione delle equazioni di campo

Per la trattazione seguente si considererà $c = 8\pi G = 1$, con tale scelta le equazioni di Einstein introdotte dall'equazione (1.6) risultano essere

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

dove si ricorda che $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso, Λ la costante cosmologica e $G_{\mu\nu}$ il tensore di Einstein che lo si può scomporre secondo le equazioni (1.7). Per iniziare lo studio delle soluzioni delle equazioni di Einstein è necessario calcolare i simboli di Christoffel i quali risultano essere tutti nulli tranne

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{xx} = \Gamma^t_{yy} = S\partial_t S, \qquad \Gamma^t_{zz} = SZ^2\partial_t S + S^2 Z\partial_t Z, \\
&\Gamma^x_{tx} = \Gamma^x_{xt} = \Gamma^y_{ty} = \Gamma^y_{yt} = \frac{\partial_t S}{S}, \qquad \Gamma^x_{zz} = -Z\partial_x Z, \qquad \Gamma^y_{zz} = -Z\partial_y Z, \\
&\Gamma^z_{tz} = \Gamma^z_{zt} = \frac{\partial_t S}{S} + \frac{\partial_t Z}{Z}, \qquad \Gamma^z_{xz} = \Gamma^z_{zx} = \frac{\partial_x Z}{Z}, \qquad \Gamma^z_{yz} = \Gamma^z_{zy} = \frac{\partial_y Z}{Z}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

A partire dal tensore di Ricci si possono, a questo punto, ricavare le 10 equazioni indipendenti di Einstein[1]:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -3\frac{\partial_t^2 S}{S} - \frac{\partial_t^2 Z}{Z} - 2\frac{\partial_t S\partial_t Z}{SZ} \\
\Rightarrow \qquad G_{tt} &= 3\left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2 + 2\frac{\partial_t S\partial_t Z}{SZ} - \frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial_x^2 Z}{Z} + \frac{\partial_y^2 Z}{Z}\right) = \Lambda + \rho,
\end{aligned} \tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned}
R_{xx} &= S\partial_t^2 S + 2\left(\partial_t S\right)^2 - \frac{\partial_t^2 Z}{Z} + \frac{S\partial_t S\partial_t Z}{Z} \\
\Rightarrow \qquad -\frac{G_{xx}}{S^2} &= 2\frac{\partial_t^2 S}{S} + \left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2 + 3\frac{\partial_t S\partial_t Z}{SZ} + \frac{\partial_t^2 Z}{Z} - \frac{\partial_y^2 Z}{S^2 Z} = \Lambda,
\end{aligned} \tag{3.7b}$$

$$\begin{aligned}
R_{yy} &= S\partial_t^2 S + 2\left(\partial_t S\right)^2 - \frac{\partial_y^2 Z}{Z} + \frac{S\partial_t S\partial_t Z}{Z} \\
\Rightarrow \qquad -\frac{G_{yy}}{S^2} &= 2\frac{\partial_t^2 S}{S} + \left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2 + 3\frac{\partial_t S\partial_t Z}{SZ} + \frac{\partial_t^2 Z}{Z} - \frac{\partial_x^2 Z}{S^2 Z} = \Lambda,
\end{aligned} \tag{3.7c}$$

$$\begin{aligned}
R_{zz} &= Z^2 S\partial_t^2 S + S^2 Z\partial_t^2 + 4SZ\partial_t S\partial_t Z + 2Z^2\left(\partial_t S\right) - Z\left(\partial_x^2 Z + \partial_y^2 Z\right) \\
\Rightarrow \qquad -\frac{G_{zz}}{S^2 Z^2} &= 2\frac{\partial_t^2 S}{S} + \left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2 = \Lambda,
\end{aligned} \tag{3.7d}$$

$$R_{tx} = -\frac{\partial_x\partial_t Z}{Z} \qquad \Rightarrow \qquad G_{tx} = -\frac{\partial_x\partial_t Z}{Z} = 0, \tag{3.7e}$$

$$R_{ty} = -\frac{\partial_y\partial_t Z}{Z} \qquad \Rightarrow \qquad G_{ty} = -\frac{\partial_y\partial_t Z}{Z} = 0 \tag{3.7f}$$

$$R_{tz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad G_{tz} = 0 = 0, \tag{3.7g}$$

$$R_{xy} = -\frac{\partial_x\partial_y Z}{Z} \qquad \Rightarrow \qquad G_{xy} = -\frac{\partial_x\partial_y Z}{Z} = 0, \tag{3.7h}$$

$$R_{xz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad G_{xz} = 0 = 0, \tag{3.7i}$$

$$R_{yz} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad G_{yz} = 0 = 0. \tag{3.7j}$$

Per calcolare il tensore di Einstein si è usata anche la curvatura scalare che si ottiene dal tensore di Ricci contraendo i due indici,

$$R = 6\left[\frac{\partial_t^2 S}{S} + \left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2\right] + 2\frac{\partial_t^2 Z}{Z} + 8\frac{\partial_t S\partial_t Z}{SZ} - \frac{2}{S^2}\left(\frac{\partial_x^2 Z}{Z} + \frac{\partial_y^2 Z}{Z}\right). \tag{3.8}$$

Si può notare che il primo termine a destra dell'uguaglianza coincide con la curvatura scalare associata alla metrica FLRW nel caso piatto, vale a dire quando $K = 0$ [21]. Questo risultato è atteso, poiché nel limite $Z \equiv 1$ la metrica (3.4) si riduce esattamente alla metrica FLRW piatta, e dunque la curvatura calcolata coincide con quella nota.

[1] Rispetto all'articolo di Meures e Bruni [38], si è trovata una differenza nei segni davanti alle componenti G_{ii}, con $i = x, y, z$ del tensore di Einstein

Le equazioni (3.7e) e (3.7f) mostrano che le derivate miste di x, y con t sono nulle, allora si può scomporre Z come la somma

$$Z(\vec{x}, t) = F(z, t) + A(\vec{x}). \tag{3.9}$$

Altre due relazioni importanti da notare sono

$$\partial_x \partial_y Z = 0, \tag{3.10a}$$

$$\partial_x^2 Z = \partial_y^2 Z. \tag{3.10b}$$

Esse si ottengono rispettivamente da (3.7h) e da (3.7b)-(3.7c), e permettono di scomporre A come

$$A(\vec{x}) = a(z) + b(z)x + c(z)y + d(z)(x^2 + y^2). \tag{3.11}$$

3.1.2 Equazione di continuità

La conservazione dell'energia e dell'impulso in Relatività Generale è data da [21]:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_t \rho = \partial_t \rho + \Gamma^\mu_{\mu t} \rho = \partial_t \rho + 3\frac{\partial_t S}{S}\rho + \frac{\partial_t Z}{Z}\rho = 0. \tag{3.12}$$

Arrangiando i termini, si ottiene un'equazione differenziale di cui è semplice trovare la soluzione:

$$\frac{\partial_t \rho}{\rho} = -\frac{\partial_t (S^3 Z)}{S^3 Z} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{M(\vec{x})}{S^3 Z}, \tag{3.13}$$

in cui $M(\vec{x})$ è una funzione generale dello spazio. Ora si può scrivere $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$, in cui $\delta(t, \vec{x})$ è la variazione di densità adimensionale e $\bar{\rho}(t)$ è la densità omogenea di uno spazio-tempo FLRW con fattore di scala $S(t)$. In particolare, per il fondo FLRW, si ottiene $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0/S^3$ dall'equazione di continuità $\partial_t \bar{\rho} = -3\bar{\rho}\partial_t S/S$, con $\bar{\rho}_0$ la densità media misurata oggi [1]. Applicando tali sostituzioni all'equazione (3.13) si ottiene

$$\partial_t \bar{\rho} + 3\frac{\partial_t S}{S}\bar{\rho} + \bar{\rho}\left(\frac{\partial_t Z}{Z} + \frac{\partial_t \delta}{1+\delta}\right) = 0 \quad \overset{\partial_t \bar{\rho} = -3\frac{\partial_t S}{S}\bar{\rho}}{\Rightarrow} \quad -\frac{\partial_t \delta}{1+\delta} = \frac{\partial_t Z}{Z}. \tag{3.14}$$

Integrando quest'ultima equazione, si conclude che

$$\delta = \frac{(1+\delta_i)Z_i - Z}{Z} = -\frac{F}{F+A}, \tag{3.15}$$

dove δ_i e Z_i, sono i valori arbitrari iniziali e nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'equazione (3.9). Si noti che per ottenere tale risultato si è assunto $\delta_i = F_i/(F_i + A)$, tale relazione tra le condizioni iniziali è stata fatta affinché $\delta(t = 0) = 0$. Unendo le equazioni (3.13) e (3.15) si trova la relazione

$$M(\vec{x}) = \bar{\rho}_0 A(\vec{x}), \tag{3.16}$$

in cui $\bar{\rho}_0$ si ricorda essere la densità media.

3.1.3 Equazioni di Friedmann

Riprendendo l'equazione (3.7d), moltiplicandola per $S^2 \partial_t S$ e integrandola nel tempo si ha

$$2S\partial_t S \partial_t^2 S + (\partial_t S)^3 = \Lambda S^2 \partial_t S \qquad \Rightarrow \qquad S\,(\partial_t S)^2 = \frac{1}{3}\Lambda S^3 + \mathcal{C}, \tag{3.17}$$

con $\mathcal{C}$ costante di integrazione, indipendente da tutte le variabili. Arrangiando i termini, si può trovare la prima equazione di Friedmann per il modello ΛCDM nel caso di curvatura nulla:

$$\left(\frac{\partial_t S}{S}\right)^2 = \frac{\mathcal{C}}{S^3} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{\bar{\rho}_0}{3S^3} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.18}$$

Nell'ultimo passaggio si è identificato il termine $\mathcal{C}$ con il termine di densità $\bar{\rho}_0/3 = \bar{\rho}S^3/3$ introdotto nella sezione precedente. Se sostituiamo quanto trovato nell'equazione (3.7d) si ottiene la seconda equazione di Friedmann:

$$\frac{\partial_t^2 S}{S} = -\frac{\bar{\rho}_0}{6S^3} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.19}$$

Si può notare come queste equazioni dipendano solo da Λ, la costante cosmologica, e da $\bar{\rho}_0$, la densità del fondo FLRW. Quindi, essendo queste le equazioni che determinano l'evoluzione dell'universo, si osserva che l'espansione dell'universo è indipendente dalle inomogeneità introdotte. Infatti le equazioni di Friedmann trovate corrispondano a quelle per un universo FLRW mostrate nell'introduzione, e.g. vedere (1.4a) e (1.4b).

3.1.4 Equazioni differenziali per $F(t, z)$

È possibile proseguire la ricerca della soluzione delle funzioni metriche combinando le equazioni (3.7b), (3.7d) e (3.7a), ottenendo l'equazione differenziale

$$3\frac{\partial_t^2 Z}{Z} + \frac{\partial_t^2 S}{S} + 2\frac{\partial_t S \partial_t Z}{SZ} = -\frac{\rho}{2} + \Lambda. \tag{3.20}$$

Unendo ora l'equazione appena trovata (3.20) con l'equazione trovata nella sezione precedente (3.19) e ricordando le relazioni di $M(\vec{x})$ (vedere (3.16)) e la decomposizione di $Z(\vec{x}, t)$ (vedere (3.9)) si trova

$$S^3\partial_t^2 F + 2S^2\partial_t S\partial_t F - \frac{\bar{\rho}_0}{2}F = -\frac{M}{2} + \frac{\bar{\rho}_0}{2}. \tag{3.21}$$

Notando che la parte sinistra dell'equazione dipende solo da z e t, la parte destra (che dipende solo da x, y e z) dovrà dipendere solo da z e si può, quindi, introdurre la funzione $g(z) = -M/2 + \bar{\rho}_0/S^3$. Con l'introduzione di tale funzione, l'equazione (3.21) diventa un'equazione differenziale ordinaria che ha due soluzioni omogenee $F^h = F^h(z, t)$ e una particolare $F^p = 2g(z)/\bar{\rho}_0$ facilmente verificabile. Si può scrivere, allora

$$F = F^h(z, t) - \frac{2g(z)}{\bar{\rho}_0} \qquad \Rightarrow \qquad Z = F^h(z, t) + \frac{M}{\bar{\rho}_0}. \tag{3.22}$$

Questo mostra che la metrica è totalmente indipendente dalla funzione $g(z)$, infatti lo si può vedere anche dall'equazione (3.9) in quanto F ed A dipendono entrambe da z per cui si ha l'arbitrarietà di aggiungere $g(z)$ ad F e sottrarla da A mantenendo invariata Z. Se si sceglie $g(z) = 0$ non si perde di generalità e l'equazione 3.21 diventa

$$\partial_t^2 F + 2\frac{\partial_t S}{S}\partial_t F - \frac{\bar{\rho}_0}{2S^3}F = 0. \tag{3.23}$$

Tale equazione, a meno di fattori moltiplicativi, corrisponde a quella di un repulsore armonico smorzato per cui si hanno due soluzioni indipendenti, una crescente ed una decrescente che ci permette di scrivere F come

$$F(z, t) = \beta_+(z)f_+(t) + \beta_-(z)f_-(t). \tag{3.24}$$

Dove $f_+(t)$ ed $f_-(t)$ sono rispettivamente il modo crescente e decrescente, e $\beta_+(z)$ e $\beta_-(z)$ sono due funzioni libere di z. Un'ultima equazione che si può estrarre dalle equazioni di Einstein la si trova sottraendo (3.7b) da (3.7d) e ricordando la scomposizione Z (3.9)

$$3\frac{\partial_t S}{S}\partial_t F + \partial_t^2 F - \frac{\partial_x^2 Z}{S^2} = 0. \tag{3.25}$$

Notando che $\partial_x^2 Z = 2d(z)$ (quest'ultima la si ottiene da $A(\vec{x})$ (3.11)) e sostituendo alla derivata seconda di F l'equazione (3.23) si ottiene l'equazione differenziale al primo ordine

$$\frac{\partial_t S}{S}\partial_t F + \frac{\bar{\rho}_0}{2S^3}F - \frac{2d}{S^2} = 0. \tag{3.26}$$

Quest'ultima equazione si può facilmente dimostrare [38] che corrisponde a un'integrale primo dell'equazione (3.23).

3.1.5 Risoluzione delle funzioni metriche

La prima equazione di Friedmann (3.18), come anticipato in precedenza, permette di descrivere lo spazio-tempo in esame incorporandolo in una geometria FLRW descritta dal parametro di scala $S(t)$ e parametrizzata da $\Omega_m = \bar{\rho_0}/(3H_0^2)$ e $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0^2)$, dove H_0 è il parametro di Hubble oggi, Ω_m e Ω_Λ parametri adimensionali di densità della materia e dell'energia oscura rispettivamente. Dato che si sta considerando un universo piatto, vale la relazione $1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ [21]. La soluzione di tale equazione risulta essere

$$S(t) = \left(\frac{1-\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t\right). \tag{3.27}$$

Imponendo $S(t_0) = 1$, cioè quando l'universo ha raggiunto le dimensioni odierne, si può calcolare l'età dell'universo invertendo la soluzione appena trovata:

$$t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\text{artanh}\left(\sqrt{\Omega_\Lambda}\right). \tag{3.28}$$

Per semplificare la notazione, si può ora definire la variabile adimensionale $\tau = \sqrt{3\Lambda/4}t$. Sostituendo i risultati appena trovati nell'equazione (3.26), si ottiene

$$\partial_\tau^2 F + \frac{4}{3}\coth(\tau)\partial_\tau F - \frac{2}{3}\frac{1}{\sinh^2(\tau)}F = 0, \tag{3.29}$$

le cui soluzioni linearmente indipendenti, mostrate in figura (3.1), sono

$$f_+(\tau) = \frac{\cosh(\tau)}{\sinh(\tau)}, \tag{3.30a}$$

$$f_-(\tau) = \frac{\cosh(\tau)}{\sinh(\tau)}\int \frac{\sinh^{2/3}(\tau)}{\cosh^2(\tau)}d\tau. \tag{3.30b}$$

Si può notare come sia la modalità crescente che quella decrescente raggiungano entrambe valori costanti, a differenza del caso con $\Lambda = 0$ in cui la modalità crescente aumenta linearmente con il fattore di scala S (per approfondire si veda [23]).

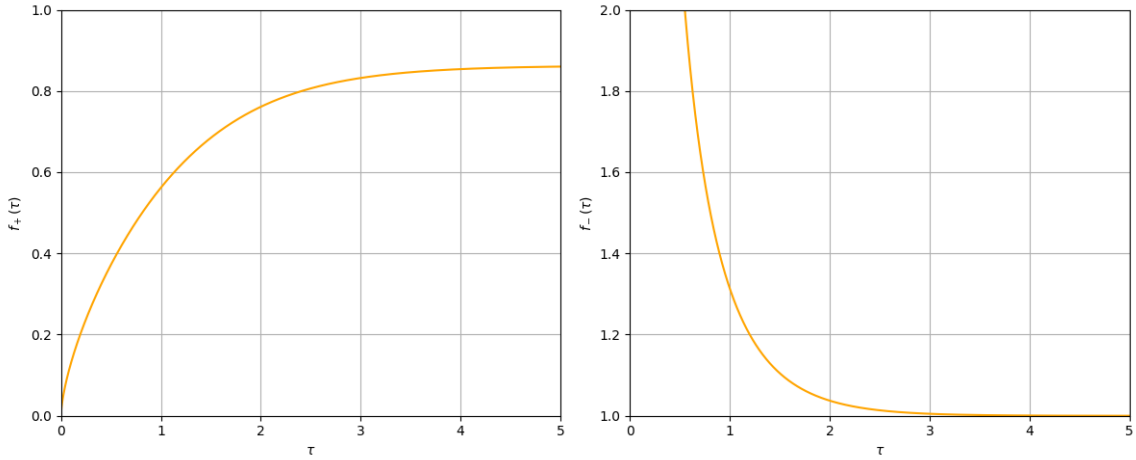

Figura 3.1: Sinistra: grafico della modalità crescente (3.30a). Destra: grafico della modalità decrescente (3.30b)

Riassumendo le equazioni (3.9), (3.11), (3.24), si ha che Z può essere scomposta come

$$Z(t,x,y,z) = \beta_+(z)f_+(t) + \beta_-(z)f_-(t) + a(z) + b(z)x + c(z)y + d(z)(x^2+y^2), \tag{3.31}$$

l'obbiettivo ora è quello di ridurre le arbitrarietà dalle funzioni libere in z che compaiono $(a, b, c, d, \beta_+, \beta_-)$. A partire dall'equazione (3.26) e sostituendo le soluzioni trovate per S ed F si ottiene

$$d(z) = B\beta_+(z), \tag{3.32a}$$

$$\text{con} \qquad B = \frac{1}{4}\left(\bar{\rho}_0^2\Lambda\right)^{1/3} = \frac{3}{4}H_0^2\left[\Omega_\Lambda(1-\Omega_\Lambda)^2\right]^{1/3}. \tag{3.32b}$$

Per ridurre ulteriormente la libertà dei parametri si introducono due nuove funzioni γ e ω, e senza perdita di generalità si può scrivere

$$b(z) = 2\gamma(z)B\beta_+(z), \tag{3.33a}$$
$$c(z) = 2\omega(z)B\beta_+(z). \tag{3.33b}$$

Sostituendo tutto ciò nell'equazione (3.11) si ha

$$A = a + B\beta_+[(x+\gamma)^2 + (y+\omega)^2 - (\gamma^2+\omega^2)]. \tag{3.34}$$

Ora, se si cambia la coordinata z e si riscala β_+ e β_-, in particolare scegliendo

$$\tilde{z} = \int \left[a(z) - B\beta_+(z)\left(\gamma^2(z)+\omega^2(z)\right)\right] dz, \tag{3.35a}$$
$$\tilde{\beta}_+(z) = \frac{\beta_+(z)}{a(z) - B\beta_+(z)\left(\gamma^2(z)+\omega^2(z)\right)}, \tag{3.35b}$$
$$\tilde{\beta}_-(z) = \frac{\beta_-(z)}{a(z) - B\beta_+(z)\left(\gamma^2(z)+\omega^2(z)\right)}, \tag{3.35c}$$

si ottiene la semplificazione

$$Z(x,y,\tilde{z},t) = \tilde{\beta}_+(\tilde{z})f_+(t) + \tilde{\beta}_-(\tilde{z})f_-(t) + \tilde{A}(x,y,\tilde{z}), \tag{3.36a}$$
$$\tilde{A}(x,y,\tilde{z}) = 1 + B\tilde{\beta_+}(\tilde{z})[(x+\gamma(\tilde{z}))^2 + (y+\omega(\tilde{z}))^2]. \tag{3.36b}$$

A partire da questo punto si possono omettere tutte le tilde e si può scrivere la metrica nella forma finale

$$\begin{aligned} ds^2 = &- dt^2 + S(t)^2dx^2 + S(t)^2dy^2 + \\ &S^2(t)\left\{1 + \beta_+(z)f_+(t) + \beta_-(z)f_-(t) + B\beta_+(z)[(x+\gamma(z))^2 + (y+\omega(z))^2]\right\}^2 dz^2. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Le liberà nella metrica sono state ridotte a sole quattro funzioni $(\gamma(z), \omega(z), \beta_+(z), \beta_-(z))$. Questa espressione inoltre chiarisce il cambio di coordinate appena fatto, in pratica è stata completamente fissata la Gauge[2] in maniera tale che quando β_+ e β_- sono nulle, che implicano $F = 0$ e $Z = 1$, la metrica prende esattamente la forma dello spazio-tempo FLRW.

3.2 Interpretazione e classificazione delle soluzioni

La prima cosa che si può vedere è che per un'opportuna scelta delle funzioni metriche si può trovare una simmetria assiale, infatti in generale la metrica (3.4) non ha simmetrie [21]. Se si sceglie $\gamma = \omega = 0$, si decompone Z come

$$Z(x,y,z) = 1 + F(z,t) + B\beta_+(z)(x^2+y^2), \tag{3.38}$$

e si effettua il cambio di coordinate $x = \rho\sin(\phi)$ e $y = \rho\cos(\phi)$, si ottiene

$$Z(\rho,z) = 1 + F(z,t) + B\beta_+(z)\rho^2. \tag{3.39}$$

Da ciò si vede facilmente che, in questo caso, la metrica, che dipende ora solo da $S(t)$ e da $Z(\rho,z)$, risulta indipendente da ϕ, il che implica la presenza di una simmetria assiale.

Ricordando l'equazione (3.15), si può ora esprimere il campo di densità come

$$\delta(x,y,z) = -\frac{F}{Z} = -\frac{\beta_+(z)f_+(t) + \beta_-(z)f_-(t)}{1 + \beta_+(z)f_+(t) + \beta_-(z)f_-(t) + B\beta_+(z)[(x+\gamma(z))^2 + (y+\omega(z))^2]}. \tag{3.40}$$

[2] In Relatività Generale, la libertà di scegliere le coordinate introduce risonanze; fissare la Gauge significa eliminare questa libertà, rendendo unica la rappresentazione della soluzione fisica [21].

Quindi in generale in ogni punto dello spazio possono essere presenti delle sovra-densità o sotto-densità dipendentemente dai valori di β_+ e β_-. Si può già notare che nel caso di sovra-densità il denominatore può annullarsi implicando singolarità a pancake, argomento trattato nella prossima sezione. Volendo ora visualizzare alcuni campi di densità, data la difficoltà nel rappresentarli, ci si può restringere al caso di simmetria assiale cioè imponendo $\gamma = \omega = 0$.
Come primo esempio, fig. (3.2), si può considerare un campo di sotto-densità con una modalità crescente, $\beta_+ > 0$ e $\beta_- = \gamma = \omega = 0$. In questo caso non sono presenti singolarità, in particolare la funzione scelta risulta essere $\beta_+ \propto 1 - \sin(kz)$ con $k = 8$ Mpc^{-1}. Si noti che z_{FLRW} rappresenta il redshift, adottato come parametro temporale dell'evoluzione cosmica, calcolato assumendo che l'universo sia FLRW.

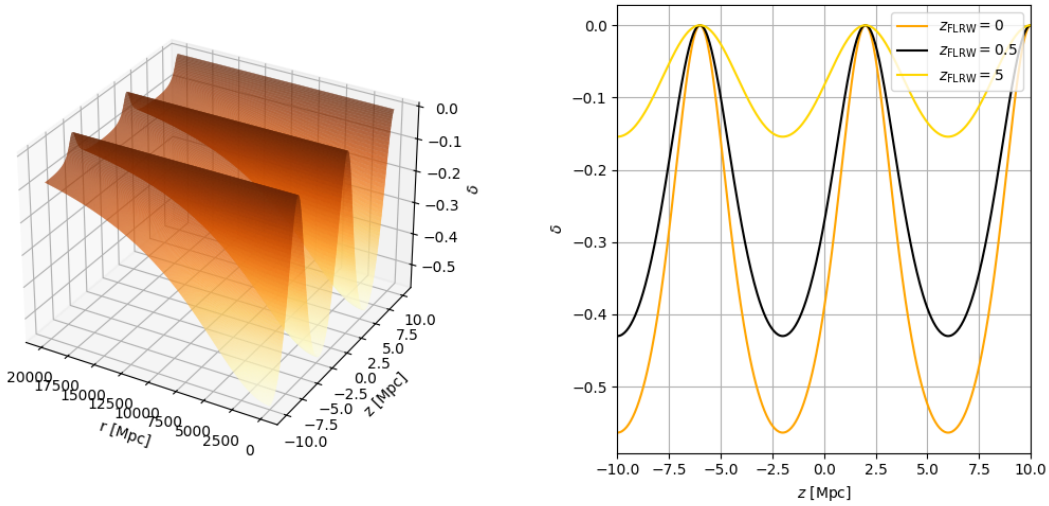

Figura 3.2: Profilo di una sotto-densità $\beta_+ \propto 1 - \sin(kz)$ con $k = 8$ Mpc^{-1}, $\Omega_\Lambda = 0.75$ e $H_0 = 72$ kms^{-1}Mpc^{-1}. A destra come si presenta la densità nello spazio con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A sinistra il suo profilo con $r = 0$ a tempi differenti.

Un altro esempio, fig. (3.3), mostra la presenza di singolarità, non presente nel grafico, dovuta alla possibilità di sovra-densità. Anche in questo caso si è scelto $\beta_+ > 0$ e $\beta_- = \gamma = \omega = 0$, ma con $\beta_+ \propto \sin(kz)$ con $k = 8$ Mpc^{-1}. In entrambe le situazioni dal grafico di destra si può notare come il profilo di densità cresce nel tempo a causa della modalità crescente f_+.

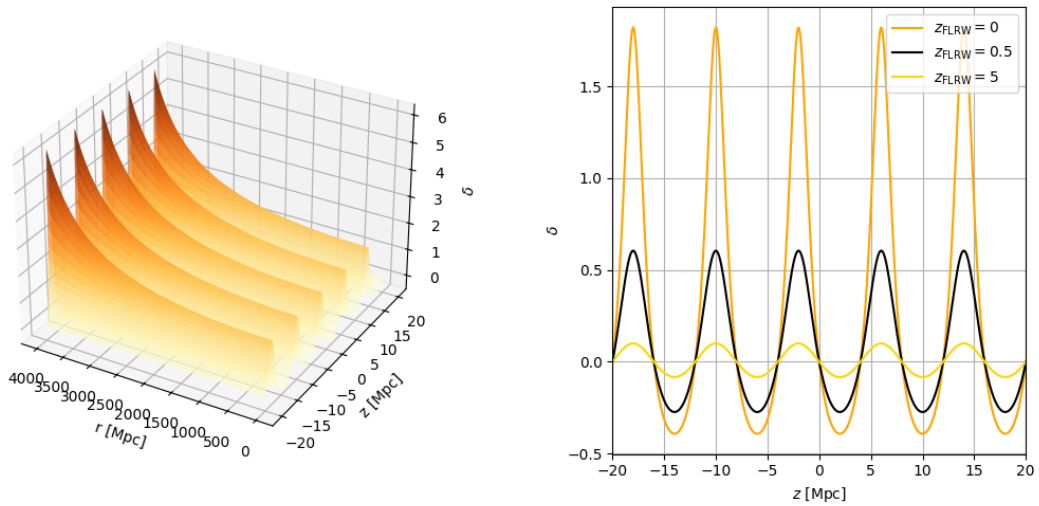

Figura 3.3: Profilo di una sovra-densità $\beta_+ \propto \sin(kz)$ con $k = 8$ Mpc^{-1}, $\Omega_\Lambda = 0.75$ e $H_0 = 72$ kms^{-1}Mpc^{-1}. A destra come si presenta la densità nello spazio con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A sinistra il suo profilo con $r = 0$ a tempi differenti.

3.2.1 Classificazione delle singolarità

Come anticipato, considerando il fatto che $f_+, f_- \geq 0$ (si veda fig. 3.1), si ha che il campo di densità (3.40) può presentare singolarità per determinati valori negativi assunti da β_+ e β_-, in quanto il denominatore, cioè Z, va a zero. Ciò genera di conseguenza una singolarità in ρ. Lo studio di queste singolarità risulta inoltre interessante in quanto il parametro $\Lambda \neq 0$ fornisce risultati differenti rispetto al caso $\Lambda = 0$ studiato nel dettaglio da Goode e Wainwright [23], permettendo quindi di sfruttare questo fatto per modellare inomogeneità in maniera fisicamente significativa.

Per iniziare, bisogna introdurre la variabile l_i attraverso

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^{3} l_i^2 (dx^i)^2, \tag{3.41}$$

perciò, per la metrica (3.4), si ha $l_1 = l_2 = S$ e $l_3 = SZ$. Grazie a queste variabili si possono classificare le singolarità in tre differenti tipologie [20]:

- singolarità puntiforme quando tutte e tre $l_i \to 0$ approcciando la singolarità,
- singolarità a sigaro o a fuso se due $l_i \to 0$ e l'altro diverge approcciando la singolarità,
- singolarità a pancake se un solo $l_i \to 0$ e gli altri due convergono ad un valore finito approcciando la singolarità.

La prima singolarità la si trova a $t = 0$, in quanto $S(0) = 0$, essa dipende solo da β_-. Se $\beta_- \neq 0$ allora si ha una singolarità a sigaro, altrimenti se $\beta_- = 0$ si ha una singolarità puntiforme. Cioè, in altre parole, se c'è una modalità decrescente la singolarità iniziale è dominata dalla velocità simile alla soluzione di Kasner [27], mentre se c'è solo una modalità crescente la singolarità iniziale è dominata dalla materia ed è effettivamente isotropa per cui avvicinandosi a tale singolarità il modo crescente diminuisce e lo spazio-tempo diventa FLRW con una piccola perturbazione.
Come anticipato nella sezione precedente, ci possono essere singolarità a $t_* > 0$. Queste singolarità possono essere solo a pancake, esse sono riassunte nella tabella 3.1. Per semplificare si può suddividere lo studio in due:

- **caso $\boldsymbol{\beta_- < 0}$**, si ha che le funzioni dipendenti dal tempo hanno un andamento asintotico, come si vede da fig. 3.1, in particolare $f_- \to 1$ ed $f_+ \to f_+^\infty$ per $t \to \infty$ (f_+^∞ è un numero positivo e finito). Si ha quindi, che in ogni punto fissato dello spazio, F e per cui Z hanno un andamento asintotico, allora si può introdurre il parametro Z_∞ che è tale valore asintotico per ogni punto dello spazio. A tempi abbastanza brevi si ha che la modalità decrescente è dominante per cui $\partial_t Z \approx \beta_- \partial_t f_-$ che risulta essere positiva in quanto β_- è scelta negativa e f_- è una funzione strettamente decrescente. Mentre a tempi abbastanza grandi, riarrangiando i termini dell'equazione (3.26), si ha $\partial_t Z \approx 2B\beta_+/(S\partial_t S)$, che nel caso si assuma β_+ negativo, dato che B, S e $\partial_t S$ sono positivi, si avrà $\partial_t Z < 0$. In questo caso dato che il segno della derivata prima di Z cambia si dovrà a avere un massimo, che sarà chiamato Z_M. Infine analizzando il segno dei valori Z_M e Z_∞ si può costruire la parte destra della tabella 3.1;
- **caso $\boldsymbol{\beta_- \geq 0}$**, dato che ora si ha che Z è positiva inizialmente ($1 + \beta_- f_-$ ai tempi iniziali questa è dominante e positiva), se Z_∞ è positivo allora Z non ha zeri per cui non ci sono pancake. La distinzione tra i diversi casi per cui è determinata da β_+, che se risulta positiva (allora Z positiva per ogni t) ovviamente non ci saranno singolarità. Ma se β_+ è negativa c'è un valore critico che divide i casi con singolarità da quelli senza. Tale valore si ha quando Z_∞ si annulla cioè, partendo dall'equazione (3.36a), si ha

$$|\beta_+^*| = \frac{|\beta_-| + 1}{f_+^\infty + B[(x+\gamma)^2 + (y+\omega^2)]}. \tag{3.42}$$

A partire da tale valore si è costruita la parte rimanente della tabella 3.1.

$\beta_- < 0$				$\beta_- \geq 0$	
β_+	Z_M	Z_∞	# di singolarità a pancake	β_+	# di singolarità a pancake
< 0	$= 0$	< 0	1	≥ 0	0
< 0	< 0	< 0	0		
< 0	> 0	≥ 0	1	< 0, $\lvert\beta_+\rvert < \lvert\beta_+^*\rvert$	0
< 0	> 0	< 0	2		
≥ 0	-	< 0	0	< 0, $\lvert\beta_+\rvert > \lvert\beta_+^*\rvert$	1
≥ 0	-	> 0	1		

Tabella 3.1: Classificazione delle singolarità presente ad un determinato tempo finito $t_* > 0$

Il caso $\beta_- \geq 0$, $\beta_+ < 0$, $|\beta_+| < |\beta_+^*|$ risulta il più interessante, poiché, a differenza del caso $\Lambda = 0$ [23], dato un punto nello spazio, si può sempre trovare un valore $|\beta_+^*|$ tale per cui non ci saranno singolarità future. Questo significa che, se si vuole modellare la distribuzione di densità in una determinata regione senza incorrere in pancake, bisogna trovare il $|\beta_+^*|$ massimo, che restringerà la massima sovra-densità che si può modellare. Ad esempio, utilizzando le condizioni iniziali all'epoca della ricombinazione si può partire da valori iniziali persino superiori all'ampiezza del power spectrum misurato e non avere futuri pancake in una regione finita intorno all'asse z (per approfondire si veda [28]).

3.2.2 Classificazione di Petrov

Per effettuare la classificazione di Petrov, è necessario trovare la tetrade nulla minimale (si veda la sezione 1.4.2). La costruzione della tetrade si trova nella prossima sezione (si veda equazione (3.48)), e ricordando la definizione degli scalari di Weyl (1.8), si trova che l'unico non nullo risulta essere

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6}\left(\frac{\partial_t S}{S}\frac{\partial_t Z}{Z} + \frac{\partial^2 Z}{Z} + \frac{\partial_z^2 Z}{S^2 Z}\right). \tag{3.43}$$

Questo mostra che lo spazio-tempo considerato ha solo una componente di Weyl indipendente, quindi, dal confronto con la tabella 1.1, lo si può classificare di tipo D. L'espressione è stata ottenuta solo attraverso la metrica, se ora si considera anche la materia si trova

$$\Psi_2 = \frac{M}{6S^3 Z} - \frac{\bar{\rho}_0}{6S^3} = \frac{1}{6}\bar{\rho}\delta. \tag{3.44}$$

Ricordando l'equazione per la densità δ (3.40), si osserva che, nel caso di sotto-densità, l'equazione tende a zero quando $x^2 + y^2$ e t sono grandi. Nel caso di sovra-densità, in un qualsiasi punto dello spazio, Ψ_2 divergerà quando si forma un pancake (tranne, con $\beta_- \geq 0$, il secondo caso della tabella 3.1 e tenderà a zero per t grande). Ma si noti che, approcciando una singolarità a $t^* > 0$, risulta che

$$\frac{\Psi_2}{\Theta^2} \simeq -\frac{1}{6}\frac{\bar{\rho}_0}{6S^3}\frac{FZ}{(\partial_t Z)^2}, \tag{3.45}$$

cioè, dato che tutti i valori sono finiti tranne $Z = 0$, si ha che questa misura adimensionale della curvatura di Weyl risulta trascurabile.

Si ha quindi che lo spazio-tempo considerato è in generale di tipo D, ma quando non ci sono pancake e si hanno grandi valori di $x^2 + y^2$ e t, tende a essere di tipo O (FLRW), cioè conformemente piatto. Si nota anche che l'equazione (3.44) non dipende da Λ, per cui, dato che Ψ_2 è l'unico contributo per le deviazioni delle geodetiche [41], significa che non c'è contributo diretto da parte della costante cosmologica nelle lenti gravitazionali.

3.3 Variabili covarianti

Volendo ora trattare la descrizione covariante del flusso del fluido dello spazio-tempo è necessario sfruttare le quantità cinematiche introdotte nella sezione 1.4.3. La prima variabile, lo scalare di

espansione, è stata determinata a partire dall'equazione (3.12), poiché quest'ultima può essere riscritta nella forma $\partial_t \rho = -\Theta\rho$ [21], da cui segue

$$\Theta = \nabla_\mu u^\mu = 3\frac{\partial_t S}{S} + \frac{\partial_t Z}{Z}. \tag{3.46}$$

Per la metrica (3.4) è noto che la parte magnetica del tensore di Weyl sia nulla [3]. Inoltre, dato che si sta considerando un flusso di polvere irrotazionale, si trova che $\omega_{\mu\nu} = 0$ (come anticipato nel capitolo 2, essendo questa soluzione appartenente alla famiglia di Szekeres-Szafron). Da queste considerazioni, il modello trattato rientra nella classe dei "Silent Universes" [36]. I Silent Universes sono modelli cosmologici in cui non c'è comunicazione tra gli elementi fluidi, ciò è dovuto al fatto che le equazioni che evolvono ρ, Θ, $\sigma_{\mu\nu}$ e $E_{\mu\nu}$ sono equazioni differenziali ordinarie, per cui ogni elemento fluido evolve indipendentemente. Per un approfondimento sull'analisi dei sistemi dinamici per queste variabili si faccia riferimento a [9] e [10] per il caso con e senza costante cosmologica, rispettivamente.

Nei Silent Universes $\sigma_{\mu\nu}$ ed $E_{\mu\nu}$ hanno una base di autovettori in comune ($e_{i\mu}$, con i indice che distingue tali vettori) [19]. Perciò, si possono espandere come

$$E_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3} E_i e_{i\mu} e_{i\nu}, \tag{3.47a}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i e_{i\mu} e_{i\nu}, \tag{3.47b}$$

con E_i e σ_i autovalori. La tetrade ortonormale $e_{i\mu}$ si trova essere $e_{1\mu} = S\delta^1_\mu$, $e_{2\mu} = S\delta^2_\mu$ e $e_{3\mu} = SZ\delta^3_\mu$. Da questi autovettori si può trovare la tetrade complessa nulla, necessaria per la classificazione di Petrov della sezione precedente, in particolare, si usa il formalismo di Newman-Penrose (NP), per approfondire si veda [11]. Grazie alla procedura mostrata da Stephani[3] [1] si trova che tale tetrade risulta essere

$$l_\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{SZ}{\sqrt{2}}\right), \tag{3.48a}$$

$$n_\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{SZ}{\sqrt{2}}\right), \tag{3.48b}$$

$$m_\mu = \left(0, \frac{S}{\sqrt{2}}, -i\frac{S}{\sqrt{2}}, 0\right), \tag{3.48c}$$

e $\bar{m}_\mu$ il complesso coniugato di m_μ. Tornando a trattare la deformazione e la parte elettrica del tensore di Weyl, si ha che tali tensori sono a traccia nulla per cui si può scrivere

$$\sum_{i=1}^{3} E_i = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i = 0. \tag{3.49}$$

Si può allora definire $\sigma_+ = (\sigma_1+\sigma_2)/2$, $\sigma_- = (\sigma_1-\sigma_2)/\sqrt{12}$ ed $E_+ = (E_1+E_2)/2$, $E_- = (E_1-E_2)/\sqrt{12}$ come insieme conveniente di variabili dinamiche, che determinano completamente le dinamiche del tensore di deformazione e della parte elettrica del tensore di Weyl. Usando queste definizioni si trova

$$\sigma_+ = -\frac{1}{3}\frac{\partial_t Z}{Z}, \qquad \sigma_- = 0 \tag{3.50a}$$

$$E_+ = \frac{\bar{\rho}_0}{6S^3} - \frac{M}{6S^3 Z} \overset{(3.13)}{=} -\frac{1}{6}\bar{\rho}\delta, \qquad E_- = 0. \tag{3.50b}$$

Dal confronto con l'equazione (3.44) si osserva che $\Psi_2 = -E_+$.

[3] Si faccia attenzione che la notazione usata da Stephani [1] differisce da quella adottata nel presente lavoro

3.3.1 Analisi nello spazio delle fasi

L'insieme completo di di equazioni differenziali ordinarie che governano le dinamiche del modello in esame sono date da [9, 10]

$$\partial_t \sigma_+ = -\frac{2}{3}\Theta\sigma_+ + \sigma_+^2 - E_+, \tag{3.51a}$$

$$\partial_t E_+ = -\Theta E_+ - 3\sigma_+ E_+ - \frac{1}{2}\rho\sigma_+, \tag{3.51b}$$

$$\partial_t \rho = \Theta\rho \qquad \text{(Eq. di conservazione della materia)}, \tag{3.51c}$$

$$\partial_t \Theta = -\frac{1}{3}\Theta^2 - 6\sigma_+^2 - \frac{1}{2}\rho + \Lambda \qquad \text{(Eq. di Raychaudhuri)}. \tag{3.51d}$$

Meures e Bruni [38] mostrano che questo sistema si può ridurre ad un sistema di due equazioni differenziali. Questo è possibile perché si sta considerando il caso piatto $K = 0$ e perché la quantità $d(x)$ (3.32b) è costante nel tempo. Per ragioni di spazio di seguito sarà riportato solo il risultato finale. Tali equazioni risultano essere

$$\Omega_\Lambda' = 3\Omega_\Lambda(1 - \Omega_\Lambda), \tag{3.52a}$$

$$\delta' = -\frac{3}{2}\left[(1 - \Omega_\Lambda)\delta + \frac{\beta_+}{A}(\delta + 1)\left(\Omega_\Lambda^{1/2} - \Omega_\Lambda^{3/2}\right)^{2/3}\right](1 + \delta), \tag{3.52b}$$

dove il singolo apice indica la derivata rispetto al tempo normalizzata dalla costante di Hubble, in altre parole per una funzione $f(t)$ si definisce $f' = \partial_t f/H$. In particolare, si può notare come si è riusciti a separare la parte di fondo FLRW (Ω) dalle deviazioni di non omogeneità (δ). Inoltre si può introdurre una nuova variabile $\Sigma_+ = \sigma_+/H$ che rappresenta la deviazione della velocità di espansione normalizzata per cui vale l'equazione

$$\Sigma_+ = \frac{1}{2}(1 - \Omega_\Lambda)\delta - \frac{\beta_+}{2A}(\delta + 1)\left(\Omega_\Lambda^{1/2} - \Omega_\Lambda^{3/2}\right)^{2/3}. \tag{3.53}$$

La dinamica di queste variabili può essere mostrata in forma compressa facendo un'analisi nel piano delle fasi, presentato nella figura 3.4. Le condizioni iniziali sono state scelte molto vicine a $\Omega_\Lambda = \delta = \Sigma_+ = 0$ e si è deciso di visualizzare una sola orbita per diversi valori di β_+. Si può notare come nei tempi tardivi il modello tende a un universo di de Sitter[4] (identificato dai parametri $\Omega_\Lambda = 1$ e $\Sigma_+ = 0$).

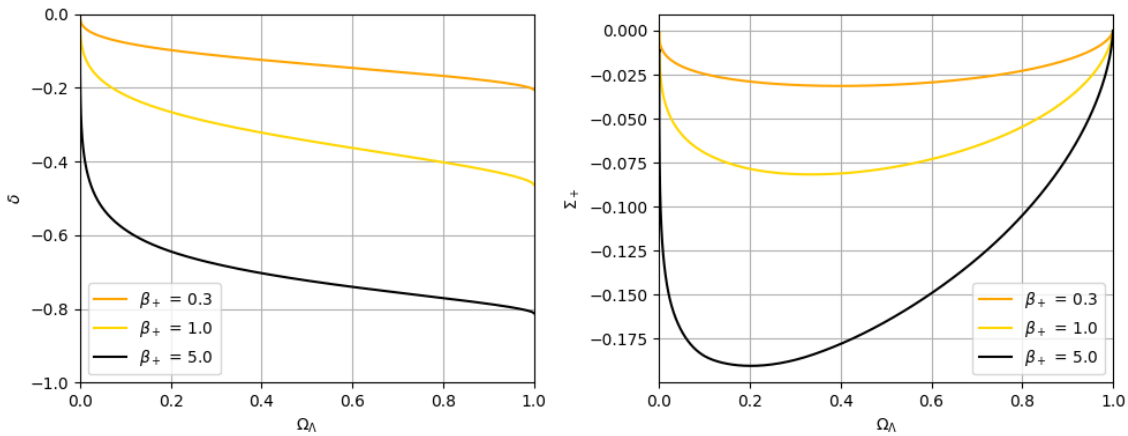

Figura 3.4: Piano delle fasi per le variabili non omogenee δ e Σ_+ contro la variabile di fondo Ω_Λ

[4] L'universo di de Sitter è una soluzione delle equazione di Einstein con costante cosmologica positiva e assenza di materia, descrive uno spazio-tempo vuoto in espansione esponenziale [14].

Capitolo 4

Tracciamento dei fasci luminosi

Dopo aver risolto le equazioni di Einstein per la metrica (3.4), risulta interessante capire le differenze che comporterebbe il modello trattato nel capitolo precedente, rispetto a quello FLRW, nelle misure delle distanze e del redshift. Per fare ciò è necessario fare il tracciamento dei fasci luminosi per studiare le proprietà ottiche di questo modello. Dato che ad interessare sono solo i tempi più tardivi dell'universo, si può ignorare la modalità decrescente di F (3.24), cioè imponendo $\beta_- = 0$, in quanto non influenza i risultati, ma complica solo i conti. La seguente trattazione segue il lavoro fatto da Meures e Bruni [39], inoltre formalismo e convenzioni sono le stesse del capitolo precedente.

4.1 Equazioni geodetiche nulle

Per l'analisi delle proprietà ottiche è necessario calcolare le equazioni delle geodetiche nulle. Usando il formalismo di Eulero-Lagrange e partendo dalla Lagrangiana [21]

$$L = g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + S^2\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + Z^2\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2\right], \tag{4.1}$$

dove λ è un parametro affine. Le geodetiche nulle si possono trovare dall'equazione

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \tag{4.2}$$

Sostituendo, per cui, i simboli di Christoffel trovati nel capitolo precedente (3.6) si ricavano le seguenti equazioni

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = -S\partial_t S\left[\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + Z^2\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2\right] - Z\beta_+\partial_t f_+ S^2\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2, \tag{4.3a}$$

$$\frac{d^2x}{d\lambda^2} = -\frac{2}{S}\frac{dS}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} + 2BZ\beta_+(x+\gamma)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2, \tag{4.3b}$$

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = -\frac{2}{S}\frac{dS}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + 2BZ\beta_+(y+\omega)\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2, \tag{4.3c}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{d\lambda^2} = &-\frac{1}{Z}\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2(\partial_z\beta_+\{f_+ + B[(x+\gamma)^2 + (y+\omega)^2]\} + 2B\beta_+[(x+\gamma)\partial_z\gamma + (y+\omega)\partial_z\omega]) \\ &- 2\frac{dz}{d\lambda}\left\{\frac{1}{S}\frac{dS}{d\lambda} + \frac{\beta_+}{Z}\left[\frac{df_+}{d\lambda} + 2B(x+\gamma)\frac{dx}{d\lambda} + 2B(y+\omega)\frac{dy}{d\lambda}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{4.3d}$$

Si può notare che queste equazioni differenziali dipendono da tre parametri t, λ e z. Dato che le uniche tre funzioni libere sono in funzione di solo z, esse varieranno nei diversi casi, ma si possono considerare conosciute le loro derivate in base ai casi che si vorranno studiare successivamente. A questo punto, dato che si stanno considerando geodetiche nulle si può specificare λ in maniera tale che

$$\frac{d}{d\lambda} = E\frac{d}{dt}, \tag{4.4}$$

dove $E = -u^\mu l_\mu$ è l'energia del fotone con u^μ la quadrivelocità e l^μ definito da (1.12). In questa maniera il sistema di equazioni differenziali precedente si può esprimere in funzione di un solo parametro, t, e ricordando la parametrizzazione fatta nella sezione 3.1.5 ($\tau = 3/2H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}t$) si ottiene

$$\frac{E'}{E} - S^2\left(\frac{9}{4}H_0^2\Omega_\Lambda\right)\left[z'^2 Z\left(Z\frac{S'}{S} + f'_+\beta_+\right) - \frac{S'}{S}(x'^2 + y'^2)\right] = 0, \tag{4.5a}$$

$$x'' + \left(2\frac{S'}{S} + \frac{E'}{E}\right)x' - 2BZ\beta_+(x+\gamma)z'^2 = 0, \tag{4.5b}$$

$$y'' + \left(2\frac{S'}{S} + \frac{E'}{E}\right)y' - 2BZ\beta_+(y+\omega)z'^2 = 0, \tag{4.5c}$$

$$z'' + z'^2\frac{\partial_z Z}{Z} + 2z'\left\{\frac{S'}{S} + \frac{1}{2}\frac{E'}{E} + \frac{\beta_+}{Z}\left[f'_+ + 2B(x+\gamma)x' + 2B(y+\omega)y'\right]\right\} = 0, \tag{4.5d}$$

dove per semplicità di notazione l'apice singolo indica la derivata rispetto a τ. Le condizioni iniziali dovranno essere scelte in base alle differenti situazioni che si vogliono analizzare. In questo caso, l'integrazione viene effettuata a partire dalla posizione dell'osservatore (indicato con $\mathcal{O}$). L'origine del sistema di coordinate è quindi fissato in $x_\mathcal{O} = y_\mathcal{O} = z_\mathcal{O} = 0$, e si assume $E_\mathcal{O} = 1$ come normalizzazione convenzionale.In queste condizioni, il redshift è definito come $z_{IN} = E/E_\mathcal{O} - 1$, dove il pedice IN indica esplicitamente che ci si riferisce all'universo inomogeneo. Dato che $E_\mathcal{O} = 1$, in questo caso il redshift si riduce semplicemente a $z_{IN} = E - 1$. Le condizioni iniziali $x'_\mathcal{O}$, $y'_\mathcal{O}$, $z'_\mathcal{O}$ saranno scelte in base alla direzione in cui si vuole fare il tracciamento dei raggi luminosi.

Dato che la metrica che si sta studiando permette di scegliere la distribuzione della materia liberamente in una sola direzione, imponendo $\gamma = \omega = 0$ tale direzione sarà la z, per cui risulterà maggiormente interessante studiare la propagazione dei raggi luminosi lungo tale direzione. Con queste semplificazioni il sistema (4.5) si semplifica nelle due equazioni

$$-\frac{E'}{E} = \frac{S'}{S} + \frac{F'}{1+F}, \tag{4.6a}$$

$$z' = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}SZ}, \tag{4.6b}$$

in cui nell'ultima si è usato il vincolo nullo dell'elemento di linea per ridurne l'ordine. Grazie a quanto fatto si può ora trovare posizione ed energia di un certo fotone ad un dato tempo t, ma per essere in grado di fare un grafico del diagramma di Hubble è necessario avere informazioni sul comportamento di un fascio di raggi luminosi, per cui risulta necessario considerare le equazioni ottiche di Sachs.

4.2 Equazioni ottiche di Sachs

Riprendendo le equazioni ottiche di Sachs (1.16) sviluppate nell'introduzione e seguendo la stessa procedura illustrata nella sezione 4.1,si può effettuare un cambio della variabile temporale e introdurre la quantità

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{3H_0^2\Omega_\Lambda}}. \tag{4.7}$$

In tal modo, le equazioni di Sachs possono essere riscritte nella forma

$$d''_A + d'_A\frac{E'}{E} = \left(\frac{4}{9}\frac{\phi_{00}}{E^2H_0^2\Omega_\Lambda} - \frac{4}{3}\frac{|\tilde{\sigma}|^2}{E^2}\right)d_A, \tag{4.8a}$$

$$\tilde{\sigma}' + 2\frac{d'_A}{d_A}\tilde{\sigma} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\Psi_0}{H_0^2\Omega_\Lambda}. \tag{4.8b}$$

A questo punto è necessario calcolare i termini di convergenza di Ricci ϕ_{00} e di Weyl Ψ_0. Per farlo, è indispensabile conoscere la forma della tetrade complessa nulla. Nel caso di fotone che si propaga

lungo l'asse z si ottiene

$$l^\mu = E\left(1, 0, 0, \frac{1}{SZ}\right), \tag{4.9a}$$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{S}, -\frac{i}{S}, 0\right). \tag{4.9b}$$

Si noti che questa tetrade è molto simile a quella trovata nella sezione 3.3 a meno dell'energia del fotone E in l^μ. Questo permette, quindi, di calcolare

$$\phi_{00} = -\frac{1}{2}E^2\rho, \tag{4.10a}$$

$$\Psi_0 = 0, \tag{4.10b}$$

che quest'ultimo risultato conferma quanto trovato nella sezione 3.2.2 in cui l'unico scalare di Weyl non nullo è Ψ_2. Con ciò si possono riscrivere le equazioni ottiche di Sachs come

$$d_A'' + d_A'\frac{E'}{E} = \left(-\frac{2}{9}\frac{\rho}{H_0^2\Omega_\Lambda} - \frac{4}{3}\frac{|\tilde{\sigma}|^2}{E^2}\right)d_A, \tag{4.11a}$$

$$\tilde{\sigma}' + 2\frac{d_A'}{d_A}\tilde{\sigma} = 0. \tag{4.11b}$$

Questo sistema di equazioni deve essere integrato da oggi verso il passato, per cui bisogna scegliere le condizioni iniziali odierne. Per cui, dato $\tau_{\mathcal{O}}$, si impone $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}} = 0$, $d_{A\mathcal{O}} = 0$ e $d'_{A\mathcal{O}} = -2/(3E_{\mathcal{O}}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda})$. È chiaro che date queste condizioni l'equazione (4.15b) implica la soluzione triviale $\tilde{\sigma} = 0$, per cui si deve considerare solo l'equazione (4.15a). Ciò significa che per dei fasci luminosi che viaggiano lungo z la convergenza di Weyl è nulla, per cui i fasci luminosi non ricevono alcuna deformazione. Dato che questo è un effetto interessante anche perché potrebbe avere effetti non trascurabili nella distanza di diametro angolare è necessaria una generalizzazione di quanto appena fatto per fasci che non viaggiano lungo z.

Per semplicità ora si possono considerare raggi luminosi che appartengono al piano $y - z$, ciò non fa perdere di generalità in quanto si può sempre fare una rotazione attorno all'asse z senza cambiare la metrica (si ricorda che il caso trattato ha $\gamma = \omega = 0$, che possiede per cui una simmetria assiale intorno all'asse z). Chiamando α l'angolo sotteso dal vettore tangente l^μ rispetto l'asse z, e usando le tilda per indicare le quantità nel sistema ruotato, la tetrade nulla prende la forma

$$\tilde{l}^\mu = E\left(1, 0, \frac{\sin(\alpha)}{S}, \frac{\cos(\alpha)}{SZ}\right), \tag{4.12a}$$

$$\tilde{m}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{S}, -\frac{i\cos(\alpha)}{S}, -\frac{i\sin(\alpha)}{SZ}\right). \tag{4.12b}$$

Dato che nell'universo che si sta trattando c'è solo polvere ed una costante cosmologica (ΛCDM) segue dalle equazioni di campo di Einstein che il termine di convergenza di Ricci non dipende dalle rotazioni dei vettori di base per cui si trova

$$\tilde{\phi}_{00} = \phi_{00} = -\frac{1}{2}E^2\rho. \tag{4.13}$$

Contrariamente, la convergenza di Weyl cambia in quanto la rotazione eseguita ha l'effetto di rendere non nulli tutti e cinque gli scalari di Weyl. In particolare, sapendo dalle proprietà della tetrade nulla che ci possono essere solo tre trasformazioni [11], trovandole e sfruttando una loro combinazione si ottiene che

$$\tilde{\Psi}_0 = -3\sin^2(\alpha)E^2\Psi_2 = -\frac{1}{2}\sin^2(\alpha)E^2\bar{\rho}\delta. \tag{4.14}$$

Si noti che anche i restanti quattro scalari si Weyl risulteranno non nulli dopo tale rotazione. Allora si trova che le equazioni ottiche di Sachs per lo spazio-tempo che si sta considerando risultano

$$d_A'' + d_A'\frac{E'}{E} = \left(-\frac{2}{9}\frac{\rho}{H_0^2\Omega_\Lambda} - \frac{4}{3}\frac{|\tilde{\sigma}|^2}{E^2}\right)d_A, \tag{4.15a}$$

$$\tilde{\sigma}' + 2\frac{d_A'}{d_A}\tilde{\sigma} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{\sin^2(\alpha)E}{H_0^2\Omega_\Lambda}\bar{\rho}\delta. \tag{4.15b}$$

Le condizioni iniziali che si scelgono sono nuovamente $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}} = 0$, $d_{A\mathcal{O}} = 0$ e $d'_{A\mathcal{O}} = -2/(3E_{\mathcal{O}}H_0\sqrt{\Omega_\Lambda})$. A differenza del caso precedente, la scelta $\tilde{\sigma}_{\mathcal{O}} = 0$ non implica più la soluzione nulla, dato che la convergenza di Weyl in generale non è zero.

4.3 Risultati del tracciamento dei fasci luminosi

Per determinare la traiettoria e il redshift di un fascio di raggi luminosi è necessario integrare le quattro equazioni geodetiche (4.5). Qualora invece si voglia calcolare la distanza di diametro angolare e la deformazione del fascio occorre integrare le due equazioni di Sachs (4.15). Poiché le equazioni di Sachs risultano strettamente connesse alle equazioni geodetiche, le sei equazioni complessive devono essere risolte simultaneamente.

Nella seguente sezione vengono presentati alcuni esempi di tracciamento dei fasci luminosi, limitati al caso di simmetria assiale con modalità puramente crescente, ossia per $\omega = \gamma = \beta_- = 0$, e considerando unicamente lungo l'asse z. In tale configurazione, il sistema di equazioni differenziali si riduce a tre sole equazioni: (4.6a), (4.6b) e (4.15a). Al fine di fornire un'interpretazione più intuitiva, i risultati vengono espressi come differenze normalizzate rispetto ai corrispondenti valori calcolati assumendo un universo FLRW, ossia

$$\Delta z = \frac{z_{\text{IN}} - z_{\text{FLRW}}}{z_{\text{FLRW}}}, \tag{4.16a}$$

$$\Delta d_A = \frac{d_A - d_{A,\text{FLRW}}}{d_{A,\text{FLRW}}}, \tag{4.16b}$$

dove $z_{\text{FLRW}}(\tau) = S(\tau) - 1$ e $D_{A,\text{FLRW}}(\tau) = (S(\tau)/H_0)\int_{S(\tau)}^{1} dS/\left(S^2\sqrt{(1-\Omega_\Lambda)\,S^{-3} + \Omega_\Lambda}\right)$. Il teorema di Etherington stabilisce la relazione tra la distanza di diametro angolare d_A e la distanza di luminosità d_L come riportato nell'equazione (1.14). Quest'ultima, a sua volta, è connessa al modulo di distanza[1], un'osservabile più diretta e adatta al confronto tra dati e previsioni teoriche, tramite la relazione $d_M = 5\log_{10}(d_L/10\text{ pc})$, da cui segue l'equazione

$$\Delta d_M = d_M - d_M^{\text{FLRW}} = 5\log_{10}\left(\frac{d_L}{d_L^{\text{FLRW}}}\right). \tag{4.17}$$

4.3.1 Modo singolo

Come prima analisi si considera l'effetto di diverse distribuzioni di materia sul redshift e sulla distanza di diametro angolare. In particolare, sono state adottate tre configurazioni: una di sovra-densità δ_{over}, una di sotto-densità δ_{under} e una compensata δ_{comp}, per la quale la deviazione dalla densità media risulta nulla. Nella figura 4.1 le inomogeneità sono assunte periodiche su una scala caratteristica $T = 8$ Mpc, con condizioni iniziali tali che le distribuzioni di densità nell'universo primordiale fossero[2]: $\delta_{over} \propto 1 - \sin(2\pi z/T)$, $\delta_{under} \propto \sin(2\pi z/T) - 1$ e $\delta_{comp} \propto \sin(2\pi z/T)$, ossia considerando un singolo modo sinusoidale. La figura mostra come il redshift presenti deviazioni significative nei casi di sovra-densità e sotto-densità, mentre per la distribuzione compensata i risultati rimangono molto vicini a quelli previsti dal modello FLRW.

[1] Il modulo di distanza d_M è definito come la differenza tra la magnitudine apparente e la magnitudine assoluta di una sorgente astrofisica.

[2] Dall'equazione (3.15) si ha $\delta = -F/(F + A)$, che nell'universo primordiale e nella configurazione considerata, può essere approssimato come $\delta \approx -F$, per cui a $\tau \ll 1$ fissato si ha $\delta(z) \propto \beta_+(z)$.

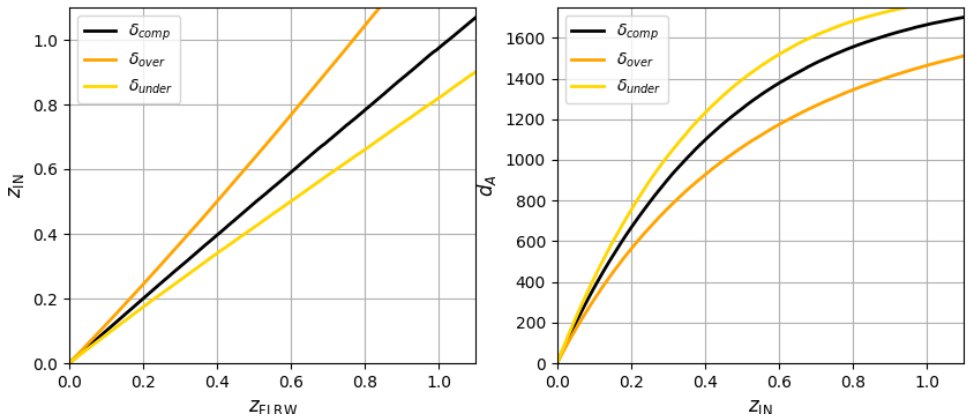

Figura 4.1: A sinistra è riportato il confronto tra il redshift $z_{\rm IN}$ nel modello inomogeneo e il redshift $z_{\rm FLRW}$ che lo stesso oggetto assumerebbe in un universo FLRW. A destra è mostrata la distanza di diametro angolare in funzione del redshift osservato $z_{\rm IN}$. L'analisi considera configurazioni di sole sovra-densità, sotto-densità e densità compensata, assunte periodiche su una scala di 8 Mpc

Limitando l'analisi al caso compensato δ_{comp}, ipotesi coerente con le osservazioni, dove si assume che lungo la linea di vista le fluttuazioni di densità abbiano valore medio nullo, è possibile studiare come differenti periodicità nella distribuzione della materia influenzino le quantità osservabili. In particolare, nella figura 4.2 sono riportati: la distribuzione di materia δ, la deviazione del redshift Δz, la deviazione della distanza di diametro angolare Δd_A e la deviazione del modulo di distanza Δd_M. Sono stati considerati tre diversi periodi, $T = 1, 100, 500$ Mpc. Dai risultati emerge che, al crescere della periodicità della distribuzione della materia, l'impatto delle inomogeneità sulle osservazioni diventa più significativo. Tuttavia, nel caso analizzato con ampiezza $\delta \approx 0.1$ a $z_{\rm IN} = 0$, le deviazioni rimangono comunque inferiori all'1%.

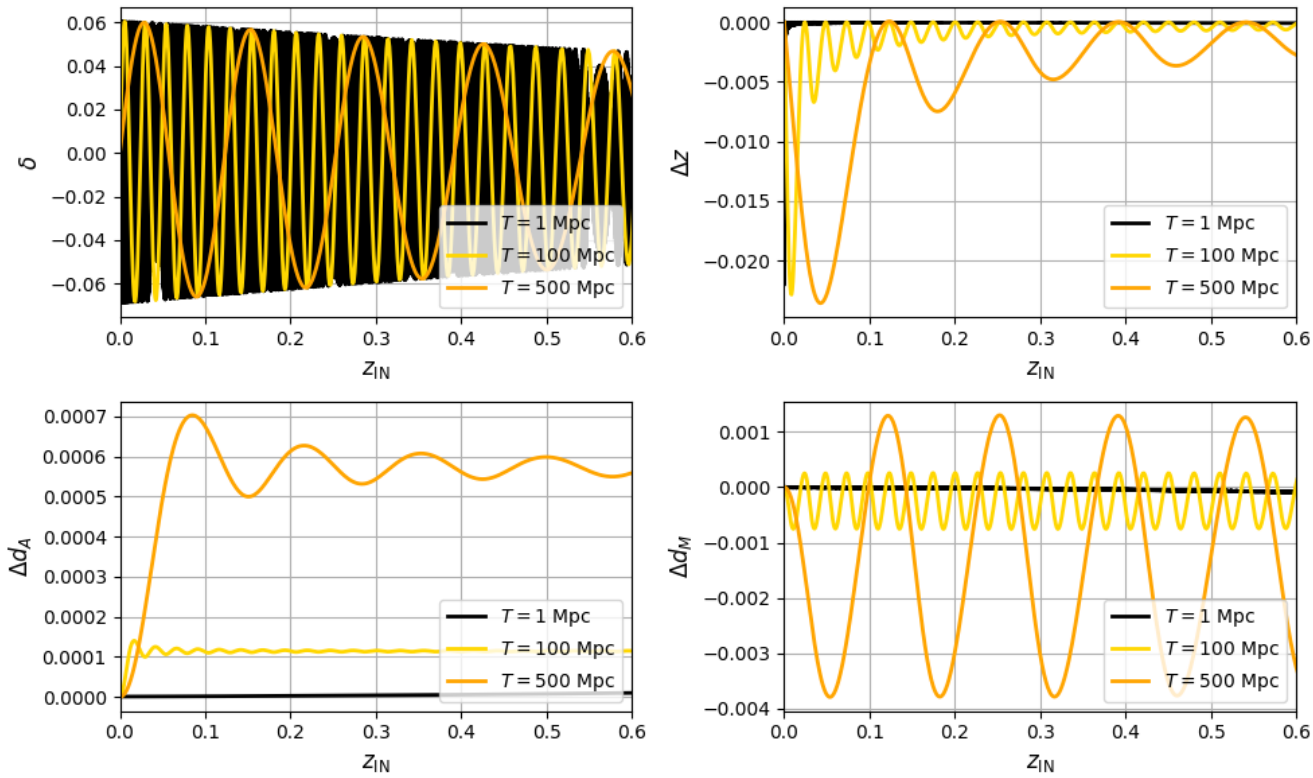

Figura 4.2: Effetto delle inomogeneità sinusoidali della densità di materia sulle osservabili cosmologiche. Si sono considerate diverse scale spaziali e confrontate a un modello FLRW al variare del redshift $z_{\rm IN}$.

4.3.2 Modo doppio

I risultati precedenti indicano che le deviazioni a singolo modo producono effetti relativamente piccoli sulle osservabili, per le distribuzioni di materia considerate. Tuttavia, ciò non implica che la somma di più modi, ossia la presenza simultanea di oscillazioni con periodi differenti, abbia anch'esso un impatto trascurabile, poiché le strutture nel modello in esame evolvono in maniera non lineare. In altre parole, una deviazione iniziale costituita dalla sovrapposizione di due modi in F potrebbe generare durante la crescita non lineare ulteriori modi in δ, i quali possono influenzare in maniera significativa il redshift e le distanze. Inoltre, l'analisi diventa più realistica, poiché la distribuzione di materia nell'universo non è costituita da oscillazioni di una singola lunghezza d'onda.

Nella figura 4.3 sono presentati i risultati ottenuti dalla sovrapposizione delle distribuzioni precedentemente considerate, mantenendo la stessa ampiezza per ciascun modo. Si osserva come le deviazioni del redshift e delle distanze siano prevalentemente determinate dall'onda con il periodo maggiore. Tale predominanza delle inomogeneità su larga scala non è sorprendente, poiché il meccanismo in gioco è analogo a quello alla base degli effetti Rees-Sciama [47] e del Sachs-Wolf integrato [21]. In un universo in espansione, i fotoni attraversano inomogeneità dinamiche. Quando la scala caratteristica di una inomogeneità è trascurabile rispetto al raggio di Hubble ($R_H = c/H_0$), l'espansione del cosmo risulta trascurabile e, pertanto, un fotone uscirà dalla inomogeneità con la stessa energia posseduta all'ingresso. Al contrario, nell'attraversare una inomogeneità su larga scala, il potenziale gravitazionale incontrato all'uscita differisce da quello iniziale, determinando una variazione dell'energia del fotone lungo il percorso.

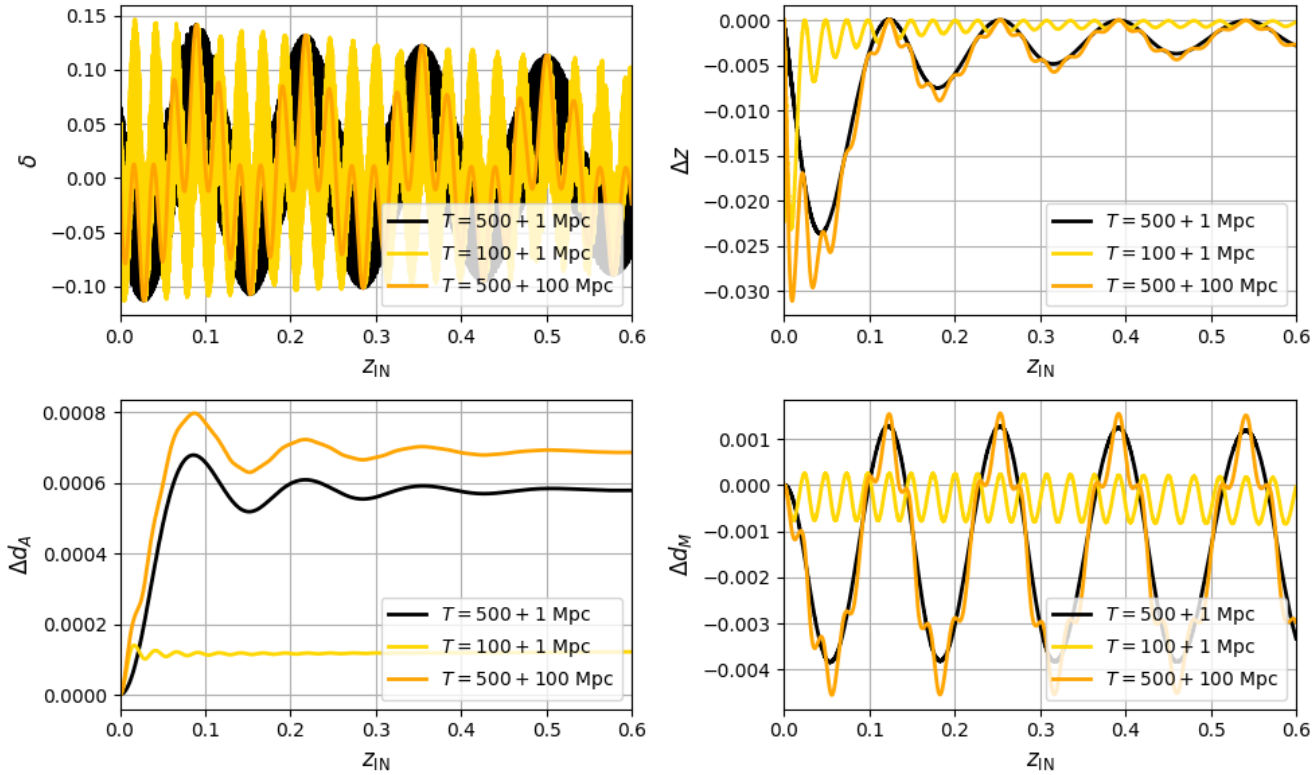

Figura 4.3: Effetto dell'accoppiamento di inomogeneità sinusoidali della densità di materia sulle osservabili cosmologiche. Si sono considerate diverse scale spaziali e confrontate a un modello FLRW al variare del redshift z_{IN}.

Capitolo 5

Conclusioni

Lo studio dei modelli cosmologici, come illustrato nel capitolo 1, mostra che i modelli FLRW, basati sul principio cosmologico, descrivono efficacemente l'universo su larga scala [15]; tuttavia, dati più precisi ne mettono in evidenza le limitazioni, suggerendo che i modelli non omogenei possano offrire spiegazioni coerenti a fenomeni altrimenti non interpretabili [29]. Nel capitolo 2 sono state presentate le soluzioni principali dei modelli cosmologici non omogenei, evidenziandone le proprietà fisiche e geometriche, la classificazione in famiglie e le possibili applicazioni cosmologiche.

Assumendo la validità della Relatività Generale, nel capitolo 3, seguendo il lavoro fatto da Meures e Bruni [38], sono state trovate ed analizzate soluzioni esatte delle equazioni di Einstein che descrivono un universo non omogeneo con polvere priva di pressione e caratterizzato dalla presenza della costante cosmologica Λ. Il modello considerato appartiene alla classe II della famiglia di soluzioni di Szekeres-Szafron ed è stato ottenuto utilizzando la metrica nella forma (3.4), introdotta in precedenza da Goode e Wainwright [23] per il caso $\Lambda = 0$. Il principale vantaggio di questa forma per la metrica risiede nella possibilità di separare la dinamica del modello in due contributi distinti: da un lato l'evoluzione del fondo, descritto dal modello ΛCDM FLRW (assunto piatto), e dall'altro le deviazioni di inomogeneità rispetto tale fondo, rappresentate dalla singola funzione $Z(t, \vec{x})$. Le coordinate della metrica (3.4) sono comoventi e sincrone. Le equazioni di Einstein impongono $Z = A(x, y, z) + F(t, z)$ (3.9), dove la dipendenza dai parametri x, y è fissata mentre la dipendenza da z è arbitraria. Si sono trovate anche le due soluzioni linearmente indipendenti per la parte temporale di F, che sono la modalità crescente (3.30a) e la modalità decrescente (3.30b). La deviazione dalla densità di fondo assume la semplice forma $\delta = -F/Z$ (3.15). Successivamente sono state studiate le formazioni locali di singolarità, si è trovato che nel caso $\delta > 0$ in ogni punto comovente si possono sempre formare singolarità a pancakes e che a differenza del caso $\Lambda = 0$, per ogni punto si possono trovare condizioni iniziali per evitare la formazione di tali singolarità (si veda la tabella 3.1). Il modello studiato fa parte della classe degli "Silent Universes"[36] con Λ (studiato in [9, 10]). In questo caso lo studio della dinamica si è semplificato a solo due variabili (3.52): Ω_Λ che descrive il fondo e δ che descrive le inomogeneità. Dall'equazione (3.44), il modello trattato, secondo la classificazione di Petrov è risultato di tipo D, in particolare si è osservato che tale classificazione non dipende da Λ . Da quest'ultima considerazione si è dedotto che Λ non può contribuire alle lenti gravitazionali direttamente.

Infine nel capitolo 4, seguendo il lavoro fatto da Meures e Bruni [39], sono state ricavate le equazioni geodetiche nulle (4.5), che permettono di individuare la posizione e il redshift dei raggi luminosi, e le equazioni ottiche di Sachs (4.15), che descrivono la propagazione del fascio di raggi luminosi attraverso la deformazione e la distanza di diametro angolare. Successivamente, si è trovata la relazione che collega la distanza di diametro angolare prima con la distanza di luminosità (1.14) e poi con il modulo di distanza (4.17), cioè un'osservabile collegata direttamente con le osservazioni astronomiche. Tali equazioni sono state quindi applicate a diverse configurazioni fisiche: inizialmente si sono considerate tre distribuzioni sinusoidali (fig. 4.1) in cui la deviazione di densità δ era rappresenta da sovra-densità, sotto-densità e densità compensata (cioè mediamente nulla), successivamente nel caso di δ compensata sono studiati modi di periodicità differente (fig. 4.2) ed infine come tali modi interagissero tra loro (fig. 4.3).

I risultati mostrano che, nei casi di sovra-densità e sotto-densità, la deviazione rispetto alle predizioni di un modello FLRW sono significativamente maggiori rispetto al caso di densità compensata. Ne consegue che, nelle osservazioni cosmologiche, è fondamentale stimare correttamente la densità media per evitare interpretazioni fuorvianti dei dati. Inoltre, dagli scenari analizzati emerge che, per una densità compensata δ, le principali influenze sulle misure, di redshift, distanza di diametro angolare e modulo di distanza, derivano dalle distribuzioni di materia con periodicità maggiore. Tuttavia, nel caso considerato con una deviazione dalla densità media di $\delta \approx 0.1$, le differenze osservabili risultano inferiori all'1%. Anche negli scenari che combinano più modi, il contributo dominante continua ad essere quello del modo con periodicità maggiore. Questo risultati evidenziano che una comprensione approfondita degli effetti delle inomogeneità su diverse scale è essenziale per la cosmologia e costituisce un argomento di studio necessario per ricerche future.

Bibliografia

[1] *Relativity: An Introduction to Special and General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge, 3rd edition, 2004.

[2] A. Barnes. On shear free normal flows of a perfect fluid. *General Relativity and Gravitation*, 4(2):105–129, 1973.

[3] A Barnes and R R Rowlingson. Irrotational perfect fluids with a purely electric weyl tensor. *Classical and Quantum Gravity*, 6(7):949, jul 1989.

[4] H. Bondi. Spherically symmetrical models in general relativity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 107(5-6):410–425, 12 1947.

[5] H. Bondi and T. Gold. The steady-state theory of the expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 108(3):252–270, 1948.

[6] W. B. Bonnor. Non-radiative solutions of einstein's equations for dust. *Communications in Mathematical Physics*, 51(3):191–199, October 1976.

[7] W. B. Bonnor, A. H. Sulaiman, and N. Tomimura. Szekeres's space-times have no killing vectors. *General Relativity and Gravitation*, 8(8):549–559, 1977.

[8] W. B. Bonnor and N. Tomimura. Evolution of szekeres's cosmological models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 175(1):85–93, 04 1976.

[9] Marco Bruni, Sabino Matarrese, and Ornella Pantano. Dynamics of Silent Universes. *apj*, 445:958, June 1995.

[10] Marco Bruni, Sabino Matarrese, and Ornella Pantano. A local view of the observable universe. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1916–1919, Mar 1995.

[11] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes / S. Chandrasekhar.* Oxford University press, Oxford, 1998.

[12] Roger G. Clowes, Luis E. Campusano, Matthew J. Graham, and Ilona K. Söchting. Two close large quasar groups of size 350 mpc at z 1.2. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(1):556–565, 12 2011.

[13] Neil J. Cornish and Janna J. Levin. The mixmaster universe is chaotic. *Phys. Rev. Lett.*, 78:998–1001, Feb 1997.

[14] W. de Sitter. On einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper.. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78(1):3–28, 11 1917.

[15] Nathalie Deruelle and Jean-Philippe Uzan. 605the lambda-cdm model of the hot big bang. In *Relativity in Modern Physics.* Oxford University Press, 08 2018.

[16] Eleonora Di Valentino, Olga Mena, Supriya Pan, Luca Visinelli, Weiqiang Yang, Alessandro Melchiorri, David F Mota, Adam G Riess, and Joseph Silk. In the realm of the hubble tension—a review of solutions*. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15):153001, jul 2021.

[17] Herbert Dingle. On isotropic models of the universe, with special reference to the stability of the homogeneous and static states. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 94(2):134–158, 12 1933.

[18] Albert Einstein and Ernst G. Straus. The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars. *Rev. Mod. Phys.*, 17:120–124, Apr 1945.

[19] G. F. R. Ellis. Relativistic cosmology. In R. K. Sachs, editor, *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course 47: General Relativity and Cosmology*, Varenna Lectures in Physics, pages 104–182. Academic Press, New York and London, 1971.

[20] G. F. R. Ellis and John Wainwright. *Dynamical systems in cosmology / edited by J. Wainwright, G.F.R. Ellis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[21] George Francis Rayner Ellis, Roy Maartens, and Malcolm A. H. MacCallum. *Relativistic cosmology / George F. R. Ellis, Roy Maartens, Malcom A. H. MacCallum.* Cambridge University press, Cambridge, 2012.

[22] I.M.H. Etherington. Lx. on the definition of distance in general relativity. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15(100):761–773, 1933.

[23] S. W. Goode and J. Wainwright. Singularities and evolution of the szekeres cosmological models. *Phys. Rev. D*, 26:3315–3326, Dec 1982.

[24] Stefan Hofmann, Florian Niedermann, and Robert Schneider. Interpretation of the weyl tensor. *Phys. Rev. D*, 88:064047, Sep 2013.

[25] David W. Hogg, Daniel J. Eisenstein, Michael R. Blanton, Neta A. Bahcall, Jon Brinkmann, James E. Gunn, and Donald P. Schneider. Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 624(1):54–58, 2005.

[26] Naohisa Inada and et al. A gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds. *Nature*, 426(6968):810–812, December 2003.

[27] Edward Kasner. Geometrical theorems on einstein's cosmological equations. *American Journal of Mathematics*, 43(4):217–221, 1921.

[28] Eiichiro Komatsu and et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192:18, 01 2011.

[29] Andrzej Krasinski. *Inhomogeneous cosmological models / Andrzej Krasinski.* University press, Cambridge, 1997.

[30] J. Kristian and R. K. Sachs. Observations in Cosmology. *apj*, 143:379, February 1966.

[31] Abbé Georges Lemaître. The expanding universe. *General Relativity and Gravitation*, 29(5):641–680, 1997.

[32] Andrew R. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology.* Wiley-Blackwell, Chichester, 3rd edition, 2015.

[33] Malcolm S. Longair. *Galaxy Formation.* Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 2008.

[34] Alexia M Lopez, Roger G Clowes, and Gerard M Williger. A giant arc on the sky. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 516(2):1557–1572, 08 2022.

[35] Thibaut et al. Louis. The atacama cosmology telescope: Dr6 power spectra, likelihoods and λcdm parameters. *arXiv preprint arXiv:2503.14452*, 2025.

[36] Sabino Matarrese, Ornella Pantano, and Diego Saez. General relativistic dynamics of irrotational dust: Cosmological implications. *Phys. Rev. Lett.*, 72:320–323, Jan 1994.

[37] G. C. McVittie. The mass-particle in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 93(5):325–339, 03 1933.

[38] Nikolai Meures and Marco Bruni. Exact nonlinear inhomogeneities in ΛCDM cosmology. *Phys. Rev. D*, 83:123519, Jun 2011.

[39] Nikolai Meures and Marco Bruni. Redshift and distances in a ΛCDM cosmology with non-linear inhomogeneities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419(3):1937–1950, 01 2012.

[40] Viatcheslav F. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology.* Cambridge University Press, 2005.

[41] Andrea Nerozzi, Christopher Beetle, Marco Bruni, Lior M. Burko, and Denis Pollney. Towards a wave-extraction method for numerical relativity. ii. the quasi-kinnersley frame. *Phys. Rev. D*, 72:024014, Jul 2005.

[42] Isaac Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.* England, 1687.

[43] Arnold Perlmutter, editor. *Gauge Theories, Massive Neutrinos and Proton Decay*, volume 18 of *Studies in the Natural Sciences.* Plenum Press, New York, 1 edition, 1981.

[44] A. Z. Petrov. The classification of spaces defining gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 32(8):1665–1685, 2000.

[45] Planck Collaboration, Ade, P. A. R., and et.al. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *AA*, 571:A1, 2014.

[46] Planck Collaboration and Aghanim, N. et al. Planck 2018 results - vi. cosmological parameters. *A&A*, 641:A6, 2020.

[47] M. J. Rees and D. W. Sciama. Large-scale density inhomogeneities in the universe. *Nature*, 217(5128):511–516, 1968.

[48] E. A. S. Relativity, gravitation and world-structure. *Nature*, 135(3417):635–636, 1935.

[49] R. Sachs. Gravitational waves in general relativity. vi. the outgoing radiation condition. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 264(1318):309–338, 1961.

[50] Morag I. Scrimgeour, Tamara M. Davis, Chris Blake, Jeffrey B. James, Gregory B. Poole, Lister Staveley-Smith, Lachlan Campbell, Quentin Parker, Will Sutherland, Matthew Colless, et al. The wigglez dark energy survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1):116–134, 2012.

[51] Hans Stephani. Konform flache gravitationsfelder. *Communications in Mathematical Physics*, 5(5):337–342, 1967.

[52] D. A. Szafron. Inhomogeneous cosmologies: New exact solutions and their evolution. *Journal of Mathematical Physics*, 18(8):1673–1677, 08 1977.

[53] P. Szekeres. The gravitational compass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(9):1387–1391, 09 1965.

[54] P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models. *Communications in Mathematical Physics*, 41(1):55–64, 1975.

[55] R.K. Tavakol and G.F.R. Ellis. On the question of cosmological modelling. *Physics Letters A*, 130(4):217–224, 1988.

[56] Richard C. Tolman. Effect of inhomogeneity on cosmological models. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 20(3):169–176, 1934.

[57] Alexander Vilenkin. Gravitational field of vacuum domain walls. *Physics Letters B*, 133(3):177–179, 1983.

[58] Hermann Weyl. Mathematische analyse des raumproblems. *Mathematische Zeitschrift*, 17(1):30–51, 1923.

[59] Jaswant K. Yadav, J. S. Bagla, and Nishikanta Khandai. Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405(3):2009–2015, 2010.

[60] Ya. B. Zel'dovich. The Equation of State at Ultrahigh Densities and Its Relativistic Limitations. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 41:1609–1615, 1961.