



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

**Trasporto del vettore di polarizzazione
in Relatività Generale**

Relatore:

Professor Roberto Turolla

Correlatore:

Dottor Roberto Taverna

Candidato:

Andrea Gnarini

Matricola 1125958

Sommario

In Relatività Generale la radiazione elettromagnetica si propaga lungo geodetiche nulle che, in presenza di forti campi gravitazionali, deviano sostanzialmente da linee rette. Questo influenza l'evoluzione del vettore di polarizzazione, così che la polarizzazione intrinseca di una sorgente e quella osservata all'infinito non coincidono. Quest'ultima contiene informazioni sulla struttura dello spazio-tempo vicino alla sorgente e, in particolare, sullo spin di un buco nero di Kerr.

Indice

Introduzione	1
1 Buchi neri di Kerr	3
1.1 Metrica di Kerr	3
1.2 Moto di un fotone nella metrica di Kerr	5
2 Polarizzazione	9
2.1 Polarizzazione	9
2.2 Parametri di Stokes	11
3 Trasporto della polarizzazione	13
3.1 Disco di accrescimento	13
3.2 Sorgente lontana e deflessione della luce	19
4 Conclusioni	23

Introduzione

Lo studio del trasporto della polarizzazione in uno spazio-tempo curvato dalla presenza di campi gravitazionali intensi è in grado di fornire indicazioni sulle caratteristiche della struttura dello spazio-tempo e, dunque, informazioni sulla natura delle sorgenti del campo stesso.

Considerando, infatti, lo spazio-tempo di Kerr, che descrive un buco nero dotato di spin, le variazioni del vettore di polarizzazione permettono di ricavare informazioni sullo spin del buco nero.

La radiazione elettromagnetica si propaga in uno spazio curvo lungo linee geodetiche nulle, cioè tali che presi due punti qualunque A e B su di esse la loro separazione è data da:

$$ds_{AB} = 0.$$

Nel primo capitolo saranno illustrate le caratteristiche principali della metrica di Kerr che descrive la struttura dello spazio-tempo in prossimità di un buco nero rotante. Partendo dalla precedente condizione sul ds^2 e utilizzando le leggi di conservazione legate ai vettori di Killing, si potranno ricavare ulteriori caratteristiche sul moto dei fotoni nella metrica di Kerr.

Successivamente, nel secondo capitolo saranno analizzate le principali caratteristiche della radiazione elettromagnetica partendo dall'equazione delle onde. Verranno descritti, inoltre, il vettore e l'ellisse di polarizzazione della radiazione e verranno definiti i quattro parametri di Stokes. Questi parametri saranno ripresi nella trattazione del trasporto della polarizzazione in uno spazio curvo nel capitolo 3.

Effettuando, infatti, il trasporto parallelo del vettore di polarizzazione lungo una geodetica, il grado e l'angolo di polarizzazione subiranno delle variazioni ulteriori rispetto a quelle previste dalla trattazione classica.

L'analisi dell'evoluzione del vettore di polarizzazione verrà effettuata partendo da due situazioni differenti: la prima consiste nell'analisi della radiazione proveniente dal disco di accrescimento attorno a un buco nero rotante mentre nel secondo caso si analizza la polarizzazione della radiazione proveniente da una sorgente lontana i cui raggi luminosi vengono deflessi e passano nelle vicinanze di un buco nero di Kerr.

INTRODUZIONE

Da entrambe le trattazioni si riescono a evincere informazioni riguardanti la struttura dello spazio-tempo e del buco nero, ad esempio il parametro di spin a .

1. Buchi neri di Kerr

Le variazioni del vettore di polarizzazione della radiazione elettromagnetica proveniente da una sorgente lontana dovute a effetti di Relatività Generale sono legate alla curvatura dello spazio-tempo le cui caratteristiche sono descritte dalle equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

dove $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^\rho$ è il tensore di curvatura di Ricci ottenuto dalla contrazione del tensore di Riemann $R_{\mu\rho\nu}{}^\tau$, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ è lo scalare di Ricci (coincidente con la traccia di $R_{\mu\nu}$), $g_{\mu\nu}$ è la metrica dello spazio-tempo, $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso, c la velocità della luce e G la costante di gravitazione universale. È possibile trovare soluzioni analitiche dell'equazione 1.1 assumendo delle condizioni sulla sorgente del campo gravitazionale.

1.1 Metrica di Kerr

La metrica di Kerr¹ è una particolare soluzione delle equazioni di Einstein 1.1 che descrive un buco nero rotante, stazionario, a simmetria assiale e privo di carica nel vuoto ($T_{\mu\nu} = 0$). Espresso nelle coordinate di Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) , l'elemento di linea della metrica assume la forma ($c = G = 1$):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.2)$$

dove M è la massa del buco nero, $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$ ed $a \equiv J/M$ rappresenta il momento angolare specifico per unità di massa. Nel caso di un buco nero non rotante ($a = 0$) la metrica si riduce a quella di Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.3)$$

1. BUCHI NERI DI KERR

A differenza della soluzione di Schwarzschild, la metrica di Kerr contiene un termine non diagonale:

$$g_{03} = g_{30} = -\frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2}$$

Gli elementi del tensore metrico, inoltre, risultano indipendenti dalle coordinate t e ϕ ed esisteranno, dunque, due vettori di Killing:

$$\xi_t = (1, 0, 0, 0) \quad \xi_\phi = (0, 0, 0, 1), \quad (1.4)$$

il primo associato alla stazionarietà della metrica mentre il secondo alla simmetria assiale. La metrica di Kerr è asintoticamente piatta ovvero tende a grandi distanze dalla sorgente allo spazio-tempo di Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.5)$$

Nella metrica di Kerr sono presenti due singolarità associate all'annullarsi di ρ e Δ . La prima ($\rho \rightarrow 0$) rappresenta una singolarità fisica in cui lo scalare (non-lineare) di curvatura diverge per $r \rightarrow 0$ e $\theta = \pi/2$. Il secondo caso è una singolarità apparente dovuta solamente alla scelta di coordinate. Imponendo che $\Delta = 0$ e assumendo che $a^2 < M^2$, si ricava:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.6)$$

La relazione precedente definisce l'*orizzonte degli eventi* ovvero una superficie che separa punti dello spazio-tempo connessi all'infinito da intervalli di tipo tempo ($ds_{AB}^2 < 0$) rispetto a punti collegati da intervalli di tipo spazio ($ds_{AB}^2 > 0$). Di conseguenza l'orizzonte degli eventi sarà una superficie nulla ($ds^2 = 0$) caratterizzata da vettori normali nulli.

Quando $a^2 > M^2$ non esistono soluzioni reali dell'equazione 1.6 e, di conseguenza, la metrica di Kerr non descrive più un buco nero. In questo caso ci sarà una singolarità nuda a $\rho \rightarrow 0$, cioè non ricoperta da un orizzonte. Il caso limite si ha per $a^2 = M^2$ ed è tale che i due orizzonti a r_+ e r_- coincidono a $r = M$.

Per un buco nero di Kerr, oltre ai due orizzonti degli eventi associati a r_{\pm} , è presente un orizzonte di Killing, dove $\xi_t^\mu \xi_{t,\mu} = 0$.

Tale superficie costituisce il limite di staticità e tra essa e l'orizzonte degli eventi a $r = r_+$ si trova l'ergosfera. In questa regione dello spazio-tempo, le particelle e i fotoni verranno trasportati nella direzione del moto di rotazione del buco nero.

Attorno ad un buco nero si può anche formare un disco accrescimento la cui materia tenderà a ruotare spiraleggiando fino ad oltrepassare l'orizzonte degli eventi. La radiazione proveniente dal disco di accrescimento di un buco nero verrà presa in esame successivamente per l'analisi del trasporto della polarizzazione.

1.2 Moto di un fotone nella metrica di Kerr

Per studiare il moto di un fotone nella metrica di Kerr², si può considerare la regione al di fuori dell'orizzonte ($r \geq r_+$), essendo la zona di maggior rilevanza per considerazioni astrofisiche di questo tipo.

Si consideri una geodetica definita a partire da un parametro affine λ e dal vettore tangente nelle coordinate di Boyer-Lindquist:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \equiv \dot{x}^\mu.$$

Nel caso di una traiettoria geodetica, il vettore u^μ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (1.7)$$

associata alla lagrangiana $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. Si definisce poi il momento coniugato alla coordinata x^μ come:

$$p_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu.$$

Per studiare il moto di un fotone o di una particella lungo una geodetica è utile far uso delle costanti del moto. Nel caso in cui la lagrangiana \mathcal{L} non dipenda dalla coordinata x^μ , esiste una costante del moto data dalla componente controvariante associata del quadri-momento p_μ . L'esistenza delle costanti del moto è associata alle simmetrie dello spazio-tempo e quindi all'esistenza di vettori di Killing (1.4).

Le due quantità conservate associate ai due vettori sono date da:

$$\begin{aligned} E &= -\xi_t^\mu \cdot u_\mu = -g_{t\mu} \cdot u^\mu = -p_t \\ L &= \xi_\phi^\mu \cdot u_\mu = g_{\phi\mu} \cdot u^\mu = p_\phi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nel caso di una particella priva di massa come un fotone, E rappresenta l'energia all'infinito mentre L il momento angolare (per una particella massiva è analogo ma E e L sono per unità di massa).

Lungo una geodetica è costante la norma della quadri-velocità:

$$\kappa \equiv g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu; \quad (1.9)$$

la quadri-velocità può essere normalizzata in modo tale che $\kappa = -1$ per una particella e $\kappa = 0$ per un fotone. Le quantità conservate E , L e κ non sono sufficienti a determinare univocamente u^μ . Tuttavia, nel caso di geodetiche equatoriali, ovvero con $\theta = \pi/2$., è possibile risolvere il moto di un fotone.

1. BUCHI NERI DI KERR

Calcolando per $\theta = \pi/2$ le varie componenti della metrica $g_{\mu\nu}$, si ricavano le espressioni per E e L :

$$\begin{aligned} E &= -g_{t\mu} \cdot u^\mu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2Ma}{r}\dot{\phi} \\ L &= g_{\phi\mu} \cdot u^\mu = -\frac{2Ma}{r}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Definendo le seguenti grandezze:

$$A \equiv 1 - \frac{2M}{r}, \quad B \equiv \frac{2Ma}{r}, \quad C \equiv r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}$$

le precedenti equazioni per E e L diventeranno:

$$\begin{aligned} E &= A\dot{t} + B\dot{\phi} \\ L &= -B\dot{t} + C\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Si avrà inoltre:

$$\Delta = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) + \frac{4M^2a^2}{r^2} = AC + B^2.$$

Risolvendo il sistema costituito dalle equazioni 1.10 si arriva a due espressioni per \dot{t} e $\dot{\phi}$ in funzione di E , L e delle quantità A , B e C :

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta}(C \cdot E - B \cdot L) \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\Delta}(A \cdot L + B \cdot E). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Usando l'equazione 1.9 e la metrica in termini delle nuove quantità si ottiene:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -A\dot{t}^2 - 2B\dot{t}\dot{\phi} + C\dot{\phi}^2 + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = -E\dot{t} + L\dot{\phi} + \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2$$

e tramite le equazioni 1.10, si può ottenere una formula esplicita per \dot{r}^2 :

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{\Delta}{r^2}(E\dot{t} - L\dot{\phi} + \kappa) \\ &= \frac{C}{r^2}(E - V_+)(E - V_-) + \frac{\kappa\Delta}{r^2} \end{aligned} \tag{1.12}$$

dove $V_\pm(r)$ sono le soluzioni dell'equazione in E

$$CE^2 - 2BLE - AL^2 = 0$$

che fornisce come risultato:

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \frac{BL \pm \sqrt{B^2L^2 + ACL^2}}{C} = \frac{BL \pm |L|\sqrt{\Delta}}{C} \\ &= \frac{2MLar \pm r^2|L|\sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dalle espressioni di V_{\pm} e \dot{r}^2 , definendo $V \equiv -V_+V_- - \kappa\Delta/r^2$, si arriva alla relazione:

$$\dot{r}^2 = E^2 - V(r). \quad (1.14)$$

Per una geodetica nulla $\kappa = 0$ e di conseguenza si avrà:

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} \quad \text{e} \quad \dot{r}^2 = \frac{C}{r^2}(E - V_+)(E - V_-),$$

caratterizzate dal segno di $a \cdot L$, a seconda che il fotone e il buco nero siano corotanti ($a \cdot L > 0$) oppure controrotanti ($a \cdot L < 0$).

Poiché \dot{r}^2 deve essere positivo e $C > 0$, esisteranno geodetiche nulle per fotoni con energia tale che $E < V_-$ o $E > V_+$. La regione per cui $E \in (V_-, V_+)$ è proibita. Le geodetiche dettate dalla condizione precedente su E diventano coincidenti per $\Delta = 0$ a $r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ mentre per $r > r_+$ si ha $V_+ > V_-$. Se $r \rightarrow \infty$, V_{\pm} tendono a zero e $\dot{r}^2 = E^2$.

Differenziando l'equazione 1.12 e ricavando l'accelerazione \ddot{r} è possibile mostrare che l'accelerazione radiale si annulla per $E = V_+(r_{max})$, dove r_{max} è un punto stazionario di V_+ dove si annulla la derivata:

$$\ddot{r} \propto \frac{dV_+}{dr}.$$

Quando si annulla anche la velocità radiale, il fotone con energia $E = V_+(r_{max})$ sarà catturato in un'orbita circolare instabile attorno al buco nero.

Il valore di r_{max} si può trovare dall'equazione:

$$r(r - 3M)^2 - 4Ma^2 = 0$$

e dunque non dipende dal valore della costante del moto L corrispondente al momento angolare ma sarà una funzione decrescente con a . Mentre per un buco nero di Schwarzschild l'orbita stabile si trova a $r = 3M$, per un buco nero di Kerr può essere localizzata anche più vicino all'orizzonte, ad esempio per $a = M$ si avrà $r_{max} = M$.

Un fotone che proviene dall'infinito con energia $E > V_+(r_{max})$ cadrà dentro l'orizzonte mentre se $0 < E < V_+(r_{max})$ il fotone si avvicinerà al buco nero fino a raggiungere un valore di r per cui si avrà $E = V_+(r)$ e di conseguenza per l'equazione 1.12 $\dot{r} = 0$. In quel punto si verificherà un'inversione del moto e il fotone si allontanerà dal buco nero verso l'infinito.

2. Polarizzazione della radiazione elettromagnetica

La radiazione elettromagnetica è descritta come un fenomeno dovuto alle variazioni periodiche nel tempo del campo elettrico e del campo magnetico. Queste oscillazioni sono ottenute come soluzioni dell'equazione delle onde per il campo elettrico E (oppure per il campo magnetico B) nel vuoto:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{oppure} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

dove $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ rappresenta l'operatore laplaciano.

L'equazione delle onde elettromagnetiche (2.1) può essere ricavata partendo dalle equazioni di Maxwell che possono essere espresse in notazione vettoriale nel vuoto ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$) come:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.2)$$

In notazione tensoriale, invece, l'equazione delle onde nella gauge di Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) assume la forma:

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.3)$$

dove $\square = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \nabla^2 - \partial_t^2/c^2$ è l'operatore di d'Alembert e $A^\mu = (\phi/c, A^i)$ è il quadri-potenziale in cui ϕ è il potenziale scalare e A^i il potenziale vettore legati ai campi E e B da:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

2.1 Polarizzazione

Una soluzione particolare dell'equazione 2.1 è un'onda monocromatica (di frequenza ν e lunghezza d'onda λ) che si propaga lungo l'asse z mentre le

2. POLARIZZAZIONE

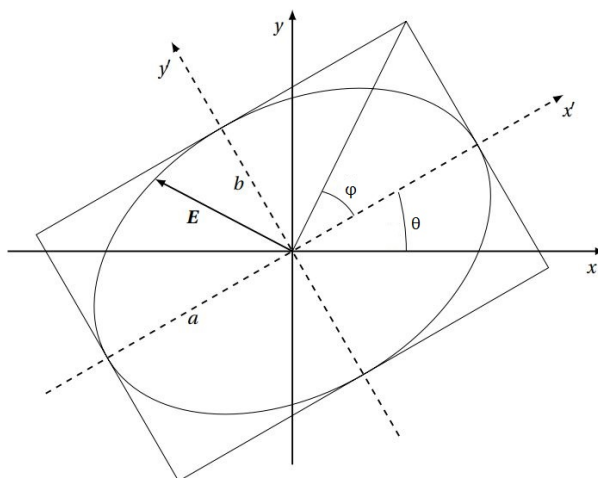


Figura 2.1: Rappresentazione schematica dell'ellisse di polarizzazione.

componenti del campo oscillano nel piano Oxy , ovvero:

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_x + \hat{y}E_y.$$

Le due componenti del campo sono descritte dalle seguenti relazioni ottenute dalla soluzione dell'equazione delle onde:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0,x} \sin(\omega t - kz) = E_{0,x} \sin(\omega t - \delta_x) \\ E_y &= E_{0,y} \sin(\omega t - kz + \delta) = E_{0,y} \sin(\omega t - \delta_y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove $\omega = 2\pi\nu$ è la pulsazione, $k = 2\pi/\lambda$ è il vettore d'onda e $\delta = \delta_x - \delta_y$ la differenza di fase tra le due componenti.

È possibile trovare una relazione che lega le due componenti lungo gli assi x e y in funzione delle ampiezze $E_{0,x}$ ed $E_{0,y}$ e della differenza di fase δ ottenendo:

$$\frac{E_y^2}{E_{0,y} \sin^2 \delta} - \frac{2E_x E_y \cos \delta}{E_{0,x} E_{0,y} \sin^2 \delta} + \frac{E_x^2}{E_{0,x} \sin^2 \delta} = 1. \quad (2.5)$$

Raggruppando infatti le costanti si ottiene:

$$\alpha E_y^2 - \beta E_x E_y + \gamma E_x^2 = 1$$

che rappresenta un'ellisse nel piano E_x, E_y ruotata rispetto agli assi principali x e y (*ellisse di polarizzazione*). Nel caso generale, le oscillazioni periodiche delle due componenti del campo elettrico combinate con lo sfasamento δ , portano a una rotazione del vettore \mathbf{E} lungo l'ellisse nel piano xy (Figura 2.1). Per descrivere la polarizzazione di un'onda elettromagnetica si fa riferimento alla direzione lungo la quale oscilla il campo elettrico \mathbf{E} . La radiazione sarà polarizzata quando queste oscillazioni di \mathbf{E} presentano caratteristiche ben definite.

2.2 Parametri di Stokes

La descrizione della luce polarizzata attraverso l'ellisse di polarizzazione è molto utile in quanto riesce ad esprimere analiticamente lo stato della luce tramite poche equazioni, ma risulta inadeguata in termini di osservazione e misurazione. Questo è dovuto al fatto che il vettore traccia l'ellisse in tempi molto brevi, dell'ordine di 10^{-15} s non rilevabili direttamente³.

Queste caratteristiche sulla natura della luce impongono di impiegare quantità che possono essere realmente osservabili e misurabili. Utilizzando i parametri di Stokes che sono legati direttamente alla polarizzazione e che sono additivi tra loro, si possono ricostruire le proprietà di polarizzazione dell'intera radiazione osservata sommandoli insieme.

Quando viene misurata la radiazione proveniente da una sorgente lontana, il segnale ricevuto si estende in una certa banda di frequenze ed è costituito dall'integrazione di numerose polarizzazioni differenti e può essere costituito sia da una parte non polarizzata ed una completamente polarizzata (*polarizzazione parziale*). I parametri di Stokes forniscono una descrizione completa della polarizzazione della luce in quanto sono utilizzabili sia nel caso di polarizzazione completa che parziale.

Considerando un'onda monocromatica che si propaga lungo l'asse z , le componenti del campo \mathbf{E} lungo gli assi (x, y) sono date dalla formula 2.4. Queste relazioni, come illustrato in precedenza, rappresentano un'ellisse ruotata rispetto al sistema di riferimento (x, y) originale. Si considerino ora gli assi dell'ellisse come assi di un nuovo sistema di riferimento (x', y') , il quale risulterà ruotato rispetto al precedente di un angolo ϑ , cosicché da relazioni trigonometriche, si ricavano le espressioni per E'_x e E'_y in funzione delle ampiezze iniziali e dei semiassi dell'ellisse:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_0 \cos \varphi \cos \omega t \\ E'_y &= -E_0 \sin \varphi \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.6)$$

dove $E_0 = \sqrt{E_{0,x}^2 + E_{0,y}^2}$ e $\varphi = \arctan(b/a)$ con a, b semiassi dell'ellisse.

Si definiscono a questo punto i parametri di Stokes:

$$\begin{cases} I \equiv E_{0,x}^2 + E_{0,y}^2 = E_0^2 \\ Q \equiv E_{0,x}^2 - E_{0,y}^2 = E_0^2 \cos 2\varphi \cos 2\vartheta \\ U \equiv 2E_{0,x}E_{0,y} \cos(\delta_x - \delta_y) = E_0^2 \cos 2\varphi \sin 2\vartheta \\ V \equiv 2E_{0,x}E_{0,y} \sin(\delta_x - \delta_y) = E_0^2 \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (2.7)$$

Dalle precedenti relazioni si può osservare che il parametro I rappresenta l'intensità totale dell'onda elettromagnetica, U e Q dipendono dalla polarizzazione lineare e misurano l'orientazione dell'ellisse rispetto agli assi (x, y) e,

2. POLARIZZAZIONE

di conseguenza, se la polarizzazione è puramente circolare i due parametri si annullano. Infine V è legato alla polarizzazione circolare della radiazione e si annulla nel caso di polarizzazione lineare.

I quattro parametri di Stokes non possono, tuttavia, essere indipendenti tra di loro poiché la polarizzazione è descritta dai tre parametri E_0 , ϑ e φ .

Si può provare, infatti, che nel caso di polarizzazione completa:

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

e si possono dunque definire i parametri di Stokes ridotti come:

$$\tilde{Q} \equiv \frac{Q}{I}, \quad \tilde{U} \equiv \frac{U}{I}, \quad \tilde{V} \equiv \frac{V}{I}.$$

Nel caso di radiazione parzialmente polarizzata, invece, si avrà:

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2.$$

I quattro parametri di Stokes possono essere anche riscritti come vettore (*vettore di Stokes*):

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0,x}^2 + E_{0,y}^2 \\ E_{0,x}^2 - E_{0,y}^2 \\ 2E_{0,x}E_{0,y} \cos(\delta_x - \delta_y) \\ 2E_{0,x}E_{0,y} \sin(\delta_x - \delta_y) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Grazie alla scrittura vettoriale è facile calcolare come varia il vettore di Stokes \mathbf{S} a seguito di una rotazione degli assi (x, y) di un angolo α . Il nuovo vettore \mathbf{S}' sarà dato dalla regola di trasformazione associata alla matrice di rotazione $R^{3,4}$:

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = R \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Si nota come l'intensità totale e il parametro di polarizzazione circolare non cambino con la rotazione ($I' = I$ e $V' = V$) mentre variano i due parametri associati alla polarizzazione lineare.

3. Trasporto della polarizzazione

Lo studio del trasporto della polarizzazione della radiazione elettromagnetica permette in linea di principio di ricavare informazioni riguardo la struttura dello spazio-tempo. Effettuando il trasporto parallelo del vettore di polarizzazione lungo una geodetica nulla è possibile osservare una rotazione del piano di polarizzazione della radiazione^{5,6,7}. La presenza di un buco nero rotante induce un'ulteriore rotazione del piano di polarizzazione, oltre a quella dovuta al trasporto parallelo del vettore di polarizzazione.

Nelle sezioni seguenti verrà trattata la rotazione del piano di polarizzazione dovuta agli effetti general relativistici in due applicazioni: il caso di radiazione X proveniente da un disco di accrescimento attorno ad un buco nero (assumendo un disco di accrescimento standard con una corona di puro scattering^{8,9}) e il caso della luce proveniente da una sorgente lontana e deflessa da un buco nero che si trova tra la sorgente e l'osservatore.

3.1 Disco di accrescimento

La polarizzazione di un fascio di radiazione elettromagnetica proveniente dal disco di accrescimento attorno ad un buco nero di Kerr è descritta dai due parametri di Stokes ridotti alla sorgente:

$$X_S = \frac{Q}{I}, \quad Y_S = \frac{U}{I} \quad (3.1)$$

dove I è l'intensità e Q e U sono definiti da 2.7. La polarizzazione sarà indotta dall'effetto di scattering Compton e non si avrà, inizialmente, polarizzazione circolare ($V = 0$), ossia la radiazione risulterà essere polarizzata solo linearmente¹⁰.

I valori di X_S e Y_S saranno compresi per definizione tra ± 1 e saranno riferiti a un sistema di due assi \bar{e}_1, \bar{e}_2 ortogonali al vettore d'onda k^μ .

Si possono definire, in funzione di questi parametri, il grado di polarizzazione

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

δ e l'angolo del piano di polarizzazione ψ come:

$$\begin{aligned}\delta &= \sqrt{X_S^2 + Y_S^2} \\ \psi &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{Y_S}{X_S}\right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

La direzione della polarizzazione della radiazione sarà descritta, dunque, da un 4-vettore $f^\mu = (f^0, f^1, f^2, f^3)$ ortogonale al vettore d'onda k^μ . Il trasporto parallelo del vettore di polarizzazione f^μ lungo una geodetica nulla è descritto dalle equazioni:

$$\nabla_k f^\mu = 0, \quad k^\mu \cdot f_\mu = 0\tag{3.3}$$

dove ∇_k indica la derivata covariante lungo la geodetica. Il grado di polarizzazione è, invece, uno scalare invariante.

Come dimostrato in precedenza, l'esistenza di due vettori di Killing (1.4) per la metrica di Kerr (1.2) si traduce nell'esistenza di due costanti del moto associate all'energia e al momento angolare (1.8). Esistono, tuttavia, altre due costanti del moto: la costante di Carter q definita come

$$q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]\tag{3.4}$$

e la costante di Penrose-Walker che si conserva lungo una geodetica nulla. La costante di Penrose-Walker è definita come:

$$K_{PW} = k^a f^b (l_{[a} n_{b]} - m_{[a} \bar{m}_{b]}) \psi_2^{-1/3},\tag{3.5}$$

dove $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ è una tetrad di vettori nulli composta da due vettori reali e due complessi coniugati, ψ_2 è una funzione complessa derivata dal tensore di Weyl e la scrittura $l_{[a} n_{b]} = (l_a n_b - l_b n_a)/2$ rappresenta l'antisimmetrizzazione. Nelle coordinate di Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) la costante di Penrose-Walker diventa:

$$K_{PW} = (A - iB)(r - ia \cos \theta) = \kappa_1 - i\kappa_2\tag{3.6}$$

dove

$$\begin{aligned}A &= (k^0 f^1 - k^1 f^0) + a \sin^2 \theta (k^1 f^3 - k^3 f^1) \\ B &= (r^2 + a^2) \sin \theta (k^3 f^2 - k^2 f^3) - a \sin \theta (k^0 f^2 - k^2 f^0).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Una geodetica nulla lungo la quale viene trasportato il vettore di polarizzazione f^μ ortogonale a k^μ è completamente caratterizzata dalle tre costanti del moto

$$\frac{L}{E}, \quad \frac{q}{E}, \quad \frac{K_{PW}}{E}.$$

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

dove E rappresenta l'energia all'infinito (equazione 1.8). Per un osservatore posto all'infinito è possibile esprimere i parametri di Stokes in funzione delle tre costanti del moto precedenti⁷:

$$\begin{aligned} X_\infty &= \delta \frac{Sk_1 - Tk_2}{S^2 + T^2} \\ Y_\infty &= -\delta \frac{Sk_2 + Tk_1}{S^2 + T^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove S e T sono definiti come:

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{L}{\sin \theta_0} - a \sin \theta_0 \right) \\ T &= \text{sgn}(k^\theta)_\infty (q - L^2 \cot \theta_0 + a^2 \cos^2 \theta_0)^{1/2}, \end{aligned}$$

dove k^θ è la componente del vettore d'onda lungo la direzione θ . I parametri di Stokes X_∞ e Y_∞ sono riferiti a un sistema di assi fissi $\bar{e}_\theta, \bar{e}_\psi$ per un osservatore all'infinito con angolo polare θ_0 rispetto alla normale del piano del disco. Per un disco geometricamente sottile con intensità emessa localmente I_e , l'intensità totale del flusso di radiazione all'infinito sarà espressa da:

$$\bar{I}(E_0) = \iint G(g) f I_e(E_0/g) r dr dg \quad (3.9)$$

dove E_0 è l'energia osservata in banda X, G è una funzione di $g = E_0/E_e$ e f è la funzione del trasporto che definisce a sua volta una nuova funzione h del trasporto della polarizzazione in relazione all'angolo osservato del piano di polarizzazione ψ ¹¹:

$$h \equiv f e^{2i\psi}.$$

Analogamente si possono ricavare anche gli altri tre parametri di Stokes integrati sul disco:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(E_0) + i\bar{U}(E_0) &= \iint G(g) h \delta_e(E_0/g) I_e(E_0/g) r dr dg \\ \bar{V}(E_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dalle precedenti relazioni si può esprimere il grado di polarizzazione $\bar{\delta}(E_0)$ e l'angolo di polarizzazione $\bar{\psi}(E_0)$ osservati all'infinito come:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(E_0) &= \sqrt{\bar{Q}^2(E_0) + \bar{U}^2(E_0)} / \bar{I}(E_0) \\ \bar{\psi}(E_0) &= \frac{1}{2} \arctan(\bar{U}(E_0) / \bar{Q}(E_0)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

È possibile generalizzare la trattazione per il caso di disco geometricamente spesso considerando anche gli effetti relativistici nel tragitto della radiazione

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

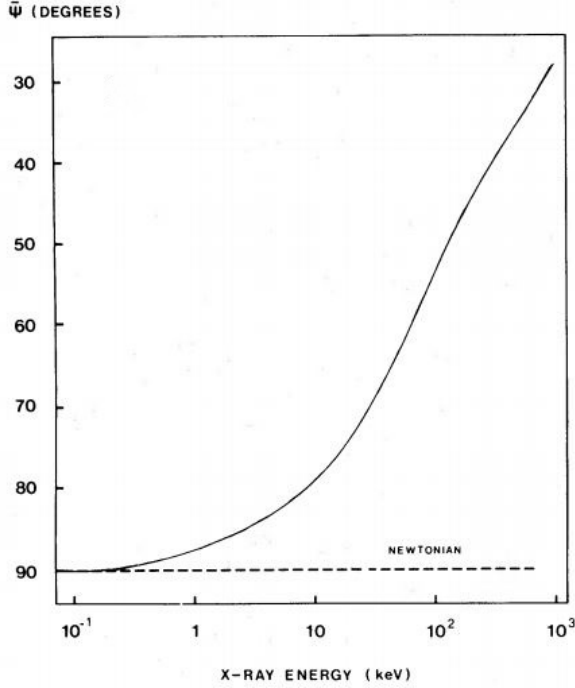


Figura 3.1: Grafico della variazione dell'angolo del piano di polarizzazione in funzione dell'energia osservato a $\theta_0 = 75.5^\circ$ per un buco nero di $M = 9 M_\odot$ e $a/M = 0.9981$. La curva continua include gli effetti relativistici mentre quella tratteggiata è riferita al caso newtoniano⁷.

all'interno del mezzo. Per risolvere problemi di questo tipo è necessario ricorrere a metodi numerici calcolando il trasporto radiativo nella metrica di Kerr una volta noti i profili di densità e temperatura del disco, la distribuzione iniziale dell'energia dei fotoni, il moto medio degli elettroni e la funzione di emissività, tuttavia questo caso esula dagli scopi di questa tesi.

Riguardo al caso di disco geometricamente sottile, si osserva in figura 3.1 una rotazione del piano di polarizzazione in funzione dell'energia per un buco nero rotante ($a/M = 0.9981$) di $M = 9 M_\odot$ osservato a un angolo $\theta_0 = 75.5^\circ$. Per un osservatore al di sopra del disco ($\theta_0 < 90^\circ$), all'aumentare dell'energia, si avrà una rotazione antioraria dell'angolo di polarizzazione, mentre per un osservatore al di sotto del disco la rotazione sarà in senso orario. Come mostra la figura, non ci si aspettano variazioni di $\bar{\psi}$ nel caso newtoniano.

Gli effetti relativistici causano inoltre un picco (a $E \sim 2$ keV) per il grado di polarizzazione lineare osservato all'infinito (Fig. 3.2). Dopo questo massimo che si trova al di sotto del valore predetto dalla trattazione classica, la curva tenderà a decrescere causando un minimo per poi aumentare nuovamente.

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

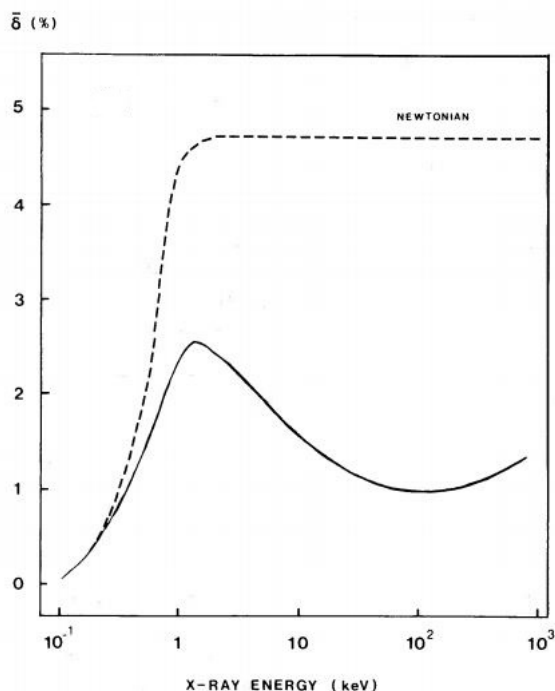


Figura 3.2: Grafico della variazione del grado di polarizzazione lineare in funzione dell'energia per gli stessi parametri assunti per la Fig. 3.1. La curva continua include gli effetti relativistici mentre quella tratteggiata è riferita al caso newtoniano⁷.

È evidente la differenza con il caso newtoniano che prevede un rapido aumento fino a un valore massimo di $\bar{\delta}$ per $E \sim 1 - 2$ keV che poi tende a rimanere all'incirca costante. La differenza tra i due comportamenti è dovuta alla deflessione gravitazionale dei raggi luminosi che provoca delle variazioni dell'angolo al quale i fotoni lasciano la superficie del disco. Grandi rotazioni del piano di polarizzazione dovute a effetti relativistici possono essere trovate anche in altri modelli di disco che includano lo scattering elettronico.

Per il modello di disco esaminato da un osservatore posto a $\theta_0 = 41^\circ$, si possono calcolare i risultati delle variazioni di angolo di polarizzazione in funzione dell'energia e a seconda del valore del parametro di rotazione a/M . La figura 3.3 mostra i risultati ottenuti per un modello di disco per un buco nero con le stesse caratteristiche di quello precedente (Fig. 3.1) ma rispettivamente con tre valori di $a/M = 0.9981, 0.9$ e 0 . Si può notare come sia presente comunque una rotazione anche nel caso di buco nero non rotante ($a/M = 0$): se il buco nero non ruota, le variazioni di $\bar{\psi}$ e $\bar{\delta}$ sono dovute solo all'effetto del trasporto parallelo del vettore lungo la geodetica tra la sorgente e l'osservatore. Se si considera infatti l'equazione 3.7 nel caso in cui

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

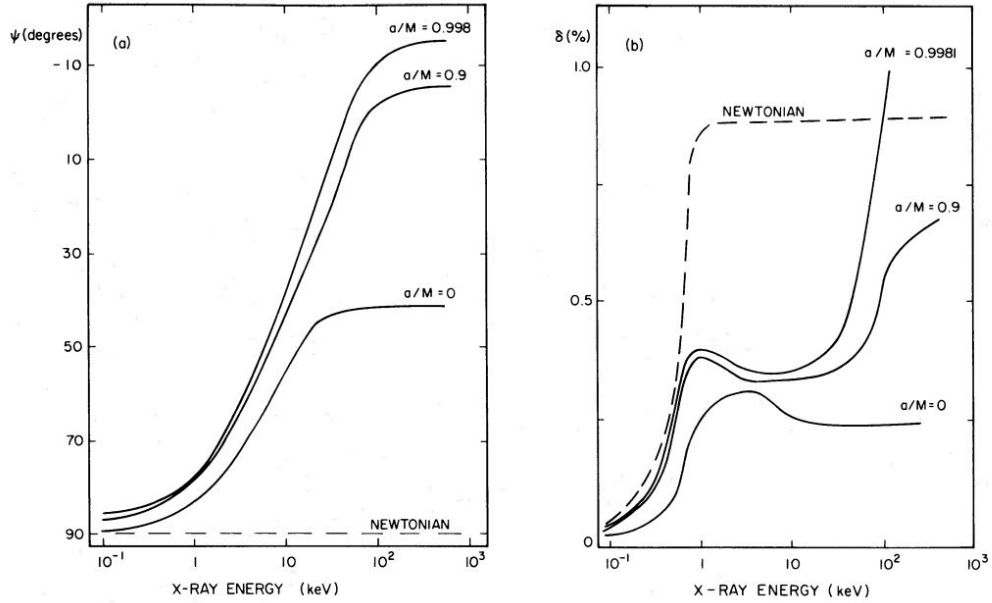


Figura 3.3: Grafico (a) delle variazioni dell'angolo del piano di polarizzazione e (b) del grado di polarizzazione lineare in funzione dell'energia a seconda del valore del parametro a/M del buco nero⁷.

$a/M = 0$, si può notare comunque un contributo diverso da zero dovuto alla costante di Penrose-Walker. Considerando poi a/M non nullo, l'effetto è più pronunciato, come evidente nella figura 3.3.

Le variazioni nel caso di buco nero di Schwarzschild sono sostanzialmente maggiori rispetto al caso newtoniano ma risultano comunque minori (circa del 50%) di quelle per un buco nero di Kerr con parametro di rotazione $a/M = 0.9$. Anche le variazioni del grado di polarizzazione lineare hanno andamenti alquanto differenti (Fig. 3.3). Si nota come nel caso di buco nero non rotante la curva tenderà ad appiattirsi come nel caso newtoniano ma a un grado di polarizzazione molto minore. Per le variazioni dell'angolo di polarizzazione si può osservare come dipendano direttamente dal valore di a/M del buco nero.

Se l'angolo del piano di polarizzazione $\bar{\psi}$ subisce delle variazioni ci si aspetterebbe una diminuzione del grado di polarizzazione $\bar{\delta}$ a grandi energie in quanto vengono sommati contributi del vettore di polarizzazione in direzioni differenti. Per un buco nero estremo (ovvero con un valore elevato di a/M), tuttavia, l'andamento tende a crescere con l'aumentare dell'energia (per $E \gtrsim 25$ keV) fino a superare, in alcuni casi, il valore predetto dalla trattazione classica (pari a $\sim 0.9\%$). Questo è dovuto al fatto che i fotoni più

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

energetici provengono dalle zone del disco più interne, dove la temperatura è maggiore^{8,9}. Poiché la superficie interna è più piccola di quella esterna da cui arrivano i fotoni meno energetici, si integra l'effetto su una regione più piccola del disco che garantisce un minore range di variazione dei parametri di Stokes¹². A basse energie, al di sotto di circa 1 keV, tutti gli andamenti convergono in quanto non c'è polarizzazione delle radiazione a causa dell'opacità dell'assorbimento free-free.

Questi effetti dovuti alla Relatività Generale per la polarizzazione della radiazione elettromagnetica possono essere utilizzati per analizzare l'esistenza di un buco nero di Kerr e di un eventuale disco di accrescimento rotante. Un primo di questi studi è stato effettuato per la radiazione proveniente dalla sorgente di raggi X Cyg X-1 osservabile nella costellazione del Cigno e scoperta nel 1964. L'osservazione della rotazione del piano di polarizzazione per Cyg X-1 potrebbe rappresentare, dunque, un test per l'esistenza di un buco nero. Una misura preliminare con il satellite OSO-8 è stata riportata da Novick *et al.*¹³ per la sorgente Cyg X-1 osservando un grado di polarizzazione lineare del 3% a $E \sim 2.6$ keV, valore che troverebbe accordo con la trattazione che include gli effetti relativistici indotti da un buco nero rotante.

3.2 Sorgente lontana e deflessione della luce

In presenza di campi gravitazionali intensi, come ad esempio quello generato da un buco nero rotante, i raggi luminosi provenienti da una sorgente lontana vengono deflessi. Se lo spazio-tempo è curvo, si può studiare la propagazione del vettore di polarizzazione della radiazione elettromagnetica in presenza di deflessione gravitazionale.

Si consideri una sorgente e un osservatore molto distanti tra loro e anche rispetto a un buco nero vicino al quale transitano i raggi luminosi provenienti dalla sorgente. Il vettore di polarizzazione si propagherà lungo una geodetica nulla seguendo le regole di trasporto parallelo in uno spazio curvo. A causa della deflessione della luce il vettore di polarizzazione subirà delle variazioni e si verificherà una rotazione del piano di polarizzazione.

Si denotino con (r_s, θ_s, ϕ_s) le coordinate della sorgente nello spazio tridimensionale e con (r_o, θ_o, ϕ_o) quelle dell'osservatore come mostrato in figura 3.4. Poiché l'osservatore e la sorgente si trovano molto distanti dal buco nero si avrà

$$\frac{r_{min}}{r_o} \ll 1, \quad \frac{r_{min}}{r_s} \ll 1$$

dove r_{min} è la distanza minima di minimo avvicinamento dal buco nero. Dal comportamento asintotico del vettore d'onda k^μ vicino alla sorgente o

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

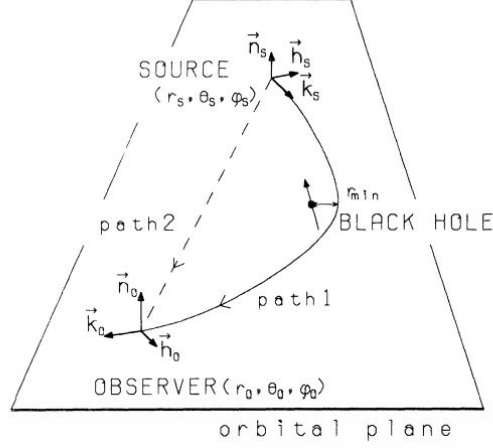


Figura 3.4: Rappresentazione schematica del piano su cui giacciono le geodetiche nulle che uniscono la sorgente e l'osservatore. La curva continua rappresenta il raggio luminoso deflesso gravitazionalmente da parte del buco nero rotante mentre quello tratteggiato è associato alla geodetica lontana e poco deflessa¹⁴.

all'osservatore dove lo spazio-tempo è quasi piatto, si possono stabilire delle condizioni su k^μ per calcolare esplicitamente la parte reale e immaginaria della costante di Penrose-Walker K_{PW} (3.6):

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \gamma \hat{f}^\theta - \beta \hat{f}^\phi \\ \kappa_2 &= -(\beta \hat{f}^\theta + \gamma \hat{f}^\phi) k^r / |k^r|\end{aligned}\quad (3.12)$$

dove si è eliminata la componente radiale f^r del vettore di polarizzazione utilizzando la relazione di ortogonalità tra f^μ e k^μ . Sono state definite poi le seguenti grandezze:

$$\begin{aligned}\gamma &\equiv L \csc \theta - a \sin \theta \\ \beta &\equiv (E - L^2 \cot^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} k^\theta / |k^\theta|\end{aligned}$$

in cui L e E sono le costanti del moto (1.8) e

$$\hat{f}^r \equiv f^r, \quad \hat{f}^\theta \equiv r f^\theta, \quad \hat{f}^\phi \equiv r \sin \theta f^\phi.$$

Notando come la quantità

$$E + (L - a)^2 = \beta_s^2 + \gamma_s^2 = \beta_o^2 + \gamma_o^2$$

sia un'ulteriore costante del moto¹⁴, si può ricavare la matrice di rotazione R per le componenti θ e ϕ :

$$R = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & -1 \end{pmatrix}\quad (3.13)$$

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

dove il parametro x è definito da:

$$x \equiv \frac{\beta_s \gamma_o + \beta_o \gamma_s}{\gamma_s \gamma_o - \beta_o \beta_s}. \quad (3.14)$$

Si introduce poi un sistema tridimensionale costituito dal piano su cui giacciono sorgente, osservatore e il buco nero e da un asse perpendicolare a questo piano. Questo sistema sarà descritto da tre vettori: $\bar{k} = (k^r, rk^\theta, r \sin \theta k^\phi)$ è il vettore di propagazione della radiazione, \bar{n} quello normale al piano orbitale e $\bar{h} = \bar{n} \times \bar{k} / |\bar{k}|$. In questo modo si può decomporre il vettore di polarizzazione \bar{f} come:

$$\bar{f} = f_\perp \bar{n} + f_\parallel \bar{h} \quad (3.15)$$

dove le due componenti parallela e perpendicolare a \bar{n} del vettore di polarizzazione si possono riscrivere partendo da:

$$\begin{pmatrix} f_\parallel \\ f_\perp \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} f^\theta \\ f^\phi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

considerando la matrice N definita come segue:

$$N = \begin{pmatrix} h^\theta & h^\phi \\ n^\theta & n^\phi \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

La deflessione della luce porterà a un cambiamento di \bar{h} nel piano orbitale. Questo effetto provocherà delle variazioni alle componenti f_\perp e f_\parallel che corrispondono a una rotazione del piano di polarizzazione indotta dallo spin del buco nero. Dalla relazione 3.16 si può ricavare che:

$$\begin{pmatrix} f_\parallel \\ f_\perp \end{pmatrix}_o = N_o \begin{pmatrix} f^\theta \\ f^\phi \end{pmatrix}_o = N_o R \begin{pmatrix} f^\theta \\ f^\phi \end{pmatrix}_s = N_o R N_s^{-1} \begin{pmatrix} f_\parallel \\ f_\perp \end{pmatrix}_s. \quad (3.18)$$

Questo significa che la rotazione sarà determinata dalla matrice $N_o R N_s^{-1}$ definita come:

$$\begin{aligned} N_o R N_s^{-1} &= \frac{n_s^\theta n_o^\theta}{\sqrt{1+x^2}} \begin{pmatrix} u_o & -1 \\ 1 & u_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_s & 1 \\ 1 & u_s \end{pmatrix} \\ N_o R N_s^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \chi & -\sin \chi \\ \sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

dove $u_s = n_s^\phi / n_s^\theta$ e $u_o = n_o^\phi / n_o^\theta$ e dove χ rappresenta l'angolo di rotazione tale che

$$\sin \chi = \frac{1}{\sqrt{1+X^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} (X - x)$$

3. TRASPORTO DELLA POLARIZZAZIONE

con

$$X \equiv -\frac{u_s + u_o}{1 - u_s u_o}. \quad (3.20)$$

Se la differenza $\delta x = x - X$ è infinitesima, la rotazione sarà descritta da un angolo:

$$\chi = -\frac{\delta x}{1 + X^2}. \quad (3.21)$$

Gli angoli di deflessione della luce in approssimazione di campo debole ($M/r_{min}, a/r_{min} \ll 1$) saranno:

$$\Delta\theta \equiv \theta_o + \theta_s - \pi, \quad \Delta\phi \equiv \phi_o + \phi_s - \pi \quad (3.22)$$

e risulteranno essere piccoli.

Per la radiazione deflessa dal campo gravitazionale del buco nero si può esprimere la rotazione χ in funzione dei parametri buco nero M e a partendo dalla forma di u_s e u_o :

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{\sin \theta_s}{\sin(\phi_o - \phi_s)} [-\cot \theta_s \cos(\phi_o - \phi_s) + \cot \theta_o] \\ u_o &= \frac{\sin \theta_o}{\sin(\phi_o - \phi_s)} [\cot \theta_o \cos(\phi_o - \phi_s) - \cot \theta_s]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sostituendo queste relazioni nella formula 3.20 si possono ricavare le espansioni per X e x al terzo ordine in $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$:

$$X = \Delta\phi \cos \theta_o + \frac{1}{2} \Delta\theta \Delta\phi \sin \theta_o + \frac{1}{12} (1 + 3 \cos^2 \theta_o) \cos \theta_o \Delta\phi^3 \quad (3.24)$$

$$x = X - \frac{5}{4} \pi M^2 a \frac{\cos \theta_o}{r_{min}^3}. \quad (3.25)$$

Espandendo al terzo ordine in $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ si può calcolare χ partendo dall'espressione esplicita per $\delta x = x - X$ e dall'equazione 3.21 ottenendo:

$$\chi = \pi \frac{5}{4} M^2 a \frac{\cos \theta_o}{r_{min}^3} = \pi \frac{5}{4} M J \frac{\cos \theta_o}{r_{min}^3}. \quad (3.26)$$

L'angolo di rotazione del piano di polarizzazione risulta così proporzionale al momento angolare del buco nero. La rotazione avviene, in generale, quando la luce transita attraverso un campo gravitazionale di un oggetto massiccio rotante e l'ampiezza di questo effetto dipende dal parametro di rotazione a . Nel contesto discusso sopra, un ulteriore effetto dovuto al ritardo temporale con cui la radiazione arriva all'osservatore percorrendo i due tragitti potrebbe causare variazioni aggiuntive al vettore di polarizzazione.

In spazi curvi più generali bisogna risolvere direttamente l'equazione del trasporto parallelo (3.3) per trovare l'esatta geodetica deflessa percorsa dalla radiazione considerando anche zone più vicine al buco nero soggette a campi gravitazionali più intensi.

4. Conclusioni

Partendo dai risultati della Relatività Generale, si è arrivati ad analizzare il trasporto del vettore di polarizzazione della radiazione elettromagnetica lungo geodetiche nulle in spazi curvati dalla presenza di forti campi gravitazionali, come quelli in prossimità di un buco nero. Si è dedotto in questo modo come l'angolo del piano di polarizzazione della radiazione subisca una rotazione trasportando parallelamente il vettore lungo una geodetica tra la sorgente e l'osservatore.

L'utilizzo di costanti del moto, in particolare quella di Penrose-Walker, è stato fondamentale per lo sviluppo della trattazione. Partendo, infatti, da questo invariante è stato possibile ricavare analiticamente le rotazioni subite dal vettore di polarizzazione nei due casi precedentemente analizzati, ovvero quello di radiazione in banda X proveniente dal disco di accrescimento standard di un buco nero rotante o il caso di radiazione proveniente da una sorgente lontana deflessa dalla presenza del campo gravitazione di un buco nero di Kerr. I risultati dell'analisi della radiazione elettromagnetica proveniente dal disco di accrescimento ha portato a trovare rotazioni dell'angolo di polarizzazione e variazioni del grado di polarizzazione lineare sostanzialmente differenti rispetto ai valori e agli andamenti predetti dalla trattazione newtoniana. Studi di questi effetti sono stati effettuati a partire dalla fine degli anni '70 sulla sorgente Cyg X-1 fornendo in linea teorica un test dell'esistenza di un buco nero rotante in questa sorgente di raggi X.

Anche nel caso di radiazione proveniente da una sorgente lontana i cui fotoni sono deflessi dalla presenza di forti campi gravitazionali, i risultati precedentemente ottenuti confermano l'esistenza di una rotazione dell'angolo di polarizzazione. L'ampiezza di questo effetto dipende linearmente dal parametro di spin a del buco nero di Kerr (equazione 3.26). Osservando la rotazione del piano di polarizzazione si può determinare la componente lungo la linea di vista del momento angolare del buco nero. Con l'utilizzo di strumentazioni, come il nuovo polarimetro X IXPE¹⁵ (che dovrebbe essere lanciato nel 2021 dalla NASA), in grado di osservare la polarizzazione in banda X proveniente da varie sorgenti cosmiche, questi effetti potranno essere osservati in maggior

4. CONCLUSIONI

dettaglio partendo non solo da simulazioni numeriche ma anche da risultati effettivi. Sarà possibile, di conseguenza, ottenere numerose informazioni riguardo la struttura dello spazio-tempo vicino alla sorgente o nelle vicinanze di un buco nero rotante, in particolare si può ricavare una delle principali caratteristiche di un buco nero rotante, il parametro di spin a .

Bibliografia

- [1] J. B. Hartle, *Gravity: An introduction to Einstein's General Relativity*, Pearson Ed. (2003)
- [2] V. Ferrari, L. Gualtieri, *Black holes in General Relativity* (2013)
- [3] E. Collett, *Ap.J.* 36, 713 (1968)
- [4] G. B. Rybicki, A. P. Lightman, *Radiative processes in Astrophysics*, Wiley-VCH (1979)
- [5] R. F. Stark, P. A. Connors, *Nature* 266, 429-430 (1977)
- [6] P. A. Connors, R. F. Stark, *Nature* 269, 128-129 (1977)
- [7] P. A. Connors, T. Piran, R. F. Stark, *Ap.J.* 235, 224-244 (1980)
- [8] I. D. Novikov, K. S. Thorne, *Black Holes*, p. 343-450, Edited by C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, N.Y., (1973)
- [9] N. I. Shakura, R. A. Sunyaev, *Astron.& Astrophys.* 24, 337-355 (1973)
- [10] S. Chandrasekar, *Radiative Transfer*, Dover Publications Inc. (1960)
- [11] C. T. Cunningham, *Ap.J.* 202, 788-802 (1975)
- [12] M. Dovčiak, F. Muleri, R. W. Goosmann, V. Karas, G. Matt, *MNRAS* 391, 32 (2008)
- [13] R. Novick, M. C. Weisskopf, E. H. Silver, H. L. Kestenbaum, K. S. Long, R. S. Wolfi, *Ann. NY Acad. Sci.* 302, 213 (1977)
- [14] H. Ishihara, M. Takahashi, A. Tomimatsu, *Phys. Rev. D* 38, 472 (1988)
- [15] IXPE *official website*, ixpe.msfc.nasa.gov

