

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Propagazione di onde gravitazionali in modelli
cosmologici di gravità modificata

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Michele Bosi

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione	1
1 Richiami sulle onde gravitazionali	3
1.1 Linearizzazione delle equazioni di campo	3
1.2 Soluzione delle equazioni di campo linearizzate nel vuoto	5
2 Onde gravitazionali in un <i>background</i> cosmologico	9
2.1 Equazioni di Einstein per le perturbazioni tensoriali	10
3 Energia oscura e modelli di gravità modificata	15
3.1 Energia oscura	15
3.2 Modelli di gravità modificata	20
4 Propagazione modificata di onde gravitazionali	23
4.1 Perturbazioni tensoriali in modelli di gravità modificata	24
4.2 Limiti sulla propagazione imposti da GW170817/GRB 170817A	26
Conclusioni	29

Introduzione

Le equazioni di Einstein sono le equazioni che descrivono il campo gravitazionale e mettono in relazione la curvatura del tessuto spazio-temporale con l'energia della sorgente del campo. Se un osservatore si posiziona in un punto molto distante dalla sorgente, è lecito svolgere l'approssimazione di campo debole, dato che l'influenza del campo in questo punto sarà esigua e, perciò, lo spazio-tempo sarà curvato molto debolmente. A livello della metrica, questa approssimazione si traduce con l'aggiunta al tensore metrico di Minkowski $g_{\mu\nu}$ di un tensore $h_{\mu\nu}$ tale che $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, che funge quindi da termine perturbativo della metrica piatta di Minkowski. La soluzione delle equazioni del campo gravitazionale, di per sè molto complicata dato che si tratta di dieci equazioni non lineari, può essere agevolata sviluppando tali equazioni al prim'ordine di $h_{\mu\nu}$. La risoluzione di tali equazioni linearizzate, che passa attraverso precise scelte di gauge, permette di risalire all'espressione delle onde gravitazionali, che nel vuoto corrisponde a quella di un'onda piana.

Per poter descrivere un universo spazialmente piatto in espansione è necessario passare dallo spazio-tempo di Minkowski alla metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), il cui tensore metrico, simile a quello di Minkowski, tiene però conto del fattore di scala $a(t)$ che descrive l'espansione del cosmo. Analizzando le perturbazioni tensoriali di questa nuova metrica è possibile risalire ad un'equazione che descrive la propagazione delle onde gravitazionali nello spazio-tempo di FRW. Questa equazione di propagazione cambia nel momento in cui si considera la propagazione delle onde gravitazionali non più all'interno della "cornice della Relatività Generale di Einstein", ma in modelli di gravità modificata. Queste teorie molto recenti sono volte a sostituire la teoria della gravità di Einstein ad ampie scale cosmologiche, mentre dovrebbero coincidere con essa a livello locale. Una delle principali ragioni che ha portato all'introduzione di questi modelli è quella di fornire una spiegazione all'espansione accelerata dell'universo all'epoca presente. Infatti in tali teorie l'accelerazione dell'espansione viene spiegata senza dover ricorrere all'energia oscura ed ai suoi molteplici candidati, come per esempio la costante cosmologica Λ , che è alla base del modello cosmologico standard Λ CDM.

Il 17 agosto 2017 è stata rivelata un'onda gravitazionale proveniente da una coppia di stelle di neutroni, che hanno spiraleggiato fino a scontrarsi, da parte dei rivelatori LIGO e Virgo. Questo evento è chiamato GW170817. Circa 1.7 s dopo questa rivelazione, è stato registrato dal telescopio spaziale Fermi un impulso di raggi γ proveniente dalla stessa sorgente, che costituisce la controparte elettromagnetica del segnale gravitazionale ed è denominato GRB170817A. Lo studio di questi due eventi ha avuto diverse, importanti conseguenze, in campo astrofisico, cosmologico e nella fisica fondamentale. In particolare ha posto dei limiti alla propagazione delle onde gravitazionali nei modelli di gravità modificata ponendo degli ulteriori paletti alle teorie modificate della gravità.

Nel primo capitolo di questa tesi si richiamano alcune delle nozioni principali sulle onde gravitazionali, linearizzando le equazioni di Einstein al prim'ordine di $h_{\mu\nu}$ e risolvendole nel caso del vuoto. Nel secondo capitolo si passa alla metrica FRW e se ne introducono le perturbazioni tensoriali. Si ricavano quindi le equazioni di Einstein in funzione di queste perturbazioni e da queste si arriva all'equazione di propagazione delle onde gravitazionali. Nel terzo capitolo viene discussa l'espansione accelerata dell'universo e se ne descrivono alcune delle possibili cause come l'energia oscura e i modelli di gravità modificata. Infine nel quarto capitolo si studia come varia la propagazione delle onde gravitazionali in modelli di gravità modificata e si discutono i vincoli derivanti dalle misure di GW170817/GRB170817A sulla propagazione modificata e sulla velocità delle onde gravitazionali.

Capitolo 1

Richiami sulle onde gravitazionali

1.1 Linearizzazione delle equazioni di campo

Le equazioni di Einstein date dall'espressione

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

dove G è la costante di gravitazione universale e c è la velocità della luce, rappresentano un insieme di equazioni non lineari che mettono in relazione la curvatura dello spazio-tempo con le sorgenti del campo gravitazionale e che sono assai complicate da risolvere analiticamente. La curvatura dello spazio-tempo è indicata dal tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ e dal corrispondente scalare R , mentre le sorgenti del campo sono rappresentate dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Il termine $g_{\mu\nu}$ sta a indicare il tensore metrico, del quale, in questa trattazione, si considererà la seguente scrittura [8], [11]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

in cui $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico di Minkowski ¹ e $h_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico, definito sullo spazio tempo piatto di Minkowski, che funge da termine perturbativo, infatti si assume $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Una ulteriore assunzione che viene svolta in tale trattazione è che la metrica sia statica, cioè che $\partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0 h_{\mu\nu} = 0$, dove ∂_0 indica la derivata rispetto alla coordinata temporale. La prima assunzione equivale all'approssimazione di campo debole, ovvero di uno spazio leggermente curvo, e permette di sviluppare le equazioni di Einstein al primo ordine in $h_{\mu\nu}$, in un qualsiasi sistema di riferimento. Per passare da un sistema di riferimento ad un altro si possono usare delle trasformazioni infinitesime di coordinate, definite in tale modo [11]

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (1.3)$$

dove le $\xi^{\mu}(x)$ sono funzioni arbitrarie della posizione dello stesso ordine di $h_{\mu\nu}$. Tali trasformazioni sono molto importanti per quanto riguarda la metrica, dal momento che nelle piccole deviazioni da $\eta_{\mu\nu}$ sono raccolte molte informazioni sulla gravità [8]. Derivando l'espressione (1.3) si ottiene

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu} \quad (1.4)$$

il cui inverso, siccome sono coinvolti termini di ordine piccolo, è

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu} \quad (1.5)$$

¹In tutto questo elaborato la metrica di Minkowski sarà intesa con la segnatura $(-, +, +, +)$.

Sotto tali trasformazioni infinitesime il tensore metrico $g_{\alpha\beta}$ trasforma nel seguente modo [8], [11]

$$\begin{aligned}
 g'_{\mu\nu} &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \\
 &= g_{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta) \\
 &= (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta) \\
 &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \\
 &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

dove si sono trascurati i termini di ordine superiore al primo e si è posto

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \tag{1.7}$$

Pertanto si può notare come sotto trasformazioni infinitesime il tensore della metrica di *background*, cioè lo spazio-tempo piatto di Minkowski, rimanga invariato e come cambi invece il tensore relativo alla perturbazione. In particolare la precedente relazione può essere interpretata come una trasformazione di gauge; in tale ottica si sta lavorando nelle stesse coordinate di prima x^μ e si è definito un nuovo tensore $h'_{\mu\nu}$ le cui componenti sono fornite dalla relazione (1.7) [8]. Per ottenere le equazioni del campo gravitazionali linearizzate al primo ordine di $h_{\mu\nu}$, bisogna ricavare innanzitutto le espressioni linearizzate del tensore e dello scalare di Ricci, che, a loro volta, si ottengono linearizzando l'espressione del tensore di Riemann $R_{\mu\nu\alpha}^\beta$ e contraendo gli indici [8]. Sostituendo tali espressioni linearizzate nelle equazioni di campo si ottiene [8]

$$\partial_\nu \partial_\mu h + \square^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha h_\mu^\alpha - \partial_\alpha \partial_\mu h_\nu^\alpha - \eta_{\mu\nu} (\square^2 h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\beta\alpha}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

con $\square^2 \equiv \partial_\beta \partial^\beta$ e $h_\nu^\mu = g^{\mu\beta} h_{\beta\nu}$. Per semplificare la precedente equazione si introduce la *traccia inversa*, definita così [11]

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^2 \tag{1.9}$$

con $h = h^\alpha_\alpha$. Siccome $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, se ne deduce che $h_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}$. Pertanto sostituendo quest'ultima relazione nella (1.8) si ha

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\beta\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha \bar{h}_\mu^\alpha - \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}_\nu^\alpha = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{1.10}$$

che corrisponde alle equazioni di Einstein linearizzate, valide nell'approssimazione di campo debole. Tali equazioni possono essere semplificate tramite la trasformazione di gauge (1.7). Applicando quest'ultima alla traccia inversa

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h', \tag{1.11}$$

identificando con $h'_{\mu\nu}$ il nuovo tensore, si ha

$$\begin{aligned}
 \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h - 2\partial_\alpha \xi^\alpha) \\
 &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

²Questa relazione è chiamata *traccia inversa* per il seguente motivo. Si consideri la relazione $\bar{h}_\nu^\rho \equiv h_\nu^\rho - \frac{1}{2} \delta_\nu^\rho h$. Questa è stata ottenuta moltiplicando ciascun membro dell'equazione (1.9) per $\eta^{\rho\mu}$, invece che per $g^{\rho\mu}$, poiché per alzare o abbassare gli indici di quantità piccole si usano $\eta^{\rho\mu}$ e $\eta_{\rho\mu}$ rispettivamente, dato che si trascurano gli ordini superiori al primo [8]. La traccia di quest'ultima espressione è

$$\bar{h} = h - \frac{1}{2} 4h = -h,$$

quindi $\text{Tr}[\bar{h}_\nu^\rho] = -\text{Tr}[h_\nu^\rho]$.

così trasforma la traccia inversa sotto (1.7). Inoltre si osserva che

$$\begin{aligned}\partial_\mu \bar{h}'^{\mu\nu} &= \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\nu \xi^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\alpha \xi^\alpha \\ &= \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\mu \xi^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \partial_\alpha \xi^\alpha \\ &= \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} - \square^2 \xi^\nu,\end{aligned}\tag{1.13}$$

dove prima di derivare si sono alzati gli indici. Se si scelgono le funzioni arbitrarie $\xi^\nu(x)$ in modo tale che

$$\square^2 \xi^\nu = \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu},\tag{1.14}$$

ne risulta che $\partial_\mu \bar{h}'^{\mu\nu} = 0$, che corrisponde quindi alla scelta di una nuova gauge³. In questa gauge gli ultimi tre addendi del membro a sinistra delle equazioni di campo linearizzate risultano nulli, pertanto si ottiene [11]

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}\tag{1.15}$$

che è un'equazione d'onda. Tale relazione e la scelta della gauge $\square^2 \xi^\nu = 0$ suggeriscono quindi l'esistenza delle onde gravitazionali.

1.2 Soluzione delle equazioni di campo linearizzate nel vuoto

Nel vuoto ($T^{\mu\nu} = 0$) le equazioni di Einstein risultano

$$\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0,\tag{1.16}$$

le cui soluzioni sono onde piane di equazione

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha},\tag{1.17}$$

dove $A^{\mu\nu}$ sono le componenti complesse di A , che è una matrice 4×4 simmetrica, e k_α sono le componenti reali del vettore d'onda. Sostituendo (1.17) in (1.16) e sfruttando la relazione $\partial_\alpha \bar{h}^{\mu\nu} = k_\alpha \bar{h}^{\mu\nu}$, si ottiene [8]

$$\begin{aligned}\square^2 \bar{h}^{\mu\nu} &= \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \bar{h}^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \bar{h}^{\mu\nu} \\ &= 0\end{aligned}\tag{1.18}$$

Tale risultato vale se

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = k^\beta k_\beta = 0.\tag{1.19}$$

Sostituendo l'equazione delle onde piane nell'espressione della scelta della gauge, si ha

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0.\tag{1.20}$$

Perciò, ogni onda piana il cui vettore d'onda k^μ soddisfa le (1.19) e (1.20) è una soluzione delle equazioni di Einstein nel vuoto. Siccome queste ultime sono lineari, ogni loro soluzione può essere scritta nella forma

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x) = \int A^{\mu\nu}(\vec{k}) e^{ik_\alpha x^\alpha} d^3 \vec{k}\tag{1.21}$$

con $[k^\mu] = (k^0, \vec{k})$, ovvero può essere espressa come sovrapposizione di onde piane. Le soluzioni fisiche che rappresentano la propagazione di un'onda gravitazionale piana sono date dalla parte reale di (1.17) [2]:

$$\begin{aligned}\bar{h}^{\mu\nu} &= \Re[A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \\ &= \frac{1}{2}[A^{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + (A^{\mu\nu})^* e^{-ik_\alpha x^\alpha}]\end{aligned}\tag{1.22}$$

³Si nota che tale gauge è soddisfatta da ogni trasformazione di gauge della forma (1.7), assumendo che le funzioni ξ^ν soddisfano $\square^2 \xi^\nu = 0$.

che è una sovrapposizione di due onde piane. Il 4-vettore d'onda k^μ ha convenzionalmente le componenti $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, con ω che è la frequenza angolare dell'onda e \vec{k} è il vettore torna in tre dimensioni. La relazione (1.19) implica che il 4-vettore k^μ sia un vettore *di tipo luce*, di conseguenza si ha una relazione di dispersione del tipo

$$\omega^2 = c^2 |\vec{k}|^2, \quad (1.23)$$

quindi sia la velocità di fase che quella di gruppo di un'onda gravitazionale sono pari a c . Come accennato in precedenza, $A_{\mu\nu}$ sono le componenti complesse nel tensore ampiezza $A = [A_{\mu\nu}]$, che è una matrice di 16 componenti. Essendo tale tensore simmetrico, valendo la condizione (1.20) e potendo svolgere un'ulteriore trasformazione di gauge della forma $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$ se $\square^2 \xi^\mu = 0$, si arriva ad avere solamente due componenti indipendenti all'interno del tensore A . Per ricavare tali componenti è conveniente considerare un'unica direzione, l'asse \hat{z} per esempio. In tale condizione e sfruttando il fatto (1.19), si ha che il 4-vettore d'onda può essere scritto

$$[k^\mu] = (k, 0, 0, k) \quad (1.24)$$

con $k = \frac{\omega}{c}$. Ora, usando la (1.20) si ricava che

$$\begin{cases} k_\nu A^{0\nu} = 0 \implies -k_0 A^{00} + k_0 A^{03} = 0 \implies A^{00} = A^{03} \\ k_\nu A^{i\nu} = 0 \implies -k_0 A^{i0} + k A^{i3} = 0 \implies A^{i0} = A^{i3} \end{cases} \quad (1.25)$$

con $i = 1, 2, 3$. Poiché A è simmetrico, a questo punto si hanno 6 componenti indipendenti e si può scrivere:

$$A = \begin{bmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{01} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{02} \\ A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{00} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Per ridurre ulteriormente i gradi di libertà, si utilizza la trasformazione di gauge (1.7), dopo essersi assicurati che $\square^2 \xi^\mu = 0$. La trasformazione infinitesima ξ^μ che soddisfa questa condizione è [8]

$$\xi^\mu = \eta^\mu e^{ik_\beta x^\beta} \quad (1.27)$$

con η^μ costanti. Si può vedere che sotto questa trasformazione infinitesima $\bar{h}^{\mu\nu}$ cambia così

$$\bar{h}'^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu + \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (1.28)$$

Inserendo la (1.17) e la (1.27) si ha

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - ik^\mu \eta^\nu - ik^\nu \eta^\mu + i\eta^{\mu\nu} k_\beta \eta^\beta. \quad (1.29)$$

Per come è definito k^μ in questa situazione

$$\begin{aligned} k_\beta \eta^\beta &= -k\eta^0 + k\eta^3 \\ &= k(-\eta^0 + \eta^3). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Pertanto esplicitando ciascuna componente di $A'^{\mu\nu}$ si trova

$$\begin{aligned} A'^{00} &= A^{00} - ik\eta^0 - ik\eta^0 - ik(\eta^3 - \eta^0) = A^{00} - ik(\eta^0 + \eta^3) \\ A'^{01} &= A^{01} - ik\eta^1 \\ A'^{02} &= A^{02} - ik\eta^2 \\ A'^{11} &= A^{11} + ik(\eta^3 - \eta^0) \\ A'^{12} &= A^{12} \\ A'^{22} &= A^{22} + ik(\eta^3 - \eta^0). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Data l'arbitrarietà con cui si possono scegliere le costanti η^μ , è lecito scrivere

$$\begin{aligned}\eta^0 &= -\frac{i}{4k}(2A^{00} + A^{11} + A^{22}) \\ \eta^1 &= -\frac{i}{k}A^{01} \\ \eta^2 &= -\frac{i}{k}A^{02} \\ \eta^3 &= -\frac{i}{4k}(2A^{00} - A^{11} - A^{22}),\end{aligned}\tag{1.32}$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}A'^{00} &= A'^{01} = A'^{02} = 0 \\ A'^{11} &= -A'^{22}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

La prima condizione delle (1.33) significa che A^{11} , A^{12} e A^{22} non sono nulle, mentre la seconda che soltanto due di queste tre componenti sono indipendenti tra loro. Definendo $a \equiv A^{11}$ e $b \equiv A^{12}$ come i due elementi di matrice indipendenti nella nuova gauge, la nuova matrice di ampiezza A_{TT} è [8]

$$A_{TT} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{1.34}$$

per un'onda che viaggia lungo la direzione \hat{z} . La nuova gauge è chiamata *transverse-traceless gauge* o *TT gauge*, dal momento che è perpendicolare alla direzione di propagazione ed ha traccia nulla. Da notare è che se $\bar{h}_{\mu\nu}$ ha traccia nulla, data la (1.9), anche $h_{\mu\nu}$ ha la traccia nulla in questa gauge, cioè si può omettere la barretta sopra h dato che vale la relazione [4]

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}.$$

Infine A_{TT} può essere scritta usando i due tensori di polarizzazione $\epsilon_1^{\mu\nu}$ e $\epsilon_2^{\mu\nu}$ dati da

$$\epsilon_1^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon_2^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{1.35}$$

Pertanto si può scrivere

$$A_{TT}^{\mu\nu} = a\epsilon_1^{\mu\nu} + b\epsilon_2^{\mu\nu}.\tag{1.36}$$

Ne consegue che è possibile ottenere ogni polarizzazione dalla sovrapposizione di due polarizzazioni con determinate ampiezza e fase.

Capitolo 2

Onde gravitazionali in un *background* cosmologico

Si consideri ora l'universo omogeneo, isotropo¹ e in espansione. La metrica che meglio descrive tale modello è la metrica di *Friedmann-Robertson-Walker*, che ha la seguente espressione

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

dove si sono utilizzate le coordinate sferiche r , θ e ϕ , intese come coordinate comoventi, t è il tempo cosmico, k è il parametro di curvatura che può assumere valori pari a $+1, 0, -1$, avendo opportunamente riscalato la coordinata radiale r e $a(t)$ è il fattore di scala definito da

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0}, \quad (2.2)$$

con $R(t)$ che è il fattore di scala universale, t_0 è il tempo cosmico attuale e $R(t_0) \equiv R_0$. Dunque nel caso di un universo spazialmente piatto ($k = 0$) in espansione si ha

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.3)$$

quindi il tensore metrico è [6]

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Si nota che è uguale al tensore metrico di Minkowski, ad eccezione del fatto che le componenti spazio-spazio sono moltiplicate per $a(t)$, indice dell'espansione dell'universo. Andando a studiare delle particolari perturbazioni agenti sul tensore (2.4), si vedrà che tali perturbazioni, per modi interni all'orizzonte, corrispondono ad onde gravitazionali che si propagano nella metrica FRW con $k = 0$. Si è quindi sostituita alla metrica di Minkowski, utilizzata come metrica imperturbata nel precedente capitolo, quella FRW per un universo piatto. Le perturbazioni tensoriali possono influire sulla metrica di *background* restituendo un tensore metrico con la componente tempo-tempo $g_{00} = -1$, componenti spazio-tempo $g_{0i} = 0$ e quelle spazio-spazio [6]

$$g_{ij} = a^2(t) \begin{bmatrix} 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

¹Se l'Universo è omogeneo ed isotropo, allora vuol dire che rispetta il *Principio Cosmologico*, il quale afferma che l'Universo sembra uguale a tutti gli osservatori fondamentali che lo osservino allo stesso tempo cosmico. Gli osservatori fondamentali sono quelli solidali al substrato cosmico [7].

Pertanto la perturbazione è determinata dalle funzioni h_+ e h_\times , assunte piccole. Si osserva che tali funzioni sono le componenti di un tensore simmetrico, trasversale (cioè con divergenza nulla) e con traccia nulla

$$\mathcal{H}_{ij} = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

il quale è molto simile alla TT gauge definita nel primo capitolo relativamente al tensore ampiezza di un'onda gravitazionale. Infatti analogamente ad A_{TT} , \mathcal{H}^{ij} soddisfa

$$k^i \mathcal{H}_{ij} = k^j \mathcal{H}_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Il fatto che tale tensore abbia diversi da zero solamente gli elementi \mathcal{H}_{11} e \mathcal{H}_{22} , implica una scelta degli assi: siccome le perturbazioni sono nel piano x - y , il vettore d'onda sarà parallelo all'asse \hat{z} [6].

2.1 Equazioni di Einstein per le perturbazioni tensoriali

Per ricavare le equazioni del campo gravitazionale per le perturbazioni tensoriali si determina prima il simbolo di Christoffel, poi il tensore di Ricci e infine lo scalare di Ricci.

Partendo dal simbolo di Christoffel, si ricorda che questo è definito nel seguente modo:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.8)$$

Nello spazio piatto $g^{\mu\nu}$ è identico al suo inverso $g_{\mu\nu}$ ad eccezione del fatto che le componenti spaziali invece di essere $a^2(t)$, sono $1/a^2(t)$. La (2.8) può essere riscritta usando la metrica FRW , non perturbata da (2.6), nel seguente modo [6]:

- $\Gamma_{\alpha\beta}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta 0}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}$, dato che le componenti del tipo spazio-tempo sono nulle e $g_{00} = -1$, quindi $\Gamma_{\alpha\beta}^0 \neq 0$ se α e β sono indici spaziali, pertanto:
 - $\Gamma_{00}^0 = 0$;
 - $\Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0$;
 - $\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij} \dot{a}$, dove \dot{a} indica la derivata del fattore di scala rispetto al tempo cosmico;
- $\Gamma_{0j}^i = \Gamma_{j0}^i = \delta_{ij} \frac{\dot{a}}{a}$, con gli altri $\Gamma_{\alpha\beta}^i = 0$.

Si consideri ora la perturbazione (2.6). In questa situazione continuano a valere $\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{i0}^0 = 0$. Per quanto riguarda le componenti Γ_{ij}^0 , da quanto riportato sopra si può scrivere

$$g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij}) \quad (2.9)$$

che derivato rispetto alla coordinata temporale restituisce [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} &= 2a\dot{a}\delta_{ij} + 2a\dot{a}\mathcal{H}_{ij} + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0} \\ &= 2a^2 H \delta_{ij} + 2a^2 H \mathcal{H}_{ij} + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0} \\ &= 2H a^2 (\delta_{ij} + \mathcal{H}_{ij}) + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0} \\ &= 2H g_{ij} + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

con $H = \frac{\dot{a}}{a}$ che è il parametro di Hubble. Allora per Γ_{ij}^0 vale la seguente equazione

$$\Gamma_{ij}^0 = H g_{ij} + a^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0}. \quad (2.11)$$

Le componenti Γ_{0j}^i diventano:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0j}^i &= \frac{g^{ik}}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^0} \\
 &= \frac{g^{ik}}{2} \left(2a\dot{a}\delta_{jk} + 2a\dot{a}\mathcal{H}_{jk} + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{jk}}{\partial x^0} \right) \\
 &= \frac{g^{ik}}{2} \left(2H g_{jk} + a^2 \frac{\partial \mathcal{H}_{jk}}{\partial x^0} \right) \\
 &= H\delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial x^0},
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

nell'ultimo passaggio si sono sfruttate le relazioni $g^{ik}g_{jk} = \delta_{ij}$, $g^{jk} = \delta_{jk}/a^2$ e il fatto che \mathcal{H}_{ij} è un tensore simmetrico. Infine per le Γ_{jk}^i si ha

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{g^{il}}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \\
 &= \frac{ia^2 g^{il}}{2} \left(k_k \mathcal{H}_{jl} + k_j \mathcal{H}_{kl} - k_i \mathcal{H}_{jk} \right) \\
 &\approx \frac{i\delta_{il}}{2} \left(k_k \mathcal{H}_{jl} + k_j \mathcal{H}_{kl} - k_i \mathcal{H}_{jk} \right) \\
 &= \frac{i}{2} \left(k_k \mathcal{H}_{ij} + k_j \mathcal{H}_{ik} - k_i \mathcal{H}_{jk} \right),
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

con il passaggio dalla prima alla seconda riga che è dovuto al fatto che le derivate sono solamente spaziali e nelle componenti spazio-spazio del tensore $g_{\mu\nu}$ gli unici elementi a variare spazialmente sono i termini perturbativi; inoltre si deve ricordare la definizione (1.17) data nel primo capitolo di $\bar{h}^{\mu\nu}$, che corrisponde alla perturbazione. Poi il secondo passaggio si spiega considerando solamente l'ordine zero del tensore metrico, cioè $g^{il} \approx \delta_{il}/a^2$ e, di seguito, nel terzo passaggio si sono contratti gli indici. Il tensore di Ricci è di solito definito così:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta. \tag{2.14}$$

Utilizzando le componenti del simbolo Christoffel derivate nel caso della perturbazione, si andranno a determinare le componenti del tensore di curvatura. La componente tempo-tempo sarà

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{00}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{0\alpha}^0}{\partial x^0} + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{00}^\beta - \Gamma_{\beta 0}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^\beta \\
 &= -\frac{\partial \Gamma_{0i}^i}{\partial x^0} - \Gamma_{j0}^i \Gamma_{0i}^j \\
 &= -3 \frac{dH}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{ii}}{\partial t^2} - \left(H\delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t} \right) \left(H\delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t} \right) \\
 &= -3 \frac{d^2 a / dt^2}{a}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

dove si è posto $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0}$, con $c = 1$, per alleggerire la notazione. Nel primo passaggio si è tenuto conto che le componenti del simbolo di Christoffel sono nulle se hanno gli indici più bassi tempo-tempo e che il secondo e quarto termine non sono nulli solamente se α e β sono indici spaziali. Nel secondo invece si è utilizzato il risultato (2.12) e nel terzo si è considerato che essendo nulla la somma degli elementi sulla diagonale, il termine $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{ii}}{\partial t^2}$ è pari a 0, inoltre, dato dal terzo termine della terza riga non si ottengono termini del primo ordine, questo può essere trascurato. Si osserva quindi che R_{00} non tiene conto della perturbazione.

Trattando le componenti spaziali, la loro espressione è

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta - \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta \tag{2.16}$$

e analizzandone i primi due addendi, si nota che

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^\alpha}{\partial x^j} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^k}{\partial x^j}, \quad (2.17)$$

dal momento che se α è un indice temporale il termine $\Gamma_{i\alpha}^\alpha$ si annullerebbe. Per procedere si pone $\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$, si sfrutta il risultato ricavato precedentemente $\Gamma_{ik}^k = 0$ e si esplicita Γ_{ij}^k con la (2.13) [6]. Allora è possibile riscrivere la (2.17) così

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^\alpha}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \frac{1}{2} (-k_i k_j \mathcal{H}_{jk} - k_j k_k \mathcal{H}_{ik} + k^2 \mathcal{H}_{ji}), \quad (2.18)$$

in cui il primo e secondo termine nelle parentesi si annullano per la scelta della base: k è diretto lungo l'asse \hat{z} , perciò considerando per esempio $k_i k_j \mathcal{H}_{jk}$, gli indici i e k sono uguali a 3 e, di conseguenza, $\mathcal{H}_{jk} = \mathcal{H}_{j3} = 0$. Dunque alla fine si ha

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^\alpha}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_{ji}. \quad (2.19)$$

Sviluppando ora il terzo addendo della (2.16) e scrivendo α come indice spaziale, altrimenti l'addendo sarebbe nullo, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta &= \Gamma_{k0}^k \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{kl}^k \Gamma_{ij}^l \\ &\approx \frac{3}{2} H \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

dato che il secondo addendo nella prima riga consiste nel prodotto di termini del primo ordine per cui è trascurabile, la somma sull'indice k di Γ_{k0}^k elimina i termini del primo ordine e comporta che $\Gamma_{k0}^k \approx H$, pertanto, ricordando che $\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$, si ricava il risultato di (2.20). Infine, l'ultimo addendo di (2.16) è pari a [6]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta j}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta &= \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k + \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^0 \\ &= \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k + (i \longleftrightarrow j) \\ &= 2H^2 g_{ij} + 2a^2 H \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

La prima riga si spiega ricordando che $\Gamma_{0i}^0 = 0$, per cui se sia α che β sono indici temporali, il prodotto si annulla. Ciò si verifica anche nel caso in cui entrambi gli indici sono di tipo spazio, difatti il prodotto sarebbe tra simboli di Christoffel che contengono termini del prim'ordine, di conseguenza si può approssimare il risultato a zero. Il passaggio dalla seconda alla terza riga diventa chiaro usando le relazioni (2.11) e (2.12):

$$\begin{aligned} \Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k &= \left(H g_{jk} + a^2 \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{jk}}{\partial t} \right) \left(H \delta_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}_{ik}}{\partial t} \right) \\ &\approx H^2 g_{ij} + a \frac{da}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Il fattore 2 davanti ai due termini della terza riga è dovuto al fatto che si è sommato al prodotto $\Gamma_{kj}^0 \Gamma_{i0}^k$ un prodotto uguale ma con gli indici i e j scambiati.

Finalmente è possibile combinare i vari addendi, riscrivendo la (2.16):

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} + \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_{ij} + \frac{3}{2} H \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - 2H^2 g_{ij} - 2a^2 H \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t} \\ &= g_{ij} \left(\frac{d^2 a / dt^2}{a} + 2H^2 \right) + \frac{3}{2} a^2 H \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{ij}}{\partial t^2} + \frac{k^2}{2} \mathcal{H}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove si è sviluppata la derivata seconda del tensore metrico rispetto alla coordinata temporale:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = 2g_{ij} \left(\frac{d^2 a / dt^2}{a} + H^2 \right) + 4a^2 H \frac{\partial \mathcal{H}_{ij}}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{ij}}{\partial t^2}. \quad (2.24)$$

Grazie a R_{00} e R_{ij} si determina lo scalare di Ricci

$$\mathcal{R} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij}. \quad (2.25)$$

\mathcal{R} non è influenzato dalle perturbazioni tensoriali infatti

- $g^{00}R_{00}$ è di ordine zero;
- $g^{ij}R_{ij}$ può essere spezzato in due contributi:
 - i termini che nella seconda riga di (2.22) sono proporzionali a g_{ij} non contribuiscono con termini del prim'ordine siccome $g^{ij}g_{ij} = 3$;
 - i rimanenti addendi sono moltiplicati per \mathcal{H}_{ij} , perciò quando li si contrae è lecito porre $g^{ij} = \delta_{ij}/a^2$. Ciò fa sì che se si calcoli la traccia dei termini al prim'ordine di (2.22), la cui traccia, dato che questi sono proporzionali a \mathcal{H}_{ij} , è nulla.

Dal momento che R_{ij} contiene termini del prim'ordine, contrariamente a R_{00} , allora il tensore di Einstein G_j^{i2} al prim'ordine risulta [6]

$$\delta G_j^i = \delta R_j^i, \quad (2.27)$$

con $R_j^i = g^{ik}R_{kj}$. I termini della seconda riga della (2.23) sono proporzionali a g_{ij} , per questo motivo non contribuiscono con elementi del prim'ordine, mentre per gli altri addendi moltiplicati per \mathcal{H}_{ij} , si può considerare solo l'ordine zero di g^{ik} che è δ^{ik}/a^2 . Pertanto il tensore di Einstein al prim'ordine risulta:

$$\delta G_j^i = \delta^{ik} \left(\frac{3}{2}H \frac{\partial \mathcal{H}_{kj}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_{kj}}{\partial t^2} + \frac{k^2}{2a^2} \mathcal{H}_{kj} \right). \quad (2.28)$$

A questo punto è possibile derivare delle equazioni che descrivono l'evoluzione temporale di h_+ e h_\times . Iniziando con quella relativa ad h_+ , si consideri la differenza tra le due componenti $\frac{1}{1}$ e $\frac{2}{2}$ di δG_j^i [6]:

$$\delta G_1^1 - \delta G_2^2 = 3H \frac{\partial h_+}{\partial t} + \frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} + \frac{k^2 h_+}{a^2}, \quad (2.29)$$

passando al tempo conforme, in modo tale che $\frac{\partial h_+}{\partial t} = \dot{h}_+/a$ e $\frac{\partial^2 h_+}{\partial t^2} = \ddot{h}_+/a^2 - (\dot{a}/a^3)\dot{h}_+$:

$$a^2(\delta G_1^1 - \delta G_2^2) = \ddot{h}_+ + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_+ + k^2 h_+. \quad (2.30)$$

Considerando il caso in cui il secondo membro della (2.29) si annulla, ovvero trascurando la sorgente della perturbazione dato dal tensore di stress anisotropo [3], si ottiene un'equazione d'onda che descrive l'evoluzione temporale di h_+ , ovvero spiega come evolve nel tempo un'onda gravitazionale [12]. Per h_\times si ha la medesima equazione, che in forma generale si può scrivere

$$\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0, \quad (2.31)$$

con $\alpha = +, \times$, che quindi indica le due possibili polarizzazioni dell'onda, vista alla fine del primo capitolo. Come scritto all'inizio di questo capitolo invece, si sta ora considerando un universo in espansione, dunque, la (2.30) riguarda la propagazione delle onde in tale modello. Se si trascurasse il fattore $\frac{\dot{a}}{a}$, allora si otterrebbe l'equazione

$$\ddot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0, \quad (2.32)$$

la cui soluzione è $h_\alpha \propto e^{\pm ikt}$, con t tempo cosmologico, valida del caso in cui l'universo non sia in espansione [6].

²Il tensore di Einstein è definito nel modo seguente:

$$G_\nu^\mu \equiv R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R. \quad (2.26)$$

Capitolo 3

Energia oscura e modelli di gravità modificata

Se nel primo capitolo si è utilizzata come metrica di *background* quella di Minkowski, che descrive uno spazio-tempo piatto, come approssimazione a livello locale di uno spazio-tempo curvo, nel secondo si è considerato invece un universo che sottostasse al Principio Cosmologico e che fosse descritto dalla metrica di *Friedmann-Robertson-Walker* relativa ad uno spazio-tempo con $k = 0$ e in espansione. In entrambi questi modelli si sono ricavate le leggi che regolano la propagazione delle onde gravitazionali rispettivamente nell'una e nell'altra metrica. A questo punto della trattazione si andrà ad introdurre un'altra caratteristica dell'universo e, nello specifico, della sua espansione.

Il modello standard della cosmologia assume che la Relatività Generale sia una teoria della gravità valida su tutte le scale cosmologiche [9]. Nel 1998 avvenne però una scoperta che fece vacillare tale modello: Adam Riess, Saul Perlmutter e Brian Schmidt scoprirono che l'universo si trova in uno stato di espansione accelerata, grazie all'osservazione delle supernove Ia [13]. Tale scoperta valse loro il premio Nobel per la fisica nel 2011. All'interno del modello della cosmologia standard l'espansione accelerata può essere spiegata con l'energia oscura, della quale però non si conosce l'origine. Oppure si potrebbe pensare che assumere come vero il modello standard non sia corretto, almeno per quanto riguarda grandi scale cosmologiche. Pertanto la Relatività Generale testata solo localmente, potrebbe non essere la teoria che meglio descrive la gravità su ampie scale. Negli ultimi anni sono stati sviluppati dei modelli di gravità modificata il cui scopo sarebbe quello di supplire a questa eventuale lacuna della Relatività Generale; per adempiere questo obiettivo, tali modelli devono soddisfare i vincoli stringenti imposti dal Sistema Solare e modificare la gravità su ampie scale.

3.1 Energia oscura

Può essere conveniente scrivere la metrica FRW, che nel caso generale è data dalla (2.1), nella seguente forma [5]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (3.1)$$

con

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \sinh \chi, & k = -1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dalle equazioni di Einstein

$$G_\nu^\mu \equiv R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = 8\pi GT_\nu^\mu, \quad (3.3)$$

con $T_\nu^\mu = \text{Diag}(-\rho, p, p, p)$, dove ρ è la densità di energia e p la densità di pressione del fluido perfetto considerato la sorgente di T_ν^μ , si ottengono le equazioni differenziali per il fattore di scala a :

$$\begin{aligned} H^2 &\equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \\ \dot{H} &= -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ponendo $\frac{k}{a^2} = 0$ e risolvendo e le precedenti due equazioni, si ottiene:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.5)$$

Inoltre ρ soddisfa l'equazione di continuità

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.6)$$

Ipotizzando che l'universo sia pieno di un fluido barotropico con un'equazione di stato $w = p/\rho$, in cui si assume w costante, dalla (3.5) si può vedere facilmente che l'universo è in espansione accelerata se

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) > 0 \implies \rho + 3p < 0 \implies w < -\frac{1}{3}, \quad (3.7)$$

ciò significa che è necessaria una grande pressione negativa per avere l'espansione accelerata. Per capire come mai l'universo si espande accelerando bisogna introdurre l'energia oscura, dal momento che questa accelerazione non può essere dovuta alla forza di gravità newtoniana. Infatti, data una sfera di raggio a e densità ρ , l'equazione del moto per una particella di massa m che si muove su questa sfera è

$$m\ddot{a} = -\frac{Gm}{a^2} \left(\frac{4\pi a^3 \rho}{3} \right) \implies \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho, \quad (3.8)$$

che dalla (3.5) differisce per il fatto che manca il termine di pressione p , responsabile appunto dell'accelerazione nell'espansione.

3.1.1 Distanza di luminosità

Come anticipato nell'introduzione al capitolo, il fatto che l'universo si espande accelerando è stato scoperto tramite l'osservazione delle supernove Ia. La distanza di luminosità è una grandezza che permette di calcolare la distanza di oggetti luminosi in un universo in espansione e che gioca un ruolo fondamentale in questo tipo di osservazioni. Questa distanza d_L è definita così [5]

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}, \quad (3.9)$$

dove \mathcal{F} è il flusso di energia emesso da una sorgente luminosa, di cui L_s è la luminosità assoluta. Utilizzando la riscrittura della metrica FRW data da (3.1), si ipotizzi la situazione in cui un osservatore sia posto in un punto con $\chi = 0$ e la sorgente di luminosità assoluta L_s , che emette fotoni in modo isotropo, si trovi in un altro punto con $\chi = \chi_s$. Se si indica con ΔE_1 l'energia luminosa emessa dalla sorgente in un intervallo di tempo Δt_1 e con ΔE_0 l'energia che incide sulla sfera di raggio χ_s , è possibile scrivere $L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}$ e $L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}$. A questo punto, sfruttando la relazione per il redshift z

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1}, \quad (3.10)$$

dove la seconda uguaglianza è valida dato che la lunghezza d'onda aumenta proporzionalmente al fattore di scala a , e usando il fatto che $c = \nu_1\lambda_1 = \nu_0\lambda_0$ e che $\nu_0\Delta t_0 = \nu_1\Delta t_1$, si ha

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = 1 + z. \quad (3.11)$$

Dalla (3.11) e dalla relazione $L_s = \frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}$, si ricava

$$L_s = \frac{(1+z)\Delta E_0}{\Delta t_1} = \frac{(1+z)^2\Delta E_0}{\Delta t_0} = L_0(1+z)^2. \quad (3.12)$$

Considerando i fotoni che viaggiano parallelamente alla direzione $\hat{\chi}$, per questi vale $ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2$, che implica:

$$\chi_s = \int_0^{\chi_s} d\chi = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a_0} \int_{t_1}^{t_0} dt(1+z), \quad (3.13)$$

dove per passare dalla seconda alla terza riga si è usata la relazione (3.10). A questo punto, derivando rispetto al tempo $\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}$ si ha $\dot{z} = -H(1+z)$, da cui

$$\chi_s = -\frac{1}{a_0} \int_{t_1}^{t_0} dt \frac{\dot{z}}{H(z)} = \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{dz}{dt} \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}, \quad (3.14)$$

dove nell'ultimo passaggio si è definito $H(z) = h(z)H_0$. Dalla metrica (3.1) si deduce che l'area A di una sfera a $t = t_0$ è data da $A = 4\pi(a_0 f_k(\chi_s))^2$. Perciò il flusso di energia \mathcal{F} osservato a questo istante è [5]

$$\mathcal{F} = \frac{L_0}{4\pi(a_0 f_k(\chi_s))^2}, \quad (3.15)$$

che inserito nella (3.9) dà

$$d_L^2 = \frac{4\pi L_s (a_0 f_k(\chi_s))^2}{4\pi L_0} \implies d_L = a_0 f_k(\chi_s)(1+z), \quad (3.16)$$

siccome $\frac{L_s}{L_0} = (1+z)^2$. Considerando ora $k = 0$, $f_k(\chi_s) = \chi_s$, quindi

$$d_L = a_0 \chi_s (1+z) = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}. \quad (3.17)$$

Derivando rispetto a z' questa espressione della distanza di luminosità e ponendo $z' \rightarrow z$, è possibile scrivere il parametro di Hubble così [13]

$$H(z) = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1}, \quad (3.18)$$

dunque, determinando d_L sperimentalmente, tramite delle osservazioni, si è in grado di fornire poi una stima di $H(z)$.

La densità di energia ρ introdotta sopra comprende tutti gli elementi presenti nell'universo e dalla equazione di continuità (3.6), che si può scrivere $\dot{\rho} + 3H\rho(1+w) = 0$, si ricava

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3H(1+w)dt = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w)dt = -3\frac{da}{a}(1+w), \quad (3.19)$$

che integrata diventa

$$\rho = \rho^{(0)} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)} = \sum_j \rho_j^{(0)} (1+z)^{3(1+w_j)}, \quad (3.20)$$

con $\rho^{(0)} = \sum_j \rho_j^{(0)}$, cioè è data dalla somma di tutte le densità energetiche attuali delle varie componenti dell'universo, e w_j è l'equazione di stato di ciascun elemento cosmico. Di conseguenza, sempre tenendo presente $k = 0$, dalla prima equazione delle (3.4) si ricava che

$$H^2 = H_0^2 \sum_j \frac{8\pi G \rho_j^{(0)}}{3H_0^2} (1+z)^{3(1+w_j)} = H_0^2 \sum_j \Omega_j^{(0)} (1+z)^{3(1+w_j)}, \quad (3.21)$$

dove $\Omega_j^{(0)} = \frac{8\pi G\rho_j^{(0)}}{3H_0^2} = \frac{\rho_j^{(0)}}{\rho_c^{(0)}}$ è il parametro di densità per ciascuna componente all'epoca attuale. Pertanto si arriva ad un'ulteriore espressione per la distanza di luminosità in un universo piatto [5]:

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_j \Omega_j^{(0)} (1+z')^{3(1+w_j)}}}. \quad (3.22)$$

Si fermi per esempio l'indice j a 2, ovvero si sta considerando un universo piatto composto soltanto da due elementi, uno dato da un fluido non relativistico, che verrà indicato con indice m , e l'altro dato dalla costante cosmologica, contrassegnato dall'indice Λ . Plottando la distanza di luminosità data dall'espressione (3.22) per diversi valori di $\Omega_\Lambda^{(0)}$, con $\Omega_\Lambda^{(0)} + \Omega_m^{(0)} = 1$, $w_\Lambda = -1$ e $w_m = 0$, risulta il seguente grafico 3.1.

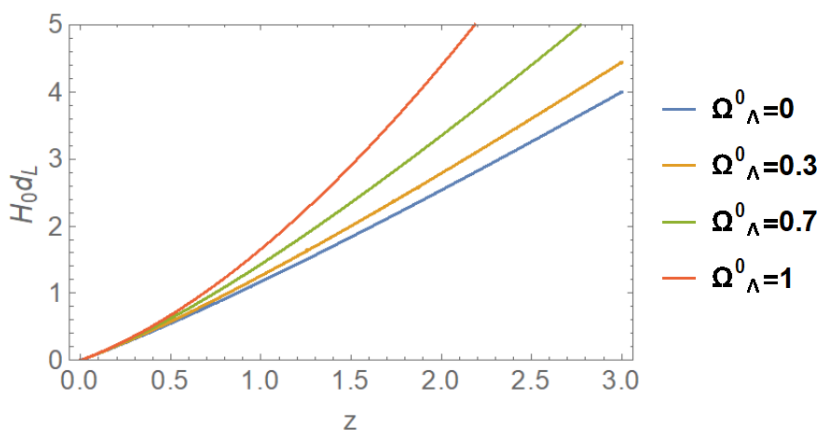


Figura 3.1: plot della funzione della d_L data da (3.22) per diversi valori di $\Omega_\Lambda^{(0)}$.

Si può notare che a bassi redshift ($z \ll 1$), la relazione tra d_L e z diventa in prima approssimazione lineare, cioè si ha e poi $d_L \simeq \frac{z}{H_0}$.

3.1.2 Vincoli imposti dalla evidenze osservative

La distanza di luminosità è legata convenzionalmente alla magnitudine apparente m e a quella assoluta M di una sorgente cosmica dalla relazione [5]

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25.^1 \quad (3.23)$$

Le supernove Ia che si formano dopo che le nane bianche oltrepassano la massa del limite di Chandrasekhar² e così esplodono, vengono osservate perché hanno una caratteristica fondamentale: la loro magnitudine assoluta è indipendente dalla loro posizione nello spazio, perciò è indipendente dal redshift z , per cui vengono usate come *candele standard*³. Perciò misurando sperimentalmente z e poi m di una supernova ad un redshift molto basso ($z \sim 0.01$), da $d_L \simeq \frac{z}{H_0}$ dalla (3.23) si trova una stima della d_L e dalla (3.23) si ottiene il valore di M . Allora la distanza di luminosità di una supernova ad un redshift maggiore ($z \sim 0.1$) si calcola sempre con la (3.23) usando la sua m ma con la stessa M dell'altra supernova. Per esempio, si è stimata la distanza di luminosità in unità di H_0 di una supernova a $z = 0.83$ con $m = 24.32$ grazie ad un'altra supernova ad un redshift $z = 0.026$ con $m = 16.08$ (per cui si è calcolata $M = -19.09$); il risultato è $H_0 d_L \simeq 1.16$. Inoltre si osserva che le stime teoriche

¹Il megaparsec, che si indica con Mpc e che è pari a 10^6 parsec, è un'unità di misura usata in cosmologia per misurare le distanze. Si ha che $1\text{Mpc} = 3.086 \times 10^{22}\text{m}$ [10].

²Questo limite corrisponde a circa 1.4 masse solari; una volta che le nane bianche oltrepassano tale limite la gravità vince sulla pressione di degenerazione elettronica, determinando una situazione di instabilità [8].

³Le *candele standard* sono determinati tipi di oggetti cosmici che hanno le stesse proprietà in ogni parte dell'universo. Oltre a certi tipi di supernova, anche le galassie più luminose nei relativi *clusters* di galassie hanno questa caratteristica [10].

fornite dalla (3.22) in un universo piatto a due componenti sono consistenti con quelle richieste da un universo contenente in prevalenza energia oscura, infatti [5]:

$$H_0 d_L \simeq 0.95 \longrightarrow \text{per } \Omega_m^{(0)} \simeq 1 \quad (3.24)$$

$$H_0 d_L \simeq 1.23 \longrightarrow \text{per } \Omega_m^{(0)} \simeq 0.3, \Omega_\Lambda^{(0)} \simeq 0.7. \quad (3.25)$$

Le osservazioni del 1998 che coinvolsero diverse supernove a vari redshift (da $z = 0.16$ a $z = 0.83$) mostrarono che, assumendo che l'Universo sia piatto e a due componenti, il 70% della densità di energia è data da quella dell'energia oscura.

Oltre alle osservazioni delle supernove Ia, anche quelle relative al CMB (radiazione cosmica di fondo) e alla LSS (struttura su ampia scala) sostengono la prevalenza di energia oscura nell'universo, come mostrato nel plot 3.2 sottostante [5].

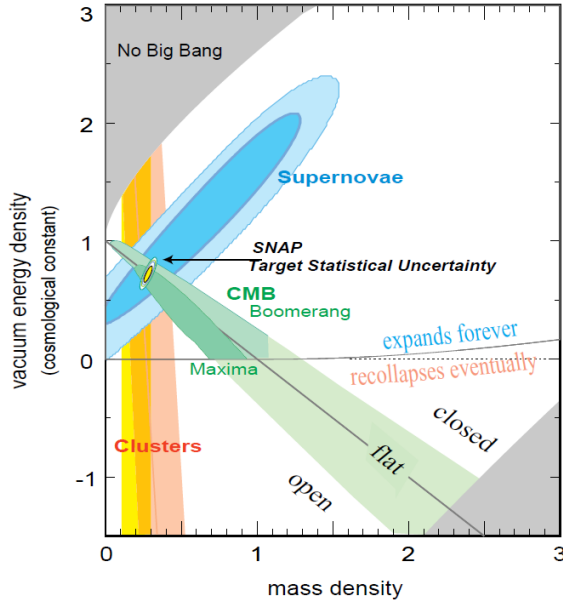


Figura 3.2: grafico che rappresenta le regioni di confidenza di $\Omega_m^{(0)}$ e $\Omega_\Lambda^{(0)}$ per le osservazioni delle supernove Ia, CMB e LSS. Si mostra poi la regione di confidenza per un universo piatto con $\Omega_m^{(0)} = 0.28$ prevista da un satellite SNAP [5].

In questo grafico sono mostrate le regioni di confidenza riguardanti le supernove Ia, i raggruppamenti di galassie su ampia scala e CMB. Da questo si evince che questi tre tipi di osservazione prevedono che i parametri di densità relativi alla costante cosmologica e al fluido non relativistico siano $\Omega_m^{(0)} \simeq 0.3$ e $\Omega_\Lambda^{(0)} \simeq 0.7$. Il fluido non relativistico è dato da un 4% di materia barionica, mentre il resto è una componente non luminosa di natura non barionica (detta *Cold Dark Matter* o CDM) con equazione di stato $w = 0$, a differenza della energia oscura che ha $w < -1/3$. Il modello standard della cosmologia di cui si è accennato sopra identifica l'energia oscura con la costante cosmologica Λ , l'equazione di stato della quale è $w_\Lambda = -1$. Questo modello è chiamato Λ CDM e prevede quindi un'equazione di stato dell'energia oscura di tipo statico, a differenza di altri modelli in cui l'equazione di stato è di tipo dinamico. Pertanto in questi ultimi l'equazione di stato evolve nel tempo e l'energia oscura è identificata in alcuni campi scalari. Uno di tali modelli è il modello *quintessenza*, in cui, indicando con ϕ il campo scalare, ρ_{DE} e p_{DE} , rispettivamente la densità di energia e la pressione dell'energia oscura, sono date da [9]

$$p_{DE} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad \rho_{DE} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (3.26)$$

Da notare è che se si verifica $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, la pressione p_{DE} è negativa e ciò comporterebbe l'espansione accelerata. L'equazione di stato $w = p_{DE}/\rho_{DE}$ risulta quindi

$$w = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.27)$$

Allora se $w < -1/3$, la quintessenza agisce da campo repulsivo espandendo l'universo.

3.2 Modelli di gravità modificata

I modelli analizzati fino a questo punto si trovano tutti all'interno della "cornice della Relatività Generale di Einstein", ma ne esistono altri che si basano su teorie di gravità modificata, come scritto prima, volti a spiegare l'espansione accelerata. Il vantaggio di questi modelli è che permettono di non ricorrere all'energia oscura, di cui non si conosce l'origine, per spiegare questo fenomeno, che sarebbe determinato invece da una modifica della geometria dello spazio-tempo [5]. Stando al teorema di Lovelock, le equazioni di Einstein sono le uniche equazioni del moto locali del secondo ordine derivabili dall'azione in 4 dimensioni [9]. Ciò comporta che per cambiare la teoria della gravità di Einstein sia necessario avere o gradi di libertà in più o derivate di ordine maggiore o la non località o uno spazio tempo di dimensione maggiore o, addirittura, più di una delle precedenti opzioni [5]. Nella teoria del mondo-brana, per esempio, l'universo è una brana 4-dimensionale immersa in un *bulk*, cioè un iperspazio, di 5 dimensioni. Su questa brana 4-dimensionale si ha una gravità indotta descritta dall'azione di Einstein-Hilbert 4-dimensionale:

$$S_{EH} = \int R\sqrt{-g}d^4x, \quad (3.28)$$

con R che è lo scalare di Ricci e $-g$ è il determinante del tensore metrico⁴; il segno meno è dovuto alla segnatura adottata [8]. Inoltre in questa teoria il parametro di Hubble è proporzionale a

$$H \propto \frac{G_4}{G_5},$$

con al numeratore e denominatore rispettivamente le costanti di Newton 4 e 5-dimensionali. Si osserva quindi che H non è espresso in funzione della costante cosmologica⁵ [9].

Comunque dopo aver modificato la Relatività Generale in uno dei modi elencati sopra, bisogna verificare che il modello di gravità modificato elaborato sia consistente, andando a vedere se le sue soluzioni sono stabili o meno e vedendo se rispetta i vincoli imposti dal Sistema Solare. Le instabilità possono essere di varia natura e si possono mostrare con la seguente azione

$$S = \int dt d^3x (-K_t \dot{\phi}^2 + K_x (\partial_i \phi)(\partial^i \phi) - m^2 \phi^2), \quad (3.29)$$

dove K_t è la componente temporale del termine cinetico e K_x quella spaziale ed m è un parametro costante che caratterizza la dinamica del campo scalare ϕ [8]. Diversi tipi di instabilità possono nascere dal fatto che $m^2 < 0$ (instabilità tachionica) o se $K_x < 0$ oppure ancora se $K_t < 0$. Per quanto riguarda i vincoli osservativi del Sistema Solare invece, si ha che [9]

$$\theta = (0.99992 \pm 0.00023) \times 1.75'' \quad \Delta t = (1.00001 \pm 0.00001) \Delta t_{RG}$$

$$w_{DE} = -1.006 \pm 0.045,$$

dove θ è l'angolo di deflessione della luce proveniente dalle stelle a causa del Sole, con $1.75''$ che è predetto dalla Relatività Generale, Δt è la dilatazione del tempo dovuta al campo gravitazionale terrestre e infine w_{DE} è l'equazione di stato dell'energia oscura data dalla costante cosmologica Λ .

⁴La densità di lagrangiana \mathcal{L} nel caso della teoria di campo per una campo scalare reale ϕ è data da $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - V(\phi)$ e la corrispondente azione S è $S = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x$. Nel caso della Relatività Generale si identifica \mathcal{L} con R , dal momento che R è l'unico scalare che deriva dalla metrica che dipende da $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate prime e seconde [8].

⁵Nella metrica di *FRW* nel caso generale infatti, dalle equazioni di Einstein modificate con l'aggiunta della costante cosmologica, date da $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$, l'equazione di Friedmann $H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}$ diventa

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3},$$

ovvero H dipende da Λ [5].

3.2.1 Esempi di teorie di gravità modificata

Un primo esempio è la teoria di gravità di *Brans-Dicke*. Nell'azione compare un potenziale scalare ψ che non interagisce con la gravità [9]

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\psi R - \frac{\omega_{BD}}{\psi} (\partial\psi)^2 \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (3.30)$$

dove \mathcal{L}_m è la densità di lagrangiana dovuta alla materia. Considerando una sorgente di campo non relativistica $T_0^0 = -\rho$, la metrica di perturbazione si scrive trascurando le derivate temporali delle perturbazioni rispetto a quelle spaziali [9]

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi)dt^2 + (1 - 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.31)$$

dove Ψ è il potenziale gravitazionale newtoniano Φ rappresenta la perturbazione. La perturbazione ϕ del campo scalare ψ , che quindi può essere espresso come $\psi = \psi_0 + \phi$, è collegata a Ψ e a Φ dalle seguenti equazioni [9]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \rho - \frac{1}{2} \nabla^2 \phi \\ (3 + 2\omega_{BD}) \nabla^2 \phi &= -8\pi G \rho \\ \Phi - \Psi &= \phi. \end{aligned}$$

Da tali relazioni si osserva come la perturbazione di ψ modifichi la relazione tra Ψ e Φ , infatti le precedenti equazioni possono essere riscritte [9]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G \mu \rho \\ \Psi &= \eta^{-1} \Phi, \end{aligned}$$

con

$$\mu = \frac{4 + 2\omega_{BD}}{3 + 2\omega_{BD}} \quad \eta = \frac{1 + \omega_{BD}}{2 + \omega_{BD}}. \quad (3.32)$$

Pertanto se ω_{BD} è molto grande, si ritorna alla Relatività Generale con $\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho$ e $\Psi = \Phi$; quindi maggiore è ω_{BD} , minore è l'influenza del campo scalare. I vincoli derivanti dal Sistema Solare determinano un valore di ω_{BD} pari a $\omega_{BD} > 40,000$, che preclude la possibilità di distinguere questo modello di gravità modificata dalla Relatività Generale su tutte le scale.

Un altro esempio è il modello $f(R)$, dove compare una funzione arbitraria dello scalare di Ricci R nell'azione di Einstein-Hilbert [9]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (3.33)$$

In questo modello si può semplificare l'equazione del moto, che sarebbe del quarto ordine, riconducendosi ad un'equazione del secondo ordine tramite l'introduzione di un potenziale scalare ϕ . L'azione con questo potenziale è [9]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi) + (R - \phi)f'(\phi)]. \quad (3.34)$$

Inoltre ponendo $\psi = f'(\phi)$ e $V(\psi) = f(\phi) - \phi f'(\phi)$, si può scrivere $S_{f(R)}$ così

$$\begin{aligned} S_{f(R)} &= \int d^4x \sqrt{-g} (V(\psi) + \phi f'(\phi) + R f'(\phi) - \phi f'(\phi)) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (\psi R + V(\psi)), \end{aligned} \quad (3.35)$$

che è come l'azione S_{BD} con un potenziale e $\omega_{BD} = 0$, di conseguenza, trascurando per un attimo il potenziale, questa teoria non dovrebbe essere considerata valida, in quanto non rispetta i vincoli del Sistema Solare. Una scelta opportuna del potenziale, che corrisponde ad una opportuna scelta di $f(R)$, consente però di eludere questi vincoli. In regimi di alta curvatura $f(R)$ è della forma [9]

$$f(R) = R - 2\Lambda + |f_{R0}| \frac{\bar{R}^{n+1}}{R^n}, \quad (3.36)$$

con $|f_{R0}| < 10^{-6}$ che è parametro il cui valore è determinato dai vincoli del Sistema Solare e \bar{R} che è il valore attuale della curvatura. Si nota subito che nella precedente relazione compare Λ , elemento che si preferiva evitare, ma scegliendo una determinata $f(R)$, Λ sparisce in regimi di bassa curvatura. Ulteriore osservazione: nel limite di curvaturei molto maggiori di quella attuale, la correzione al modello cosmologico standard (Λ CDM) si annulla.

Nella teoria *braneworld gravity*, di cui si è accennato sopra, l'universo in cui viviamo corrisponde ad una membrana 4-dimensionale, immersa in un iperspazio detto *bulk*. La gravità è l'unica interazione che si può propagare attraverso tutto l'iperspazio, mentre il modello standard delle particelle è limitato alla nostra membrana. Il modello *Dvali-Gabadadze-Porrati* o DGP è il più semplice all'interno di questa teoria: consiste in un modello a 5 dimensioni la cui azione è [9]

$$S_{DGP} = \frac{M_5^3}{2} \int d^5x \sqrt{-^{(5)}g} (^{(5)}R) + \frac{M_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (^{(4)}R + \mathcal{L}_m), \quad (3.37)$$

dove $^{(4)}R$ e $^{(5)}R$ sono lo scalare di Ricci in 4 e 5 dimensioni, mentre M_4^2 e M_5^3 sono il reciproco delle costanti di Newton in 4 e 5 dimensioni, a meno di costanti. L'equazione di Friedmann in questo modello è dato da

$$H^2 = \pm \frac{H}{r_c} + \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.38)$$

con $r_c = \frac{M_4^2}{2M_5^3}$ che è un parametro tale per cui per determinate lunghezze di scala r inferiori a r_c la gravità si manifesta come teoria 4-dimensionale, mentre per r maggiori di r_c , ha effetti anche in dimensioni superiori, ovvero [5]

$$\Psi = \begin{cases} r^{-1} & \text{per } r < r_c \\ r^{-2} & \text{per } r > r_c \end{cases}.$$

Per quanto riguarda l'equazione (3.38), inizialmente si verifica che $Hr_c \gg 1$, che riporta l'equazione di Friedmann in 4 dimensioni (considerando il ramo positivo dell'equazione). D'altra parte a tempi tardi, sempre nel ramo positivo della (3.38), si ha che $H \rightarrow \frac{1}{r_c}$, fatto che causa l'espansione accelerata senza l'utilizzo di Λ . Quest'ultima è però richiesta nel ramo negativo per realizzare l'espansione accelerata. Le perturbazioni della metrica obbediscono a delle equazioni simili a quelle viste per il modello BD ma è presente un termine di interazione non lineare (visibile nella seconda equazione) [9]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= 4\pi G a^2 \rho - \frac{1}{2} \nabla^2 \phi \\ (3 + 2\omega_{BD}(a)) \nabla^2 \phi + \frac{r_c^2}{a^2} [(\nabla^2 \phi)^2 - (\nabla_i \nabla_j \phi)^2] &= -8\pi G a^2 \rho \\ \Phi - \Psi &= \phi, \end{aligned}$$

dove ϕ è un campo scalare generato dalle pieghe della brana nel *bulk* a 5 dimensioni e ω_{BD} è dato da

$$\omega_{BD} = \frac{3}{2}(\beta(a) - 1),$$

con $\beta(a) = 1 - 2r_c H \left(1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} \right)$.

Capitolo 4

Propagazione modificata di onde gravitazionali

Nel primo capitolo si è dedotta l'espressione delle onde gravitazionali che si propagano nella metrica di Minkowski e perciò, in uno spazio-tempo piatto e non in espansione. Nel capitolo successivo si è analizzato un *background* cosmologico in espansione, descritto dalla metrica di *Friedmann-Robertson-Walker* e si è ricavata un'equazione d'onda che fornisce l'evoluzione temporale delle onde gravitazionali in questa metrica. Nel capitolo precedente si è invece evidenziato come da diversi test osservativi l'universo si stia espandendo in modo accelerato e si sono svolte diverse ipotesi circa le cause di tale comportamento, andando ad introdurre concetti quali l'energia oscura e i modelli di gravità modificata. In questo capitolo si andrà a studiare la propagazione delle onde gravitazionali in teorie di gravità modificata e si vedrà come da questo studio, utilizzando le nozioni trattate nei capitoli precedenti, come per esempio la distanza di luminosità, si possano ottenere informazioni fondamentali sull'energia oscura e sui modelli di gravità modificata. Infine si vedranno quali limiti vengono imposti sulla velocità di propagazione delle onde gravitazionali dalle misure degli eventi GW170817 e GRB 170817A da parte della collaborazione LIGO/Virgo. Il primo consiste nel collasso di una coppia di stelle di neutroni, mentre il secondo nell'emissione successiva di raggi γ , controparte elettromagnetica delle onde gravitazionali rilevate che ha consentito di ottenere una misurazione della distanza di luminosità assoluta di queste stelle. Queste vengono pertanto chiamate *sirene standard*, ricordando le già citate *candele standard*. Si è già visto che la distanza di luminosità è data da

$$d_L = \frac{1+z}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}.$$

Se si è a bassi redshift, $z \ll 1$, si ha che $d_L \simeq \frac{z}{H_0}$, relazione lineare che si può osservare anche nel plot 3.1. Questo è la situazione dell'evento GW170817 che si è verificato a $z \simeq 0.01$ [3] e che quindi ha permesso di ricavare una stima di H_0 che si distanzia da quella ottenuta da *Planck* a partire dal CMB, poiché la stima tramite le binarie è una misura locale indipendente dal modello cosmico assunto, argomento che non vale per la stima data da *Planck*¹, le cui misurazioni si basano sul modello Λ CDM. Purtroppo la misura di un solo evento non permette di discernere tra una o l'altra stima, per potere decidere servirebbero circa 50-100 *sirene standard* [3]; infatti supponendo di misurare N eventi, l'errore sulla stima di H_0 scalerebbe come $1/\sqrt{N}$. Questo sarà lo scopo della prossima generazione di interferometri terrestri, come ET (*Einstein Telescope*), e spaziali, come LISA, che andranno alla ricerca di eventi a valori maggiori di z . La definizione di distanza di luminosità appena ricordata è stata trovata in un modello cosmologico in cui è presente l'energia oscura (DE), la cui densità energetica ρ_{DE} obbedisce alla già vista equazione di continuità [2]

$$\dot{\rho}_{DE} + 3H(1 + w_{DE})\rho_{DE} = 0, \quad (4.1)$$

¹*Planck* è il telescopio spaziale dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA), ha fornito una mappa assai dettagliata della radiazione cosmica di fondo (CMB) che rivela una serie di fluttuazioni di temperatura. Lo studio della natura e della distribuzioni di queste fluttuazioni ha permesso di ricavare notevoli informazioni circa l'evoluzione dell'universo.

dove $H = \frac{\dot{a}}{a}$ è il parametro di Hubble e w_{DE} è l'equazione di stato dell'energia oscura, da cui

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}_{DE}}{\rho_{DE}} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w_{DE}) &\implies \log \frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_{DE}(0)} = 3 \int_0^z \frac{d\tilde{z}(1+w_{DE})}{1+\tilde{z}} \\ &\implies \frac{\rho_{DE}(z)}{\rho_0} = \Omega_{DE} \exp \left[3 \int_0^z \frac{d\tilde{z}(1+w_{DE}(\tilde{z}))}{1+\tilde{z}} \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

con $a(z) = 1/(1+z)$ e $\Omega_{DE} = \rho_{DE}(0)/\rho_0$. Inoltre nelle trattazioni sulle *sirene standard* si è soliti usare la seguente parametrizzazione in funzione dei parametri (w_0, w_a) [3], [13]:

$$w_{DE}(z) = w_0 + \frac{z}{1+z} w_a. \quad (4.3)$$

Date queste premesse, si studierà ora la propagazione modificata delle onde gravitazionali.

4.1 Perturbazioni tensoriali in modelli di gravità modificata

Nel *background* dato dalla metrica FRW, la propagazione libera delle perturbazioni tensoriali è descritta da

$$h''_{\alpha} + 2Hh'_{\alpha} + k^2 h_{\alpha} = 0, \quad (4.4)$$

relazione che richiama l'equazione di propagazione ricavata nel secondo capitolo, con $\alpha = +, \times$, $h_{\alpha}(\eta, \vec{k})$ che sono i modi di Fourier dell'ampiezza dell'onda gravitazionale, η che è il tempo conforme², ' che indica la derivata prima rispetto ad η e \vec{k} che è il vettore d'onda. Si sostituisca nella (4.4) [2], [12]

$$h_{\alpha}(\eta, \vec{k}) = \frac{1}{a(\eta)} \chi_{\alpha}(\eta, \vec{k}), \quad (4.5)$$

dove si è introdotto il campo $\chi_{\alpha}(\eta, \vec{k})$ e il fattore $1/a$ indica che l'ampiezza delle onde gravitazionali diminuisce a mano a mano che queste si propagano dalla sorgente all'osservatore, pertanto vale la relazione di proporzionalità $h_{\alpha} \propto \frac{1}{d_L(z)}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{a(\eta)} \chi_{\alpha}(\eta, \vec{k}) \right] &= -\frac{a'}{a^2} \chi_{\alpha} + \frac{1}{a} \chi'_{\alpha} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\frac{1}{a(\eta)} \chi_{\alpha}(\eta, \vec{k}) \right] &= -\frac{a''a - 2(a')^2}{a^3} \chi_{\alpha} - 2\frac{a'}{a^2} \chi'_{\alpha} + \frac{1}{a} \chi''_{\alpha} \\ &\implies \chi''_{\alpha} + (k^2 - a''/a) \chi_{\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

poiché il termine proporzionale a χ'_{α} si elide. Siccome nei tempi recenti $a''/a \sim 1/\eta^2$ e per le onde gravitazionali provenienti da sorgenti astrofisiche con frequenze nel *range* degli interferometri spaziali o terrestri $k\eta \gg 1^3$, il termine a''/a può quindi essere trascurato rispetto a k^2 e si ottiene infine

$$\chi''_{\alpha} + k^2 \chi_{\alpha} = 0. \quad (4.7)$$

La (4.7) implica che la relazione di dispersione per le perturbazioni tensoriali è $\omega = k$, ciò significa che le onde gravitazionali si propagano alla velocità della luce, che in questa trattazione è stata posta pari a 1. Riprendendo l'equazione (4.4), in un modello di gravità modificata i coefficienti dei termini relativi ad H e k^2 possono essere differenti da quelli della metrica FRW, fatto che è stato osservato nel modello DGP, citato sopra. Questa differenza determina un comportamento delle onde diverso dalla decrescita $\propto \frac{1}{d_L}$. In particolare un cambiamento del coefficiente relativo a k^2 causerebbe una modifica della velocità di propagazione delle onde gravitazionali rispetto alla velocità della luce, fatto

²Il tempo conforme η è definito da $d\eta/dt = c/R$ [8], con R il fattore di scala universale.

³Per onde gravitazionali con una frequenza $\nu \approx 10^2 \text{ Hz}$ si ha $(k\eta)^2 \sim (500 \text{ km}/H_0^{-1})^2 \sim 10^{-41}$ [2].

che sarebbe da escludere dal momento che dalle misure degli eventi GW170817 e della sua controparte elettromagnetica GRB 170817A si è ricavato $\frac{|v_{gw}-v_{em}|}{v_{em}} < O(10^{-15})$, dove v_{gw} è la velocità delle onde gravitazionali e $v_{em} = c$. Quest'ultima stima comporta l'esclusione di alcune teorie modificate della gravità che prevedono una velocità di propagazione del segnale gravitazionale diverso da quella della luce. Passando quindi alla modifica del coefficiente del termine con H , si consideri l'equazione di propagazione [12]

$$h''_{\alpha} + 2H[1 - \delta(\eta)]h'_{\alpha} + k^2 h_{\alpha} = 0, \quad (4.8)$$

con $\delta(\eta)$ una qualche funzione data da un modello di gravità modificata. Sostituendo ora, in analogia con quanto svolto prima, il termine

$$h_{\alpha}(\eta, \vec{k}) = \frac{1}{\tilde{a}(\eta)} \chi_{\alpha}(\eta, \vec{k}), \quad (4.9)$$

la (4.8) diventa

$$\chi''_{\alpha} + (k^2 - \tilde{a}''/\tilde{a})\chi_{\alpha} = 0. \quad (4.10)$$

Trascurando di nuovo \tilde{a}''/\tilde{a} , si ottiene che la velocità di propagazione delle onde è pari a c . A differenza di prima però, h_{α} decresce come $1/\tilde{a}$ e non come $1/a$. Inoltre in un modello di gravità modificata di questo tipo, è necessario distinguere tra la distanza di luminosità relativa alle onde gravitazionali $d^{gw}_L(z)$ e quella relativa alle onde elettromagnetiche $d^{em}_L(z)$. Questo implica che la distanza di luminosità misurata con le *sirene standard* è in principio diversa da quella misurata con le *candele standard*, differenza che può essere utile per testare teorie di gravità modificata. L'ampiezza delle onde gravitazionali decresce come $\frac{1}{d^{gw}_L}$ con [2], [12]

$$d^{gw}_L(z) = \frac{a(z)}{\tilde{a}(z)} d^{em}_L(z) = \frac{1}{(1+z)\tilde{a}(z)} d^{em}_L(z), \quad (4.11)$$

con d^{em}_L che è la distanza di luminosità standard per segnali elettromagnetici d_L . Dal momento la (4.11) equivale a $(\log a/\tilde{a})' = \delta(\eta)H(\eta)$ [2], se si integra quest'ultima rispetto ad η

$$\int d\eta \frac{d}{d\eta} \left(\log \frac{a}{\tilde{a}} \right) = \int d\eta \delta(\eta) \frac{a'}{a} = \int d\eta \delta(\eta) \left[\frac{da}{d\eta} \right] \frac{1}{a} = - \int_0^z dz' \delta(z') \frac{1}{1+z'} = \log \frac{a}{\tilde{a}}$$

e si tiene conto della (4.11), si ha [2]

$$\frac{a}{\tilde{a}} = \exp \left[- \int_0^z dz' \delta(z') \frac{1}{1+z'} \right] \implies d^{gw}_L(z) = d^{em}_L(z) \exp \left[- \int_0^z dz' \delta(z') \frac{1}{1+z'} \right]. \quad (4.12)$$

Nel seguito della trattazione si adotterà un particolare modello di gravità modificata, ma i risultati che si otterranno valgono per molti modelli. Una teoria di gravità che modifica il coefficiente del termine H nel modo visto sopra tramite una funzione $\delta(\eta)$, senza cambiare quello del termine k^2 , è quella chiamata modello RR. L'azione di questo modello è [2], [12]

$$S_{RR} = \frac{m_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{6} m^2 R \frac{1}{\square^2} R \right], \quad (4.13)$$

dove m_{Pl} è la massa di Planck ridotta ed m è un parametro che dovrebbe prendere il posto della costante cosmologica del modello Λ CDM. La funzione $\delta(\eta)$ prevista da questo modello tende a zero a grandi valori di redshift (Figura 4.1), questo perché in questo modello le modifiche alla Relatività Generale si verificano nei tempi cosmologici più recenti. Il rapporto tra $d^{gw}_L(z)$ e $d^{em}_L(z)$ è una funzione esponenziale negativa che in $z = 0$ vale 1, dato che non ci può essere differenza tra le due distanze di luminosità quando il redshift della sorgente si annulla e per grandi valori di z satura ad un valore costante dato che δ va a 0 (Figura 4.2). Una parametrizzazione che dell'andamento del rapporto $d^{gw}_L(z)/d^{em}_L(z)$ è [3]:

$$\frac{d^{gw}_L(z)}{d^{em}_L(z)} = \Xi_0 + \frac{1 - \Xi_0}{(1+z)^n}, \quad (4.14)$$

con i due parametri $n = 5/2$ e $\Xi_0 = 0.970$. Pertanto per grandi valori di z , la (4.14) tende al valore costante Ξ_0 , mentre per $z = 0$ è uguale a 1 (Figura 4.2). Da questa parametrizzazione è possibile trovarne una per la δ tenendo conto che dalla (4.12) si ricava che

$$\log \frac{d_L^{gw}}{d_L^{em}} = - \int_0^z dz' \frac{\delta(z')}{1+z'} \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \delta(z) = -(1+z) \frac{d}{dz} \log \left(\frac{d_L^{gw}}{d_L^{em}} \right),$$

sostituendovi la (4.14), e calcolando la derivata si ottiene [3]

$$\delta(z) = \frac{n(1 - \Xi_0)}{1 - \Xi_0 + \Xi_0(1+z)^n}. \quad (4.15)$$

Si osserva che in $z = 0$ questa parametrizzazione restituisce $\delta(0) = n(1 - \Xi_0)$ e non corrisponde bene all'effettivo andamento di $\delta(z)$ (Figura 4.1). Perciò è meglio usare direttamente la parametrizzazione del rapporto tra le distanze di luminosità, anziché quella della δ , anche perché la prima confrontabile con le misure. Nei due grafici sottostanti sono mostrati gli andamenti di $d_L^{gw}(z)/d_L^{em}(z)$, di $\delta(z)$ e delle rispettive parametrizzazioni (linee tratteggiate) [3].

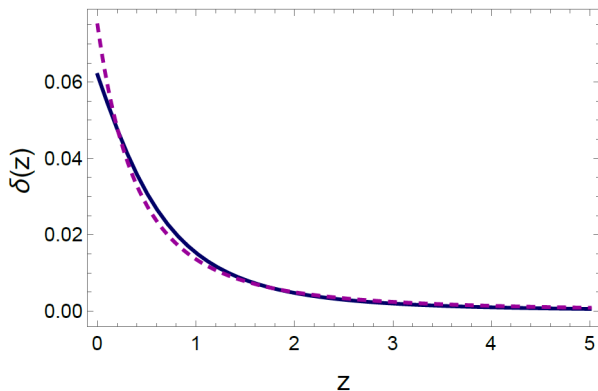


Figura 4.1: plot della funzione $\delta(z)$, linea blu e del fit, linea viola tratteggiata [3].

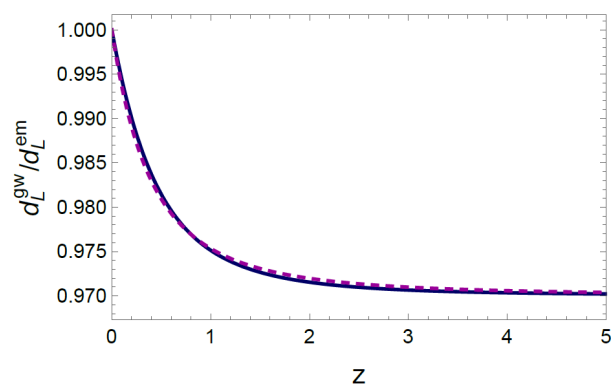


Figura 4.2: plot del rapporto $d_L^{gw}(z)/d_L^{em}(z)$, linea blu e del fit, linea viola tratteggiata [3].

L'equazione di propagazione del tipo (4.8) vale per diversi modelli di gravità modificata, come per esempio per i modelli Einstein-Aether, Horndeski e DGP, visto in precedenza. Quest'ultimo modello che ad ampie scale cosmologiche la gravità si “spalma” su delle dimensioni extra e ciò modifica l'andamento dell'ampiezza dei segnali gravitazionali che non sarà più $\propto \frac{1}{a}$. In aggiunta a questa considerazione, il fatto che la gravità agisca su più molte dimensioni causa un minore luminosità della sorgente gravitazionale, per cui ci si aspetta che $d_L^{gw}(z) > d_L^{em}(z)$ [3].

4.2 Limiti sulla propagazione imposti da GW170817/GRB 170817A

Dalle misure degli eventi GW170817 e GRB 170817A si ottengono diversi limiti circa la propagazione del segnale gravitazionale. Si ricavano limiti sulla propagazione modificata delle onde gravitazionali, su questioni di fisica fondamentale, come la velocità delle onde gravitazionali, la violazione dell'invarianza di Lorentz, i test del principio di equivalenza, ci sono poi altre implicazioni di carattere astrofisico, come i vincoli che vengono posti sull'equazione di stato e delle stelle di neutroni [1] e sulla loro deformazione mareale, e via discorrendo.

4.2.1 Limiti sulla propagazione modificata

Partendo dai limiti riguardanti la propagazione modificata, si consideri che l'evento GW170817 è stato rilevato a un redshift pari a $z = 0.00980$, perciò, scrivendo al primo ordine in z il risultato della (4.12),

si ha [3]

$$\frac{d_L^{gw}(z)}{d_L^{em}(z)} = 1 - z\delta(0) + \mathcal{O}(z^2). \quad (4.16)$$

La (4.16) afferma che la deviazione da 1 del rapporto $d_L^{gw}(z)/d_L^{em}(z)$ è proporzionale a z , di conseguenza da un solo evento non si è in grado di porre dei limiti stringenti sulla propagazione modificata. Servono quindi misure di altri eventi per avere limiti più delineati. Comunque, per ottenere i limiti sulla propagazione modificata ci sono due modi: il primo consiste nel paragonare i valori della costante di Hubble H_0 misurati tramite *candele standard* e *sirene standard*, il secondo invece consiste nel paragonare la distanza di luminosità relativa al segnale elettromagnetico e a quello gravitazionale provenienti dalla medesima sorgente [3]. Per quanto riguarda il primo metodo, si considera corretto il valore di H_0 ricavato da misure elettromagnetiche locali che, espresso in unità di $\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ è

$$H_0 = 73.48 \pm 1.66. \quad (4.17)$$

Questo risultato è stato calcolato tramite la formula $H_0 = z/d_L^{em}(z) + \mathcal{O}(z^2)$, dopo aver effettuato le misure. La stima invece ottenuta da GW170817/GRB 170817A è, come scritto ad inizio capitolo, $H_0^{gw} = 70.0_{-8.0}^{+12.0}$. Questo valore è stato aggiornato tramite una nuova analisi dell'evento GW170817/GRB 170817A a [3]

$$H_0^{gw} = 70.0_{-7}^{+13} \quad (4.18)$$

per un modello ad alto spin e a

$$H_0^{gw} = 70.0_{-8}^{+19}, \quad (4.19)$$

per un modello a basso spin, oppure un'altra stima è

$$H_0^{gw} = 75.5_{-9.6}^{+11.6}, \quad (4.20)$$

ottenuta considerando un diverso valore della velocità della galassia ospite ed i vincoli sull'inclinazione della sorgente dovuti ai raggi-X emessi [3]. I valori (4.18), (4.19) e (4.20) sono stati stimati calcolando la distanza di luminosità relativa alle onde gravitazionali e poi utilizzando l'espressione $H_0^{gw} = z/d_L^{gw}(z) + \mathcal{O}(z^2)$. Se non ci fosse propagazione modificata i valori di H_0^{gw} e di H_0 coinciderebbero, siccome $d_L^{gw}(z) = d_L^{em}(z)$, altrimenti tenendo conto della propagazione modificata si ha [3]

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \frac{z}{d_L^{em}(z)} + \mathcal{O}(z^2) \\ &= [1 - z\delta(0)] \frac{z}{d_L^{gw}(z)} + \mathcal{O}(z^2) \\ &= [1 - z\delta(0)] H_0^{gw} + \mathcal{O}(z^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Da questa relazione, trascurando $\mathcal{O}(z^2)$, è quindi possibile esplicitarsi $\delta(0)$ come

$$\delta(0) = \frac{H_0^{gw} - H_0}{z H_0^{gw}} \quad (4.22)$$

e inserendo in questa espressione i valori di H_0^{gw} dati da (4.18), (4.19) e (4.20), quello di H_0 della (4.17) e $z = 0.00980$, si ottengono rispettivamente i seguenti valori di $\delta(0)$ [3]:

$$\delta(0)_{(4.18)} = -5.1_{-11}^{+20} \quad \delta(0)_{(4.19)} = -5.1_{-12}^{+29} \quad \delta(0)_{(4.20)} = 2.7_{-12.8}^{+15.4}, \quad (4.23)$$

dove i pedici delle δ indicano quale valore di H_0^{gw} è stato usato. Questi sono risultati molto diversi dal $\delta(0)$ previsto dal modello RR pari a $\delta(0) \simeq 0.062$, tale differenza è dovuta al fatto che la parametrizzazione di $\delta(z)$ fornita dal modello non funziona bene per piccoli valori di z . I limiti dai risultati (4.23) potranno diventare via via più stringenti, man mano che si misureranno sempre più eventi, dato che con N *sirene standard* l'errore scalerebbe come $1/\sqrt{N}$.

L'altro metodo per trovare dei limiti alla propagazione modificata si basa sul paragone tra la distanza di luminosità relativa al segnale elettromagnetico e quella relativa al segnale gravitazionale di una stessa *sirena standard*. La d_L relativa alle onde gravitazionali per GW170817 è stata ottenuta dalle osservazioni ad opera della collaborazione LIGO/Virgo ed è pari a [3]

$$d_L^{gw} = 43.8_{-6.9}^{+2.9} \text{Mpc}. \quad (4.24)$$

Quella invece relativa alle onde elettromagnetiche è stata ottenuta determinando la distanza della galassia ospite NGC4993. Tale distanza è stata ottenuta col metodo SBF (*Surface Brightness Fluctuations*) ed è uguale a [3]

$$d_L^{em} = 40.7 \pm 1.4_{\text{stat}} \pm 1.9_{\text{sist}} \text{Mpc}, \quad (4.25)$$

dove i pedici “stat” e “sist” indicano rispettivamente gli errori statistici e sistematici. Pertanto sfruttando ancora la (4.16) e usando le due d_L ottenute, si ha [3]

$$\delta(0) = \frac{d_L^{em} - d_L^{gw}}{z d_L^{em}} = -7.8_{-18.4}^{+9.7}, \quad (4.26)$$

dove gli errori in apice e pedice sono stati calcolati sommando in quadratura gli errori sistematici e statistici della (4.25) rispettivamente con gli errori in apice e pedice della (4.24). Si osserva che questo secondo metodo fornisce errori minori rispetto al primo, ma bisogna tenere conto del fatto che i due metodi sono affetti da errori sistematici di natura diversa. Inoltre il secondo è valido solo fino a distanze dell'ordine dei 100 Mpc, dato che per galassie più lontane il metodo SBF non è più preciso. Di conseguenza per eventi più distanti di 100 Mpc, ci si aspetta che sia più efficace il primo metodo.

4.2.2 Limiti sulla velocità di propagazione delle onde gravitazionali

Tra i limiti imposti su questioni di fisica fondamentale dalle misure di GW170817/GRB 170817A, di particolare rilevanza per questa trattazione è quello che si pone alla velocità di propagazione delle onde gravitazionali. Tra gli eventi GW170817 e GRB 170817A si è misurato un intervallo di tempo pari $(+1.74 \pm 0.05)\text{s}$ [1]. Questo tempo di ritardo viene usato per porre dei vincoli sulla deviazione della velocità delle onde gravitazionali da c e su altri principi fisici fondamentali citati sopra. Assumendo che la differenza tra i tempi di percorrenza Δt della distanza D dei fotoni e delle onde gravitazionali sia piccola, è lecito scrivere

$$\frac{\Delta v}{v_{em}} = \frac{v_{gw} - v_{em}}{v_{em}} \approx v_{em} \frac{\Delta t}{D}, \quad (4.27)$$

con $D = 26$ Mpc, altrimenti se fosse troppo piccolo questa relazione non sarebbe così vincolante; questo valore di D coincide con il limite inferiore dell'intervallo di credibilità al 90% relativo alla distanza di luminosità del segnale gravitazionale [1]. Se si assume che i primi fotoni e il picco del segnale gravitazionale siano stati emessi contemporaneamente dalla sorgente e che l'intervallo di tempo tra i due segnali di $(+1.74 \pm 0.05)\text{s}$ sia dovuto alla maggiore rapidità delle onde gravitazionali, questa differenza tra i tempi di percorrenza fornisce un limite superiore per Δv . Il limite inferiore è ottenuto invece assumendo che tra i tempi di emissione del segnale elettromagnetico e gravitazionale intercorra un intervallo maggiore di $(+1.74 \pm 0.05)\text{s}$ e che le onde elettromagnetiche, più veloci, abbiano colmato in parte questa differenza temporale nel corso del viaggio. Considerando 10 s come limite conservativo della differenza tra i tempi di emissione, si ottengono i seguenti vincoli [1]

$$-3 \times 10^{-15} \leq \frac{\Delta v}{v_{em}} \leq +7 \times 10^{-16}. \quad (4.28)$$

Questa relazione è molto importante dal momento che ponendo dei limiti alla propagazione delle onde gravitazionali, consente di escludere quei modelli di gravità modificata che non la rispettano.

Conclusioni

In questa tesi, dopo aver calcolato l'equazione di propagazione delle onde gravitazionali su un *background* cosmologico, si è studiato come cambia tale equazione nei modelli di gravità modificata. A questo scopo si è scelto uno di questi modelli, per ottenere poi risultati validi più in generale per tali teorie. Inoltre si è osservato come l'analisi delle misure degli eventi GW170817/GRB 170817A comporti dei vincoli sulla propagazione modificata e sulla velocità di propagazione delle onde gravitazionali.

Nel primo capitolo, in particolare, si sono linearizzate le equazioni di Einstein al primo ordine in $h_{\mu\nu}$, il quale corrisponde ad un termine perturbativo che si somma al tensore metrico di Minkowski $g_{\mu\nu}$. Sono state quindi risolte queste equazioni nel vuoto, trovando l'espressione delle onde gravitazionali in questo caso. Inoltre sfruttando le relazioni (1.19) e (1.20) si è ricavata la matrice ampiezza dell'onda gravitazionale nella *TT gauge*, data dalla (1.34), assumendo che l'onda si propaghi lungo l'asse \hat{z} .

Nel secondo capitolo si è passati ad un universo spazialmente piatto in espansione descritto dalla metrica FRW e si sono introdotte delle perturbazioni tensoriali alle componenti spaziali del tensore metrico di FRW, rappresentate dalla (2.6) (ovvero onde gravitazionali su un background cosmologico). Si sono poi ricavate le equazioni di Einstein per le perturbazioni tensoriali, calcolando nel dettaglio come cambia ciascun componente delle equazioni di campo a causa di queste perturbazioni. A questo punto è stato possibile ricavare un'equazione che descrivesse l'evoluzione temporale delle perturbazioni.

Nel terzo capitolo si è visto come diversi set di dati osservativi, in particolare le osservazioni delle supernove Ia, attestino che l'universo attualmente si stia espandendo in modo accelerato. Inoltre sono state descritte alcune delle possibili cause dell'espansione accelerata, quali l'energia oscura e i modelli di gravità modificata. Per quanto riguarda la prima, si è fatto in particolar modo riferimento ad una sua candidata, la costante cosmologica Λ (che attualmente rappresenta il miglior fit ai dati). Dall'altra parte, circa le teorie di gravità modificata, si è spiegato perché sono state ideate, quali vincoli devono soddisfare e se ne sono illustrati alcuni esempi come il modello di *Brans-Dicke*, il modello DGP e quello $f(R)$.

Nel quarto capitolo si è ottenuta l'equazione che descrive l'evoluzione temporale delle perturbazioni tensoriali nei modelli di gravità modificata data dalla (4.8). In questa trattazione è stato adottato uno specifico modello di gravità modificata, il cosiddetto modello RR, seguendo [2] e [3], ma i risultati ottenuti come la (4.8) e la parametrizzazione del rapporto tra le distanze di luminosità (4.14) sono validi anche per altri modelli, come il DGP per esempio. Di seguito sono stati illustrati alcuni dei limiti imposti dalle misure degli eventi GW170817/GRB 170817A sulla propagazione modificata e sulla velocità delle onde gravitazionali. Nello specifico, sono stati posti dei vincoli alla funzione δ , la cui presenza nella (4.8) sta ad indicare la propagazione modificata, in $z = 0$; i valori di $\delta(0)$ sono dati da (4.23). Questi ultimi sono stati calcolati con la (4.22), tramite il valore della costante di Hubble stimato dalle *candele standard* e diversi valori di questa costante calcolati dai dati dell'evento GW170817, dal (4.18) al (4.20). I limiti dati dai risultati (4.23) potranno essere migliorati tramite altre rivelazioni di *sirene standard*, dal momento che i loro errori scalano come $1/\sqrt{N}$, se N è il numero di sorgenti rivelate. Anche delle misure a valori maggiori di redshift porterebbero dei miglioramenti, poiché, nel regime di bassi redshift, $\frac{d_L^{gw}}{d_L^{em}} \propto z$ [3]. I paletti posti sulla velocità di propagazione delle onde gravitazionali sono indicati dalla (4.28), questi sono di fondamentale importanza, dato che hanno permesso di escludere quei modelli di gravità modificata che avevano previsioni diverse circa v_{gw} .

CONCLUSIONI

Anche in questo caso, ulteriori osservazioni di GW-GRB (*Gravitational Wave* e *Gamma-Ray Burst*) porteranno maggiore chiarezza sugli estremi della (4.28), distinguendo meglio la differenza tra i tempi di emissione dai diversi tempi di propagazione.

Da questa trattazione si deduce che il rapporto $\frac{d_L^{gw}}{d_L^{em}}$ costituisca un'interessante osservabile negli esperimenti sulle onde gravitazionali, essendo in grado di fornire una stima della deviazione dalla Relatività Generale [3]. Un miglioramento della sensibilità degli attuali interferometri e l'utilizzo di interferometri terrestri di terza generazione come ET e di interferometri spaziali come LISA, determineranno un più accurato calcolo di questa deviazione, dal momento che permetteranno di investigare eventi a redshift più alti. Lo studio svolto in [3], in cui si analizza la propagazione modificata delle onde gravitazionali, per arrivare alla parametrizzazione del rapporto $\frac{d_L^{gw}}{d_L^{em}}$ e da qui ai limiti sulla propagazione modificata, potrebbe essere applicata ad altre teorie di gravità modificata. Questa applicazione permetterebbe di svolgere dei calcoli originali su questi modelli, che porterebbero a stabilire dei margini alla loro validità e dei limiti alla propagazione modificata.

Bibliografia

- [1] B. P. Abbott et al. Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817a. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L13, oct 2017.
- [2] E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, and M. Maggiore. Gravitational-wave luminosity distance in modified gravity theories. *Phys. Rev. D*, 97:104066, May 2018.
- [3] E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, and M. Maggiore. Modified gravitational-wave propagation and standard sirens. *Phys. Rev. D*, 98:023510, Jul 2018.
- [4] S. M. Carrol. *Lecture Notes on General Relativity*, 1997.
- [5] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, 2006.
- [6] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [7] A. Franceschini. *Corso di Cosmologia*, 2013.
- [8] M. P. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General Relativity: An introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] K. Koyama. Cosmological tests of modified gravity. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046902, 2016.
- [10] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2003.
- [11] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Theory and Experiments*, volume 1. Oxford University Press, 2008.
- [12] M. Maggiore. *Gravitational Waves: Astrophysics and Cosmology*, volume 2. Oxford University Press, 2018.
- [13] S. Matarrese, M. Colpi, V. Gorini, and Moschella U. *Dark Matter and Dark Energy: A Challenge for Modern Cosmology*. Springer, 2011.