Università degli Studi di Padova

Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

I monopoli di ’t Hooft-Polyakov

Relatore:
Prof. Kurt Lechner
Laureando:
Giammarco Fabiani

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1 Introduzione

L'obbiettivo di questo lavoro è analizzare, in un senso che verrà specificato più avanti, la presenza di monopoli magnetici all'interno di una teoria proposta in un primo momento per l'unificazione delle interazioni debole ed elettromagnetica, il modello $SU(2)$ di Georgi-Glashow. I monopoli magnetici, ossia particelle dotate di carica magnetica, sebbene l'evidenza sperimentale sembra non confermare ad oggi la loro esistenza, rivestono un ruolo importante nelle teorie di Grande Unificazione (GUT), come ad esempio quelle basate sui gruppi di gauge $SU(5)$ o $SO(10)$, dove essi risultano necessariamente presenti. Il loro interesse tuttavia, da un punto di vista storico, è molto meno recente rispetto alle GUT.

Già prima del '900 la loro esistenza fu presa in considerazione all'interno di un contesto classico, ad esempio da P. Curie nel 1894 (si veda [5]), quindi non molti anni dopo la prima formulazione delle equazioni di Maxwell (1865). Queste ultime, che sono alla base della descrizione dell'interazione elettromagnetica, sono costruite sull'evidenza sperimentale dei fenomeni elettromagnetici e quindi negano la possibilità di monopoli magnetici. Infatti, scrivendole (in presenza di sorgenti, nel sistema di Gauss razionalizzato)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} j_e, \tag{4}$$

esse escludono l'esistenza di cariche magnetiche. Si fa tuttavia osservare che l'eventuale presenza di cariche magnetiche porterebbe ad una modifica delle stesse, in particolare della (2) e della (3) con l'aggiunta rispettivamente di una corrente e una densità magnetica.

L'importanza dei monopoli si affermò con l'avvento della meccanica quantistica e più in particolare grazie al celebre lavoro di Dirac del 1931 (si veda [6]). In esso egli introdusse *ad hoc* una particella puntiforme con carica magnetica g, il cosiddetto *monopolo di Dirac*, e studiò in ambito quantistico (non relativistico) il moto di un elettrone in presenza del campo magnetico da essa generato. Come fatto notare dallo stesso nel suo lavoro, sebbene in una teoria elementare classica sia possibile descrivere l'interazione tra cariche elettriche e magnetiche in termini dei campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$, se si vogliono scrivere le equazioni del moto tramite una Hamiltoniana, e questo è indispensabile in meccanica quantistica, è necessario introdurre i potenziali scalare e vettore. Ciò genera un problema, in quanto in presenza di una tale carica magnetica si ha

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^3}\vec{r}, \tag{5}$$

e quindi

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = g\delta^{(3)}(\vec{x}), \tag{6}$$

per cui non è più possibile scrivere $\vec{B}$ in termini di un potenziale vettore, ovvero porre $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ con un unico $\vec{A}$ regolare in tutto lo spazio. Ci si chiede quindi se una teoria quantistica, basata sulla "quantizzazione canonica" dell'Hamiltoniana classica, risulti consistente in presenza di monopoli magnetici. Dirac trovò che una condizione necessaria per una teoria quantistica (non relativistica) consistente è che tra carica elettrica e magnetica ci sia una ben determinata relazione. Tale relazione prende il nome di *condizione di quantizzazione della carica elettrica*, e in sostanza afferma che se nello spazio è presente una particella con carica magnetica, allora tutte le cariche elettriche e_n risultano quantizzate e multiple di una carica fondamentale e. Esplicitamente essa è

$$e_n g = 2\pi n\hbar c, \qquad e = \frac{2\pi\hbar c}{g}, \tag{7}$$

con n intero[1].

L'importanza di questa condizione è che ad oggi non ci sono altre spiegazioni per la quantizzazione della carica elettrica[2], che d'altro canto è sperimentalmente accertata con estrema precisione.

Ciò che attualmente invece non è stato verificato sperimentalmente è l'esistenza stessa di un tale tipo di particelle, la cui importanza teorica va ben al di là del monopolo di Dirac; infatti, come già detto, particelle con carica magnetica non nulla sono necessariamente presenti nelle teorie di Grande Unificazione.

Nel presente lavoro si analizza il modello più semplice di Georgi-Glashow $SU(2)$ proposto nel 1972 come teoria di unificazione delle interazioni deboli e elettromagnetica. Esso consta di un campo di gauge $\vec{W}^\mu$ in interazione con un tripletto $\vec{\varphi}$ di Higgs di campi scalari in presenza di un potenziale quartico di autointerazione; una teoria di campo classica per questo modello è descritta da un'azione $I_{cl} = I_{cl}[\vec{W}^\mu, \vec{\varphi}] \equiv I_{cl}[\phi]$. Per passare da questa ad una teoria di campo quantistica (QFT), è possibile utilizzare l'approccio dell'integrale sui cammini di Feynman. Questo è basato sull'utilizzo di un integrale funzionale (nel quale il dominio di integrazione è uno "spazio di funzioni") il cui integrando contiene il termine $e^{\frac{i}{\hbar}I[\phi]}$, dove $I[\phi]$ è l'azione al variare dei campi ϕ. Si può far vedere che l'integrando dà contributi dominanti per configurazioni classiche ϕ_{cl} ad energia finita che sono soluzioni delle equazioni del moto; per queste configurazioni cioè, la fase dell'esponenziale varierà di poco; infatti in tal caso $\frac{\delta I}{\delta \phi}[\phi_{cl}] = 0$. Insomma, soluzioni di questo tipo, che verranno dette "semiclassiche", danno un contributo significativo in QFT.

't Hooft analizza quindi le soluzioni semiclassiche del modello di Georgi-Glashow, trovando che esse non sono deformabili con continuità una nell'altra, ma cadono in classi topologicamente distinte e caratterizzate da un intero $\nu \in \mathbb{Z}$. Se $\nu = 0$ il campo di Higgs $\vec{\varphi}$ è deformabile con continuità a una costante e la soluzione ha carica magnetica nulla; per $\nu = 1$ $\vec{\varphi}$ va come un versore radiale e la soluzioni associata ha carica magnetica $g = 4\pi\hbar c/e$. Per ν arbitrario le soluzioni hanno carica magnetica $g = 4\pi\hbar c\nu/e$. Per avere monopoli magnetici è necessario allora che la soluzione sia caratterizzata almeno da $\nu = 1$. Storicamente una tale soluzione è stata per prima trovata nel 1974 indipendentemente da 't Hooft e Polyakov, e i monopoli ad essa associati hanno preso il nome di *monopoli magnetici di 't Hooft-Polyakov*[3].

In questo lavoro, seguendo l'ansatz proposto da 't Hooft (si veda [11]) per soluzioni statiche e a simmetria sferica, si sono risolte le equazioni del moto derivate dalla lagrangiana del modello di Georgi-Glashow. Una volta identificato il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ per questa teoria, si ottiene che il campo magnetico $\vec{B}$ ha una forma identica a quello di Dirac dato da (5). C'è tuttavia una differenza fondamentale tra i due monopoli: nel primo caso la quantità rilevante da un punto di vista fisico, ovvero il campo di forze $\vec{G}^{\mu\nu}$ (che verrà introdotto in 2.1), risulta regolare nella posizione del monopolo, mentre nel caso del monopolo di Dirac il campo $\vec{B}$ va come $1/r^2$, singolare nell'origine dove si trova il monopolo.

[1]Nel 1979 in QFT è stato mostrato che questa è anche una condizione sufficiente, si veda [4].

[2]Lasciando da parte le teorie di Grande Unificazione.

[3]Per ragioni topologiche un tale tipo di monopoli non sono invece presenti nel "modello standard".

La peculiarità dei monopoli di 't Hooft-Polyakov, e in generale di quelli derivanti da una teoria di Grande Unificazione è che essi sono intrinseci al modello sottostante, a differenza di quanto accade per quello di Dirac, il cui monopolo è stato invece posto "a mano". Ciò ha inoltre un'altra conseguenza fondamentale: se nel monopolo di Dirac la massa della particella associata è arbitraria, nell'altro caso la massa della particella è determinata dal modello stesso e può essere calcolata. Nel modello di Georgi-Glashow qui analizzato, è possibile determinare un limite inferiore sulla massa del monopolo, detto *limite di Bogomol'nyi*, dato da

$$M \geq a\sqrt{q^2 + g^2}, \tag{8}$$

dove a è una costante contenuta nel modello, q e g sono rispettivamente la carica elettrica e magnetica.

Del resto, come mostrato da Prasad e Sommerfield (si veda [10]), esistono soluzioni esatte che saturano la (8), con massa quindi ben determinata. Tali soluzioni prendono il nome di *monopoli BPS*. Ponendo $q = 0$, la massa(energia) dei monopoli BPS raggiunge il suo minimo assoluto dato da $M = ag$ ed essendo g un numero quantico conservato, queste rappresentano soluzioni di particella stabili.

Quanto detto può essere generalizzato al caso di soluzioni dioniche, ovvero che presentano sia carica elettrica che magnetica (si veda [8]); anche in questo caso esistono soluzioni esatte nello stesso limite dei monopoli BPS. Tuttavia nel lavoro presentato ci si è limitati a soluzioni di sola carica magnetica, dando particolare rilievo al confronto con il monopolo di Dirac, il tutto seguendo in linea generale il lavoro originale di 't Hooft.

Notazione. Nel presente lavoro si adotterà la seguente notazione:

- gli indici greci (ad esempio μ, ν, ρ, σ) prendono i valori 0,1,2,3. Un generico quadrivettore si scriverà $t^\mu = (t^0, \vec{t}\,)$; un generico campo tensoriale quadridimensionale di rango (n,m) si scriverà $L^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \ldots \nu_m}$, con n indici controvarianti e m covarianti. La metrica adottata è quella dello spaziotempo di Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ di segnatura $(1, -1, -1, -1)$;

- gli indici latini (i,j,k...) prendono i valori 1,2,3 e saranno utilizzati per grandezze vettoriali e per la parte spaziale di quadrivettori/campi tensoriali;

- si porrà c=1, $\hbar = 1$ se non indicato diversamente;

- eventuali notazioni aggiuntive verranno specificate *in itinere*.

2 Il modello di Georgi-Glashow

I monopoli magnetici di 't Hooft-Polyakov emergono naturalmente come particolari soluzioni del modello di Georgi-Glashow . Questo, proposto nel 1972, vuole descrivere l'interazione elettrodebole attraverso una teoria basata sul gruppo di gauge $SU(2)$. Nel modello è presente un campo di gauge in interazione con un tripletto $\vec{\varphi}$ [4] di Higgs di campi scalari in presenza di un potenziale quartico di autointerazione $V(\varphi)$.

Si espongono ora brevemente alcune proprietà del gruppo di simmetria $SU(2)$ di questo modello, e più in generale di $SU(n)$: $SU(n)$ rappresenta il gruppo delle matrici unitarie $n \times n$, ossia tali che $U^\dagger U = 1$, con determinante unitario. Esso ha dimensione $n^2 - 1$. Essendo gli elementi di $SU(n)$ matrici unitarie, i suoi generatori T^i sono matrici hermitiane e soddisfano la relazione delle algebre di Lie: $[T^i, T^j] = i f_n^{ijk} T^k$, dove f_n^{ijk} rappresentano, al variare della dimensione n, le costanti di struttura del gruppo. Ad esempio nel caso di $SU(2)$, che è il caso del modello in questione, i generatori Hermitiani sono dati da $\sigma^i/2$, dove σ^i sono le matrici di Pauli e si ha $f_2^{ijk} = \varepsilon^{ijk}$.

Poiché nel modello di Georgi-Glashow tutti i campi appartengono alla rappresentazione aggiunta di $SU(2)$ e questo è localmente isomorfo a $SO(3)$[5], si può utilizzare quest'ultimo come gruppo di simmetria del modello anziché $SU(2)$. In questo modo, i potenziali di gauge e il campo scalare di Higgs che verranno introdotti a breve, possono essere trattati come vettori e compatibilmente le trasformazioni di gauge possono essere considerate come rotazioni in uno spazio 3-dimensionale, detto di isospin. Si utilizzerà quindi indifferentemente la notazione vettoriale e quella ad indici, ovvero si pone $\vec{\varphi} = \varphi^a$ con $a = 1, 2, 3$.

Si cerca quindi di ricavare un'azione invariante sotto trasformazioni di gauge locali $SO(3)$ partendo dal campo scalare di Higgs $\vec{\varphi}(x)$. Il termine di campo libero è dato da

$$I = \int \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^a \, \partial^\mu \varphi^a \, d^4x. \tag{9}$$

Indicando con $R(x) \in SO(3)$ una generica trasformazione di gauge, il campo $\vec{\varphi}$ trasforma come

$$\varphi^a(x) \longrightarrow \varphi'^a(x) = R^a_b(x) \varphi^b(x). \tag{10}$$

Considerando trasformazioni di gauge globali: $R(x) = R$, ovvero indipendenti da x, allora l'azione risulta già gauge-invariante; tuttavia per trasformazioni locali, poiché la derivata agisce anche sulla $R(x)$, non è più vero. Per ristabilire l'invarianza si introducono i tre quadripotenziali W^a_μ, detti potenziali di Yang-Mills, e si definisce *ad hoc* la derivata covariante $D_\mu \varphi^a$ come

$$D_\mu \varphi^a = \partial_\mu \varphi^a - e \varepsilon^{abc} W^b_\mu \varphi^c, \tag{11}$$

dove e può essere interpretata come carica elettrica.

Se si postula che la legge di trasformazione di W^a_μ sotto SO(3) sia

$$W'^a_\mu(x) = R^a_b W^b_\mu(x) - \frac{1}{e} R^g_f (\partial_\mu R^c_f) \varepsilon^{agc}, \tag{12}$$

allora la nuova azione, data da

$$I = \int \frac{1}{2} D_\mu \varphi^a \, D^\mu \varphi^a \, d^4x, \tag{13}$$

[4] Con la "freccia" si indicheranno tripletti di $SU(2)$, intendendo ad esempio: $\vec{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$.

[5] Più precisamente vale che $\frac{SU(2)}{(I,-I)} \cong SO(3)$, dove I è l'identità.

risulta invariante per trasformazioni di gauge locali. Infatti

$$(D_\mu\varphi^a)' = \partial_\mu\varphi'^a - e\varepsilon^{abc}W'^b_\mu\,\varphi'^c = R^b_a D_\mu\varphi^b + (\partial_\mu R^a_b)\varphi^b - e\varepsilon^{abc}(\frac{1}{2e}R^g_f\,\partial_\mu R^d_f\,\varepsilon^{bgd})R^c_h\,\varphi^h. \tag{14}$$

Il terzo termine può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
-e\varepsilon^{abc}(\frac{1}{2e}R^g_f\,\partial_\mu R^d_f\,\varepsilon^{bgd})R^c_h\,\varphi^h &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\varepsilon^{bgd}\,R^g_f\,(\partial_\mu R^d_f)R^c_h\varphi^h = \\
&= \frac{1}{2}[\delta^{ag}\delta^{cd} - \delta^{ad}\delta^{cg}]R^g_f\,(\partial_\mu R^d_f)R^c_h\varphi^h = \\
&= \frac{1}{2}[R^a_f\,(\partial_\mu R^c_f)R^c_h\varphi^h - R^g_f(\partial_\mu R^a_f)R^g_h\varphi^h] = \\
&= \frac{1}{2}[-R^c_f(\partial_\mu R^a_f)R^c_h - \delta^{fh}\partial_\mu R^a_f]\varphi^h = -\partial_\mu R^a_f\,\varphi^f,
\end{aligned} \tag{15}$$

quindi gli ultimi due termini nella (14) si semplificano e si ottiene

$$(D_\mu\varphi^a)' = R^a_b D_\mu\varphi^b. \tag{16}$$

La derivata covariante dunque trasforma in maniera covariante per trasformazioni di gauge locali.

Si è visto che per rendere invariante l'azione per il campo di Higgs $\vec{\varphi}$, si è definita una derivata covariante che introduce dei nuovi campi: i quadripotenziali $\vec{W}^\mu$. L'azione totale dovrà quindi comprendere un termine, anch'esso gauge-invariante, che descriva la dinamica per questi nuovi campi. In analogia col campo elettromagnetico si definisce un campo di forze del tipo $\vec{G}^{\mu\nu}$ che trasforma in maniera covariante per $SO(3)$; a tal scopo si considera il commutatore

$$[D_\mu, D_\nu]\varphi^a = D_\mu D_\nu\varphi^a - D_\nu D_\mu\varphi^a, \tag{17}$$

che può essere scritto come

$$[D_\mu, D_\nu]\varphi^a = \varepsilon^{abc}\,G^b_{\mu\nu}\,\varphi^c \qquad \text{con} \tag{18}$$

$$G^b_{\mu\nu} = \partial_\mu W^b_\nu - \partial_\nu W^b_\mu - e\,\varepsilon^{bcd}W^c_\mu\,W^d_\nu. \tag{19}$$

Scegliendo questa espressione per il campo di forze $G^a_{\mu\nu}$, che viene detto di Yang-Mills, allora esso trasforma automaticamente in maniera covariante perché vale $(D_\mu D_\nu\varphi^a)' = R^a_b D_\mu D_\nu\varphi^b$. Da ciò segue che il termine che descrive la dinamica del potenziale $\vec{W}^\mu$, ovvero

$$I_{YM} = \int G^a_{\mu\nu}\,G^{a\,\mu\nu}\,d^4x, \tag{20}$$

è invariante per trasformazioni di gauge locali. Si può ora scrivere l'azione complessiva inserendo opportunamente le costanti e aggiungendo il termine che descrive l'autointerazione del campo di Higgs, ossia il potenziale

$$V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2 - a^2)^2, \tag{21}$$

dove λ è una costante di accoppiamento che si assume essere positiva. Anche $V(\varphi)$ è gauge-invariante e l'azione totale è quindi

$$I_{tot} = \int \Big(-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}\,G^{a\,\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\varphi^a\;D^\mu\varphi^a - V(\varphi)\Big)d^4x \equiv \int \mathcal{L}\,d^4x, \tag{22}$$

dove si è definita la densità di lagrangiana $\mathcal{L}$.

Considerando le equazioni di Eulero-Lagrange rispettivamente per $\vec{W}^\mu$ e per $\vec{\varphi}$, si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$D_\nu \vec{G}^{\mu\nu} = -e\,\vec{\varphi} \times\, D^\mu \vec{\varphi}, \qquad D^\mu D_\mu\,\vec{\varphi} = -\lambda(\varphi^2 - a^2)\vec{\varphi}. \tag{23}$$

Ponendo ${}^*\vec{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\vec{G}_{\rho\sigma}$, dalla (19) segue inoltre l'identità di Bianchi

$$D_\mu\,{}^*\vec{G}^{\mu\nu} = 0 \qquad \Big(\Longleftrightarrow D_{[\lambda}\vec{G}_{\mu\nu]} = 0\Big). \tag{24}$$

Dal teorema di Noether per questa teoria si può costruire poi il tensore energia-impulso simmetrico e conservato

$$T^{\mu\nu} = \vec{G}^{\mu\lambda} \cdot \vec{G}_\lambda{}^\nu + D^\mu\vec{\varphi} \cdot D^\nu\vec{\varphi} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \tag{25}$$

sicché la densità di energia è data da

$$T^{00} = \frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}^i \cdot \vec{\mathcal{E}}^i + \frac{1}{2}\vec{\mathcal{B}}^i \cdot \vec{\mathcal{B}}^i + \frac{1}{2}D^0\vec{\varphi} \cdot D^0\vec{\varphi} + \frac{1}{2}D^i\vec{\varphi} \cdot D^i\vec{\varphi} + V(\varphi) \geq 0, \tag{26}$$

dove $\vec{\mathcal{E}}^i = \vec{G}^{i0}$ e $\vec{\mathcal{B}}^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\vec{G}^{jk}$.

3 Condizione di vuoto e vuoto di Higgs

Nella ricerca di soluzioni per il modello di Georgi-Glashow è fondamentale il concetto di vuoto, in particolare di *vuoto di Higgs*. Si dice che i campi sono in una configurazione di vuoto se T^{00} è ovunque nulla, ovvero, dato che tutti gli addendi della (26) sono positivi, se vale

$$\vec{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{27}$$

$$D^\mu \vec{\varphi} = 0 \tag{28}$$

$$V(\varphi) = 0. \tag{29}$$

Tali equazioni sono gauge-invarianti, pertanto una qualunque trasformazione di gauge effettuata su queste dà comunque una configurazione di vuoto. La struttura di vuoto di Higgs è invece definita dalle ultime due equazioni, la (28) e la (29); pertanto richiede una condizione meno restrittiva.

Per quanto riguarda la configurazione di vuoto, le uniche soluzioni di (27)-(29) sono date, a meno di trasformazioni di gauge, da $\vec{W}^\mu = 0$, $\vec{\varphi} = (0, 0, a)$. Come si vedrà più avanti, per il vuoto di Higgs esistono invece soluzioni esplicite non banali, che tuttavia sono singolari in almeno un punto.

L'importanza di queste configurazioni sta nel fatto che se si vuole una soluzione ad energia finita, essendo l'energia data da $E = \int T^{00}\, d^3x$, si deve avere che i singoli termini di T^{00} si annullino all'infinito più rapidamente di $1/|\vec{x}|^3$; questo vuol dire che *asintoticamente* si deve raggiungere una configurazione di vuoto. Nell'ansatz esaminato, quello di 't Hooft-Polyakov, si avrà che il campo $\vec{\varphi}$ raggiunge all'infinito la condizione di vuoto di Higgs, la quale è caratterizzata da proprietà ben definite, che ora verranno esaminate.

3.1 Vuoto di Higgs

Si suppone quindi che il campo scalare $\vec{\varphi}$ raggiunga asintoticamente il vuoto di Higgs, per cui valgono (28) e (29). Da ora in poi quando si parlerà di vuoto di Higgs, si supporrà che il campo scalare $\vec{\varphi}$ asintotico, definito come $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} \vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_\infty(t, \vec{x}/r)$, $r = |\vec{x}|$ soddisfi le (28) e (29).

Le equazioni (28) e (29) permettono di classificare le forme del campo scalare $\vec{\varphi}_\infty$ e dei quadripotenziali $\vec{W}^\mu$ asintotici (che per semplicità di scrittura si indicheranno ancora con $\vec{W}^\mu$).

Infatti, $V(\varphi) = 0$ implica che $\varphi^2_\infty = a^2$. L'insieme dei valori che annullano il potenziale sono tutti quelli tali che $\vec{\varphi}_\infty \in \mathcal{M}_0$, dove $\mathcal{M}_0$ è la sfera 2-dimensionale di raggio a nello spazio di isospin. La condizione $D^\mu \vec{\varphi}_\infty = 0$ esplicitamente è

$$\partial^\mu \vec{\varphi}_\infty - e\vec{W}^\mu \times \vec{\varphi}_\infty = 0, \tag{30}$$

che specifica il potenziale $\vec{W}^\mu$ nelle componenti trasversali a $\vec{\varphi}_\infty$. Noto $\vec{\varphi}_\infty$, si ha che la soluzione della (30) per $\vec{W}^\mu$ è data da

$$\vec{W}^\mu = \frac{1}{a^2 e} \vec{\varphi}_\infty \times \partial_\mu \vec{\varphi}_\infty + \frac{1}{a} \vec{\varphi}_\infty A_\mu, \tag{31}$$

dove A_μ è un quadripotenziale arbitrario; tuttavia si può notare che $A^\mu = \frac{1}{a} \vec{\varphi}_\infty \cdot \vec{W}^\mu$.

Guardando alla componente temporale della (30)

$$\partial^0 \varphi^a_\infty - e\,\varepsilon^{abc}\, W^{0b}\, \varphi^c_\infty = 0, \tag{32}$$

se si impone il gauge-fixing $\vec{W}^0 = 0$, essa diventa $\dot{\vec{\varphi}}_\infty = 0$, ossia il campo $\vec{\varphi}_\infty$ è indipendente dal tempo. Con questa scelta della gauge, che lascia tuttavia la possibilità di effettuare trasformazioni di gauge indipendenti dal tempo, quindi di poter "ruotare" il campo $\vec{\varphi}_\infty$ lungo qualsiasi direzione, si può studiare il comportamento del campo di Higgs all'infinito spaziale indipendentemente dalla coordinata temporale. Un tale $\vec{\varphi}_\infty$ induce allora una funzione

$$\vec{\varphi}_\infty : \qquad \Sigma_\infty \longrightarrow \mathcal{M}_0, \tag{33}$$

dove Σ_∞ è la sfera all'infinito spaziale. Il campo di Higgs $\vec{\varphi}_\infty$, visto come mappa tra due sfere, è un elemento di $\Pi_2(\mathcal{M}_0)$[6] ed è caratterizzato da un intero ν detto *grado della mappa*, che intuitivamente specifica il numero di volte in cui la sfera Σ_∞ avvolge $\mathcal{M}_0$. Ponendo $\vec{n} = \vec{x}/|x|$ e ricordando che $|\vec{\varphi}_\infty| = a$, se si pone

$$\vec{\varphi}_\infty(\vec{n}) = a\vec{N}(\vec{n}), \tag{34}$$

si ha che i diversi andamenti del versore $\vec{N}(\vec{n})$ sono classificati dall'intero ν. In particolare

- Se $\vec{N}(\vec{n})$ è un versore costante, ad esempio $\vec{N}(\vec{n}) = (0, 0, 1)$, si ha $\nu = 0$. Un tale $\vec{\varphi}_\infty$ definisce quello che viene chiamato *vuoto banale* (di Higgs).
- Se $\vec{N}(\vec{n})$ è il versore radiale, ovvero $\vec{N}(\vec{n}) = \vec{n}$, allora $\nu = 1$; in pratica $\vec{\varphi}_\infty$ è la mappa identica tra le due sfere.

È possibile costruire esplicitamente esempi di mappe di grado superiore; in tutta generalità si ha che il *grado della mappa* ν è dato da

$$\nu = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma \varepsilon_{ijk}\vec{N}\cdot(\partial_j\vec{N}\times\partial_k\vec{N})d\Sigma_i. \tag{35}$$

È ovvio che ν è invariante per deformazioni continue di $\vec{N}$: $\vec{N} \longrightarrow \vec{N} + \delta\vec{N}$. Queste deformazioni comprendono:

1. evoluzione temporale di $\vec{N}$.
2. trasformazioni di Gauge regolari di $\vec{N}$.
3. deformazioni continue di Σ.

Più avanti si vedrà come ν sia legato alla carica magnetica e come questa erediterà le proprietà di invarianza di esso.

3.2 Il vuoto banale

Particolarmente interessante è il caso in cui $\vec{N}(\vec{n})$ è un versore costante; come già detto, in questo caso si parla di *vuoto banale* di Higgs. La condizione (29) dice che $\vec{\varphi}_\infty$ assume valori nella sfera 2-dimensionale $\mathcal{M}_0$. Una scelta compatibile con tale condizione può ad esempio essere $\vec{\varphi}_\infty = (0, 0, a)$ con W^μ determinato dalla (31); la scelta di una tale configurazione, che equivale ad aver scelto la direzione z nello spazio di isospin, porta necessariamente ad una *rottura spontanea* della simmetria del modello. Se il gruppo di simmetria era all'origine $G = SO(3)$, dopo la rottura esso sarà il sottogruppo H di G: $H = SO(2) \simeq U(1)$, cioè l'insieme delle rotazioni (nello spazio di isospin) attorno all'asse della direzione scelta. Si è quindi ottenuta una teoria che è gauge-invariante sotto U(1), come l'elettromagnetismo. Questo permetterà di definire un tensore $F^{\mu\nu}$, che nel vuoto banale farà le veci di quello elettromagnetico convenzionale.

[6] $\Pi_n(\mathcal{M}_0)$ è la classe di omotopia delle mappe $S^n \to \mathcal{M}_0$, dove S^n è la sfera n-dimensionale.

3.3 Il tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$

Si è osservato che in una configurazione di vuoto la simmetria originaria del modello si rompe in una più piccola, l'invarianza sotto $U(1)$, la quale è associata all'interazione elettromagnetica. L'analogo tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$ è univocamente determinato dalle seguenti richieste:

1. $\partial_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = 0$ nei punti in cui $\vec{\varphi} \neq 0$. ($\Longleftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ dove A_μ è il quadripotenziale elettromagnetico).
2. In una configurazione di vuoto banale (si veda la sezione 3.2) e nella "gauge unitaria": $\vec{\varphi}(\vec{x}) = (0, 0, \varphi^3(\vec{x}))$, si ha $A_\mu = \vec{W}_\mu \cdot \hat{\varphi} = W^3_\mu$, dove $\hat{\varphi} = \frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}$.
3. $F^{\mu\nu}$ è invariante sotto SO(3).

L'unico $F^{\mu\nu}$ che soddisfa a queste richieste è quello proposto da 't Hooft

$$F^{\mu\nu} = \hat{\varphi} \cdot \vec{G}^{\mu\nu} + \frac{1}{e}\hat{\varphi} \cdot (D^\mu\hat{\varphi} \times D^\nu\hat{\varphi}). \tag{36}$$

Prima di verificare che tale $F^{\mu\nu}$ soddisfa le richieste elencate, si fa notare che il termine $\vec{W}_\mu \cdot \hat{\varphi}$ è quello che, secondo il meccanismo di Higgs, descriverà il bosone senza massa del modello in esame, che è naturalmente identificato con il fotone; si veda la sezione 4. Queste richieste insomma "trasportano" le proprietà del tensore elettromagnetico convenzionale in quello del modello di Georgi-Glashow dopo la rottura.

La terza proprietà è soddisfatta in maniera manifesta. Per quanto riguarda la prima e la seconda, sfruttando l'invarianza di gauge per trasformare il campo $\hat{\varphi}$ nel versore costante $\hat{e}_3 = (0, 0, 1)$, nei punti in cui $\vec{\varphi} \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi} \cdot \vec{G}_{\mu\nu} =& \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - e\,\varepsilon^{3ab}\, W^a_\mu\, W^b_\nu, \\
\frac{1}{e}\hat{\varphi} \cdot (D^\mu\hat{\varphi} \times D^\nu\hat{\varphi}) =& e\,\varepsilon^{3ab}\,\varepsilon^{ad3}\,\varepsilon^{bm3}\, W^d_\mu\, W^m_\nu = e\,\varepsilon^{3ab}\,(\delta^{ab}\delta^{dm} - \delta^{am}\delta^{bd})\, W^d_\mu\, W^m_\nu = \\
=& e\,\varepsilon^{3aa}\, W^d_\mu\, W^d_\nu - e\,\varepsilon^{3ab}\, W^b_\mu\, W^a_\nu = -e\,\varepsilon^{3ab}\, W^b_\mu\, W^a_\nu = e\,\varepsilon^{3ab}\, W^a_\mu\, W^b_\nu.
\end{aligned}$$

Sommando le due espressioni si ottiene

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{37}$$

che dimostra la prima, ma anche la seconda.

Ritornando alla (36), si osserva che nel vuoto banale, asintoticamente, essa si riduce a $F^{\mu\nu} = \vec{N} \cdot \vec{G}^{\mu\nu}$ [7] e si ha che valgono le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = 0. \tag{38}$$

La seconda è stata appena dimostrata, per quanto riguarda la prima si ha

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = D_\mu F^{\mu\nu} = D_\mu(\vec{N} \cdot \vec{G}^{\mu\nu}) = (D_\mu\vec{N}) \cdot \vec{G}^{\mu\nu} + \vec{N} \cdot D_\mu\vec{G}^{\mu\nu} = 0, \tag{39}$$

essendo $D_\mu\vec{N} = 0$[8] e $D_\mu\vec{G}^{\mu\nu} = 0$ per la (23) in configurazione di vuoto.

[7] Valida in realtà anche in condizione di vuoto di Higgs non banale.

[8] Basta notare che $D_\mu\vec{N} = D_\mu\hat{\varphi}_\infty = \frac{1}{|\vec{\varphi}_\infty|}D_\mu\vec{\varphi}_\infty + \vec{\varphi}_\infty D_\mu\frac{1}{|\vec{\varphi}_\infty|} = \frac{1}{|\vec{\varphi}_\infty|}D_\mu\vec{\varphi}_\infty - \frac{(\vec{\varphi}_\infty \cdot \partial_\mu\vec{\varphi}_\infty)}{|\vec{\varphi}_\infty|^3}\vec{\varphi}_\infty = 0$, essendo $D_\mu\vec{\varphi}_\infty = 0 = (\vec{\varphi}_\infty \cdot \partial_\mu\vec{\varphi}_\infty)$ in condizioni di vuoto banale.

Più in generale, inserendo nella (36) l'espressione esplicita di $\vec{G}^{\mu\nu}$ data da (19) e l'espressione esplicita di $D^\mu\hat{\varphi}$, si ha che i termini proporzionali a $\vec{W}^\mu \times \vec{W}^\nu$ si semplificano e $F^{\mu\nu}$ assume la seguente forma

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{e}\hat{\varphi} \cdot (\partial^\mu\hat{\varphi} \times \partial^\nu\hat{\varphi}) + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{40}$$

con $A^\mu = \vec{W}^\mu \cdot \hat{\varphi}$.

Chiaramente, poiché nel vuoto banale si può scegliere $\hat{\varphi} = (0, 0, 1)$, la (40) si riduce alla (37). Tuttavia per vuoti non banali il primo termine della (40) è in generale non nullo e non vale più la seconda della (38). Infatti con un calcolo fatto nel senso delle distribuzioni di

$$\partial_{[\alpha}F_{\mu\nu]} = \partial_{[\alpha}\Big[\frac{1}{e}\hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu\hat{\varphi} \times \partial_{\nu]}\hat{\varphi})\Big], \tag{41}$$

verrebbero termini proporzionali alla delta di Dirac nei punti in cui $\vec{\varphi} = 0$. Ciò dice che le sorgenti del campo sono localizzate nei punti in cui $\vec{\varphi} = 0$ e che ad esse è associata una carica magnetica; per tale motivo si identificheranno tali sorgenti come *monopoli magnetici*. Ad esempio, come si vedrà in 5.2, nelle soluzioni di 't Hooft-Polyakov il monopolo è situato nell'origine, che corrisponde all'unico punto in cui $\vec{\varphi} = 0$ (si veda anche 5.3).

D'altronde, considerando la solita superficie Σ e usando l'espressione di $F^{\mu\nu}$ data da (40) è possibile calcolare la carica magnetica associata al tensore $F^{\mu\nu}$ come

$$g_\Sigma = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{1}{2e}\int_\Sigma \varepsilon_{ijk}\vec{N} \cdot (\partial_j\vec{N} \times \partial_k\vec{N})d\Sigma_i, \tag{42}$$

dove $\vec{B}$ è il campo magnetico definito da $B^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk}$ e il contributo di A^μ al flusso è nullo per il teorema di Stokes. Per il calcolo esplicito di g_Σ risulta importante ricordare che il campo $\vec{\varphi}_\infty$ definisce una mappa tra due sfere, caratterizzata dal *grado della mappa* ν. Ma tale quantità, espressa dalla (35) è proprio l'espressione di g_Σ a meno di costanti. Più precisamente si ha che

$$eg_\Sigma = -4\pi\nu, \tag{43}$$

che dà, a meno di un fattore $\frac{1}{2}$ la condizione di quantizzazione di Dirac, essendo ν un intero. Da quanto detto sull'invarianza di ν nella sottosezione 3.1, si ha che la carica magnetica è indipendente dal tempo, è gauge-invariante, è indipendente dalla superficie Σ, purché questa contenga monopoli. In sintesi quindi, se un monopolo o un insieme di monopoli ha carica magnetica g, essa si conserverà. Una soluzione con carica magnetica diversa da zero non decadrà mai in una condizione di vuoto. Per cercare monopoli si dovranno quindi cercare delle soluzioni alle equazioni del moto tali che $\vec{\varphi}_\infty$ almeno non sia una mappa costante che avrebbe carica nulla. L'ansatz proposto da 't Hooft e Polyakov tenta appunto di trovare una soluzione di questo tipo, con un campo di Higgs che all'infinito sia del tipo $\vec{\varphi}_\infty(\vec{n}) = a\,\vec{N}(\vec{n}) = a\vec{n}$.

4 Lo spettro del modello

Per studiare lo spettro del modello, si espande il campo di Higgs attorno ad un suo valore di minimo $\vec{a}$ determinato dalla condizione $V(\varphi) = 0$. Per comodità si sceglie come configurazione di vuoto, il vuoto banale con $\vec{a} = a(1,0,0)$. Si pone allora

$$\vec{\varphi} = \vec{a} + \vec{\phi}, \tag{44}$$

dove $\vec{\phi} = (\phi^1(x), \phi^2(x), \phi^3(x))$. E' possibile compiere una trasformazione di gauge ("gauge-fixing") che elimina la seconda e la terza componente di $\vec{\phi}$, alle quali, per il teorema di Goldstone, sarebbero associate due particelle di massa nulla: $\phi^2(x) = \phi^3(x) = 0$, $\phi^1(x) \equiv \phi$. Tale gauge viene detta *gauge unitaria*.

Si espande ora la densità di lagrangiana attorno a $\vec{\phi}$ considerando dapprima i termini proporzionali a ϕ^2. Essi derivano unicamente dal potenziale $V(\varphi)$ che esplicitamente è

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}(\varphi - a^2)^2 = \frac{\lambda}{4}\Big((\vec{a} + \vec{\phi})^2 - a^2\Big)^2 = \frac{\lambda}{4}(2\vec{a}\cdot\vec{\phi} + \phi^2)^2 = \lambda a^2(\hat{a}\cdot\vec{\phi})^2 + ... \tag{45}$$

Associato al campo $(\hat{a}\cdot\vec{\phi}) = \phi$ vi è un bosone massivo, la cui massa la si può esplicitare scrivendo

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\sqrt{2\lambda}a)^2(\phi)^2 + ... = \frac{1}{2}\left(\frac{M_\phi}{\hbar}\right)^2(\phi)^2 + ... \tag{46}$$

con $M_\phi = a\hbar\sqrt{2\lambda}$. Per il meccanismo di Higgs, nel modello in esame sono presenti altri due bosoni massivi, i bosoni vettori $W_\mu^\pm$ e un altro non massivo W_μ^1, definiti nel seguente modo

$$\vec{W}_\mu \cdot \hat{a} = W_\mu^1, \qquad W_\mu^\pm = W_\mu^2 \pm iW_\mu^3. \tag{47}$$

Per determinare la loro massa si vanno a vedere i termini proporzionali a $W_\mu^+ W^{-\mu}$ e $W_\mu^1 W^{\mu 1}$. Si osserva facilmente che essi derivano dal termine $\frac{1}{2}D^\mu\vec{\varphi}\cdot D_\mu\vec{\varphi}$; infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}D^\mu\vec{\varphi}\cdot D_\mu\vec{\varphi} &= ... + \frac{1}{2}e^2\varepsilon^{abc}\,W_\mu^b\,\varphi^c\,\varepsilon^{ade}\,W^{\mu d}\,\varphi^e = ... + \frac{1}{2}e^2(\delta^{bd}\delta^{ce} - \delta^{bc}\delta^{cd})W_\mu^b W^{\mu d}\varphi^c\varphi^e = \\ &= ... + \frac{1}{2}e^2\Big(W^{\mu a}W_\mu^a(\phi + a)^b\,(\phi + a)^b - W_\mu^a(\phi + a)^a\,W^{\mu b}(\phi + a)^b\Big).\end{aligned}$$

Concentrandosi sui termini quadratici in $\vec{W}^\mu$, si ha

$$\begin{aligned}&= ... + \frac{1}{2}e^2\Big(a^2\vec{W}_\mu\cdot\vec{W}^\mu - \vec{W}_\mu\cdot(\vec{a} + \vec{\phi})\,\vec{W}^\mu\cdot(\vec{a} + \vec{\phi})\Big) \stackrel{47}{=} ... + \frac{1}{2}e^2a^2\Big(W_\mu^2W^{2\mu} + W_\mu^3W^{3\mu}\Big) = \\ &= ... + \frac{1}{2}e^2a^2W_\mu^+W^{\mu-} = ... + \frac{1}{2}(M_W)^2W_\mu^+W^{\mu-},\end{aligned}$$

con $M_W = ae$.

Rimane una particella vettoriale senza massa descritta dal termine $W_\mu^1 = A_\mu$, che si può identificare con il fotone.

Ricapitolando, lo spettro è costituito da:

- due bosoni vettori W_μ^+ e W_μ^- a cui è associata la massa $M_W = ae$,
- un campo scalare ϕ a cui è associata la massa $M_\phi = a\hbar\sqrt{2\lambda}$,

- un bosone $A_\mu = W_\mu^1$ di massa nulla, il fotone.

Infine, si può far vedere che ai bosoni vettori $\vec{W}_\mu^\pm$ è associata una carica elettrica $q = \pm e$; non vi è invece carica elettrica associata al campo scalare ϕ e il fotone.

5 Soluzioni semi-classiche del modello di Georgi-Glashow

5.1 L'ansatz di 't Hooft-Polyakov

Si è fin qui discusso sul comportamento di un'eventuale soluzione nel vuoto di Higgs asintotico. Per vedere che una tale soluzione esiste, seguendo quanto fatto da 't Hooft, si cerca una soluzione che

- sia indipendente dal tempo;
- abbia simmetria sferica;
- sia ad energia finita.

Tali richieste faciliteranno la ricerca di una soluzione e in particolare l'ultima condizione farà si che il campo $\vec{\varphi}$ tenderà al vuoto di Higgs all'infinito. Come già detto, non si vuole che esso vada nel vuoto banale, cioé che sia costante, in quanto non si avrebbe carica magnetica. Si impone quindi come condizione aggiuntiva la seguente condizione al contorno

$$\lim_{r\to\infty} \vec{\varphi}(\vec{x}) = a\frac{\vec{x}}{r}. \tag{48}$$

L'ansatz proposto da 't Hooft-Polyakov (si veda [11]) è

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{er^2}H(aer) \tag{49}$$

$$W_a^i = -\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2}(1-K(aer)) \tag{50}$$

$$W_a^0 = 0, \tag{51}$$

dove H e K sono due funzioni radiali arbitrarie.

Per ricavare le equazioni del moto per queste funzioni, si possono sostituire le (49)-(51) in (23) ottenendo due equazioni in H e K. Alternativamente si possono ottenere le medesime equazioni minimizzando l'azione(l'energia) rispetto a variazioni di H e K. Si segue qui quest'ultima strada.

L'energia è

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} T^{00}\, d^3x. \tag{52}$$

Inserendo le (49)-(51) nell'espressione della densità di energia (26) , e ponendo $\xi \equiv aer$, si ottiene la seguente espressione

$$E = \frac{4\pi a}{e}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\Big[\,\xi^2\Big(\frac{dK}{d\xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\xi\frac{dH}{d\xi} - H\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(K^2-1\Big)^2 + K^2H^2 + \frac{\lambda}{4e^2}\Big(H^2-\xi^2\Big)^2\Big]. \tag{53}$$

La condizione di stazionarietà per E rispetto a piccole variazioni di H e K

$$H \longrightarrow H + \delta H \qquad K \longrightarrow K + \delta K,$$

porta alle equazioni di Eulero-Lagrange per H e K

$$\xi^2 \frac{d^2 K}{d\xi^2} = KH^2 + K(\, K^2 - 1\,) \tag{54}$$
$$\xi^2 \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 2K^2 H + \frac{\lambda}{e^2} H(\, H^2 - \xi^2\,). \tag{55}$$

Dalla (53) si possono determinare le condizioni al contorno per H e K imponendo la condizione di finitezza dell'energia. Innanzitutto la (48) impone che per $\xi \longrightarrow \infty$ si ha che $H \longrightarrow \xi$. Se E deve convergere allora

$$se \quad \xi \longrightarrow \infty : \qquad H \sim \xi, \qquad K \longrightarrow 0 \qquad \text{almeno come } 1/\xi; \tag{56}$$
$$se \quad \xi \longrightarrow 0 : \qquad K - 1 \leq O(\xi), \qquad H \leq O(\xi). \tag{57}$$

5.2 Il limite asintotico dell'ansatz

Dalla (56) segue che *asintoticamente*

$$\varphi^a_\infty = a\frac{x^a}{r}, \qquad W^i_a = -\varepsilon_{aij}\frac{x^j}{er^2}, \tag{58}$$

e vale che $D^i \vec{\varphi}_\infty = 0$.

All'infinito i campi raggiungono la condizione di vuoto di Higgs, per cui si è già detto che vale

$$F^{\mu\nu} = \hat{\varphi}_\infty \cdot \vec{G}^{\mu\nu}, \tag{59}$$

che per le (58) e (51) diventa

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk}\frac{x^k}{er^3}, \qquad F_{0i} = 0. \tag{60}$$

In realtà se si considera la (48) si può notare che $\hat{\varphi} = \vec{n}$, mentre usando anche la (50) si ha $A^i = \hat{\varphi} \cdot \vec{W}^i = 0$. Inserendo queste espressioni nella (40) si ottiene esattamente la (60), che quindi è in generale vera in tutto lo spazio.

Il campo elettrico è nullo (si stanno infatti considerando soluzioni statiche), ma sopravvive il campo magnetico $\vec{B}$, dato da

$$\vec{B} = -\frac{1}{e}\frac{\vec{x}}{r^3}, \tag{61}$$

che ha un'espressione analoga al campo elettrico generato da una carica elettrica puntiforme posta nell'origine. In modo del tutto analogo si calcola la carica, che in questo caso sarà magnetica e si ha che

$$g = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{4\pi}{e}. \tag{62}$$

La (62) ha la stessa struttura della condizione di quantizzazione di Dirac, ma formalmente differiscono per un fattore 2. In realtà, sfruttando il fatto che $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$, si può vedere che la carica elettrica minima che può coesistere con campi di gauge $SO(3)$ ha il valore $e/2$. Tale è ad esempio la carica elettrica degli spinori di Pauli che costituiscono la rappresentazione fondamentale di $SU(2)$.

5.3 Cenni sul limite $r \longrightarrow 0$ e proprietà di regolarità

Cosa succede nei pressi del monopolo? Per vederlo, si studiano le equazioni del moto attorno all'origine. Con uno studio analitico sulle (54) e (55) effettuato nel limite in cui $r \to 0$ si ottiene

$$H_0 \to ec_1 r^2, \qquad K_0 \to 1 + ec_2 r^2, \tag{63}$$

con c_1 e c_2 costanti (si veda anche [1]).

In termini del campo di Higgs e dei potenziali

$$\vec{\varphi} \propto \vec{x}, \qquad W^i_a \propto \varepsilon_{aij} x^j. \tag{64}$$

Essi sono quindi non singolari nell'origine e ciò rappresenta una differenza sostanziale rispetto al monopolo di Dirac. Infatti il tensore $F^{\mu\nu}$ associato a quest'ultimo ha una singolarità nel punto in cui è posta la sorgente; per quanto riguarda il modello in esame invece, la quantità fisicamente rilevante è il campo di forze $\vec{G}^{\mu\nu}$ che nell'origine è regolare. Infatti per la (64), $\partial^i \vec{W}^j \sim cost$, e $\vec{W}^i \times \vec{W}^j \sim r^2$, per cui $\vec{G}^{ij}$ attorno a zero ha un andamento costante.

6 Soluzione esatta nel limite asintotico

Imponendo la condizione di finitezza dell'energia, si sono determinati gli andamenti delle funzioni H e K sia asintoticamente che nell'origine. Più in dettaglio, considerando le (54)-(55) e usando gli andamenti asintotici dati dalla (56), per $\xi \to \infty$ si trova

$$\frac{d^2 K}{d\xi^2} = K, \qquad \frac{d^2 H}{d\xi^2} = \frac{2\lambda}{e^2}(H - \xi), \tag{65}$$

che hanno come uniche soluzioni esatte e compatibili con le condizioni al contorno

$$K = cost \cdot e^{-\xi} = cost \cdot e^{-aer} = cost \cdot e^{-M_W r} \tag{66}$$

$$H = \xi + cost \cdot e^{-\xi\sqrt{\frac{2\lambda}{e^2}}} = \xi + cost \cdot e^{-aer\sqrt{\frac{2\lambda}{e^2}}} = \xi + cost \cdot e^{-\frac{M_\phi r}{\hbar}}, \tag{67}$$

dove si sono usati i valori di M_W e M_ϕ ricavati nella sezione 4.

7 BPS

7.1 Limite di BPS sulla massa

Quello che differenzia il monopolo di Dirac da quello di 't Hooft-Polyakov è che nel primo caso la carica magnetica viene inserita *ad hoc* nella teoria, per cui rimane l'arbitrarietà sulla massa del monopolo. Nel caso esaminato invece, una volta note le soluzioni del modello, la massa può essere calcolata direttamente da esse e per particolari soluzioni, chiamate monopoli BPS, è possibile determinare un valore esatto per essa. In generale vale comunque il celebre limite di Bogomol'nyi sulla massa di un monopolo

$$M \geq a\sqrt{g^2+q^2}, \tag{68}$$

dove g e q sono rispettivamente la carica magnetica e la carica elettrica. Per ricavare questa disuguaglianza, si suppone di avere un monopolo con qualsiasi valore di q e g. Ci si pone quindi in una condizione più generale rispetto a quella dell'ansatz di 't Hooft-Polyakov, dove era esclusa la carica elettrica.

Per una soluzione statica l'energia si identifica con la massa, ossia $E = M$ con M massa del monopolo. Utilizzando la T^{00} definita nella sezione 2, si ha

$$M = \int T^{00}\, d^3x = \int \Big(\frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}^i\cdot\vec{\mathcal{E}}^i + \frac{1}{2}\vec{\mathcal{B}}^i\cdot\vec{\mathcal{B}}^i + \frac{1}{2}D^i\vec{\varphi}\cdot D^i\vec{\varphi} + \frac{1}{2}D^0\vec{\varphi}\cdot D^0\vec{\varphi} + V(\varphi)\Big)d^3x. \tag{69}$$

Gli ultimi due termini sono positivi, per cui vale la seguente disuguaglianza

$$M \geq \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}}^i\cdot\vec{\mathcal{E}}^i + \frac{1}{2}\vec{\mathcal{B}}^i\cdot\vec{\mathcal{B}}^i + \frac{1}{2}D^i\vec{\varphi}\cdot D^i\vec{\varphi}\Big)d^3x.$$

Si introduce ora un generico angolo θ e si aggiungono e sottraggono al secondo membro della disuguaglianza i termini $(\vec{\mathcal{E}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\sin\theta)$ e $(\vec{\mathcal{B}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\cos\theta)$. Riordinando opportunamente i termini si ottiene

$$\begin{aligned} M &\geq \int \Big(\frac{1}{2}||\vec{\mathcal{E}}^i - D^i\vec{\varphi}\sin\theta||^2 + \frac{1}{2}||\vec{\mathcal{B}}^i - D^i\vec{\varphi}\cos\theta||^2 + (\vec{\mathcal{E}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\sin\theta) + (\vec{\mathcal{B}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\cos\theta)\Big)d^3x \\ &\geq \sin\theta\int \vec{\mathcal{E}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\, d^3x + \cos\theta\int\vec{\mathcal{B}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\, d^3x. \end{aligned}$$

Si considerano ora separatamente i due termini relativi al campo magnetico e al campo elettrico appena ottenuti. Per il primo si ha

$$\int \vec{\mathcal{B}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\, d^3x = \int \Big(D^i(\vec{\varphi}\cdot\vec{\mathcal{B}}^i) - \vec{\varphi}\cdot D^i\vec{\mathcal{B}}^i\Big)d^3x = \int \partial^i(\vec{\varphi}\cdot\vec{\mathcal{B}}_i)d^3x, \tag{70}$$

dove si è usato il fatto che $D^i(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \partial^i(\vec{a}\cdot\vec{b})$ e $D^i\vec{\mathcal{B}}^i = 0$ per l'identità di Bianchi.

Analogamente per il campo elettrico

$$\int \vec{\mathcal{E}}^i\cdot D^i\vec{\varphi}\, d^3x = \int \partial^i(\vec{\mathcal{E}}^i\cdot\vec{\varphi})d^3x,$$

dove questa volta si è utilizzato che $\vec{\varphi}\cdot D^i\vec{\mathcal{E}}^i \overset{23}{=} -e\vec{\varphi}\cdot(\vec{\varphi}\times D^0\vec{\varphi}) = 0$.

Si usa ora il teorema della divergenza per trasformare gli integrali di volume in integrali di superficie. La superficie è la sfera all'infinito spaziale Σ_∞ già considerata precedentemente, per cui valgono le condizioni di vuoto di Higgs e il campo $\vec{\varphi}$ è quello asintotico: $\vec{\varphi}_\infty = a\vec{N}$. Vale inoltre $F^{\mu\nu} = \vec{N} \cdot \vec{G}^{\mu\nu}$ e pertanto $\vec{\varphi}_\infty \cdot \vec{\mathcal{B}}^i = aB^i$ e $\vec{\varphi}_\infty \cdot \vec{\mathcal{E}}^i = aE^i$ e si ha

$$M \geq a\,\sin\theta \int_{\Sigma_\infty} \vec{E} \cdot d\vec{S} + a\,\cos\theta \int_{\Sigma_\infty} \vec{B} \cdot d\vec{S} = aq\cos\theta + ag\sin\theta. \tag{71}$$

L'ultimo membro è massimo quando $q\sin\theta = g\cos\theta \Rightarrow \theta = \arctan(g/q)$; ciò equivale a

$$aq\cos\theta + ag\sin\theta = aq\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\theta + ag\sin\theta = a\frac{q^2}{g}\frac{g/q}{\sqrt{1+(g/q)^2}} + ag\frac{g/q}{\sqrt{1+(g/q)^2}} = a\sqrt{g^2+q^2},$$

dove si è usato che $\sin\arctan x = x/\sqrt{1+x^2}$. Si ottiene quindi

$$M \geq a\sqrt{g^2+q^2},$$

che è esattamente la (68).

Nell'ansatz di 't Hooft-Polyakov, $q = 0$, per cui si ha $M \geq a|g| = \frac{4\pi a}{e}$. Questo permette di fare una stima della massa di un monopolo magnetico; infatti, dallo spettro del modello risulta che la massa del bosone carico $W_\mu^\pm$ è: $M_W = ae$. Utilizzando M_W e reintroducendo c e $\hbar$, si può riscrivere la (68) nel seguente modo

$$M \geq \frac{4\pi ac\hbar}{e} = \frac{4\pi c\hbar}{e^2}M_W = \frac{M_W}{\alpha}, \tag{72}$$

dove $\alpha \simeq 1/137$ è la costante di struttura fine.

Sperimentalmente M_W è circa 80 GeV, per cui la massa del monopolo sarebbe almeno 137×80 GeV ≈ 11 TeV.

7.2 I monopoli BPS

Finora si è avuto a che fare soltanto con soluzioni approssimate delle equazioni del moto. Esiste tuttavia un caso in cui esse possono essere risolte esattamente per l'ansatz di 't Hooft-Polyakov e anche più in generale, per soluzioni dioniche (ovvero che comprendono carica elettrica), come mostrato da Prasad e Sommerfield (si veda [10]). Queste soluzioni hanno inoltre la pecularietà di saturare il limite di Bogomol'nyi per la massa, per cui si parla di monopoli BPS (che sta per Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield).

Si continua a lavorare con l'ansatz di 't Hooft-Polyakov utilizzando le stesse condizioni al contorno per il campo di Higgs. Si studia però il caso in cui $\lambda \to 0$ dove λ è la costante di accoppiamento definita in: $V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2 - a^2)^2$. In questo modo si ha, nel limite considerato, che $V(\varphi) = 0$, ma per quanto imposto a mano, $\vec{\varphi}$ continua ad avere l'andamento voluto all'infinito. Il limite per $\lambda \to 0$ viene detto *limite di BPS*.

Le equazioni del moto (23) diventano

$$D_\nu\vec{G}^{\mu\nu} = -e\,\vec{\varphi} \times D^\mu\vec{\varphi}, \qquad D^\mu D_\mu\,\vec{\varphi} = 0. \tag{73}$$

Per saturare la disuguaglianza di Bogomol'nyi nel limite BPS si considera la (69). Nell'ansatz di 't Hooft-Polyakov $\vec{\mathcal{E}}^i = D^0\vec{\varphi} = 0$ e nel limite BPS $V(\varphi) = 0$. L'espressione della massa si riduce quindi a

$$M \geq \frac{1}{2}\int \left(\vec{\mathcal{B}}^i \cdot \vec{\mathcal{B}}^i + D^i\vec{\varphi}\cdot D^i\vec{\varphi}\right) d^3x = \int \left(\frac{1}{2}||\vec{\mathcal{B}}^i - D^i\vec{\varphi}||^2 + D^i\vec{\varphi}\cdot\vec{\mathcal{B}}^i\right) d^3x. \tag{74}$$

La disuguaglianza è saturata ponendo $\vec{\mathcal{B}}^i = \pm D^i\vec{\varphi}$; quest'ultima equazione viene chiamata *equazione di Bogomol'nyi.* In tal caso la (74) diventa

$$M = \pm \int D^i\vec{\varphi}\cdot\vec{\mathcal{B}}^i\, d^3x \overset{70}{=} \pm a \int_{\Sigma_\infty} \vec{B}\cdot d\vec{S} = a|g|, \tag{75}$$

il segno essendo scelto a seconda che g sia positivo o negativo (la massa deve essere positiva).

Nel caso dell'ansatz di 't Hooft-Polyakov si è visto in 5.2 che la carica g è negativa, ovvero $g = -4\pi\nu/e$, con $\nu = 1$ e quindi è $\vec{B}^i = -D^i\vec{\varphi}$. Sostituendo le (49)-(50) in questa equazione si ottengono le seguenti equazioni per H e K

$$\xi\frac{dK}{d\xi} = -KH, \qquad \xi\frac{dH}{d\xi} = H - K^2 + 1, \tag{76}$$

che sono equazioni del primo ordine (e quindi più semplici da risolvere) a differenza delle (54)-(55) che sono del secondo ordine. D'altro canto si può facilmente vedere che le (76) implicano le (54)-(55) per $\lambda = 0$[9].

Le (76) hanno come soluzioni esatte (si veda [7],[10])

$$H(\xi) = \xi coth\xi - 1, \qquad K(\xi) = \frac{\xi}{sinh\xi}. \tag{77}$$

Avendo risolto esattamente il limite asintotico dell'ansatz di 't Hooft-Polyakov nella sezione 5, è possibile comparare le soluzioni appena trovate con le (66)-(67): esse dovranno almeno avere lo stesso andamento. Effettivamente per $\xi \longrightarrow \infty$, $K \propto e^{-\xi}$ come nella (66), mentre H tende a ξ come imposto dalle condizioni al contorno, ma lo fa più lentamente rispetto alla soluzione con $\lambda \neq 0$: si ha infatti che all'infinito $H \sim \xi(1 + e^{-2\xi} + o(e^{-2\xi}))$, da confrontare con la (67).

Per completezza si fa notare che attorno all'origine H e K sono regolari, essendo

$$\begin{aligned} H &= \xi\coth\xi - 1 \sim \xi\,(1/\xi + \xi/3) - 1 = \xi^2/3, \\ K &= \xi/\sinh\xi \sim \xi\,(1/\xi - \xi/6) = 1 - \xi^2/6, \end{aligned}$$

e quindi anche $\vec{\varphi}$ e $\vec{W}^i$ sono regolari nell'origine, esattamente come nelle soluzioni per $\lambda \neq 0$ di 't Hooft-Polyakov.

Una tale soluzione, con $\nu = 1$, sarà dunque stabile, in quanto ad essa corrisponde il minimo assoluto dell'energia; quest'ultimo infatti, come si vede dalla (75), è fissato dalla carica magnetica, che è un numero quantico conservato.

Tuttavia più in generale, si ha che monopoli con $|\nu| > 1$ possono decadere in monopoli con $|\nu| = 1$ (si vedano [3, 12]); nel caso appena esaminato la soluzione con $|\nu| = 1$ è stabile, ma nel caso dei monopoli di 't Hooft-Polyakov con $\lambda \neq 0$ e $|\nu| = 1$, non è ancora stato provato che l'energia della soluzione corrisponda ad un minimo assoluto per la classe delle soluzioni con $|\nu| = 1$, ma è plausibile che anche essa sia una soluzione stabile[10] .

---

[9] Per esempio derivando rispetto a ξ la (76) e sostituendo a $dH/d\xi$ e $dK/d\xi$ proprio le espressioni della (76).

[10] Uno studio numerico (si veda [2]) ha mostrato che con piccole deformazioni della soluzione, l'energia ad essa associata aumenta, da cui si potrebbe arguire che essa effettivamente è un minimo assoluto.

Per concludere si fa notare che monopoli di 't Hooft-Polyakov non sono presenti nel modello standard. Infatti considerando il gruppo di gauge $SU(2) \times U(1)$ dell'interazione elettrodebole, si ha che il campo di Higgs $\varphi = \binom{\varphi_1}{\varphi_2} \in \mathbb{C}^2$ con $V(\varphi) = \lambda(|\varphi|^2 - a^2)^2$, e la varietà dei vuoti $\mathcal{M}_0$, rappresentata dall'insieme delle soluzioni dell'equazione $|\varphi| = a$, è la sfera 3-dimensionale, per la quale si ha $\Pi_2(S^3) = 0$[11]. Tuttavia, come già accennato, nelle teorie di Grande Unificazione monopoli magnetici sono necessariamente presenti. Ad esempio, nella rottura spontanea del gruppo di gauge $SO(10)$ nel gruppo di gauge del modello standard $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, nel qual caso $\Pi_2(\mathcal{M}_0) = \mathbb{Z}_n$, si hanno monopoli con masse maggiori di $10^{15} - 10^{16}$ GeV (si veda [12]). D'altra parte per queste teorie, certi modelli cosmologici prevedono nell'era primordiale una produzione di monopoli con una densità di almeno 10^3 monopoli per nucleone, in disaccordo col fatto che ad oggi nessun monopolo magnetico è stato osservato. A questo eventuale problema di carattere cosmologico, assieme a diversi altri, ovvia tuttavia la recente "teoria dell'Universo inflazionario".

[11] In generale $\Pi_n(S^m) = 0$ se $m > n$.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Alvarez-Gaume, F. Zamora, *Duality in quantum field theory (and string theory)*, Lect. Notes Phys. **521** (1999) 151-224.

[2] J. Baacke, *Fluctuations and stability of the t'Hooft-Polyakov monopole*, Z. Phys. **C53** (1992) 399-401.

[3] E.B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449, Yad. Fiz. **24** (1976) 861-870.

[4] R.A. Brandt et al., Phys. Rev. **D19** 4 1153 (1979).

[5] P. Curie, *Sur la possibilité d'existence de la conductibilité magnétique et du magnétisme libre*, Séances de la Société Française de Physique (Paris), (1894), p76.

[6] P. Dirac, *Quantized Singularities in the Electromagnetic Field*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A133** (1931) 60-72.

[7] Figueroa J. M. O'Farrill, *Electromagnetic duality for children*, 1998.

[8] Julia B., Zee, A., *Poles with both magnetic and electric charges in non-Abelian gauge theory*, Phys. Rev. **D11** (1975) 2227–2232.

[9] A. M. Polyakov, *Particle Spectrum in the Quantum Field Theory*, JETP Lett. **20** (1974) 194-195 Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20** (1974) 430-433

[10] M.K. Prasad, Charles M. Sommerfield, *An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 760-762.

[11] G. 't Hooft, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276-284.

[12] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*, Cambridge University Press (1996).