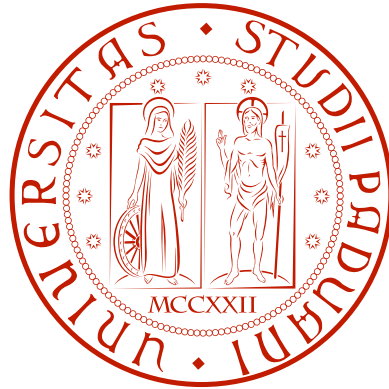


Università degli Studi di Padova  
Corso di Laurea Magistrale in Scienze Statistiche



## Densità predittive: confronti e applicazioni

**Relatore:** Prof. Francesco Lisi  
Dipartimento di Scienze Statistiche

**Laureando:** Rino Colorio

A.A. 2011/2012

*Alla mia famiglia*

---

# INDICE

---

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>1 Densità predittive</b>	<b>1</b>
<b>2 Metodologie di calcolo previsionale</b>	<b>7</b>
2.1 Procedure parametriche . . . . .	8
2.2 Procedure semiparametriche . . . . .	9
2.2.1 Generare da distribuzioni stimate non parametricamente . . . . .	10
2.2.2 Procedura AR + <i>bootstrap</i> . . . . .	11
2.2.3 Procedura ARMA-GARCH + <i>bootstrap</i> . . . . .	12
2.2.4 Procedura ARMA-GARCH + ricampionamento da distribuzione <i>kernel</i> . . . . .	13
2.2.5 Procedura ARMA-GARCH con variabilità parametri + <i>bootstrap</i> . . . . .	14
2.3 Procedure non parametriche . . . . .	15
2.3.1 Procedura <i>spline</i> di lisciamento + <i>bootstrap</i> . . . . .	16
2.3.2 Procedura regressione <i>kernel</i> . . . . .	18
2.3.3 Densità predittiva markoviana . . . . .	19
2.3.4 Procedura GAM + <i>bootstrap</i> . . . . .	20
<b>3 Valutazione delle previsioni</b>	<b>23</b>
3.1 <i>Probability Integral Transform</i> . . . . .	24
3.2 Test sull'uniformità . . . . .	25
3.2.1 Test di <i>Kolmogorov-Smirnov</i> . . . . .	25
3.2.2 Test chi-quadrato . . . . .	26
3.3 Test basati su regressioni ausiliarie . . . . .	26
3.3.1 Test per l'autocorrelazione seriale . . . . .	27
3.3.2 Test per l'eteroschedasticità condizionale . . . . .	27
3.4 Test rapporto di verosimiglianza . . . . .	28
3.4.1 Test per l'indipendenza . . . . .	28
3.4.2 Test per la bontà previsiva nelle code della distribuzione . . . . .	30
3.5 Valutazione di intervalli di confidenza . . . . .	31
3.5.1 Test di <i>Kupiec</i> . . . . .	32
3.5.2 Test di <i>Christoffersen</i> . . . . .	33
<b>4 Applicazioni su dati simulati</b>	<b>35</b>
4.1 Serie simulata: AR-GARCH . . . . .	40
4.2 Serie simulata: SETAR . . . . .	51
4.3 Serie simulata: HENMAP . . . . .	60
4.4 Commento risultati . . . . .	70
<b>5 Applicazioni su dati reali</b>	<b>73</b>
5.1 I prezzi del mercato elettrico inglese (UKPX) . . . . .	73

---

5.1.1	Valutazione densità predittive . . . . .	78
5.1.2	Commento dei risultati . . . . .	98
5.2	L'indice <i>Dow Jones</i> . . . . .	99
5.2.1	Valutazione densità predittive . . . . .	101
5.2.2	Commento dei risultati . . . . .	107
5.3	La volatilità del titolo <i>DELL</i> . . . . .	109
5.3.1	Valutazione densità predittive . . . . .	112
5.3.2	Commento dei risultati . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>

# Capitolo 1

---

## DENSITÀ PREDITTIVE

---

Il macro argomento trattato in questo elaborato è la previsione statistica. Prevedere dal punto di vista statistico è intesa come la procedura per determinare con minor errore possibile la realizzazione di un oggetto osservandone altri. Esistono diverse tipologie di previsioni statistiche che si possono eseguire. Ci si riferisce principalmente alla previsione puntuale e a quella intervallare. Il primo tipo di previsione si occupa di calcolare con la massima accuratezza una certa realizzazione futura di una variabile in base, ad esempio, ad un modello parametrico stimato; nella previsione intervallare invece si presenta un *range* entro il quale si ritiene che la realizzazione futura rientrerà con una data probabilità di copertura. Si sa che accanto ad ogni previsione puntuale un buon statistico affianca una misura della sua precisione ecco dunque che sorgono molti indicatori di bontà della previsione che si occupano di misurare, secondo una certa metrica, la distanza tra il dato previsto e la sua realizzazione come ad esempio il MSE (*Mean Square Error*). Nella previsione intervallare si può affermare che l'incertezza è incorporata dalla previsione stessa, infatti la previsione intervallare viene calcolata a partire da un certo livello di copertura e determinando l'intervallo tale da avere proprio una probabilità pari al livello di copertura di contenere l'ignoto futuro valore.

Argomento di questa tesi è la previsione dell'intera densità di probabilità di una certa variabile futura; in questo modo si ottiene una precisa descrizione dell'incertezza della previsione insita proprio nella particolare forma della distribuzione prevista, si veda *Tay e Wallis* (2000) per una rassegna sul tema. L'ambito nel quale si calcolano e valutano le previsioni in questo lavoro è economico e i da-

ti con cui si lavora sono serie storiche, ovvero realizzazioni di variabili aleatorie indicizzate dal tempo. La previsione è l'applicazione statistica che risulta di maggiore utilità per l'economia, infatti, una volta costruito un modello basato su dati economici, le analisi previsionali consentono di poter conoscere i probabili sviluppi futuri delle variabili in gioco. Pensando in ambito finanziario una previsione di questo tipo può essere molto utile ad esempio a calcolare con quale probabilità si potrà verificare un certo, magari spiacevole, evento come un rendimento fortemente negativo di un titolo.

La previsione è così importante che nella maggior parte delle applicazioni economiche non è di interesse primario individuare un modello che garantisca un ottimo adattamento ai dati, quanto un modello che abbia buone capacità previsionali. A sostegno di ciò si ricorda l'esempio del VaR (*Value at Risk*), uno dei più utilizzati metodi per misurare i requisiti patrimoniali necessari per far fronte ad una forte perdita inattesa, che viene valutato, mediante procedure di *backtesting*, su dati *out-of-sample* piuttosto che sulla serie stessa utilizzata per il calcolo. Lo stesso dicasi per dati provenienti da borsa elettrica come prezzi di energia; anche in questo caso sarà importante adottare un modello in grado di prevedere, con buon grado di approssimazione, i picchi di prezzo o comunque il suo andamento nel breve periodo piuttosto che un modello dal quale risulti un ottimo adattamento ai dati. Anche in ambito macroeconomico è importante adottare modelli che garantiscano, piuttosto che un eccellente adattamento ai dati, una buona capacità previsionale al fine di poter anticipare gli sviluppi delle variabili che riguardano il ciclo economico e prendere quindi decisioni, ad esempio di politica monetaria, di conseguenza.

La densità predittiva in ambito di serie storiche, ovvero di dati serialmente dipendenti, è un argomento ancora piuttosto poco dibattuto in ambito di ricerca e relativamente nuovo e il suo interesse è in forte crescita in quanto calcolare con precisione previsioni dell'intera densità di una variabile permette di avere tra le mani uno strumento molto versatile a partire dal quale è possibile ad esempio calcolare la probabilità di avere una realizzazione futura minore (o maggiore) di

---

una certa soglia critica di interesse. Sostanzialmente la densità predittiva non è che una generalizzazione della previsione intervallare, infatti data la densità prevista è sufficiente calcolare dei quantili per disporre di un intervallo di previsione con una certa probabilità di copertura; inoltre è possibile ricavare anche previsioni puntuali da essa mediante diverse tecniche ad esempio applicando il valore atteso oppure generando realizzazioni future dalla densità predetta.

Sono diverse le problematiche a cui si va incontro quando si calcolano previsioni di densità in ambito di serie storiche. Nel caso di serie di dati indipendenti e identicamente distribuiti si possiedono molti dati che provengono da un'unica distribuzione, dunque prevedere una certa densità per il futuro può non essere particolarmente complesso; in questo caso infatti la distribuzione può essere nota se vengono fatti assunti distributivi sui dati oppure può essere calcolata non parametricamente ricampionando, con tecniche *bootstrap*, i dati e stimando poi una densità ad esempio tramite una funzione nucleo. Nel caso di serie storiche di dati dipendenti prevedere l'intera densità della realizzazione futura della variabile in esame non è così banale in quanto ogni singolo valore della serie è realizzazione di una distribuzione potenzialmente differente; saranno dunque necessarie tecniche (parametriche, semiparametriche o non parametriche) più sofisticate e che tengano conto della dipendenza presente nella serie originale.

La vera caratteristica che distingue questo tipo di previsione dalle altre è il fatto che l'oggetto della previsione non è un valore osservato; nel caso di previsione puntuale e intervallare essa riguarda la variabile osservata e questo rende agevole anche la fase di valutazione della bontà previsiva. Nel caso di densità predittiva il fatto che l'oggetto della previsione non è un valore osservato complica le procedure di calcolo previsionale e inoltre rende più complessa la valutazione della bontà previsiva in quanto non è più possibile effettuare un confronto tra valore realizzato e valore previsto.

Riguardo i diversi metodi di calcolo della densità predittiva si è accennato che possono essere principalmente di tre tipi differenti: parametrico, semiparametrico o non parametrico. È importante chiarire fin da subito cosa si intende per pro-

cedura parametrica, semiparametrica o non parametrica in questo lavoro di tesi; con questi aggettivi ci si può riferire sia alla presenza di modelli parametrici da stimare per pervenire alla densità predittiva, sia al ricorso ad assunti distributivi che vincolano le previsioni ad assumere una certa precisa forma. Le procedure che ricorrono a metodi parametrici sia per modellare la serie di partenza secondo un certo particolare processo sia in merito alle assunzioni distributive circa l'errore di questo modello rientreranno tra le procedure parametriche. Quelle invece per le quali viene imposto un certo processo del quale è necessario stimare i parametri ma sfruttano tecniche non parametriche per pervenire alla densità predittiva, senza cioè ricorrere ad assunti distributivi, saranno catalogate come procedure semiparametriche. Infine quelle procedure per le quali non si fa ricorso alla stima di nessun modello parametrico ma viene indagata non parametricamente la dipendenza dei dati e inoltre sono assenti assunti distributivi rientrano tra le procedure non parametriche.

La scelta di una di queste tecniche dipende in prima battuta dalle caratteristiche della serie a disposizione per la previsione, dagli assunti più o meno vincolanti che si è disposti a fare e dalla complessità computazionale che si vuole sopportare. Se la serie in analisi presenta precise caratteristiche di un particolare processo allora l'ideale sarà utilizzare un metodo parametrico che si basi sulla stima di quel particolare processo; ad esempio se la serie di partenza presenta caratteristiche di stazionarietà, omoschedasticità e presenta autocorrelazione assimilabile a quella di un processo AR(1) si presume che un metodo parametrico basato sulla stima di un AR(1) ottenga buoni risultati previsivi. Qui tuttavia sorge un grande limite delle procedure parametriche: esse si basano su assunti distributivi che spesso sono molto restrittivi e portano a perdita di generalità. Quando si ha a che fare con dati finanziari (i.e. rendimenti) è noto che considerare normale la distribuzione degli errori di un modello parametrico è un assunto poco sostenuto dall'evidenza empirica; i rendimenti finanziari infatti presentano caratteristiche di leptocurtosi ovvero rendimenti grandi (in modulo) si presentano con un frequenza maggiore che nel caso normale. Per ovviare a questo problema legato



---

agli assunti distributivi è possibile focalizzarsi su tecniche semiparametriche che prevedono prima di stimare un certo modello e dopo averne calcolato gli errori utilizzare tecniche di ricampionamento da essi al fine di aggirare il limite dell'assunto distributivo.

Il vantaggio delle tecniche non parametriche è che sono totalmente slegate da assunti non solo distributivi, ma anche parametrici appunto. Quando si adoperano queste tecniche non viene imposta nessuna forma parametrica da stimare ma si indaga la dipendenza dei dati tramite metodi spesso più sofisticati che saranno presentati nel dettaglio in seguito.

Nella scelta del modello da applicare per calcolare le previsioni di densità è necessario anche tenere conto che man mano che si adoperano tecniche più sofisticate la complessità computazionale aumenta; in genere infatti le tecniche non parametriche necessitano di tempi di calcolo maggiori rispetto alle altre soprattutto man mano che aumenta l'orizzonte previsivo. Un altro fattore che fa aumentare la complessità computazionale delle procedure di calcolo di densità predittiva è la numerosità campionaria a disposizione.

In questo lavoro di tesi saranno utilizzati per il calcolo delle previsioni di densità metodi parametrici, semiparametrici e non parametrici e sarà di interesse andare a osservare il loro funzionamento quando vengono applicati sia a serie simulate, delle quali quindi si conosce il processo generatore, sia a serie reali per valutare la reale utilità delle previsioni in ambito economico.

L'aspetto della valutazione è molto importante per qualunque tipo di previsione statistica dunque le densità predittive calcolate saranno in qualche modo valutate per essere o meno ritenute delle buone previsioni, si veda *Berkowitz* (2000). Come già accennato in precedenza non è immediato individuare un modo per valutare una certa densità prevista a causa del fatto che l'oggetto della previsione non è osservabile direttamente, dunque non è possibile eseguire un confronto tra oggetto previsto e oggetto realizzato come invece è possibile fare nel caso della previsione puntuale. La maggior parte dei test eseguiti si basa sul risultato teorico dovuto a *Rosenblatt* (1952) e conosciuto sotto il nome di *Probability Integral Transform* (PIT)

il quale afferma che la trasformazione indotta dalla funzione di ripartizione conduce a una variabile casuale Uniforme tra 0 e 1<sup>1</sup>. Applicando quindi la funzione di ripartizione derivata dalla densità prevista al dato realizzato si dovrebbe disporre di una serie di valori uniformi e indipendenti. Per questo motivo i test per lo più valutano l'uniformità e l'indipendenza dei dati sui quali è stata eseguita la *Probability Integral Transform*. Inoltre, nelle analisi grafiche preliminari per la valutazione dei vari metodi previsivi risulta utile osservare gli istogrammi dei valori PIT che dovranno essere sufficientemente piatti e gli autocorrelogrammi dei livelli, oltre che delle potenze di essi, che dovranno presentare caratteristiche di assenza di correlazione. Per completare la fase di valutazione si è ritenuto di dover indagare la conformità tra densità previste e dati osservati mediante un confronto analogo alle analisi di *backtesting* che si compiono nella valutazione di un modello per il VaR; ci si riferisce a test che si occupano di valutare la corretta copertura degli intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive effettuando un confronto tra il numero di sforamenti dei dati osservati da tali intervalli e il numero di sforamenti attesi dato il livello di confidenza e inoltre verificare che questi sforamenti siano indipendenti.

Il seguito di questo lavoro di tesi sarà così strutturato come segue. I capitoli 2 e 3 rappresentano il fulcro del lavoro svolto in merito rispettivamente alle procedure di calcolo delle previsioni e alle tecniche per la loro valutazione. Saranno quindi descritti alcuni metodi di calcolo di densità predittive e vari test ai quali si ricorre per valutare la bontà di queste densità.

La fase applicativa del lavoro si sviluppa negli ultimi due capitoli. Il capitolo 4 riguarda le analisi effettuate su dati simulati. Il capitolo 5 contiene le analisi su dati reali per poter provare la reale utilità delle previsioni calcolate e confrontare le diverse tecniche presentate nel corso dell'elaborato.

---

<sup>1</sup>Si rimanda alla sezione 3.1 per i dettagli di questo risultato teorico e la sua dimostrazione.

## Capitolo 2

---

# METODOLOGIE DI CALCOLO PREVISIONALE

---

In questo capitolo saranno descritte le procedure implementate per il calcolo della densità predittiva che saranno suddivise in parametriche, semiparametriche e non parametriche. Si tratta di procedure che cercano di prevedere la media condizionata della serie storica di partenza anche se in alcune di esse si tiene in considerazione anche la varianza condizionata. Si ricorre quindi, nella maggior parte delle procedure implementate, alla seguente scomposizione delle serie in esame:

$$y_t = m_t(I_{t-1}) + \sigma_t(I_{t-1})\epsilon_t \quad (2.1)$$

dove  $m_t(\cdot)$  rappresenta appunto la media condizionata all'informazione disponibile all'istante  $t - 1$  mentre  $\sigma_t(\cdot)$  la varianza condizionata, presente in quelle procedure che si occupano di cogliere anche l'eventuale presenza di eteroschedasticità condizionale residua, una volta stimata la componente media. I diversi metodi di calcolo di densità predittiva si differenziano per le metodologie a cui ricorrono per calcolare la componente media e la componente varianza, ad esempio tramite la stima di modelli parametrici o di regressioni non parametriche.

La logica secondo la quale si perviene alla previsione di densità per le procedure semiparametriche e non parametriche è quella di calcolare molte replicazioni delle previsioni puntuali dalle quali poi stimare non parametricamente la densità.

Le metodologie implementate fanno principalmente riferimento a modelli univariati, tuttavia, poiché facendo dipendere la serie in esame da una moltitudine

di fattori si rende più flessibile e accurata la procedura stessa, si è pensato di implementare anche una procedura basata su una regressione multipla. Grazie a questa sarà possibile ad esempio tenere conto di fattori di stagionalità oltre che autoregressivi nella modellazione della serie storica in esame.

## 2.1 Procedure parametriche

La procedura parametrica ( $p$ ) di calcolo previsionale utilizzata si basa sulla stima di un modello ARMA(1,1)-GARCH(1,1), ovvero un modello che impone un comportamento ARMA per media condizionale e un comportamento GARCH per la varianza condizionale. Si assume dunque che le osservazioni  $y_1, \dots, y_n$  siano generate dal seguente processo:

$$\begin{aligned} y_t &= ay_{t-1} + be_{t-1} + e_t \\ e_t &= \sqrt{h_t}\epsilon_t \\ h_t &= \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \end{aligned}$$

con  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$ ,  $\omega > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $|\alpha + \beta| < 1$  (2.2)

Oltre all'assunzione parametrica che riguarda il modello generatore dei dati, in questa procedura è stato necessario effettuare anche un'assunzione distributiva che riguarda il termine di errore. Si ritiene infatti che  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Questa procedura si occupa dunque in prima battuta della stima del modello appena descritto. Una volta ottenute le stime dei parametri è possibile procedere con il calcolo delle previsioni  $T$  passi in avanti della componente media e della componente varianza. Essendo questo un metodo di calcolo di previsione della densità completamente parametrico, la forma delle distribuzioni predette sarà la medesima assunta per il termine d'errore, dunque normale, e i suoi parametri saranno quelli previsti per le componenti media e varianza.

Questa metodologia di calcolo tiene conto della media condizionale ma modella anche la varianza condizionale sempre vincolatamente ad un preciso processo parametrico infatti, come già sottolineato, in questo modello l'eteroschedasticità condizionale è colta dalla parte GARCH. Il maggior limite di questo modello

risiede nel fatto che risulta cruciale la scelta della distribuzione del termine di errore in quanto da essa dipenderà la forma di ogni densità predetta. La scelta della distribuzione normale, ad esempio nel caso in cui la serie della quale calcolare previsioni sia una serie di rendimenti finanziari, non risulta molto oculata; in effetti i dati finanziari presentano lieve asimmetria e leptocurtosi, caratteristiche non conciliabili con la distribuzione gaussiana. Tuttavia scegliendo una distribuzione per gli errori con code pesanti e magari con parametro di asimmetria si potrebbe apportare flessibilità a questa tecnica previsiva che comunque risentirebbe ancora della rigidità delle assunzioni parametriche del modello generatore dei dati.

## 2.2 Procedure semiparametriche

Queste procedure, come la precedente, si basano tutte sull'assunzione che il modello generatore dei dati sia di tipo parametrico. La prima procedura semiparametrica implementata si basa sulla stima di un modello autoregressivo di primo ordine, mentre le successive considerano un modello ARMA-GARCH esattamente come descritto nelle equazioni 2.2; dunque, in questo caso, si tratta sostanzialmente di varianti della stessa procedura e che si differenziano per il metodo di calcolo delle repliche delle previsioni puntuali dalle quali poi viene stimata non parametricamente la densità predetta.

Mentre per le procedure che si basano su un modello ARMA-GARCH le componenti  $m_t(I_{t-1})$  e  $\sigma_t(I_{t-1})$  vengono stimate esattamente come nella procedura parametrica, nel caso di assunzione di processo AR(1) si tiene conto esclusivamente della componente media per pervenire al calcolo delle densità predittive ricercate; rispetto alla procedura parametrica viene comunque meno la rigidità distributiva legata all'assunto riguardo il termine d'errore. Per quanto riguarda le procedure che si basano su un modello ARMA-GARCH si è ritenuto di includere diverse varianti di uno stesso metodo al fine di sfruttare l'apporto di diverse fonti di variabilità per pervenire alle repliche delle previsioni puntuali. Una volta stimati i parametri del modello infatti tali repliche possono risentire di diver-

si tipi di variabilità, ovvero il loro calcolo è possibile grazie alla variabilità fornita da diversi elementi. Tra le procedure semiparametriche implementate emergono due tipi di variabilità usati per il calcolo delle previsioni puntuali: quella dovuta al termine di errore e quella imputata alla variabilità delle stime dei parametri.

Prima di procedere con la descrizione dettagliata delle diverse procedure semiparametriche si ritiene di dover spiegare una tecnica utilizzata in questo lavoro per generare numeri pseudocasuali da distribuzioni stimate con il metodo del *kernel* e utilizzata per il calcolo della densità predittiva all'interno di qualche procedura semiparametrica implementata.

### 2.2.1 Generare da distribuzioni stimate non parametricamente

In statistica computazionale vengono studiate una serie di tecniche per generare numeri da determinate distribuzioni. Quando la distribuzione dalla quale si vuole generare è parametrica esistono diversi metodi che, basandosi principalmente su algoritmi congruenziali per generare numeri pseudocasuali uniformi tra 0 e 1 e sull'inversione della funzione di ripartizione oppure su algoritmi come quello di accettazione/rifiuto, generano numeri con le caratteristiche desiderate. Quando invece la densità dalla quale si vuole generare è stimata non parametricamente è necessario ricorrere ad altri metodi per simulare da essa.

La stima *kernel* della densità di valori  $y_1, \dots, y_n$  è:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{y - y_i}{h}\right) \quad (2.3)$$

in cui  $k(\cdot)$  è una funzione nucleo. La logica della stima non parametrica della densità col metodo del nucleo è dunque quella di pesare ogni valore nel quale si vuole calcolare la densità con le osservazioni vicine mediante un'opportuna funzione *kernel* e un parametro di lisciamento  $h$  che indica l'ampiezza della zona nella quale ricercare i punti vicini a  $y$ .

Il meccanismo che si è implementato per poter generare valori da una densità stimata non parametricamente prevede, dopo aver stimato appunto la densità dalla quale si vuole generare mediante un nucleo gaussiano, di simulare valori da una normale con media campionata casualmente dai valori  $y_1, \dots, y_n$  e varianza

pari al parametro di *bandwidth* usato per la stima della densità. La logica è dunque quella di perturbare casualmente i valori originali tenendo in considerazione l'ampiezza di banda utilizzata per la stima *kernel* della densità. Un esempio gra-

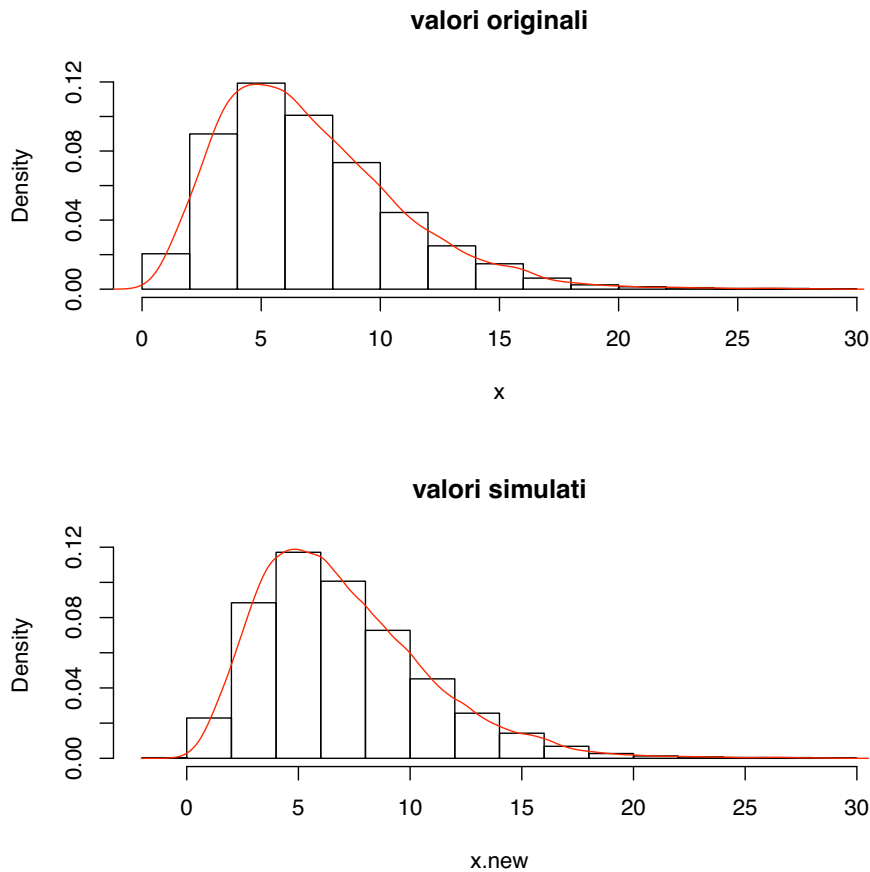


Figura 2.1: Istogramma e stima *kernel* della densità di 5000 valori generati da una variabile chi-quadrato con 7 gradi di libertà e di  $10^6$  valori generati dalla stima non parametrica dei valori chi-quadrato.

fico della bontà di funzionamento della procedura appena descritta si può avere osservando la figura 2.1.

### 2.2.2 Procedura AR + *bootstrap*

La prima procedura semiparametrica implementata ( $sp_{AR}$ ) si basa sulla stima di un modello AR(1), dunque si assume che le osservazioni siano generate dal seguente processo:

$$y_t = ay_{t-1} + \epsilon_t$$

con  $|a| < 1$  (2.4)

Una volta stimato il modello si focalizza l'attenzione sui residui che vengono ricampionati al fine di generare repliche delle previsioni puntuali, dunque la fonte di variabilità che viene considerata è appunto quella relativa al termine d'errore del modello. La logica secondo la quale si perviene alle previsioni puntuali è la seguente:

$$\begin{aligned} y_{t+i}^{(1)} &= \hat{a}y_{t+i-1} + \epsilon_1^* \\ y_{t+i}^{(2)} &= \hat{a}y_{t+i-1} + \epsilon_2^* \\ (\dots) & \\ y_{t+i}^{(B)} &= \hat{a}y_{t+i-1} + \epsilon_B^* \end{aligned}$$

dove l'asterisco indica l'elemento ricampionato tramite *bootstrap*.

Una volta ottenute le repliche delle previsioni puntuali è possibile stimarne una densità tramite una funzione *kernel* esattamente come indicato al paragrafo precedente nella formula 2.3. È facile intuire che la fonte di variabilità che permette di calcolare la previsione della densità vera e propria è il termine di errore in quanto da esso derivano i residui del modello che vengono ricampionati al fine di ottenere le  $B$  repliche delle previsioni puntuali.

### 2.2.3 Procedura ARMA-GARCH + *bootstrap*

Come nella precedente, anche nella prima procedura semiparametrica che assume una forma ARMA-GARCH per il modello generatore dei dati ( $sp_1$ ), si focalizza l'attenzione sui residui del modello, dunque la fonte di variabilità che viene considerata al fine di generare repliche delle previsioni puntuali è appunto quella relativa al termine d'errore del modello. Dopo aver eseguito la stima del modello ARMA-GARCH e aver calcolato le previsioni della componente media e della componente varianza, al fine di calcolare le repliche delle previsioni puntuali, vengono ricampionati i residui del modello. La logica per il calcolo delle



previsioni puntuali è la seguente:

$$\begin{aligned} y_{t+i}^{(1)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\epsilon_1^* \\ y_{t+i}^{(2)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\epsilon_2^* \\ &(\dots) \\ y_{t+i}^{(B)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\epsilon_B^* \end{aligned}$$

dove l'asterisco indica l'elemento ricampionato tramite *bootstrap*.

Si procede esattamente come nella procedura precedente, ovvero ottenute le repliche delle previsioni puntuali si stima non parametricamente la densità predittiva.

#### 2.2.4 Procedura ARMA-GARCH + ricampionamento da distribuzione *kernel*

Una variante (*sp*<sub>2</sub>) del precedente metodo semiparametrico di calcolo di densità predittiva utilizza la tecnica per generare valori da una distribuzione stimata non parametricamente descritta nel paragrafo 2.2.1. Dopo aver eseguito la stima del modello ARMA-GARCH si calcolano i residui e su di essi si stima non parametricamente la distribuzione. Analogamente alla prima variante vengono calcolate le previsioni per la componente media e per quella varianza e si perviene alla previsione puntuale estraendo un valore dalla distribuzione dei residui stimata non parametricamente ottenendo i valori:

$$\begin{aligned} y_{t+i}^{(1)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\hat{\epsilon}_1 \\ y_{t+i}^{(2)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\hat{\epsilon}_2 \\ &(\dots) \\ y_{t+i}^{(B)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta})\hat{\epsilon}_B \end{aligned}$$

dove  $\hat{\epsilon}$  indica l'elemento estratto dalla distribuzione *kernel* dei residui.

In questo modo ancora una volta il termine che fornisce la variabilità tale da calcolare le repliche della previsione puntuale è l'errore del modello; questa variante del metodo di calcolo previsionale semiparametrico utilizza un criterio differente dal precedente per sfruttare la medesima fonte di variabilità.

In ambito di valutazione risulterà molto utile il confronto tra i risultati ottenuti con queste due varianti del medesimo metodo al fine di apprendere quale tecnica per sfruttare la variabilità derivata dal termine di errore del modello sia preferibile.

### 2.2.5 Procedura ARMA-GARCH con variabilità parametri + *bootstrap*

La terza variante della procedura semiparametrica implementata (*sp<sub>3</sub>*) si differenzia dalle precedenti proprio per la fonte dalla quale reperire la variabilità necessaria al calcolo delle repliche delle previsioni puntuali usate poi per il calcolo della densità prevista mediante il metodo del nucleo. In questo caso si utilizzano tecniche di ricampionamento *bootstrap* a blocchi applicate alla serie originale al fine di ottenere, tramite successive stime di modelli ARMA-GARCH, una serie di repliche del vettore dei parametri stimati dal modello; si calcola quindi non parametricamente la distribuzione delle stime dei parametri.

Le previsioni della componente media e di quella varianza vengono calcolate utilizzando parametri generati dalle distribuzioni precedentemente stimate tramite la tecnica descritta nella sezione 2.2.1. Le repliche delle previsioni puntuali si ottengono secondo questa logica:

$$\begin{aligned} y_{t+i}^{(1)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}_1) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta}_1)\epsilon_1^* \\ y_{t+i}^{(2)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}_2) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta}_2)\epsilon_2^* \\ &(\dots) \\ y_{t+i}^{(B)} &= m_{t+i}(\hat{\theta}_B) + \sigma_{t+i}(\hat{\theta}_B)\epsilon_B^* \end{aligned}$$

dove l'asterisco indica un valore ricampionato tramite *bootstrap* dai residui del modello stimato sui dati originali.

Le previsioni di densità calcolate con questo metodo tengono conto della variabilità dei parametri, una fonte di variabilità alternativa a quella derivante dal termine di errore. Avendo a disposizione una serie storica di lunghezza limitata e calcolandone la stima dei parametri chiaramente i valori che si ottengono non sono i veri valori dei parametri del modello generatore dei dati; tuttavia replicando con opportune tecniche la serie di partenza ed effettuando molte stime del

modello si può individuare la distribuzione delle stime dei parametri, dunque diventa possibile indagare circa la variabilità attorno ad essi. È proprio questa variabilità che viene tenuta in considerazione quando si calcolano le previsioni di densità in questa variante del metodo semiparametrico.

### 2.3 Procedure non parametriche

Le procedure non parametriche implementate per il calcolo della densità predittiva sono molteplici e si basano principalmente su tecniche di regressione non parametrica. Si è ritenuto interessante implementare diverse procedure non parametriche in quanto esse permettono di evitare di effettuare assunzioni sia distributive, come è già accaduto nel caso delle procedure parametriche, sia sul modello generatore dei dati; ora chiaramente sarà abbandonata l'assunzione che i dati provengano da un modello ARMA-GARCH e la struttura di dipendenza di essi sarà indagata completamente non parametricamente. Cambiando la prospettiva legata appunto alla presenza di parametri nel modello cambieranno sostanzialmente anche le fonti di variabilità che si considereranno per il calcolo delle repliche utili per giungere poi, sempre mediante una stima *kernel* della densità, alla previsione ricercata.

Nelle tecniche di regressione non parametrica si fa dipendere la variabile risposta da un regressore mediante una funzione di regressione non parametrica, non lineare e di forma non nota, con l'unica assunzione che questa funzione sia sufficientemente liscia. Si considera quindi il modello di regressione omoschedastico:

$$Y_t = f(X_t) + a_t \quad (2.5)$$

con  $a_t \sim i.i.d.(0, \sigma^2)$  e  $f(\cdot)$  funzione di regressione.

In alcune procedure implementate si tiene in considerazione anche la varianza condizionale dunque si considera un modello di regressione non parametrica con eteroschedasticità condizionale specificato così:

$$Y_t = f(X_t) + \sigma(X_t) \epsilon_t \quad (2.6)$$

con  $\epsilon_t \sim i.i.d.(0, 1)$ . Nei modelli appena descritti è chiaro che  $f(X_t) = E(Y_t|X_t)$ , ovvero rappresenta la media condizionale della variabile  $Y_t$  rispetto al regressore, mentre  $\sigma(X_t) = Var(Y_t|X_t) = E((Y_t - f(X_t))^2|X_t)$  rappresenta la regressione non parametrica dei residui della regressione sulla componente media su  $X_t$ .

Si può ricorrere a diverse procedure di stima in un modello di regressione non parametrica; in questo lavoro di tesi sarà considerata la regressione con funzioni *spline* di lisciamento (*smoothing spline*) e la regressione con il metodo del nucleo (*kernel regression*).

Dopo aver presentato le prime due procedure di calcolo di densità predittiva, che utilizzano appunto regressioni non parametriche, sarà presentata un'ulteriore procedura non parametrica che si differenzia dalle precedenti in quanto non si basa su regressioni; si tratta di un'interessante procedura che si limita ad assumere dipendenza markoviana e per l'implementazione della quale si è preso spunto da Manzan e Zerom, (2010).

### 2.3.1 Procedura *spline* di lisciamento + *bootstrap*

La logica generale di questa tecnica previsiva (*sm-sp*) prevede la stima successiva di diversi modelli di regressione per pervenire a repliche delle previsioni puntuali che saranno poi utilizzate per il calcolo della densità predittiva. Come già accennato in precedenza il metodo qui usato per effettuare le regressioni non parametriche è quello che utilizza funzioni *spline* di lisciamento.

Si ricorda dunque brevemente il funzionamento delle *spline*; esse sono funzioni polinomiali a tratti utilizzate per approssimare globalmente una funzione di cui si conosce il valore solo in dei punti (detti nodi). Se si effettuano regressioni non parametriche mediante *spline* di regressione sarà necessario fissare il numero ed eventualmente la posizione dei nodi; il vantaggio delle funzioni *spline* di lisciamento invece è proprio quello di evitare la fissazione dei nodi. Per effettuare una regressione non parametrica mediante *spline* di lisciamento è necessario minimizzare la seguente funzione:

$$D(f, \lambda) = \sum_{t=1}^n [Y_t - f(X_t)]^2 + \lambda \int [f''(x)]^2 dx \quad (2.7)$$

Si nota come la prima parte della 2.7 misuri il grado di accostamento della funzione ai dati, mentre la seconda parte penalizzi per il grado di irregolarità di  $f$ . Il parametro  $\lambda$  funge da parametro di lisciamiento in quanto un valore positivo ed elevato porta ad una forte penalità a causa delle irregolarità di  $f$ . Il criterio di scelta del parametro di *smoothing* è automatico ed avviene per *cross-validation*.

Si considera in questa procedura una nuova fonte di variabilità che permette di giungere al calcolo delle previsioni puntuali; essa fa riferimento al parametro di lisciamiento della regressione effettuata mediante *spline*. In fase preliminare infatti vengono calcolati una serie di valori del parametro di lisciamiento a partire da serie replicate dalla originale mediante tecniche di *bootstrap* a blocchi; in seguito si effettuano tante regressioni della serie originale quanti sono i parametri di lisciamiento calcolati in precedenza. A questo punto si calcolano le previsioni puntuali per ciascuna regressione effettuata e le si perturbano usando i residui della regressione non parametrica calcolata sulla serie originale. Schematicamente questa procedura può essere rappresentata così:

$$\begin{aligned}
 y_{t+i}^{(1)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}, \lambda_1) + a_{(1)}^* \\
 y_{t+i}^{(2)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}, \lambda_2) + a_{(2)}^* \\
 &(\dots) \\
 y_{t+i}^{(B)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}, \lambda_B) + a_{(B)}^*
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

dove l'asterisco indica il valore ricampionato tramite *bootstrap*.

È importante soffermarsi su quali siano le fonti di variabilità che rendono possibile il calcolo delle repliche delle previsioni puntuali; vengono infatti chiamate in causa in questo metodo di calcolo previsionale diverse fonti di variabilità con lo scopo di generare le previsioni puntuali. Oltre a quella imputabile al termine d'errore del modello e derivante dal fatto che alle previsioni puntuali calcolate viene sommato un residuo ricampionato da quelli della regressione sulla serie originale, emerge anche la variabilità fornita dai parametri di lisciamiento. Calcolare diverse regressioni con diversi valori di  $\lambda$  significa penalizzare di più o

di meno le funzioni irregolari così da creare la variabilità che concorre al calcolo delle repliche delle previsioni puntuali.

### 2.3.2 Procedura regressione *kernel*

Questa procedura (*rnp*) si basa su regressioni non parametriche effettuate con il metodo del nucleo (*kernel regression*). L'obiettivo è sempre quello di pervenire a diverse repliche delle previsioni puntuali al fine di poter stimare una densità non parametrica su di esse e trovare così la densità prevista. Questa procedura non si differenzia dalle precedenti solamente per il tipo di regressione non parametrica che effettua, ma anche per il fatto che qui viene considerato un modello di regressione con eteroschedasticità condizionale come descritto in 2.6.

Le previsioni puntuali sono calcolate a partire da quelle della componente media e varianza ricampionando casualmente i residui calcolati del modello; uno schema della procedura può essere il seguente:

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_{t+i}^{(1)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}) + \hat{\sigma}(y_{t+i-1}) \epsilon_1^* \\
 \hat{y}_{t+i}^{(2)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}) + \hat{\sigma}(y_{t+i-1}) \epsilon_2^* \\
 &(\dots) \\
 \hat{y}_{t+i}^{(B)} &= \hat{f}(y_{t+i-1}) + \hat{\sigma}(y_{t+i-1}) \epsilon_B^*
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

dove l'asterisco indica l'elemento ricampionato tramite *bootstrap*.

Effettuare la regressione non parametrica di  $Y_t$  su  $X_t$  mediante metodo del nucleo significa stimare la  $f(\cdot)$  in un punto  $x$  effettuando una media locale ponderata con pesi che decrescono all'aumentare della distanza tra i punti osservati e  $x$ , ovvero:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n w_t(x) Y_t$$

I pesi vengono scelti ricorrendo a funzioni *kernel*, ad esempio lo stimatore di *Nadaraya-Watson* si trova utilizzando pesi pari a

$$w_t(x) = \frac{K_h(X_t - x)}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n K_h(X_t - x)}$$

Il parametro  $h$  (ampiezza di banda) serve ad aumentare la flessibilità del metodo e indica un fattore positivo per il quale viene riscalata la funzione nucleo al fine

di andare ad indagare porzioni più o meno ampie di dati:  $K_h(x) = \frac{1}{h}K(\frac{x}{h})$ .

Questo metodo sfrutta il ricampionamento dei residui come fonte di variabilità per replicare le previsioni puntuali esattamente come nel modello descritto in 2.2.3; si può dunque considerare questo metodo come l'analogo non parametrico della procedura semiparametrica 2.2.3. Sarà interessante valutare come i due metodi, che sfruttano la medesima fonte di variabilità, cercando di cogliere uno parametricamente e l'altro non parametricamente la media e la varianza condizionale dei dati, funzioneranno su dati simulati al fine di comprendere pregi e difetti di utilizzare una procedura parametrica piuttosto che una libera da tali assunti.

### 2.3.3 Densità predittiva markoviana

La procedura di calcolo non parametrica che sarà ora presentata (*mfd*) si differenzia dalle precedenti in quando non effettua regressioni; si evita dunque di assumere che la serie da prevedere dipenda dal proprio ritardo 1 e l'assunzione sulla quale si basa questa procedura è più blanda. Si assume che la serie  $Y_t$  sia generata da un processo markoviano di ordine  $p$ :

$$\Pr(Y_{t+1} \leq y_{t+1} | Y_t = y_t, \dots) = \Pr(Y_{t+1} \leq y_{t+1} | Y_t = y_t, \dots, Y_{t-p+1} = y_{t-p+1})$$

Questo tipo di assunzione è supportata da una grande varietà di modelli lineari e non lineari che sono di interesse per l'analisi di serie storiche (AR, SETAR, GARCH,...).

Come per i precedenti metodi descritti, la logica è quella di calcolare numerose repliche delle previsioni puntuali e su di esse stimare una densità *kernel*. Qui il meccanismo che si segue per pervenire alle previsioni puntuali è lievemente più sofisticato che nei casi in cui si effettuano regressioni e si basa su un metodo di indagine della dipendenza dei dati dal proprio passato che utilizza funzioni nucleo.

Dato il vettore  $X_t = (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+1})$  di lunghezza  $p$  e l'insieme  $S_{p,T} = (p, p+1, \dots, T-1)$ , dove  $T$  rappresenta il numero di osservazioni da considerare per

prevedere  $Y_{T+1}$ , si calcola:

$$\Pr(J = t) = \frac{K\left(\frac{X_T - X_t}{h_T}\right)}{\sum_{m \in S_{p,T}} K\left(\frac{X_T - X_m}{h_T}\right)} \quad (2.10)$$

con  $t \in S_{p,T}$ . In questo modo si assegna una probabilità a ciascuno dei vettori  $X_t$  che dipende dalla prossimità di questo vettore rispetto a  $X_T$ . Si considera come punto di riferimento il vettore  $X_T$  perché è quello che, secondo l'assunto di markovianità, concorre nella realizzazione del dato da prevedere. Per calcolare la 2.10 è necessario fissare una metrica per poter individuare la distanza tra i vettori; nell'implementazione di questa procedura si è ricorso alla distanza euclidea. Una volta calcolati i pesi da assegnare ai vari vettori si può ricampionare da essi usando proprio le probabilità come pesi in maniera tale che, tramite il ricampionamento, venga rispettata la struttura di dipendenza dei dati indagata per mezzo della 2.10. Una volta estratto un vettore  $X_t$  si considera previsione puntuale il valore che, secondo l'assunto di markovianità, è stato generato da esso, ovvero  $Y_{T+1}^* = Y_{t+1}$  dove l'asterisco indica la previsione ottenuta tramite ricampionamento. Effettuando  $B$  repliche di questa procedura è possibile ottenere  $Y_{T+1,1}^*, Y_{T+1,2}^*, \dots, Y_{T+1,B}^*$  e da esse stimare una densità *kernel*.

In questa procedura non è immediato individuare quale sia la fonte di variabilità che ha permesso di individuare la densità predittiva; essendo che le repliche delle previsioni puntuali sono state calcolate mediante il ricampionamento dei dati, dopo averne studiato non parametricamente la dipendenza, si potrebbe affermare che sia proprio la procedura di ricerca della dipendenza dei dati che ha reso possibile il calcolo della densità predittiva. Dunque a fornire la variabilità necessaria per il calcolo della densità predittiva è stata la tecnica di indagine della dipendenza dei dati legata all'assunzione di processo markoviano di ordine  $p$ .

### 2.3.4 Procedura GAM + *bootstrap*

Tutte le procedure sin qui descritte, che fossero parametriche o non parametriche, calcolano previsioni di densità sulla base di stime di regressioni semplici, dunque modelli nei quali la variabile esplicativa viene spiegata da una sola variabile regressore. Risulta utile in una moltitudine di casi invece studiare le dipendenze da



più regressori, quando ad esempio la serie originale presenta forti caratteristiche di stagionalità; si è dunque pensato di implementare anche un metodo di calcolo di densità predittiva basato su una regressione multipla così da poter includere nella previsione informazioni provenienti da più regressori. La procedura implementata rientra comunque tra quelle non parametriche in quanto si basa sulla stima di un modello additivo di tipo GAM (*Generalized Additive Model*). In questo modello si considera la seguente regressione:

$$Y_t = f(X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{p,t}) + a_t \quad (2.11)$$

in cui si assume che  $f(\cdot)$  abbia la seguente forma:  $f(X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{p,t}) = f_1(X_{1,t}) + f_2(X_{2,t}) + \dots + f_p(X_{p,t})$ , ovvero che i regressori rientrino non parametricamente nella regressione in maniera additiva. Ogni funzione  $f_i(\cdot)$  può essere stimata non parametricamente secondo qualche metodo (i.e. *spline*, *loess*, *kernel*) e la procedura mediante la quale si perviene alla stima della regressione multipla si basa su un algoritmo di *backfitting*.

Mentre nei modelli univariati la scelta del regressore è stata sempre limitata al ritardo della variabile esplicativa stessa, qui si pone il problema della scelta dei regressori. Essa non può essere standard come nel caso di regressione semplice ma sarà frutto di un'attenta osservazione delle caratteristiche della serie di partenza e delle sue interazioni con le variabili candidate a comparire tra i regressori. Potrà anche ritenersi preferibile far rientrare una variabile nella regressione in forma parametrica e in tal caso si otterrà un modello semiparametrico.

La logica utilizzata per pervenire alle previsioni puntuali basate sulla regressione multipla è la seguente:

$$\begin{aligned} y_{t+i}^{(1)} &= f(x_{1,t+i}, x_{2,t+i}, \dots, x_{p,t+i}) + a_1^* \\ y_{t+i}^{(2)} &= f(x_{1,t+i}, x_{2,t+i}, \dots, x_{p,t+i}) + a_2^* \\ &(\dots) \\ y_{t+i}^{(B)} &= f(x_{1,t+i}, x_{2,t+i}, \dots, x_{p,t+i}) + a_B^* \end{aligned} \quad (2.12)$$

dove l'asterisco indica l'elemento ricampionato tramite *bootstrap*.

Una volta stimato il modello GAM le repliche delle previsioni, dalle quali sarà poi stimata la densità predittiva, vengono calcolate perturbando la previsione puntuale ottenuta dal modello sommandone un residuo ricampionato casualmente dalla serie dei residui.

Nel corso del lavoro di analisi dei dati ci si riferirà a questa procedura di calcolo previsionale mediante la sigla *gam*. La fonte di variabilità utilizzata per effettuare il calcolo della densità predittiva, tramite stima *kernel* delle previsioni puntuali, è analoga a quella già incontrata in modelli precedenti e alla quale si riferisce come variabilità fornita dal termine di errore. Qui infatti le repliche delle previsioni puntuali sono calcolate grazie alla serie dei residui del modello stimato, con i quali si crea variabilità attorno appunto alla previsione puntuale così da poter permettere la stima non parametrica della densità predittiva.

## Capitolo 3

---

# VALUTAZIONE DELLE PREVISIONI

---

Così come per le procedure di stima puntuale si fa ricorso a misure, quali il MSE (*Mean Square Error*), MAE (*Mean Absolute Error*) etc, anche per le previsioni di densità sarà necessario ricorrere a strumenti statistici atti a valutare se le previsioni calcolate sono coerenti con i dati osservati *out of sample*. Si ricorre dunque all'implementazione di una serie di test per confrontare ciascuna metodologia di calcolo di densità predittiva.

Tuttavia quando l'oggetto della previsione è una densità di probabilità le procedure di valutazione si complicano in quanto non è possibile effettuare un confronto diretto tra oggetto previsto e corrispondente oggetto realizzato poiché esso non è osservabile. Come già accennato nel capitolo 1, per ovviare al fatto che l'oggetto della previsione non è osservabile, è necessario ricorrere alla *Probability Integral Transform* (PIT) per poter eseguire test con lo scopo di valutare le previsioni di densità.

Nel seguito, prima verranno presentati i test atti a valutare la distribuzione dei valori PIT e successivamente i test che si occupano di studiarne le caratteristiche di dipendenza; questi ultimi sono stati suddivisi in test basati su regressioni ausiliarie e test basati sul rapporto di verosimiglianza. Seguono, nella presentazione dei metodi di valutazione, due test che non sfruttano la *Probability Integral Transform* ma si basano direttamente sulle densità calcolate; questi effettuano un confronto tra il livello di copertura teorico e osservato di intervalli di confidenza calcolati sulle densità predittive al fine sempre di fornire informazioni circa la bontà delle previsioni.

Si dedica ora un paragrafo alla descrizione degli strumenti teorici che hanno reso possibile l'implementazione delle procedure di valutazione.

### 3.1 *Probability Integral Transform*

Questo risultato teorico è dovuto a *Rosenblatt* e consiste nel convertire valori provenienti da una qualsivoglia distribuzione continua in valori aventi distribuzione uniforme. Questo risultato è vero a patto che sia nota la vera distribuzione che ha generato i dati.

**Teorema.** *Data una variabile aleatoria  $X$  assolutamente continua, la trasformazione indotta dalla sua funzione di ripartizione conduce a una variabile casuale  $\mathcal{U}(0, 1)$ , ovvero:*

$$Y = F_X(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$$

La dimostrazione di questo teorema non è complessa e viene riportata per completezza:

$$\begin{aligned} \Pr(Y \in (-\infty, t]) &= F_Y(t) = \Pr(X \in (-\infty, F_X^{-1}(t)]) = \\ &= \Pr(X \leq F_X^{-1}(t)) = F_X(F_X^{-1}(t)) = t \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dalla dimostrazione si nota che la funzione di ripartizione della variabile trasformata  $Y$  è proprio quella di una variabile casuale uniforme.

Dovrebbe risultare ora più chiaro il motivo per il quale si è ricorso alla trasformazione PIT per valutare le previsioni di densità; se le previsioni calcolate sono corrette allora, trasformando i valori osservati *out of sample* con le funzioni di ripartizione corrispondenti alle densità previste, si dovrebbe trovare una sequenza di valori distribuiti uniformemente tra 0 e 1. La maggior parte dei test implementati dunque si occuperanno di valutare le proprietà distributive dei dati PIT.

Il risultato teorico di *Rosenblatt* è utilizzato in statistica computazionale per poter generare da distribuzioni delle quali è nota la forma analitica della funzione di ripartizione; applicando infatti il teorema appena enunciato alla rovescia, ovvero generando valori uniformi e poi trasformandoli con l'inversa della funzione di ripartizione della distribuzione da cui si vuole simulare, è possibile ottenere i

valori con le caratteristiche distributive desiderate.

Alcuni dei test implementati seguono la logica del rapporto di verosimiglianza e richiedono di lavorare con dati normali; in quei casi quindi si applica l'inversa della funzione di ripartizione della normale,  $\Phi^{-1}$ , ai dati PIT per poter disporre di dati che, sotto l'ipotesi di corretta densità prevista, sono normali.

Si presentano ora i test implementati per la valutazione della previsioni di densità effettuate.

### 3.2 Test sull'uniformità

In questa sezione saranno presentati i test che si sono usati per verificare l'ipotesi nulla di distribuzione uniforme dei dati PIT. Il sistema di ipotesi che si va a valutare dunque è:

$$\begin{aligned} H_0 &: z_1, \dots, z_n \sim \mathcal{U}(0, 1) \\ H_1 &: \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove  $z_i$  rappresenta il dato ottenuto applicando la PIT all'osservazione  $y_{n+i}$  della quale si è calcolata la densità predittiva.

Si presentano ora il test di *Kolmogorov-Smirnov* e un test basato sulla statistica chi-quadrato.

#### 3.2.1 Test di *Kolmogorov-Smirnov*

Il test di *Kolmogorov-Smirnov* (*KS*) è un test non parametrico che si occupa di verificare la forma delle distribuzioni campionarie. In questo caso, in cui si vuole valutare l'ipotesi nulla di uniformità, si andrà a misurare la distanza tra la funzione di ripartizione empirica dei dati PIT e la funzione di ripartizione della variabile casuale uniforme.

La statistica test si basa appunto sulla funzione di ripartizione empirica, che per il campione ordinato  $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}$ , è data da:

$$\hat{F}_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{z^{(i)} \leq z} \quad (3.3)$$

dove  $I_{z^{(i)} \leq z}$  è la funzione indicatrice. La funzione di ripartizione empirica stima la vera funzione di ripartizione del campione; la logica sulla quale si basa il test

è appunto calcolare la distanza tra la  $\hat{F}_n(z)$  e  $F_0(z)$ , funzione di ripartizione della distribuzione sostenuta dall'ipotesi nulla, in questo caso uniforme. La distanza viene misurata mediante il seguente criterio:

$$D_n = \sup_{-\infty < z < +\infty} |\hat{F}_n(z) - F_0(z)|$$

Chiaramente l'ipotesi nulla viene accettata per valori piccoli di  $D_n$  mentre si rifiuta per valori elevati, che suggeriscono discrepanza tra le due funzioni di ripartizione. La distribuzione di probabilità della statistica test è complessa, tuttavia non dipende dalla forma funzionale di  $F_0(z)$ .

### 3.2.2 Test chi-quadrato

La logica di questo test, che sarà indicato più avanti nell'analisi con la signa *unif*, è quella di suddividere l'intervallo  $(0, 1)$  in  $m$  sottointervalli di lunghezza  $\frac{1}{m}$  e confrontare le frequenze osservate  $N_k$ , ovvero il numero di osservazioni che cadono all'interno dell'intervallo  $k$ , con le frequenze attese  $\frac{N}{m}$  sotto l'ipotesi nulla di distribuzione uniforme dei dati PIT. La statistica test è:

$$X^2 = \sum_k \frac{(N_k - N/m)^2}{N/m} \quad (3.4)$$

Sotto l'ipotesi nulla, secondo la quale  $z_1, \dots, z_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ , la statistica test si distribuisce come una variabile  $\chi_{m-1}^2$ . La regione di rifiuto di questo test è unilaterale destra, ovvero concerne i valori elevati della statistica  $X^2$ .

### 3.3 Test basati su regressioni ausiliarie

Dopo aver presentato test che verificano l'ipotesi di distribuzione uniforme della trasformazione PIT dei dati osservati *out of sample*, ci si concentra ora sullo studio della loro indipendenza. Sotto l'ipotesi di corretta densità prevista infatti la sequenza di  $z_1, \dots, z_n$  deve avere caratteristiche di indipendenza oltre che di uniformità.

In questa sezione saranno quindi presentati due test che si basano su regressioni ausiliarie, ovvero su regressioni che indagano, grazie alla loro precisa forma, una certa caratteristica dei dati che si vuole sottoporre a verifica. Questi test sono atti

a valutare la correlazione seriale dei dati PIT e l'eventuale presenza di eteroschedasticità condizionale. Per il calcolo di questi test si è preso spunto da *Manzan e Zerom, (2010)*.

### 3.3.1 Test per l'autocorrelazione seriale

Per testare la presenza di autocorrelazione seriale all'interno della serie di dati PIT si assume che  $z_n$  segua il seguente processo:

$$(z_n - \bar{z}) = \alpha_1(z_{n-1} - \bar{z}) + \dots + \alpha_q(z_{n-q} - \bar{z}) + \epsilon_n \quad (3.5)$$

È possibile testare l'indipendenza lineare dei dati eseguendo un test sulla nullità dei coefficienti  $\alpha_i, \forall i = 1, \dots, q$ ; emerge qui chiaramente l'utilità della regressione ausiliaria, infatti si effettua un test sui coefficienti della regressione per valutare caratteristiche della serie. Il sistema di ipotesi del test *SC* infatti è:

$$\begin{aligned} H_0 &: \alpha_1, \dots, \alpha_q = 0 \\ H_1 &: \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Per valutare questo sistema di ipotesi si può usare la statistica test  $(M - n - \tau^* + 1) \times R^2$ , dove  $M - n$  è il numero totale di previsioni *out of sample* calcolate,  $\tau^*$  è il massimo orizzonte previsivo e  $R^2$  è il coefficiente di determinazione lineare della regressione ausiliaria stimata. Si può dimostrare che la statistica test si distribuisce come una variabile  $\chi_q^2$  sotto l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale dei dati PIT.

### 3.3.2 Test per l'eteroschedasticità condizionale

Proseguendo nella valutazione della bontà delle previsioni calcolate tramite lo studio delle caratteristiche dei dati PIT, si è ritenuto di implementare un test che verifichi la presenza di eteroschedasticità condizionale all'interno della serie  $z_1, \dots, z_n$ . Anche questo test (*HET*) si basa su una regressione ausiliaria e precisamente su:

$$\epsilon_n^2 = \beta_0 + \beta_1 \epsilon_{n-1}^2 + \dots + \beta_r \epsilon_{n-r}^2 + \eta_n$$

dove gli  $\epsilon$  sono i residui della regressione 3.5. Analogamente al test per la correlazione seriale anche qui il sistema di ipotesi riguarda la congiunta nullità dei

coefficienti della regressione:

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1, \dots, \beta_r = 0 \\ H_1 &: \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'ipotesi nulla sostiene l'assenza di eteroschedasticità condizionale dunque supporta il fatto che i valori PIT presentino caratteristiche di indipendenza e quindi che le previsioni di densità calcolate siano corrette. Anche in questo caso si ricorre alla statistica test legata al coefficiente di determinazione lineare, ovvero si valuta il sistema di ipotesi mediante  $(M - n - \tau^* + 1) \times R^2$  che, sotto l'ipotesi nulla, si distribuisce come un  $\chi_r^2$ .

### 3.4 Test rapporto di verosimiglianza

Si è pensato di includere tra le procedure di valutazione delle previsioni di densità effettuate alcune che facessero riferimento a tecniche basate sulla verosimiglianza. Si conosce dalla teoria che il test rapporto di verosimiglianza è il test uniformemente più potente per valutare un certo sistema di ipotesi, ovvero il test più potente ad un certo livello di confidenza. Dunque si presentano in questa sezione test basati sul rapporto di verosimiglianza per la costruzione dei quali si è preso spunto da Berkowitz, (2000). La logica di applicazione di queste procedure non è complessa e prevede di trasformare i dati PIT, uniformi sotto ipotesi di corretta densità prevista, in valori normali tramite  $\Phi^{-1}$  e successivamente di ricorrere al calcolo della verosimiglianza gaussiana.

Sapendo che sotto l'ipotesi di corretta densità predittiva i dati trasformati dovrebbero essere indipendenti e provenienti da una normale standard,  $y_t = \Phi^{-1}(z_t) \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ , con  $z_t$  serie dei valori PIT, è possibile considerare una grande varietà di test basati sul rapporto di verosimiglianza (LR).

#### 3.4.1 Test per l'indipendenza

Una volta calcolata la serie di valori trasformati la logica sulla quale si basano questi test è quella di assumere un certo processo, calcolarne le stime di massima verosimiglianza e valutare un sistema di ipotesi che considera determinati vin-



coli sui parametri mediante rapporto di verosimiglianza. Il processo che viene considerato è un autoregressivo del primo ordine:

$$y_t - \mu = \rho(y_{t-1} - \mu) + e_t \quad (3.8)$$

Risulta necessario, per la costruzione dei test qui presentati, ottenere la funzione di verosimiglianza della serie  $y_1, \dots, y_n$ ; per un processo come quello descritto dalla 3.8 la funzione di verosimiglianza è data da:

$$\begin{aligned} l(\theta) = & -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right) - \frac{(y_1 - \mu/(1-\rho))^2}{2\sigma^2/(1-\rho^2)} - \frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \\ & - \frac{n-1}{2} \log(\sigma^2) - \sum_{t=2}^n \frac{(y_t - \mu - \rho y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Un primo test che si è implementato assumendo il processo descritto in 3.8 riguarda esclusivamente l'indipendenza ( $LR_{ind}$ ), dunque sarà il parametro autoregressivo  $\rho$  ad essere sottoposto a verifica:

$$\begin{aligned} H_0 & : \rho = 0 \\ H_1 & : \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Una volta ottenute le stime dei parametri del processo è possibile procedere come nei classici test rapporto di verosimiglianza dove la statistica test è proporzionale alla differenza tra le log-verosimiglianze sostenute dall'ipotesi nulla e da quella alternativa. In questo caso si ottiene:

$$LR_{ind} = -2(l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, 0) - l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})) \quad (3.11)$$

La statistica test si distribuisce come un  $\chi_1^2$ ; valori piccoli della statistica test conducono ad accettare l'ipotesi nulla, mentre valori elevati segnalano discrepanza tra la verosimiglianza sotto  $H_0$  e quella sotto  $H_1$  dunque portano al rifiuto di assenza di dipendenza autoregressiva di ordine 1.

Assumendo sempre il medesimo processo, dunque utilizzando ancora la funzione di verosimiglianza 3.9, è possibile valutare un sistema di ipotesi che sottoponga a verifica anche i parametri  $\mu$  e  $\sigma$ , indagando se essi sono significativamente non differenti da quelli di una variabile casuale normale standard ( $LR_{010}$ ). Il

sistema di ipotesi che si considera è quindi dato da:

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = (\mu, \sigma^2, \rho)' = (0, 1, 0)' \\ H_1 &: \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La statistica test risulta essere:

$$LR_{010} = -2(l(0, 1, 0) - l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\rho})) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_3^2 \quad (3.13)$$

Questi sono i test rapporto di verosimiglianza che compaiono nella fase di valutazione dei risultati ottenuti applicando le procedure descritte al capitolo 2. A sostegno della flessibilità di calcolo di questo tipi di test si ricorda che è immediato ampliare le ipotesi da sottoporre a verifica al caso in cui si vogliono considerare maggiori ritardi nell'indagine della dipendenza o valutare la presenza di forme di dipendenza non lineari.

### 3.4.2 Test per la bontà previsiva nelle code della distribuzione

Per rendere completa la valutazione delle previsioni di densità calcolate si è pensato di implementare un test che indaghi la bontà previsiva nelle code della distribuzione ( $LR_{tail}$ ) ricorrendo alle proprietà della distribuzione normale troncata. Prevedere accuratamente le code della distribuzione è una questione delicata e non da sottovalutare; infatti le code contengono dati che si realizzano con probabilità basse e spesso proprio per questo sorgono problemi di sotto campionamento. Implementare una procedura che vada a valutare proprio la conformità delle code delle distribuzioni empiriche dei dati  $z_1, \dots, z_n$  trasformati con  $\Phi^{-1}$  con quelle di una normale standard (troncata) arricchisce notevolmente la batteria di test con i quali si valutano le previsioni calcolate.

Al fine di implementare questo test per prima cosa è necessario costruire la serie dei valori troncati  $y_t^*$  che si ottengono, dopo aver fissato un certo opportuno quantile ( $\alpha$ ) della distribuzione  $\mathcal{N}(0, 1)$  che indica il limite di troncamento dei dati, in questo modo:

$$y_t^* = \begin{cases} \alpha & \text{se } y_t \geq \alpha \\ y_t & \text{se } y_t < \alpha \end{cases} \quad (3.14)$$

La funzione di log-verosimiglianza per la serie di dati troncati  $y_t^*$  è:

$$l(\theta) = \sum_{y_t^* < \alpha} \left( -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma} (y_t^* - \mu)^2 \right) + \sum_{y_t^* = \alpha} \ln \left( 1 - \Phi \left( \frac{\alpha - \mu}{\sigma} \right) \right) \quad (3.15)$$

Così la valutazione riguarderà la coda sinistra della distribuzione, ma la logica non cambia affatto se si vuole sottoporre a verifica la coda destra, sarà sufficiente invertire il senso della disuguaglianza nella 3.14. Saranno sufficienti piccole modifiche a questa procedura se si è interessati a valutare congiuntamente le due code delle densità predittive calcolate.

Dopo aver stimato i parametri della normale troncata mediante minimizzazione della log-verosimiglianza ci si occupa di valutare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{aligned} H_0 &: \theta = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})' = (0, 1)' \\ H_1 &: \overline{H_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

La statistica test utilizzata è la classica statistica rapporto di verosimiglianza che misura il grado di discrepanza tra ipotesi nulla e ipotesi alternativa, ovvero:

$$LR_{tail} = -2(l(0, 1) - l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_2^2 \quad (3.17)$$

Con questo test si è completata la presentazione delle procedure atte a valutare la bontà previsiva studiando le caratteristiche, distributive o di dipendenza, dei dati PIT o di loro trasformazioni.

### 3.5 Valutazione di intervalli di confidenza

Si è ritenuto opportuno di arricchire la valutazione delle previsioni di densità calcolate con delle procedure che non indagano le caratteristiche dei valori ottenuti con la *Probability Integral Transform*, ma effettuano dei controlli sul livello di copertura effettivo di intervalli ricavati dalle distribuzioni previste.

Adattare questi test al caso di valutazione di densità significa considerare un intervallo ad un certo livello di confidenza delle densità e calcolare la serie degli sforamenti da questo intervallo così:

$$I_t = \begin{cases} 0 & \text{se } y_{t+j} \in [y_{t+j,L}^\alpha, y_{t+j,U}^\alpha] \\ 1 & \text{se } y_{t+j} \notin [y_{t+j,L}^\alpha, y_{t+j,U}^\alpha] \end{cases}$$

dove  $L$  e  $U$  che indicano il limite, rispettivamente inferiore e superiore, e  $\alpha$  indica il livello dell'intervallo della densità prevista  $f_{t+j}(\cdot)$ .

I test a cui si fa riferimento, se applicati alla serie degli sforamenti così calcolati, forniranno indicazioni circa la corretta copertura degli intervalli proposti (a quel dato livello di confidenza) e sull'indipendenza di tali sforamenti, dunque sull'eventuale presenza di fenomeni di *clustering* nella serie degli sforamenti.

Si tratta di test usati in applicazioni finanziarie quali la validazione di un modello per il VaR (*Value at Risk*); non è atipico prendere spunto da procedure di *backtesting* per la validazione del VaR per valutare densità predittive in quanto queste si occupano di controllare che il numero di sforamenti del VaR in un certo intervallo di tempo sia coerente con il livello di confidenza al quale il VaR è stato calcolato (test di *Kupiec*) e anche che tali sforamenti siano indipendenti (test di *Christoffersen*).

### 3.5.1 Test di Kupiec

Questo test confronta la percentuale di osservazioni che cadono al di fuori dell'intervallo ( $\hat{p}$ ), calcolata facendo la media dei valori  $I_t$ , con quella attesa ( $p$ ) dato il livello dell'intervallo scelto. Il sistema di ipotesi da saggiare è quindi dato da:

$$\begin{aligned} H_0 & : \hat{p} = p \\ H_1 & : \hat{p} \neq p \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si usa anche qui la tecnica del test rapporto di verosimiglianza e, ricordando la densità di un variabile binomiale, si ha che:

$$\begin{aligned} L_{Kup} & = -2 \ln(L(p)/L(\hat{p})) = \\ & = 2 \ln((1 - \hat{p})^{n-k} \hat{p}^k) - 2 \ln((1 - \alpha)^{n-k} \alpha^k) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_1^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

con  $k = \sum_{t=1}^n I_t$  che indica il numero di sforamenti. Questo test valuta la corretta copertura delle previsioni di densità effettuate e sarà abbreviato più avanti con *Kup*.

### 3.5.2 Test di Christoffersen

Questo test si occupa di valutare la corretta copertura congiuntamente all'indipendenza degli sforamenti. Per quanto riguarda la parte inerente l'indipendenza degli  $I_t$ , essa viene valutata contro un'ipotesi alternativa di dipendenza markoviana del primo ordine. Tenendo conto delle proprietà dei processi markoviani del primo ordine è possibile calcolare la verosimiglianza sotto ipotesi di dipendenza e sotto ipotesi di indipendenza rispettivamente pari a:

$$L_{dip}(p_{i,j}|I_1, \dots, I_n) = (1 - p_{01})^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} (1 - p_{11})^{n_{10}} p_{11}^{n_{11}} \quad (3.20)$$

$$L_{ind}(p_{i,j}|I_1, \dots, I_n) = (1 - p)^{n_{00} + n_{10}} p^{n_{01} + n_{11}} \quad (3.21)$$

con  $p_{i,j} = \Pr(I_t = j | I_{t-1} = i)$ , per  $i, j = 0, 1$  che rappresenta la probabilità di transizione,  $n_{i,j}$ , per  $i, j = 0, 1$ , pari al numero di transizioni di  $I_t$  dallo stato  $i$  allo stato  $j$  e  $p$  la probabilità di sforamento sotto l'ipotesi di indipendenza degli sforamenti.

Combinando opportunamente queste verosimiglianze è possibile calcolare la statistica test rapporto di verosimiglianza per la sola ipotesi di indipendenza ( $L_{ind}$ ). La statistica con la quale si costruisce il test di Christoffersen (*Chris*) invece combina le statistiche  $L_{Kup}$  e  $L_{ind}$  in questo modo:

$$\begin{aligned} LR_C &= L_{Kup} + L_{ind} = L_{Kup} - 2 \ln(L_{ind}(\hat{p}) / L_{dip}(\hat{p}_{ij})) = \\ &= -2 \ln((1 - \alpha)^{n-k} \alpha^k) + 2 \ln((1 - p_{01})^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} (1 - p_{11})^{n_{10}} p_{11}^{n_{11}}) \stackrel{H_0}{\sim} \chi_2^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Con questi due test, originariamente provenienti da procedure di *backtesting* di un modello per il VaR, si conclude l'esposizione dei test implementati per la valutazione delle previsioni di densità calcolate.



## Capitolo 4

---

# APPLICAZIONI SU DATI SIMULATI

---

Dopo aver presentato le procedure di calcolo di densità predittiva e di valutazione si considera ora la loro applicazione. Questa è stata resa possibile dall'utilizzo del *software* R grazie al quale si sono implementate numerose funzioni per compiere le operazioni necessarie per pervenire alle previsioni cercate o per computare i test descritti in precedenza.

Si ritiene opportuno, dato che le procedure in esame sono sperimentali, effettuare dapprima applicazioni su serie simulate, ovvero serie in cui il processo generatore dei dati è noto, e solo in un secondo momento applicare le metodologie implementate per il calcolo della previsione a dati reali. Valutare il funzionamento delle procedure implementate applicate a particolari serie simulate aiuta a cogliere aspetti virtuosi e non delle previsioni effettuate anche in relazione alle diverse caratteristiche, di dipendenza, linearità, omoschedasticità etc, dei dati per le quali esse sono calcolate.

Le serie simulate sulle quali vengono testate le procedure presentate nel capitolo 2 riguardano diversi modelli. Tra i modelli lineari si è pensato di includere l' AR(1)-GARCH(1,1), ovvero quel modello la cui componente media è modellata tramite un processo autoregressivo di primo ordine mentre quella varianza tramite un processo con eteroschedasticità condizionale di tipo GARCH(1,1):

$$\begin{aligned} Y_t &= 0.65Y_{t-1} + e_t \\ e_t &= \sqrt{h_t}\nu_t \\ h_t &= 0.05 + 0.1e_{t-1}^2 + 0.85h_{t-1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

La serie simulata di lunghezza  $M = 1500$  è rappresentata in figura 4.1; si presentano anche l'istogramma dei valori simulati in figura 4.2 e i grafici di autocorrelazione e autocorrelazione parziale rispettivamente in figura 4.3 e 4.4.

Essendo molte le procedure di calcolo previsionale implementate che sfruttano

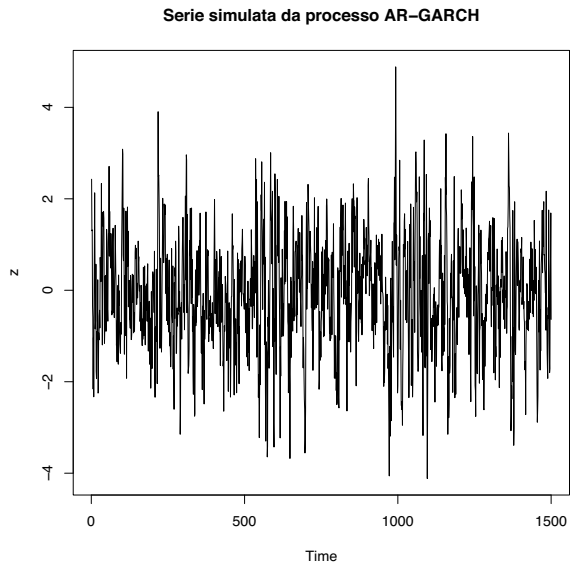


Figura 4.1: Grafico della serie simulata dal processo AR(1)-GARCH(1,1) specificato in 4.1.

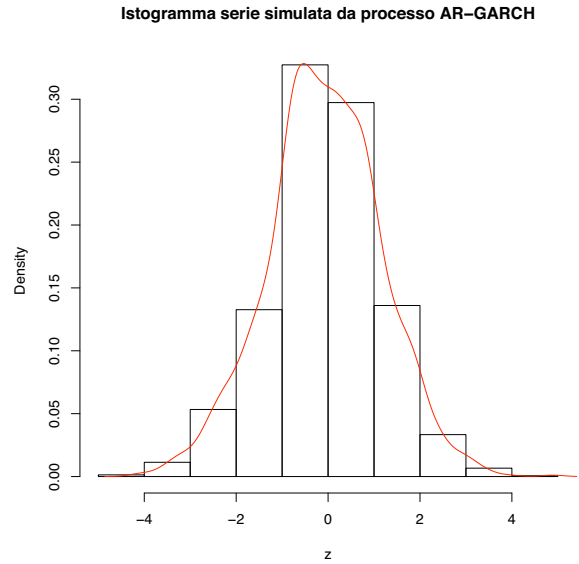


Figura 4.2: Istogramma e stima della densità dei valori della serie simulata dal processo AR(1)-GARCH(1,1) specificato in 4.1.

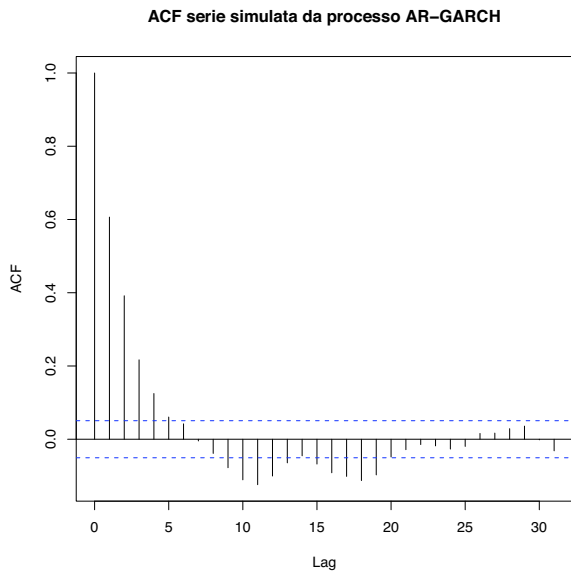


Figura 4.3: Funzione di autocorrelazione della serie simulata dal processo AR(1)-GARCH(1,1) specificato in 4.1.

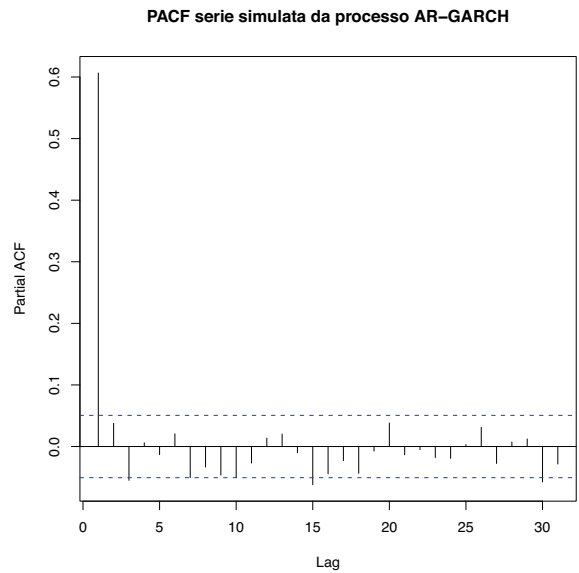


Figura 4.4: Funzione di autocorrelazione parziale della serie simulata dal processo AR(1)-GARCH(1,1) specificato in 4.1.

tecniche non parametriche, si è pensato di utilizzare nell'analisi su serie simulate



anche dati provenienti da modelli non lineari ed in particolare dal modello SETAR(1) e da un modello caotico di mappa di Hénon. Il *Self-Exciting Threshold Autoregressive model* (SETAR) deriva dal classico modello autoregressivo di primo ordine aggiungendo flessibilità individuando un *break* strutturale nei parametri, dunque un loro cambiamento a seconda del livello della serie:

$$Y_t = [-1.25 - 0.7Y_{t-1} + e_t]I_{(Y_{t-1} \leq -0.2)} + [0.3Y_{t-1} + e_t]I_{(Y_{t-1} > -0.2)} \quad (4.2)$$

Si può osservare in figura 4.5 la serie di lunghezza  $M = 1500$  simulata da un processo SETAR come quello appena descritto. Sono inoltre presentati anche l'istogramma dei valori simulati e i grafici di autocorrelazione e autocorrelazione parziale.

La mappa di Hénon è una mappa polinomiale che deriva da una semplice equazione dinamica non lineare:

$$Y_t = 1 - 1.4Y_{t-1}^2 + 0.3Y_{t-2} \quad (4.3)$$

Osservando figura 4.9 si può notare il comportamento caotico della serie prodotta dal processo descritto in 4.3; per rendere evidente questo comportamento è stato necessario rappresentare solo 500 delle  $M = 1500$  realizzazioni che si sono simulate per l'analisi. Sono presenti inoltre l'istogramma delle realizzazioni in figura 4.10 e le funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale nelle figure 4.11 e 4.12.

Si descrive ora l'approccio secondo il quale si sono generate le previsioni di densità. Date  $M$  osservazioni totali si considerano  $n$  osservazioni per la fase di stima del modello o della regressione sulla quale si basa la procedura in esame, dunque vengono calcolate le previsioni di densità  $f_{n+1}(\cdot), f_{n+2}(\cdot), \dots, f_{n+T}(\cdot)$ . Lo schema previsivo seguito consiste nel calcolare  $T$  previsioni di densità incrementando man mano di una unità il numero di osservazioni  $n$ . Nelle procedure semiparametriche e non parametriche si calcolano  $B$  repliche delle previsioni puntuali dalle quali calcolare la densità predetta mediante *kernel*.

In particolare per ciascun modello generatore dei dati sono state simulate due serie una di lunghezza  $M = 1000$  e una  $M = 1500$  sulle quali si è effettuato il calcolo

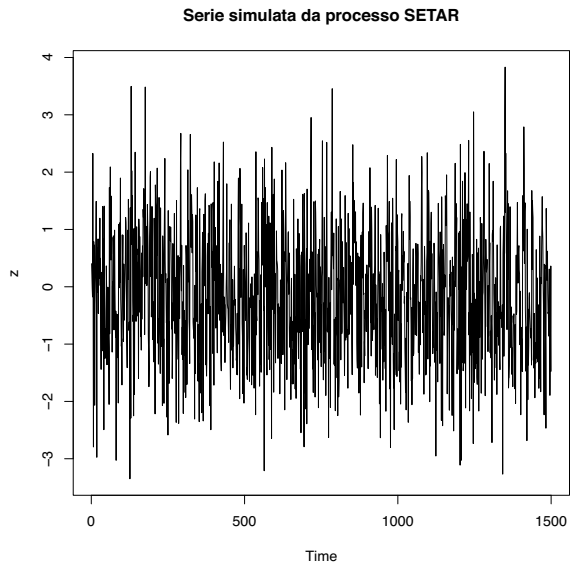


Figura 4.5: Grafico della serie simulata dal processo SETAR specificato in 4.2.

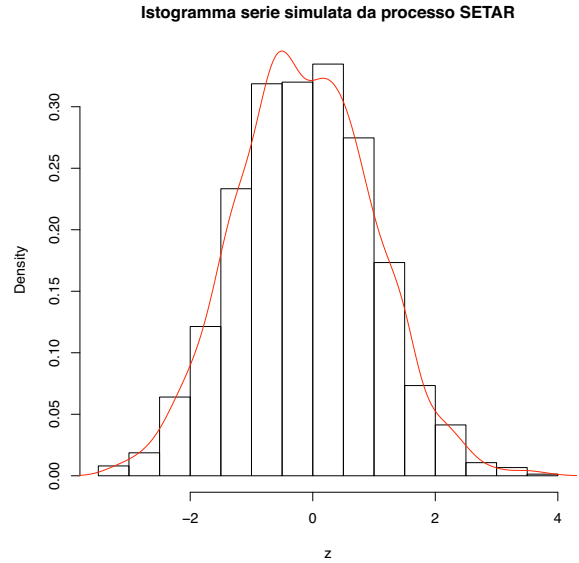


Figura 4.6: Istogramma e stima della densità dei valori della serie simulata dal processo SETAR specificato in 4.2.

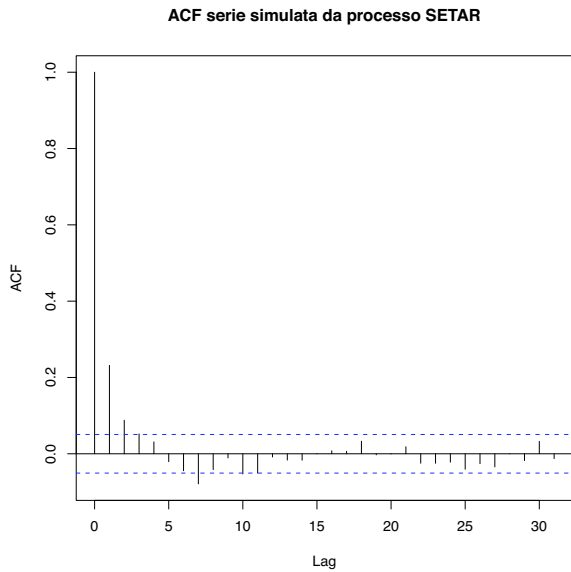


Figura 4.7: Funzione di autocorrelazione della serie simulata dal processo SETAR specificato in 4.2.

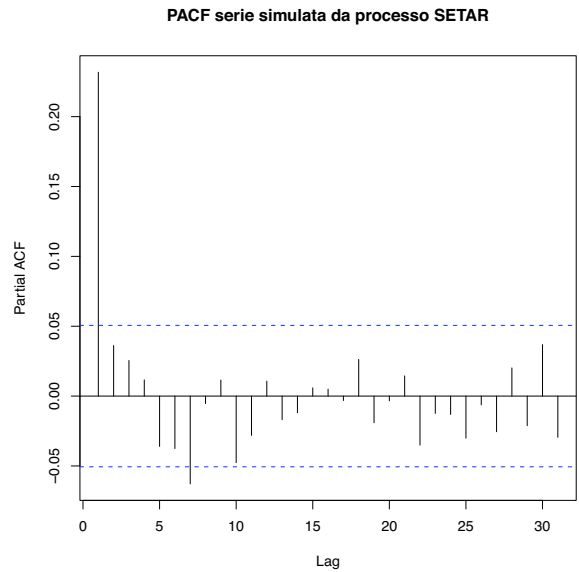


Figura 4.8: Funzione di autocorrelazione parziale della serie simulata dal processo SETAR specificato in 4.2.

della densità predittiva secondo un certo metodo utilizzando  $n = M - 500$ ,  $T = 2$  e, per i metodi che lo richiedono,  $B = 1000$  o  $B = 2000$ .

I risultati delle analisi sulle serie simulate saranno presentati sotto forma di tabelle contenenti i  $p$ -value dei test eseguiti su 400 previsioni (per ciascun orizzonte

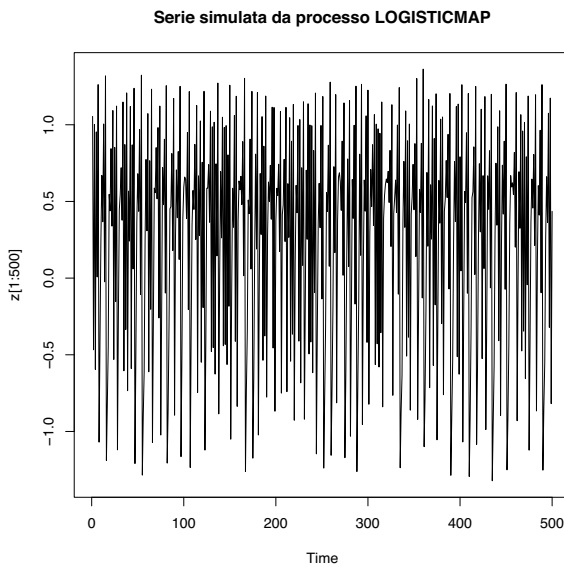


Figura 4.9: Grafico della serie simulata dal processo HENMAP specificato in 4.3.

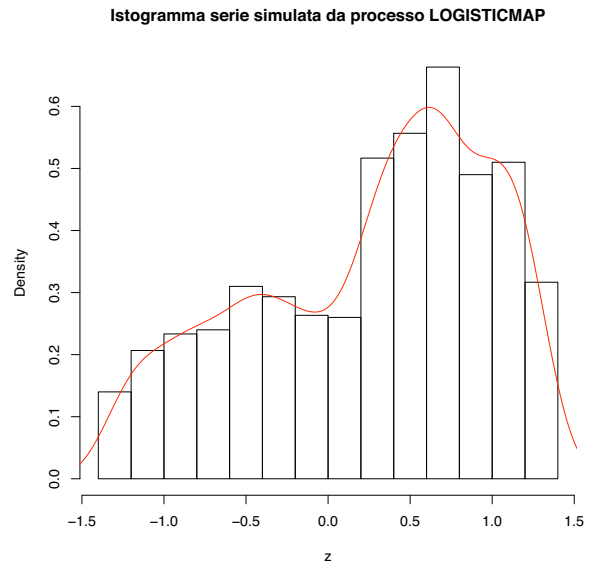


Figura 4.10: Istogramma e stima della densità dei valori della serie simulata dal processo HENMAP specificato in 4.3.

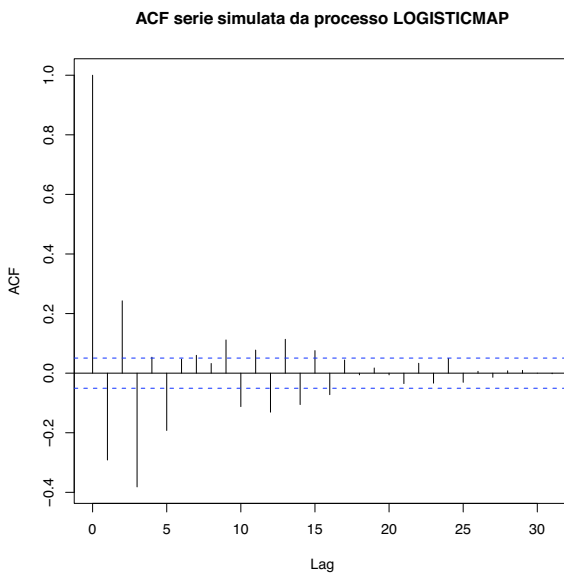


Figura 4.11: Funzione di autocorrelazione della serie simulata dal processo HENMAP specificato in 4.3.

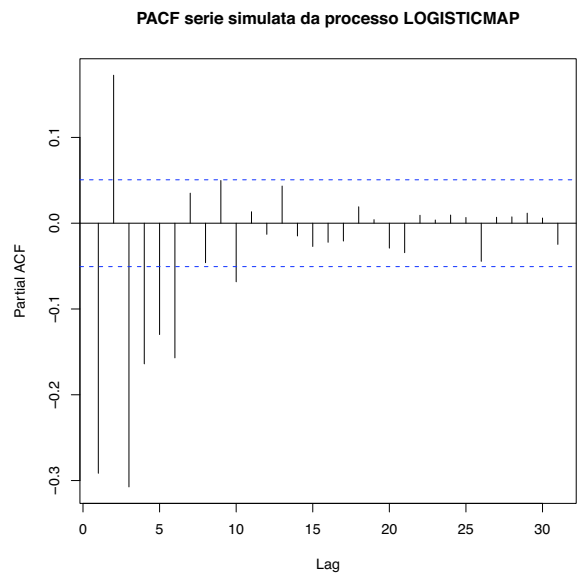


Figura 4.12: Funzione di autocorrelazione parziale della serie simulata dal processo HENMAP specificato in 4.3.

previsivo) prodotte tramite i diversi metodi implementati<sup>1</sup>. Per ciascuna serie simulata verranno presentate quattro tabelle, ovvero una contenente i risultati ottenuti a partire da una serie di lunghezza  $M = 1000$  e una  $M = 1500$  per ciascuno dei due orizzonti previsivi.

<sup>1</sup>Si fa presente che per l'analisi dei dati simulati il test  $LR_{tail}$  valuta la bontà previsiva congiunta delle due code.

Si presenteranno poi alcune analisi grafiche dall'osservazione delle quali è possibile verificare il buon funzionamento delle procedure di previsione. Si tratta degli istogrammi di valori PIT che aiutano a constatare il loro grado di uniformità e di grafici dei intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive, sovrapposti alla serie originale. Questi grafici aiutano a capire i motivi che portano a determinate configurazioni, magari tutt'altro che uniformi, degli istogrammi dei valori PIT, dunque sono da osservare parallelamente a questi. Per capire il legame presente tra questi risultati grafici basta tenere in considerazione che se il dato osservato cade al centro della densità predittiva, ovvero al centro del suo intervallo al 95%, il corrispondente valore PIT sarà attorno a 0.5; questo perché il valore PIT viene ottenuto applicando la funzione di ripartizione, ricavata dalla densità predittiva, al dato realizzato. Se invece il dato osservato cade sulla coda sinistra (o destra) della densità predittiva corrispondente allora il valore PIT generato sarà prossimo a 0 (o a 1). Dunque si ottengono valori PIT con buone caratteristiche di uniformità e di indipendenza quando i dati osservati cadono uniformemente e casualmente nel supporto delle densità predittive calcolate.

Un'altra informazione che si coglie dall'osservazione dei grafici degli intervalli di confidenza delle densità predittive riguarda la loro ampiezza; sarà quindi possibile individuare le procedure che producono densità più ampie.

#### 4.1 Serie simulata: AR-GARCH

In questa sezione saranno riportati i *p-value* dei test eseguiti sulle previsioni di densità, calcolate mediante le procedure di cui al capitolo 2, su serie simulate da un processo AR-GARCH.

Osservando le tabelle 4.1 e 4.2 si può studiare il funzionamento delle procedure di calcolo previsionale nel caso di previsione a un passo in avanti con numerosità campionaria pari a  $M = 1000$  e  $M = 1500$ . Per evitare di riportare troppe immagini nel testo si è deciso di includere solo gli istogrammi dei valori trasformati tramite la *Probability Integral Transform* per la numerosità campionaria maggiore, ovvero  $M = 1500$ ; questi sono visibili in figura da 4.13 a 4.20. Anche

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	0.041	0.960	0.508	0.521	1.000	0.239	0.022	0.047
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.623	< 0.001	0.014	1.000	< 0.001	0.867	0.002
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.020	0.995	0.366	0.223	1.000	0.015	0.035	0.038
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	0.023	0.981	0.466	0.351	1.000	0.041	0.035	0.038
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	0.031	0.755	0.195	0.642	1.000	0.006	0.083	0.014
<i>smsp</i>	< 0.001	< 0.001	0.484	< 0.001	0.728	1.000	< 0.001	0.107	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.598	< 0.001	0.038	1.000	< 0.001	0.737	0.173
<i>mfd</i>	< 0.001	0.036	0.007	< 0.001	< 0.001	1.000	0.079	0.306	0.109

Tabella 4.1: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie AR-GARCH simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	0.679	0.664	0.892	0.270	1.000	0.378	0.055	0.121
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.008	0.649	< 0.001	0.031	1.000	0.092	0.230	0.326
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.367	0.690	0.991	0.191	1.000	0.016	0.055	0.121
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	0.544	0.656	0.865	0.227	1.000	0.105	0.013	0.027
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	0.899	0.858	0.245	0.475	1.000	0.107	0.083	0.201
<i>smsp</i>	< 0.001	0.099	0.791	< 0.001	0.029	1.000	0.012	0.120	0.074
<i>rnp</i>	< 0.001	0.007	0.608	< 0.001	0.544	1.000	0.003	0.306	0.431
<i>mfd</i>	< 0.001	0.059	< 0.001	0.008	< 0.001	1.000	0.095	0.169	0.342

Tabella 4.2: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie AR-GARCH simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

i grafici relativi agli intervalli di confidenza al 95%, presentati in figura da 4.21 a 4.28, riguardano solo le densità predittive calcolate a partire dalla serie di lunghezza  $M = 1500$ ; per rendere interpretabili questi grafici si sono riportati solo gli intervalli relativi alle prime 100 previsioni calcolate.

Dal punto di vista della distribuzione non c'è pieno accordo tra il test di *Kolmogorov-Smirnov* e quello chi-quadrato per valutare l'uniformità dei dati; mentre, con numerosità campionaria inferiore, il primo risulta sempre significativo, il secondo test supporta l'ipotesi di distribuzione uniforme dei valori PIT nel caso di procedura parametrica, semiparametriche basate su modello AR-GARCH ( $sp_1$ ,  $sp_2$  e  $sp_3$ ) e *mfd*. La situazione migliora sensibilmente considerando la tabella che riporta i risultati per la numerosità campionaria maggiore; infatti qui, anche se il test *KS* risulta sempre fortemente significativo, tutti i *p-value* del test *unif* aumentano e le uniche procedure che conducono al rifiuto dell'ipotesi di uniformità sono *sp<sub>AR</sub>* e

*rnp*. I risultati di questi test sono coerenti con la forma degli istogrammi dei valori PIT; nessuno di essi infatti si scosta drasticamente dall'uniformità. Per quanto riguarda invece i grafici degli intervalli di confidenza si ritiene di sottolineare che le ampiezze degli intervalli sono simili per tutte le procedure considerate ad eccezione della *sp<sub>3</sub>*. La fonte di variabilità fornita dalle stime dei parametri del modello ARMA-GARCH rende gli intervalli mediamente più ampi degli altri, in particolare di quelli forniti dalle altre procedure che si basano sulla stima del medesimo modello.

Per quanto riguarda i test che indagano circa l'eventuale struttura di dipendenza dei dati PIT ci si sofferma dapprima su quelli basati su regressioni ausiliarie. I risultati rimangono sostanzialmente invariati per ambedue le numerosità campionarie. Il test *SC* conduce ad accettare l'ipotesi di assenza di autocorrelazione seriale all'interno della serie dei valori PIT per tutte le procedure ad eccezione della *mf<sub>d</sub>*; il test che indaga invece l'assenza di eteroschedasticità condizionale viene rifiutato dalla procedura *sp<sub>AR</sub>* e da quelle non parametriche implementate. Continuando l'analisi della dipendenza dei valori PIT, ma focalizzandosi su test basati sul rapporto di verosimiglianza, si osservano i livelli di significatività osservati individuati tramite i test *LR<sub>ind</sub>* e *LR<sub>010</sub>*; anche in questo caso c'è pieno accordo tra i risultati individuati con entrambi le numerosità campionarie. Il test che, basandosi su un processo autoregressivo del primo ordine per la serie dei PIT, si limita a valutare la nullità del parametro  $\rho$  è in accordo con il test *SC*. Viene rigettata l'ipotesi di indipendenza dei dati infatti solo per la procedura di calcolo densità predittiva *mf<sub>d</sub>*; il test che invece si occupa di valutare anche i parametri della normale standard, alla quale dovrebbero tendere i valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  sotto l'ipotesi di corretta densità predittiva, supporta l'ipotesi nulla per ogni procedura di calcolo implementata, riportando un *p-value* prossimo ad 1.

Il test rapporto di verosimiglianza per valutare la bontà previsiva nelle code della distribuzione, nel caso di  $M = 1000$ , conduce a livelli di significatività osservati prossimi a zero, quindi al rifiuto di  $H_0$ , nel caso di procedure *sp<sub>AR</sub>*, *sp<sub>3</sub>*,

*smsp* e *rnp*. Al crescere della numerosità campionaria invece questo test suggerisce di accettare l'ipotesi di buona capacità previsiva nelle code della distribuzione per tutte le procedure implementate tranne che per *rnp*. Questo miglioramento nel test che studia la bontà previsiva nelle code della distribuzione col crescere della numerosità campionaria non deve stupire; infatti gli eventi situati nelle code della distribuzione spesso sono sottocampionati a causa della limitata lunghezza della serie disponibile. All'aumentare delle osservazioni disponibili cresce anche il numero di valori estremi osservati e questo contribuisce al miglioramento della bontà previsiva nelle code.

Per quanto riguarda i test che si occupano di valutare la corretta copertura degli intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive calcolate e l'indipendenza degli sforamenti da essi, si può affermare che la situazione migliora sensibilmente passando dai risultati prodotti con  $M = 1000$  a quelli con  $M = 1500$ . Il test di *Kupiec* conduce a *p-value* tutti  $> 0.01$  ciò significa che, almeno al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ , tutte le procedure supportano l'ipotesi di corretta copertura degli intervalli di confidenza calcolati a partire dalle densità previste. Per quanto riguarda il test di *Christoffersen* si nota come con lunghezza della serie di partenza pari a 1000 le procedure *sp<sub>AR</sub>* e *smsp* conducono al rifiuto di  $H_0$ , mentre nel caso di  $M = 1500$  tutte le procedure forniscono intervalli di confidenza al 95% che, oltre a presentare corretto livello di copertura, producono una serie di sforamenti da essi con caratteristiche di indipendenza.

Considerando ora la previsione a  $T = 2$  passi in avanti, si passa al commento delle tabelle 4.3 e 4.4 le quali contengono i *p-value* dei vari test eseguiti sulle previsioni calcolate a partire da una serie AR-GARCH con  $M = 1000$  e  $M = 1500$ . Si riportano anche le analisi grafiche compiute sulle previsioni, visibili da figura 4.29 a figura 4.36, che consistono in istogrammi dei valori PIT analogamente a quanto illustrato in precedenza; osservando questi istogrammi si nota come alcuni di essi si discostino maggiormente dall'uniformità rispetto a quelli proposti nel caso di previsione una passo in avanti a causa di picchi in corrispondenza dei valori estremi 0 e 1. I grafici degli intervalli di confidenza sono riportati nelle

figure da 4.37 a 4.44.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.907	< 0.001	1.000	< 0.001	0.055	0.098
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.444	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.716	< 0.001	1.000	< 0.001	0.169	0.235
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.806	< 0.001	1.000	< 0.001	0.169	0.235
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	0.451	< 0.001	0.440	< 0.001	< 0.001	0.120	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	< 0.001	0.496	< 0.001	0.435	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.810	< 0.001	1.000	< 0.001	0.255	0.064
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.706	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.3: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie AR-GARCH simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	0.035	< 0.001	0.862	< 0.001	1.000	< 0.001	0.120	0.074
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.534	< 0.001	1.000	< 0.001	0.146	0.031
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.002	< 0.001	0.994	< 0.001	1.000	< 0.001	0.035	0.102
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	0.007	< 0.001	0.897	< 0.001	0.048	< 0.001	0.035	0.077
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	0.254	< 0.001	0.647	< 0.001	< 0.001	0.009	0.001	0.005
<i>smsp</i>	< 0.001	0.052	0.784	< 0.001	0.013	1.000	0.001	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.714	< 0.001	1.000	< 0.001	0.613	0.539
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.602	< 0.001	1.000	< 0.001	0.026	< 0.001

Tabella 4.4: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie AR-GARCH simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Lo studio della distribuzione dei valori PIT effettuato tramite il test *KS* conduce sempre al rifiuto dell'ipotesi nulla di uniformità dei dati, per ambedue le numerosità campionarie. Il test chi-quadrato, sempre per valutare l'uniformità della serie dei valori PIT, invece supporta l'ipotesi nulla nel caso di procedura semiparametrica *sp<sub>3</sub>*, con numerosità campionaria  $M = 1000$ , mentre con numerosità maggiore anche le procedure *p* e *smsp* non rifiutano l'ipotesi nulla di uniformità; vi è dunque un miglioramento dei risultati relativi al test *unif* al crescere di  $M$ .

Come già accennato gli istogrammi dei valori PIT presentano, per alcune procedure, dei picchi in corrispondenza dei valori estremi 0 e 1. Osservando i grafici degli intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive si nota come per alcune procedure quali la *sp<sub>AR</sub>*, *rnp* e *mfd* spesso il dato osservato non cada al-



l'interno dell'intervallo al 95% generando così molti valori PIT estremi.

I test basati su regressioni ausiliarie conducono a risultati analoghi per quanto riguarda le due numerosità campionarie utilizzate. Il test *SC* conduce ad accettazione dell'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale solo per la procedura *smsp*. Il test che indaga la presenza di eteroschedasticità condizionale nella serie dei valori PIT invece accetta  $H_0$  per ogni procedura di calcolo di densità predittiva ad eccezione proprio della *smsp*.

Il test rapporto di verosimiglianza per lo studio dell'indipendenza della serie PIT conduce a risultati analoghi a quello basato su regressioni ausiliarie (*SC*); infatti anche in questo caso l'unica procedura per la quale si accetta l'ipotesi di indipendenza nella serie dei valori PIT, contro ipotesi alternativa di dipendenza autoregressiva di primo ordine, è la *smsp*. Tuttavia mentre nel caso di  $M = 1000$  si incontra un livello di significatività osservato molto elevato, con  $M = 1500$  invece il test risulta non significativo solo ad un livello  $\alpha = 0.01$ . Il test  $LR_{010}$  conduce al rifiuto di  $H_0$  nel caso di procedura semiparametrica  $sp_3$  (per entrambe le numerosità campionarie) e di procedura  $sp_2$  (solo con  $M = 1500$ ).

L'unica procedura in grado di produrre buone previsioni delle code della distribuzione, dunque che fornisce *p-value* del test  $LR_{tail}$  elevati, è la  $sp_3$ , tuttavia solo solo nel caso di  $M = 1000$ ; infatti passando a  $M = 1500$  nessuna delle procedure implementate produce densità predittive le cui code sono in linea con i dati osservati.

Come è sensato pensare, rispetto alla previsione un passo in avanti, peggiorano sensibilmente i risultati ottenuti con i test di *Kupiec* e *Christoffersen*. Si osserva comunque un miglioramento relativamente ai *p-value* forniti da questi test, passando dai risultati ottenuti con  $M = 1000$  e quelli con  $M = 1500$ . Per quanto riguarda il test che valuta la corretta copertura degli intervalli di confidenza si nota come le procedure che conducono al rifiuto di  $H_0$ , con numerosità campionaria inferiore, sono  $sp_{AR}$ ,  $sp_3$ , *smsp* e *mfd*; incrementando il numero di osservazioni a disposizione le uniche procedure per le quali il test *Kup* risulta significativo sono invece  $sp_3$  e *smsp*. Del tutto analoghi sono i risultati forniti dal test di *Christoffer-*

sen fatta eccezione per la procedura non parametrica  $mfd$  che fornisce un livello di significatività osservato prossimo a 0 anche nel caso di  $m = 1500$ .

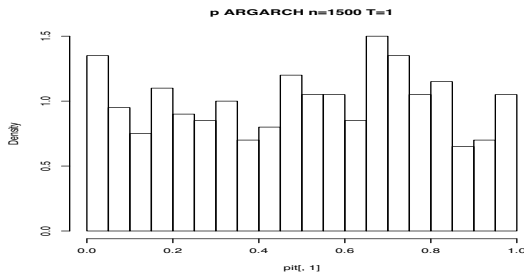


Figura 4.13: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

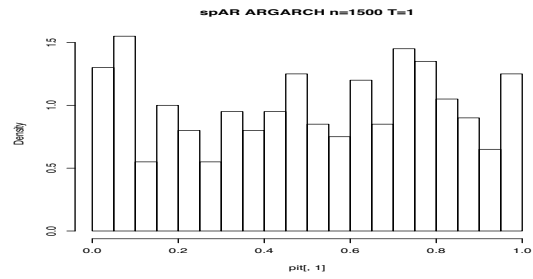


Figura 4.14: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $spAR$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

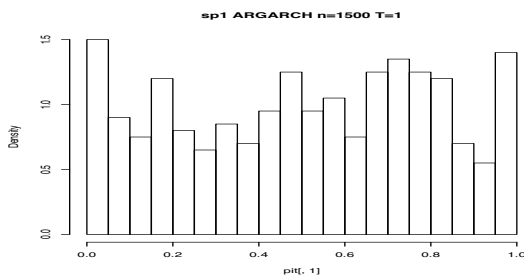


Figura 4.15: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp1$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

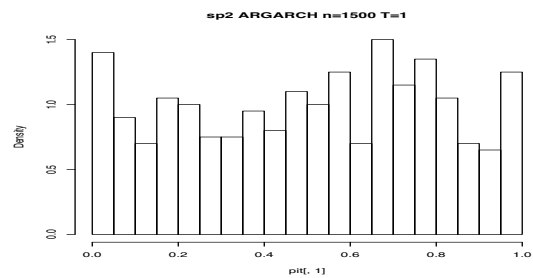


Figura 4.16: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp2$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

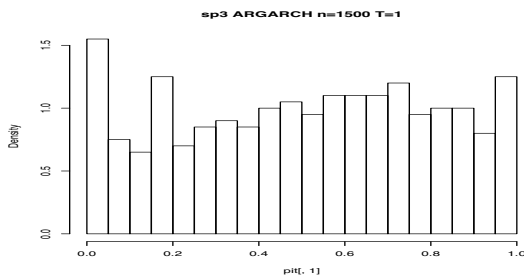


Figura 4.17: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp3$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

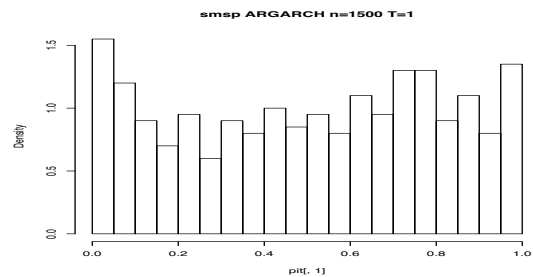


Figura 4.18: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sm.sp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

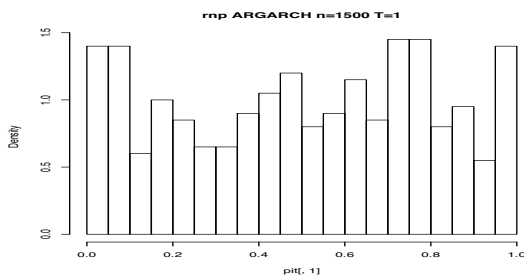


Figura 4.19: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $rnp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

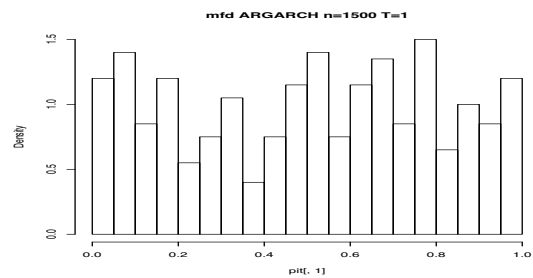


Figura 4.20: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mfd$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

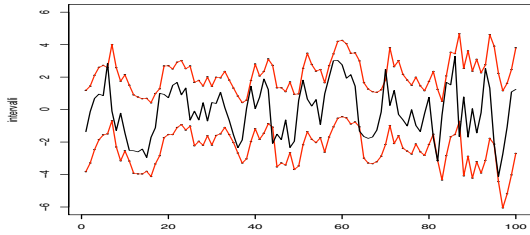


Figura 4.21: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

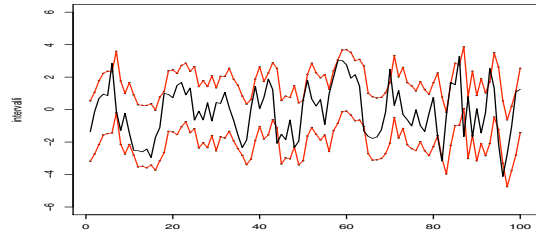


Figura 4.22: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

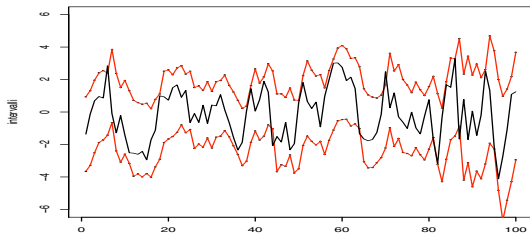


Figura 4.23: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

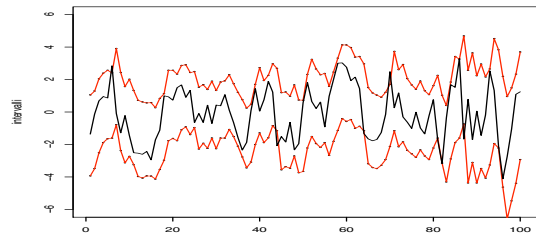


Figura 4.24: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

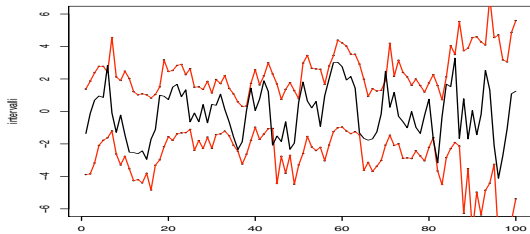


Figura 4.25: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

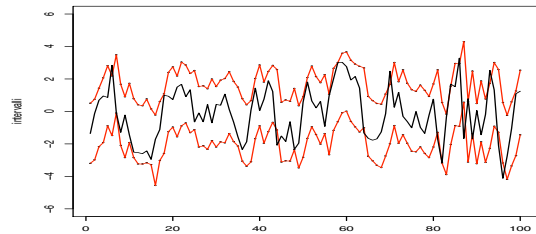


Figura 4.26: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sm.sp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

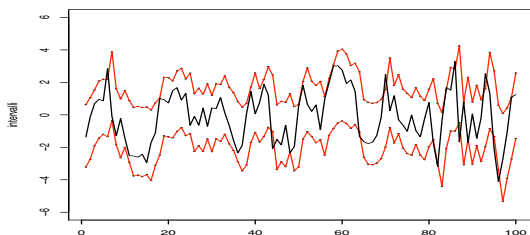


Figura 4.27: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $rnp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

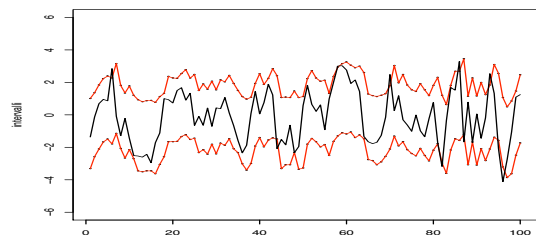


Figura 4.28: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

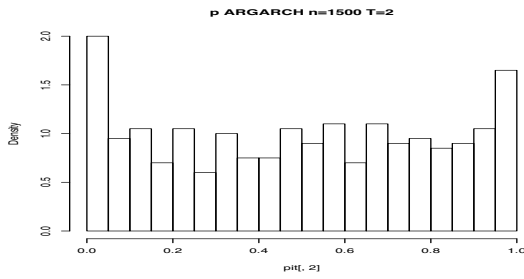


Figura 4.29: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

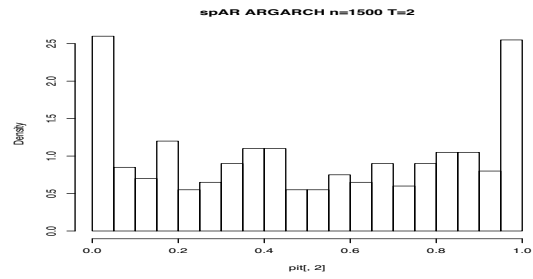


Figura 4.30: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $spAR$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

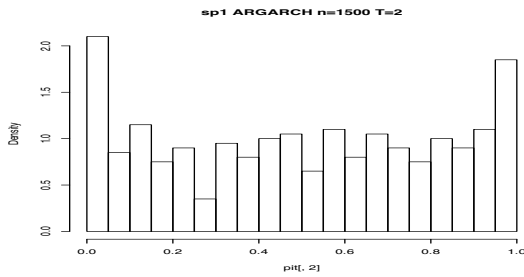


Figura 4.31: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp1$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

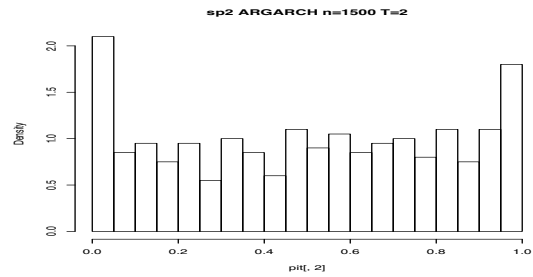


Figura 4.32: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp2$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

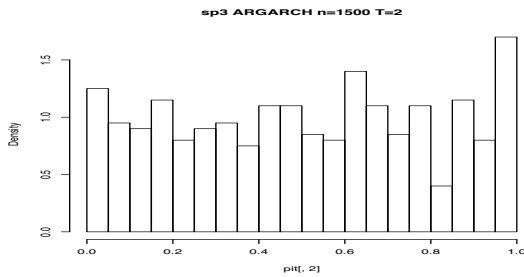


Figura 4.33: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp3$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

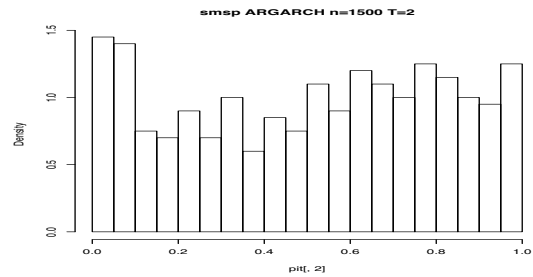


Figura 4.34: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sm.sp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

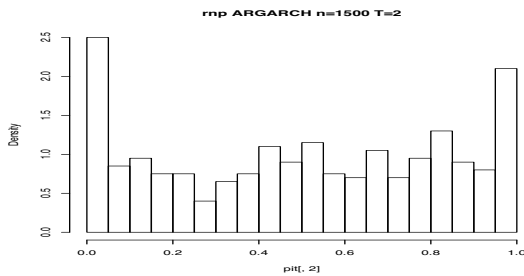


Figura 4.35: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $rnp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

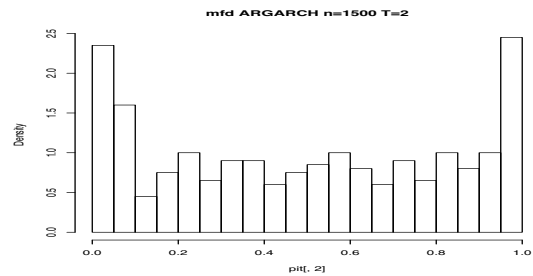


Figura 4.36: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

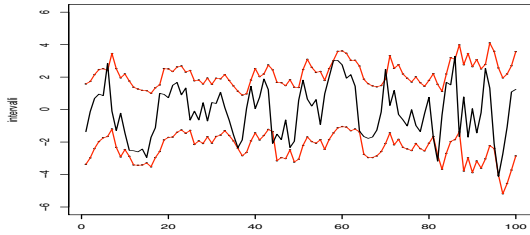


Figura 4.37: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

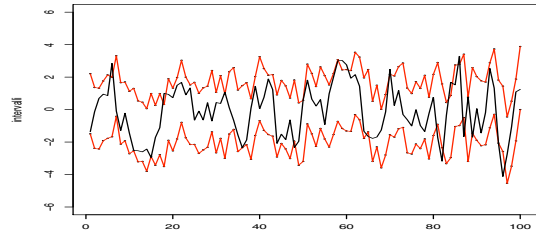


Figura 4.38: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

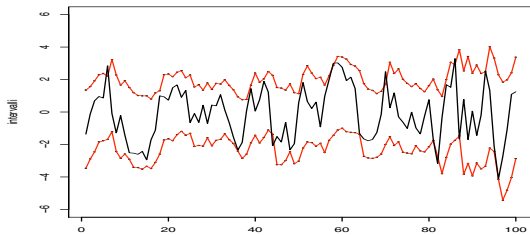


Figura 4.39: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

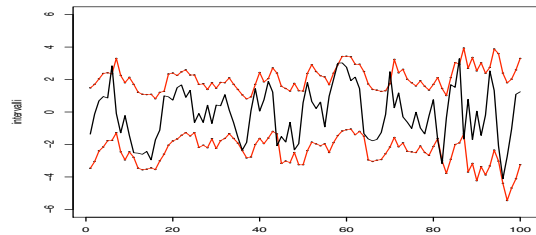


Figura 4.40: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

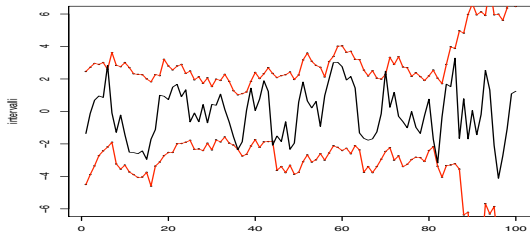


Figura 4.41: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

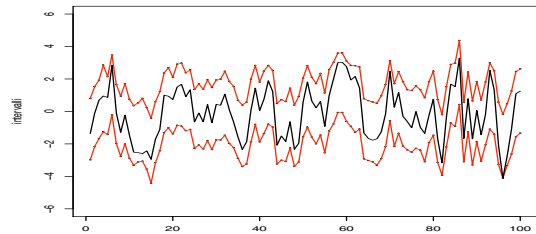


Figura 4.42: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sm_{sp}$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

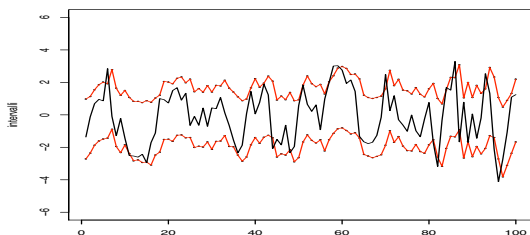


Figura 4.43: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $rnp$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

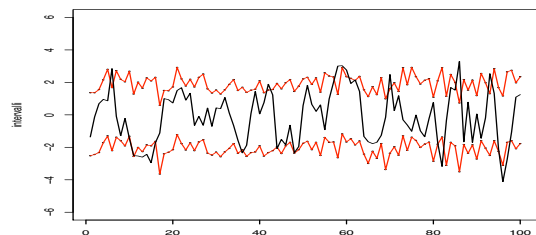


Figura 4.44: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie AR-GARCH di lunghezza  $M = 1500$ .

## 4.2 Serie simulata: SETAR

Si passa ora all'analisi dei risultati ottenuti applicando le procedure di calcolo previsionale alla serie simulata dal processo SETAR presentato in 4.2. L'analisi sarà effettuata analogamente a quanto fatto per il modello AR-GARCH, ovvero si presenteranno delle tabelle e dei risultati grafici contenenti gli istogrammi dei valori PIT.

Si comincia analizzando i risultati ottenuti calcolando densità predittive a un passo; i  $p$ -value dei test eseguiti sono riportati in tabella 4.5 per quanto riguarda la numerosità campionaria  $M = 1000$  e in tabella 4.6 per la numerosità  $M = 1500$ . Gli istogrammi dei valori PIT generati con dalle previsioni calcolate relativamente a queste analisi sono riportate in figura da 4.45 a 4.52 mentre i grafici degli intervalli di confidenza al 95% delle prime 100 densità predittive calcolate sono presentati in figura da 4.53 a 4.60.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	0.107	0.499	0.549	0.166	1.000	0.327	0.035	0.102
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.864	0.806	0.865	0.247	1.000	0.639	0.004	0.007
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.379	0.522	0.699	0.369	< 0.001	0.140	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	0.012	0.493	0.575	0.338	< 0.001	0.082	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.742	0.661	0.847	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	0.572	0.910	0.519	0.472	1.000	0.103	0.013	0.036
<i>rnp</i>	< 0.001	0.966	0.997	0.868	0.936	0.001	0.893	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	0.565	0.857	0.995	0.386	0.003	0.895	< 0.001	0.001

Tabella 4.5:  $P$ -value dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie SETAR simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Nelle prime due colonne sono riportati i risultati dei test che valutano l'uniformità della distribuzione dei valori previsti trasformati tramite la *Probability Integral Transform*. Il test  $KS$  risulta sempre significativo, mentre il test chi-quadrato conferma l'ipotesi nulla di distribuzione uniforme dei valori PIT per le densità prodotte da tutte le procedure implementate ad eccezione della procedura semi-parametrica  $sp_3$ . Dall'osservazione degli istogrammi dei valori PIT si nota come tutti siano abbastanza piatti mentre quello generato dalla procedura  $sp_3$  risulti più irregolare, presentando due gobbe. Si ricercano quindi le cause di questa par-

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	0.249	0.812	0.850	0.543	0.001	0.707	0.001	0.002
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.961	0.469	0.388	0.281	< 0.001	0.467	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.487	0.989	0.857	0.655	< 0.001	0.488	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	0.245	0.971	0.774	0.670	< 0.001	0.220	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.196	0.974	0.195	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sm<sub>sp</sub></i>	< 0.001	0.284	0.959	0.886	0.019	1.000	0.011	0.083	0.106
<i>rnp</i>	< 0.001	0.575	0.449	0.682	0.059	0.069	0.042	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	0.637	0.802	0.735	0.648	< 0.001	0.036	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.6: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie SETAR simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

ticolare conformazione dell'istogramma dei valori PIT generati dalla procedura  $sp_3$  nei grafici degli intervalli di confidenza delle previsioni prodotte; la procedura semiparametrica che sfrutta la variabilità fornita dalle stime dei parametri fornisce intervalli di confidenza più ampi di tutte le altre e questo fa sì che i dati osservati non cadano uniformemente all'interno di questi intervalli ma vi sia una minore concentrazione di valori osservati vicino agli estremi.

Tra i test basati su regressioni ausiliarie, quello che valuta l'assenza di autocorrelazione seriale all'interno della serie dei valori PIT (*SC*) supporta, per tutte le procedure implementate, l'ipotesi nulla; anche il test per la presenza di eteroschedasticità condizionale supporta per ciascuna delle metodologie di calcolo previsionale l'ipotesi  $H_0$ .

Passando alla descrizione dei risultati dei test basati sul rapporto di verosimiglianza, quello che sottopone a verifica l'ipotesi di assenza di dipendenza autoregressiva del primo ordine riporta sempre valori di *p-value* superiori a 0.10 tranne che nel caso di procedure *sm<sub>sp</sub>* e *rnp* ma solo nel caso di numerosità campionaria maggiore. Il test invece che valuta oltre che l'assenza di autocorrelazione seriale anche i parametri della distribuzione dei valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  riporta livelli di significatività osservati elevati per le procedure *p* e *sp<sub>AR</sub>*, solo nel caso di  $M = 1000$ , e *sm<sub>sp</sub>* sia con  $M = 1000$  che  $M = 1500$ . Il test *LR<sub>tail</sub>* supporta l'ipotesi nulla di gaussianità nelle code della distribuzione dei valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  per tutte le procedure fatta eccezione per la procedura



semiparametrica che sfrutta la fonte di variabilità proveniente dalle stime dei parametri del modello ARMA-GARCH, ovvero  $sp_3$ .

Le ultime due colonne interessano i test derivanti dalle procedure di *backtesting* del VaR; le uniche procedure di calcolo di densità predittive che producono distribuzioni i cui intervalli al 95% rispettano il livello di copertura e i cui sforamenti hanno caratteristiche di indipendenza sono la  $p$ , solo per  $M = 1000$  e la  $smsp$ .

Ci si occupa ora di commentare i risultati relativi alle tabelle 4.7 e 4.8 che contengono i  $p$ -value dei test effettuati sulle previsioni di densità a due passi in avanti. Le analisi grafiche effettuate, ovvero gli istogrammi dei valori PIT e il grafico degli intervalli di confidenza al 95%, sono riportati da figura 4.61 a figura 4.76.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
$p$	< 0.001	0.213	0.008	0.718	0.015	1.000	0.270	0.008	0.025
$sp_{AR}$	< 0.001	0.456	0.005	0.630	0.003	1.000	0.058	0.002	< 0.001
$sp_1$	< 0.001	0.267	0.009	0.424	0.033	< 0.001	0.286	< 0.001	< 0.001
$sp_2$	< 0.001	0.359	0.015	0.326	0.045	< 0.001	0.120	< 0.001	< 0.001
$sp_3$	< 0.001	< 0.001	0.001	0.169	0.033	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$smsp$	< 0.001	0.211	0.981	0.495	0.428	1.000	0.060	1.000	0.781
$rnp$	< 0.001	0.124	0.037	0.754	0.053	1.000	0.367	0.004	0.003
$mfd$	< 0.001	0.011	0.022	0.413	0.006	1.000	0.040	0.055	0.065

Tabella 4.7:  $P$ -value dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie SETAR simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
$p$	< 0.001	0.184	< 0.001	0.888	< 0.001	< 0.001	0.381	0.001	0.002
$sp_{AR}$	< 0.001	0.497	< 0.001	0.628	< 0.001	< 0.001	0.871	0.022	0.047
$sp_1$	< 0.001	0.735	< 0.001	0.585	< 0.001	< 0.001	0.184	< 0.001	< 0.001
$sp_2$	< 0.001	0.397	< 0.001	0.647	< 0.001	< 0.001	0.391	< 0.001	< 0.001
$sp_3$	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.995	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$smsp$	< 0.001	0.765	0.886	0.976	0.011	1.000	0.095	0.083	0.180
$rnp$	< 0.001	0.692	< 0.001	0.996	< 0.001	1.000	0.161	0.002	0.004
$mfd$	< 0.001	0.963	< 0.001	0.775	< 0.001	1.000	0.399	0.008	0.005

Tabella 4.8:  $P$ -value dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie SETAR simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

I test che valutano l'uniformità della serie dei valori PIT riportano risultati del tutto analoghi a quelli delle previsioni ad un passo. I  $p$ -value del test di

*Kolmogorov – Smirnov* sono tutti prossimi a zero dunque conducono al rifiuto dell'ipotesi nulla per ciascuna delle procedure implementate. Diverso invece è il risultato del test chi-quadrato che supporta l'uniformità dei valori PIT per tutte le procedure di calcolo ad eccezione della  $sp_3$ . Anche con orizzonte previsivo  $T = 2$  infatti l'istogramma dei valori PIT generati dalla procedura  $sp_3$  presenta due gobbe; gli altri invece risultano tutti piuttosto piatti. Riguardo la configurazione dell'istogramma relativo alla procedura  $sp_3$  valgono le stesse considerazioni effettuate nel caso di previsioni ad un passo in avanti.

Per quanto riguarda le previsioni calcolate a partire da una serie di lunghezza  $M = 1000$ , il test per l'assenza di autocorrelazione seriale nella serie dei valori PIT risulta fortemente significativo per le procedure  $p$ ,  $sp_{AR}$ ,  $sp_1$  e  $sp_3$ ; le procedure  $sp_2$ ,  $rnp$  e  $mfd$  presentano livelli di significatività osservati compresi tra 0.01 e 0.03; solo la procedura  $sm.sp$  garantisce una decisa accettazione dell'ipotesi nulla. Quest'ultima procedura è l'unica per la quale si incontra un  $p$ -value non prossimo a zero per il test  $SC$  nel caso di  $M = 1500$ .

Continuando l'analisi dei test basati su regressioni ausiliarie si nota come il test  $HET$ , per l'assenza di eteroschedasticità condizionale nella serie dei valori PIT, supporti, per ogni procedura di calcolo previsionale, l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH.

Il test  $LR_{ind}$  è in parziale accordo con il test  $SC$ ; nel caso di lunghezza campionaria inferiore infatti si rifiuta l'ipotesi nulla di assenza di dipendenza autoregressiva di primo ordine nella serie dei valori PIT per le procedure  $sp_{AR}$  e  $mfd$  mentre nel caso di lunghezza campionaria superiore la situazione è analoga a quanto detto commentando il test  $SC$ . Si accetta quindi l'ipotesi nulla solo per la procedura  $sm.sp$ , anche se con  $M = 1500$  solo al livello di significatività  $\alpha = 0.01$ . Il test rapporto di verosimiglianza  $LR_{010}$  riporta valori di livello di significatività osservato prossimi a 1 per le procedure  $p$  e  $sp_{AR}$ , solo per  $M = 1000$ , e per le procedure non parametriche anche per  $M = 1500$ .

Il test che valuta la bontà previsiva nelle code della distribuzione conduce al rifiuto dell'ipotesi nulla solo per la procedura  $sp_3$ , si presenta quindi una situazione

del tutto analoga a quella incontrata esaminando i risultati dei test sulle previsioni a una passo.

I risultati dei test di *Kupiec* e di *Christoffersen* peggiorano lievemente passando dalla numerosità campionaria inferiore a quella superiore. Nel caso di  $M = 1000$  si accettano congiuntamente ambedue i test solo per le procedure *smsp* e *mfd*, mentre nel caso di  $M = 1500$  le procedure *smsp* e *sp<sub>AR</sub>* presentano *p-value* tali da accettare l'ipotesi nulla di corretta copertura degli intervalli al 95% ricavati dalle densità predittive calcolate.

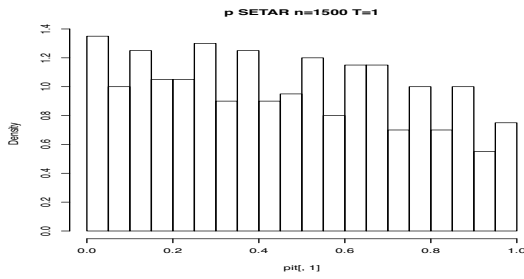


Figura 4.45: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

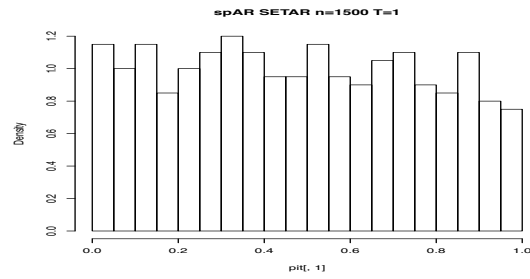


Figura 4.46: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $spAR$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

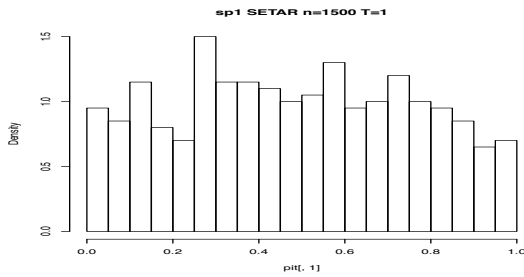


Figura 4.47: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp1$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

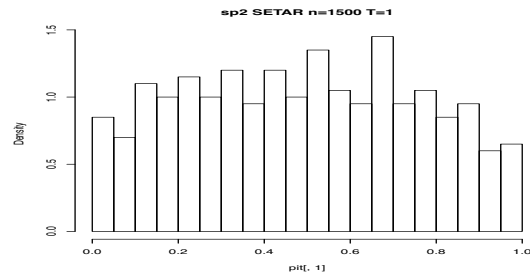


Figura 4.48: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp2$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

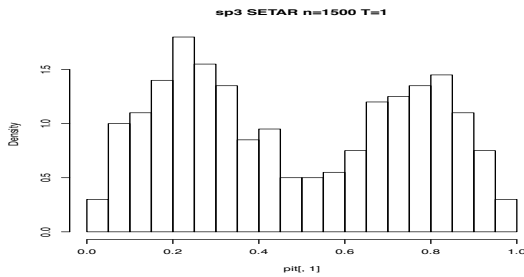


Figura 4.49: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp3$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

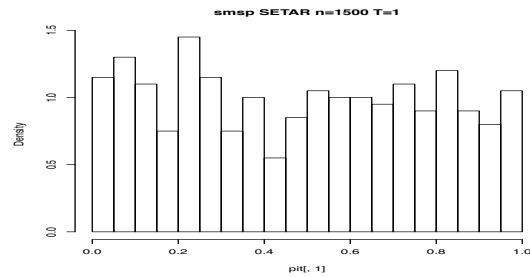


Figura 4.50: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $smsp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

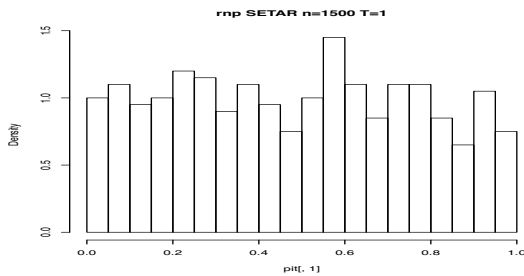


Figura 4.51: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $rnp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

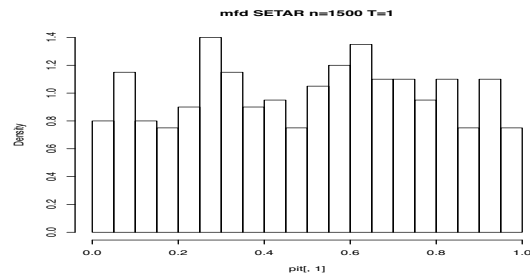


Figura 4.52: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mfd$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

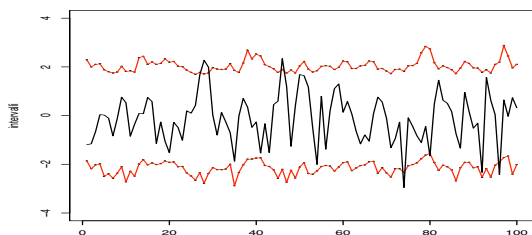


Figura 4.53: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

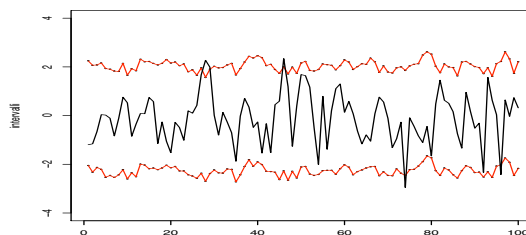


Figura 4.54: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

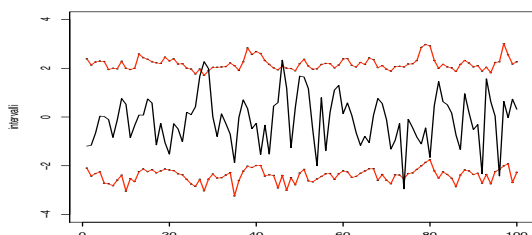


Figura 4.55: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

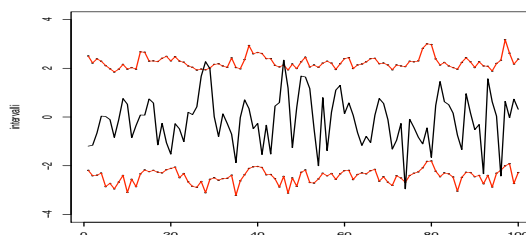


Figura 4.56: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

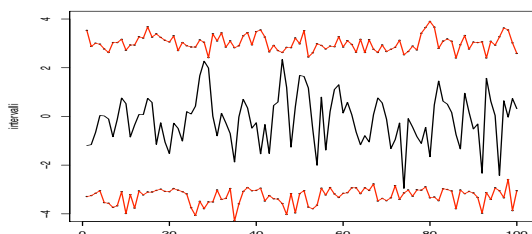


Figura 4.57: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

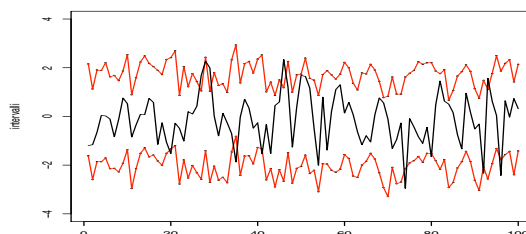


Figura 4.58: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sm_{sp}$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

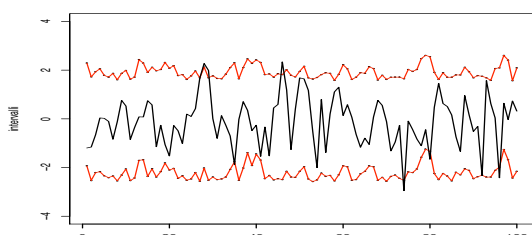


Figura 4.59: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $rnp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

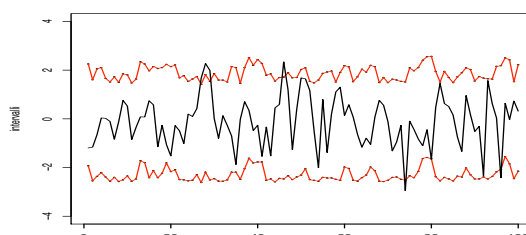


Figura 4.60: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

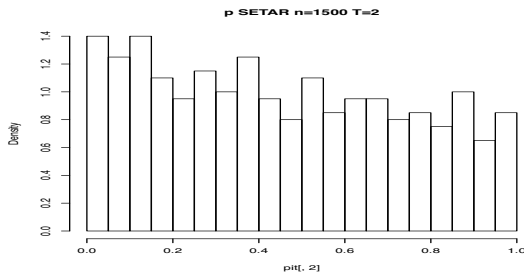


Figura 4.61: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

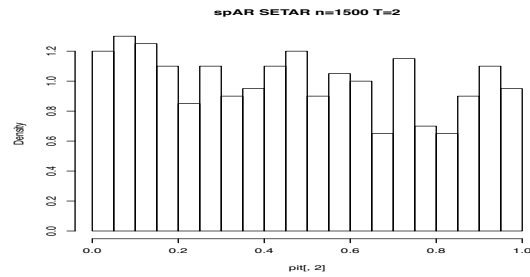


Figura 4.62: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $spAR$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

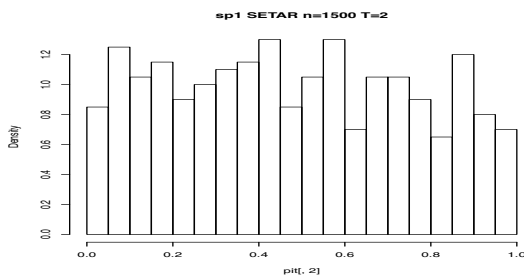


Figura 4.63: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp1$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

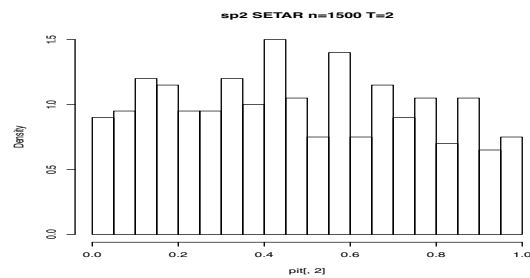


Figura 4.64: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp2$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

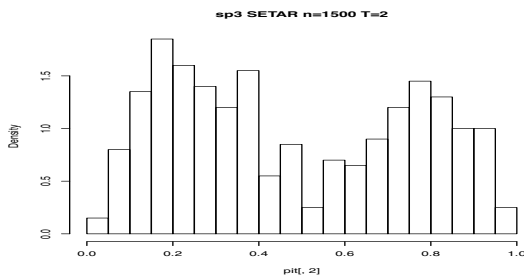


Figura 4.65: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp3$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

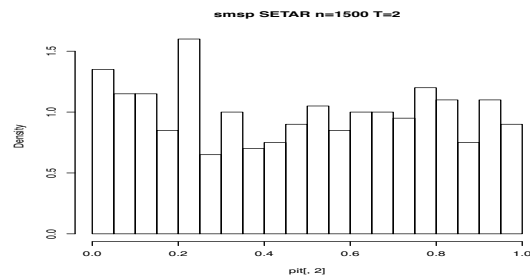


Figura 4.66: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smsp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

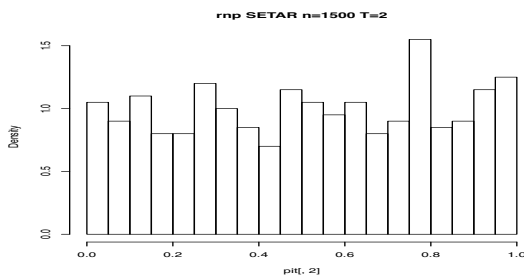


Figura 4.67: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $rnp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

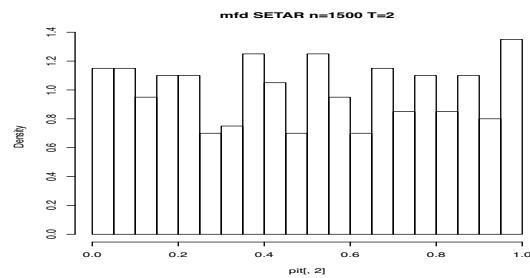


Figura 4.68: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

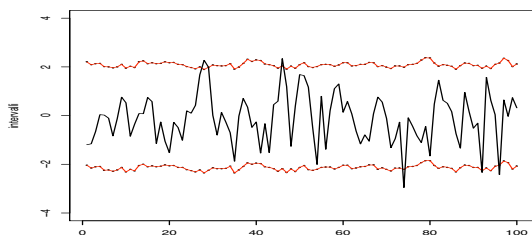


Figura 4.69: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

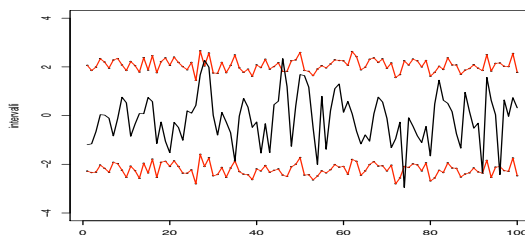


Figura 4.70: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

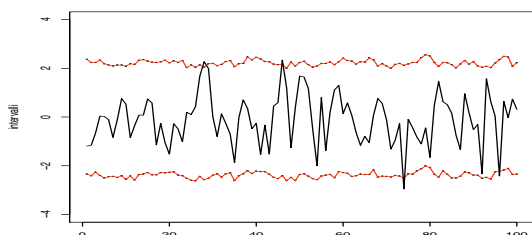


Figura 4.71: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

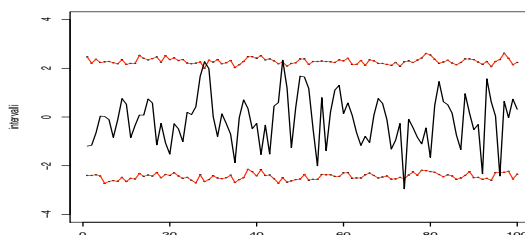


Figura 4.72: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

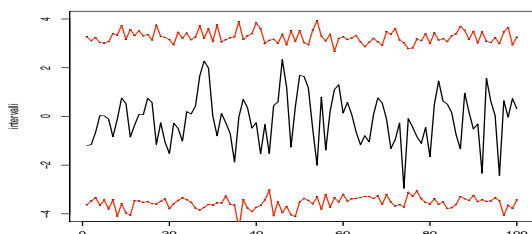


Figura 4.73: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

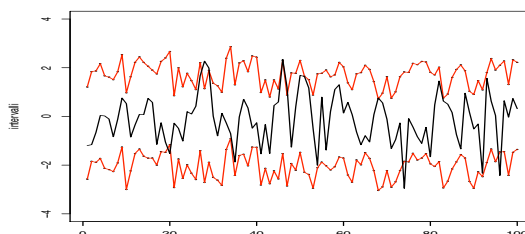


Figura 4.74: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sm_{sp}$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

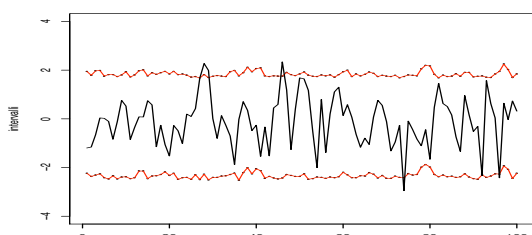


Figura 4.75: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $rnp$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

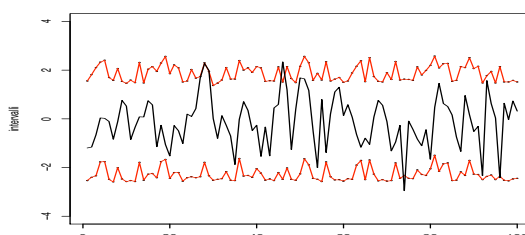


Figura 4.76: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie SETAR di lunghezza  $M = 1500$ .

### 4.3 Serie simulata: HENMAP

Si riportano qui di seguito i risultati delle analisi effettuate sulle previsioni calcolate a partire da una serie generata da un processo caotico di mappa di *Hénon* come quello specificato in 4.3. Come in precedenza l'analisi concerne il commento di tabelle contenenti livelli di significatività osservati dei vari test compiuti e di istogrammi dei valori PIT calcolati a partire dalle densità previste.

A differenza delle analisi effettuate su serie AR-GARCH e SETAR in questo caso non si sono incluse le analisi relative alla procedura *rnp* in quanto le densità predittive ottenute con questo metodo non contengono quasi mai il valore osservato risultando dunque poco interessanti.

Tra le procedure di calcolo previsionale presentate nel capitolo 2 non si è ancora considerata, nell'analisi di dati simulati, quella basata su regressioni multiple. Infatti non si è ritenuto molto sensato utilizzare questa procedura per il calcolo della densità predittiva di serie provenienti da modello AR-GARCH o SETAR in quanto non sarebbe stata immediata la scelta dei regressori da includere nel modello. Tuttavia si è scelto di testare le procedure implementate anche su un modello caotico derivante dalla mappa di *Hénon* proprio per la predisposizione di questo ad essere modellato mediante l'ausilio di molteplici regressori. Infatti osservando i grafici riportati in figura 4.77 si nota come sia evidente una qualche dipendenza della serie dai propri ritardi; si possono infatti individuare delle precise relazioni non lineari che si fanno via via più confuse al crescere del ritardo. Si ritiene quindi che queste relazioni possano essere ben catturate da un modello multivariato non parametrico di tipo GAM che sfrutta come regressori i ritardi della variabile esplicativa fino al ritardo 5.

Si comincia l'analisi osservando i valori riportati in tabella 4.9 e 4.10 ovvero i *p-value* dei test effettuati per valutare le previsioni ad un passo calcolate utilizzando numerosità campionaria pari a 1000 e 1500. Le analisi grafiche sono riportate in figura da 4.78 a 4.85 per quanto riguarda gli istogrammi dei valori PIT e in figura da 4.86 a 4.93 per i grafici degli intervalli di confidenza.

Per quanto riguarda i test che di occupano di valutare la corretta distribuzione



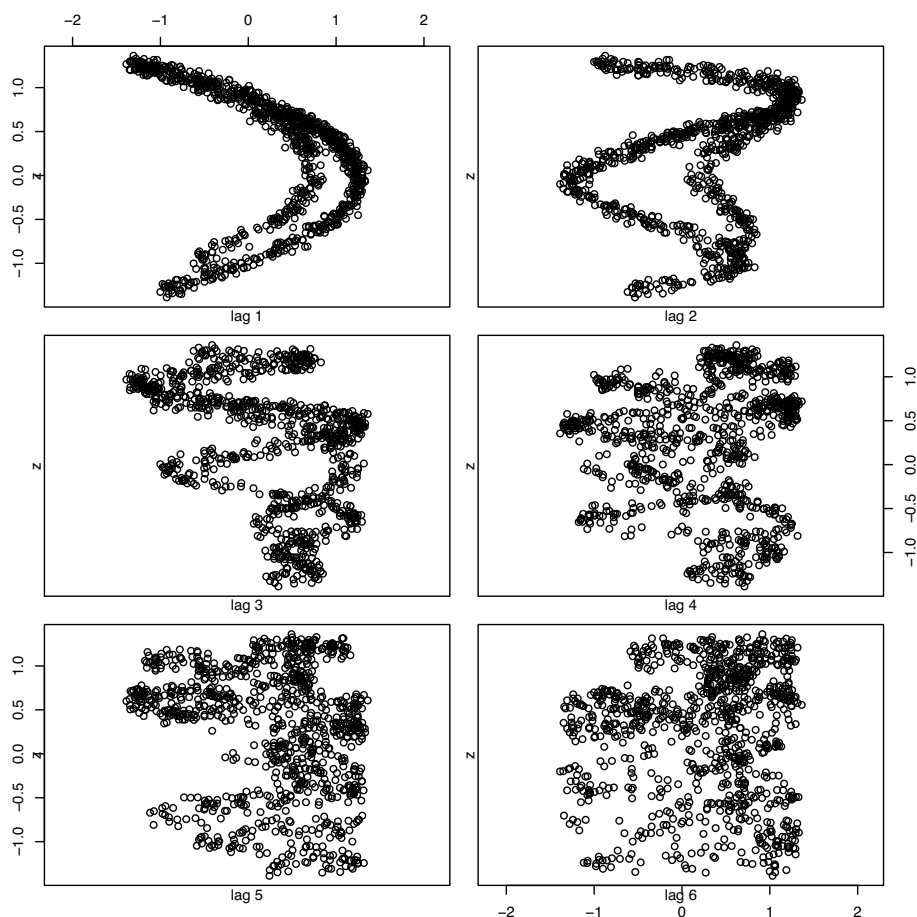


Figura 4.77: Grafici delle relazioni tra la serie proveniente da un modello caotico di mappa di Hénon e i suoi primi sei ritardi.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.817	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.697	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.066	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.289	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	0.028	< 0.001	0.999	0.018	1.000	0.754	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.291	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	0.430	0.904	0.734	0.278	< 0.001	0.466	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.9: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie HENMAP simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

uniforme della serie dei valori PIT si osserva che il test *KS* fornisce *p-value* prossimi a zero per ogni procedura implementata. Il test chi-quadrato invece non risulta sempre significativo; le densità prodotte con le procedure *sp<sub>AR</sub>*, *smsp* e *gam* producono valori PIT per i quali si accetta l'ipotesi nulla di distribuzione uni-

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.207	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.359	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.306	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.409	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.003	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	0.596	< 0.001	0.054	0.183	1.000	0.099	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.085	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	0.174	0.042	0.552	0.363	1.000	0.927	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.10: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie HENMAP simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

forme del test *unif*. Questi risultati sono coerenti con gli istogrammi dei valori PIT per i quali si nota come quelli prodotti dalle procedure *sp<sub>AR</sub>*, *smsp* e *gam* siano più piatti rispetto agli altri che presentano o dei picchi in corrispondenza dei valori estremi o addirittura due gobbe. Come per le precedenti analisi si ricerca la causa delle conformazioni anomale degli istogrammi dei valori PIT nei grafici degli intervalli di confidenza delle densità predittive. Dall'osservazione di questi grafici si nota come le procedure basate sulla stima di un modello parametrico producano intervalli di confidenza i cui estremi sono poco variabili. Le procedure *p* e *sp<sub>3</sub>* sono quelle che producono intervalli di confidenza più ampi, per i quali non viene quasi mai sfiorato il limite superiore, attorno al quale sono comunque concentrati la maggior parte di dati osservati a causa delle caratteristiche della serie simulata in esame. Le procedure *sp<sub>1</sub>* e *sp<sub>2</sub>* producono intervalli di confidenza che non si adattano alla serie generata dal modello di mappa di Hénon causando molti sforamenti del limite superiore che spiega i picchi degli istogrammi dei valori PIT in corrispondenza di 1. Le procedure non parametriche ed in particolare *smsp* e *gam* si adattano molto bene ai dati in esame dunque presentano ampiezze degli intervalli molto contenute che seguono l'andamento dei dati osservati; questo fa sì che queste procedure producano valori PIT con buone caratteristiche. Passando al commento dei test basati su regressioni ausiliarie si nota come il test *SC* risulti significativo per tutte le procedure ad eccezione di quella basata sulla stima di una regressione multipla tramite modello GAM, per la quale si accetta

l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale nella serie dei valori PIT sia con  $M = 1000$  che con  $M = 1500$ . Anche il test per la presenza di eteroschedasticità condizionale fornisce gli stessi risultati per ambedue gli orizzonti previsivi; viene accettata l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH per le procedure non parametriche *smsp* e *gam*.

Il primo test proposto, tra quelli che si basano sul rapporto di verosimiglianza, riguarda l'ipotesi di dipendenza autoregressiva di primo ordine all'interno della serie dei valori PIT. Sia nel caso di numerosità campionaria  $M = 1000$  sia con  $M = 1500$  si ha che la procedura parametrica e le procedure non parametriche accettano l'ipotesi di nullità del parametro autoregressivo  $\rho$ ; solamente nel caso di numerosità campionaria superiore invece anche la procedura *sp<sub>1</sub>* conduce ad un livello di significatività osservato molto elevato.

Il test  $LR_{010}$  conduce a livelli di significatività osservati prossimi a 1 per le procedure *sp<sub>1</sub>*, *sp<sub>2</sub>* e *smsp* per ambedue le numerosità campionarie e anche per *gam* con  $M = 1500$ .

Per quanto riguarda la bontà previsiva nelle code della distribuzione si osservano i *p-value* riportati nella colonna  $LR_{tail}$ . Le procedure semiparametriche *sp<sub>AR</sub>* e le procedure non parametriche *smsp* e *gam* sono in grado di produrre densità predittive le cui code sono coerenti con i dati osservati per entrambe le numerosità campionarie utilizzate.

I test derivanti dalle procedure di *backtesting* del VaR risultano significativi per ciascun metodo di calcolo previsionale implementato; nessuna procedura di calcolo di densità predittiva è quindi in grado di produrre densità i cui intervalli al 95% rispettano il livello di copertura.

Ci si occupa ora di commentare le analisi effettuate, sempre a partire da una serie derivante dal modello di mappa di *Hénon*, sulle densità predittive calcolate due passi in avanti. I risultati ottenuti, a livello di *p-value* dei test calcolati, sono riportati in tabella 4.11 e 4.12; si presentano inoltre gli istogrammi dei valori PIT generati dalle previsioni di densità calcolate con i vari metodi in figura da 4.94 a 4.101 e i grafici degli intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive

calcolare in relazione alle prime 100 previsioni in figura da 4.102 a 4.109.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.011	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.222	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.306	0.002
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	0.174	< 0.001	0.962	0.011	< 0.001	0.438	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	0.201	0.825	0.828	0.235	< 0.001	0.157	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.11: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie HENMAP simulata di lunghezza  $M = 1000$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.465	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.007	0.004	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	0.517	< 0.001	0.064	0.201	1.000	0.138	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.001	< 0.001	1.000	< 0.001	0.002	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	0.042	0.048	0.539	0.763	0.005	0.073	< 0.001	< 0.001

Tabella 4.12: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie HENMAP simulata di lunghezza  $M = 1500$  mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Complessivamente le analisi effettuate sulle previsioni a due passi in avanti riportano risultati analoghi a quelli incontrati valutando le previsioni un passo in avanti. Nel dettaglio tra i test che valutano la corretta distribuzione uniforme dei valori PIT si nota come il test di *Kolmogorov-Smirnov* riporti livelli di significatività osservati prossimi a zero per tutte le procedure. L'altro test implementato per valutare l'uniformità dei valori PIT, il test *unif*, conduce ad accettare l'ipotesi nulla per le procedure *sp<sub>AR</sub>*, *smsp* e *gam*. In effetti osservando gli istogrammi dei valori PIT, si osserva come le procedure che producono istogrammi piatti sono quelle per le quali viene supportata l' $H_0$  del test chi-quadrato. Si possono fare le medesime considerazioni fatte nel caso di previsioni ad un passo in avanti in merito alle particolari conformazioni degli istogrammi dei valori PIT e alla capacità delle procedure considerate di fornire densità predittive i cui intervalli di

confidenza si adattano alla serie in esame.

Il test  $SC$  supporta l'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale solo per la procedura di calcolo di densità predittiva che si basa sulla stima di un modello GAM. Passando all'analisi della presenza di eteroschedasticità condizionale all'interno della serie dei valori PIT si sposta l'attenzione alla colonna delle tabelle indicata con  $HET$ ; le uniche procedure per le quali non viene rifiutata l'ipotesi nulla di assenza di effetti ARCH sono  $sm.sp$  e  $gam$  (per entrambe le dimensioni campionarie).

Le stesse procedure che si sono messe in mostra per produrre serie di valori PIT che non presentano eteroschedasticità condizionale sono anche quelle per le quali il test  $LR_{ind}$  supporta l'ipotesi nulla; per le procedure  $sm.sp$  e  $gam$  quindi viene supportata l'ipotesi di assenza di dipendenza autoregressiva del primo ordine nella serie dei valori PIT.

Il test  $LR_{010}$  riporta livelli di significatività prossimi a 1, dunque che sostengono l'ipotesi di nullità del parametro autoregressivo congiuntamente alla normalità standard della distribuzione dei valori PIT trasformati tramite  $\Phi^{-1}$ , per le procedure  $sp_1$ ,  $sp_2$  e  $mf.d$  nel caso di  $M = 1000$  e anche per la procedura non parametrica che calcola regressioni mediante funzioni *spline* ma solo nel caso di  $M = 1500$ . Il test che valuta la bontà previsiva nelle code della distribuzione conferma il fatto che le procedure  $sm.sp$  e  $gam$  forniscono previsione accurate anche relativamente a eventi rari come quelli situati nelle code. Per le altre procedure invece si rifiuta nettamente l'ipotesi.

Le procedure di *backtesting* del VaR applicate alle densità predittive a due passi in avanti non producono risultati soddisfacenti; l'unica procedura per la quale si accetta l' $H_0$  di corretta copertura dell'intervallo di confidenza al 95%, ricavato dalla densità prevista, è la  $sp_{AR}$ , anche se solo nel caso di numerosità campionaria pari a 1000.

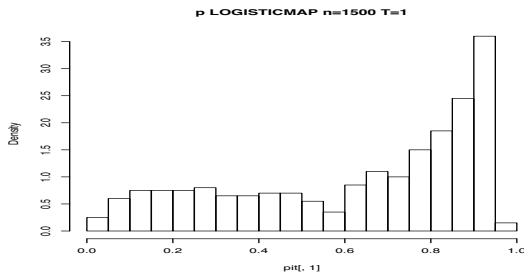


Figura 4.78: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

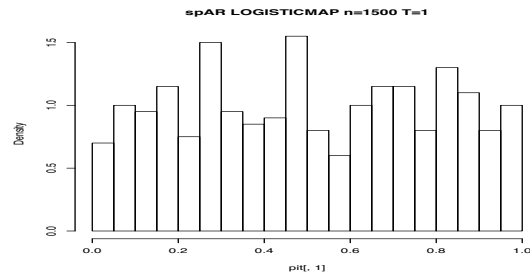


Figura 4.79: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $spAR$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

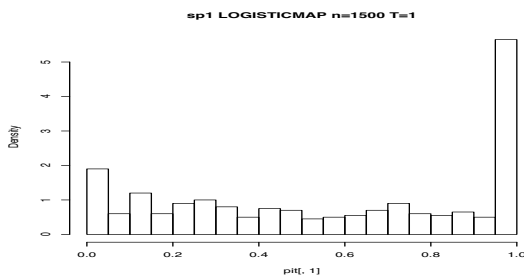


Figura 4.80: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp1$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

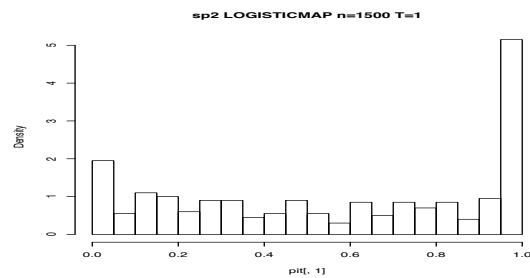


Figura 4.81: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp2$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

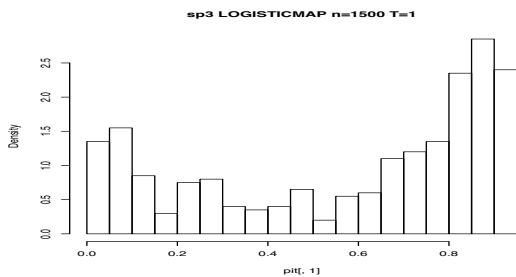


Figura 4.82: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp3$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

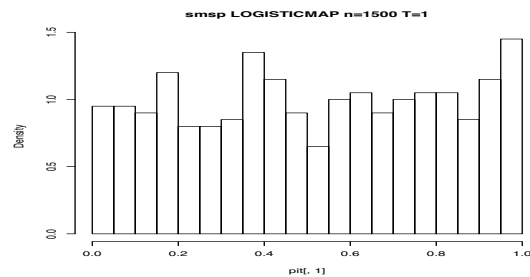


Figura 4.83: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $smsp$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

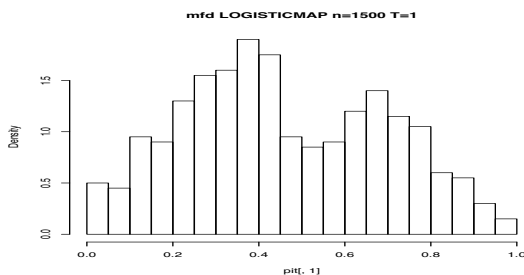


Figura 4.84: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mfd$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

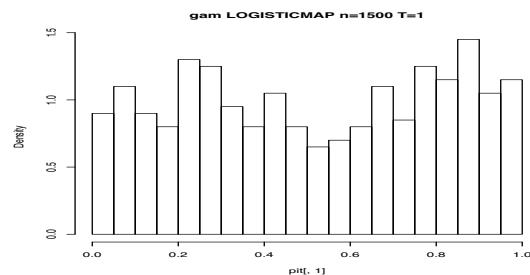


Figura 4.85: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $gam$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

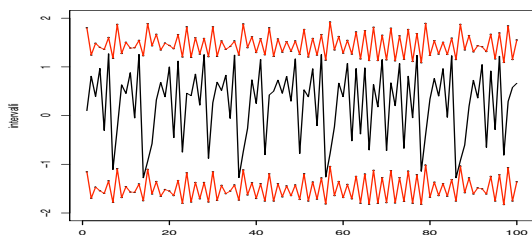


Figura 4.86: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

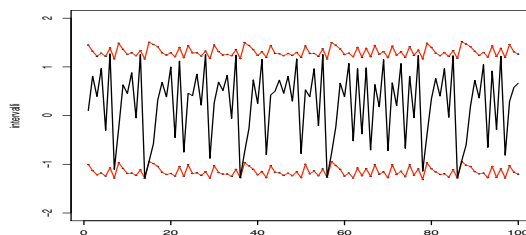


Figura 4.87: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $Sp_{AR}$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

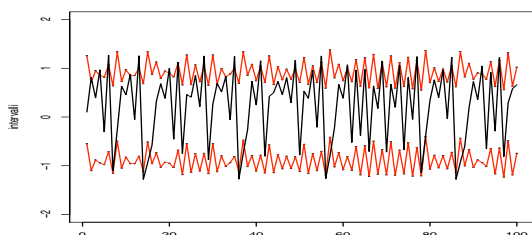


Figura 4.88: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

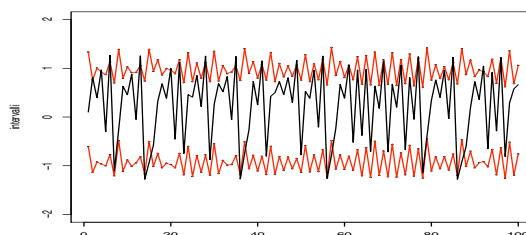


Figura 4.89: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

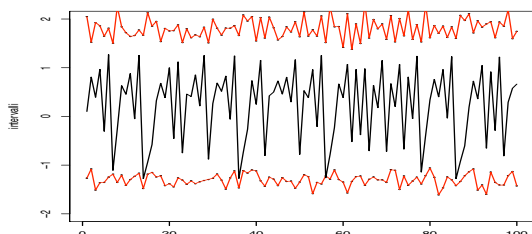


Figura 4.90: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

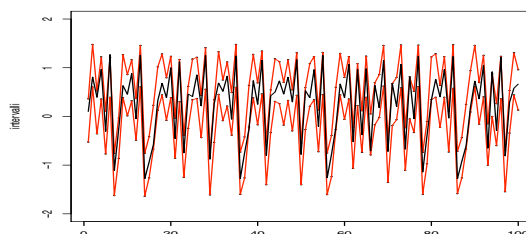


Figura 4.91: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sm.sp$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

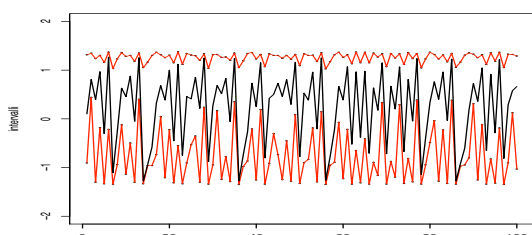


Figura 4.92: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

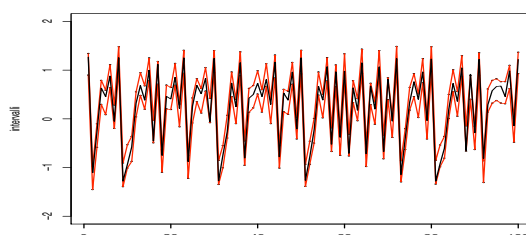


Figura 4.93: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $gam$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

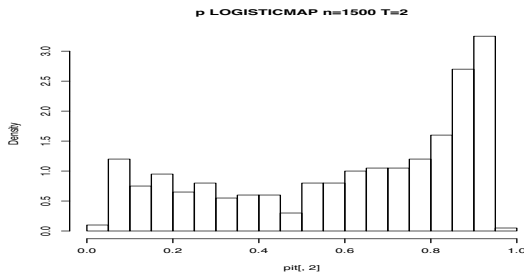


Figura 4.94: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

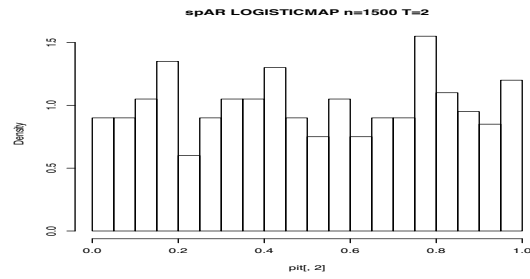


Figura 4.95: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $spAR$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

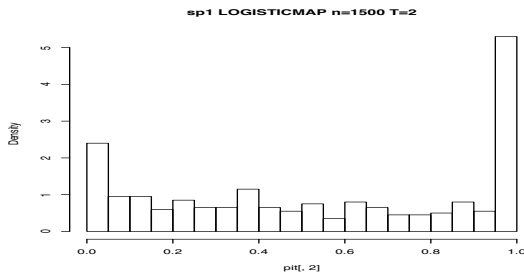


Figura 4.96: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp1$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

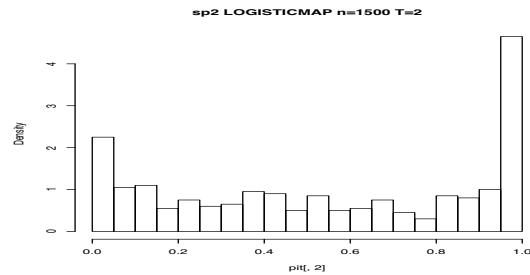


Figura 4.97: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp2$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

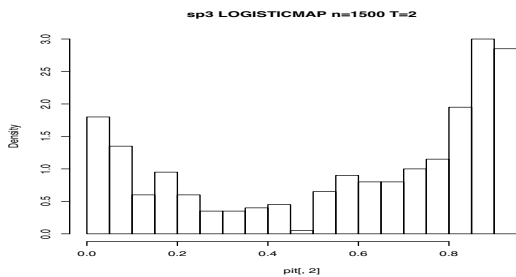


Figura 4.98: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp3$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

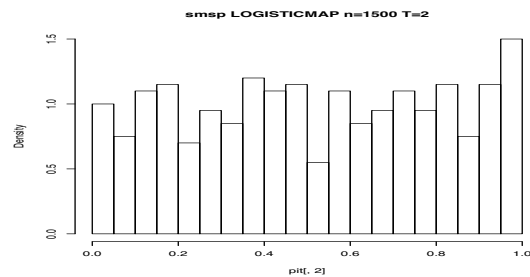


Figura 4.99: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smsp$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

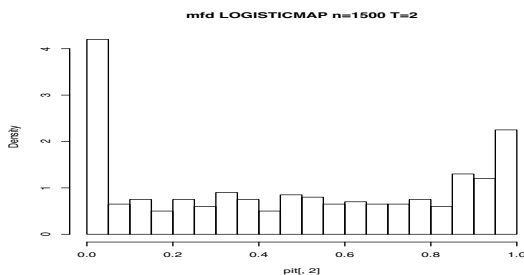


Figura 4.100: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

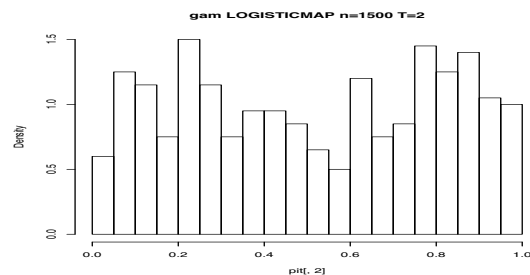


Figura 4.101: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $gam$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .



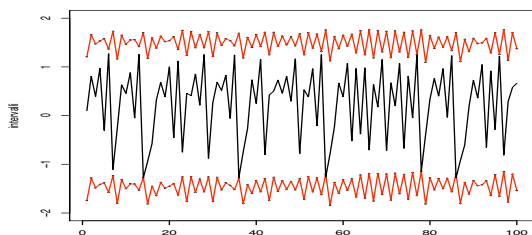


Figura 4.102: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

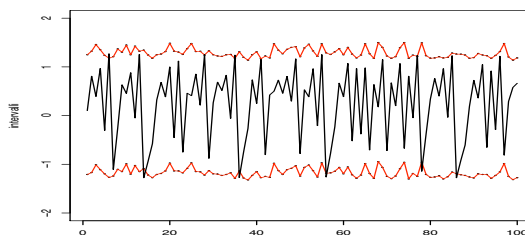


Figura 4.103: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

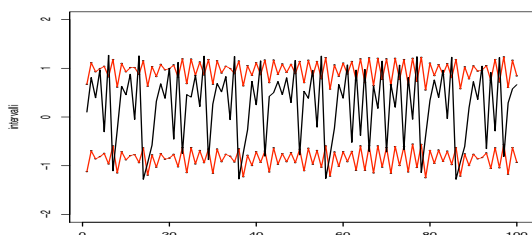


Figura 4.104: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

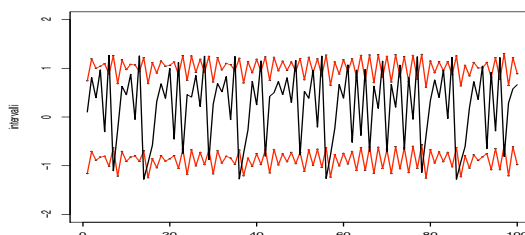


Figura 4.105: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

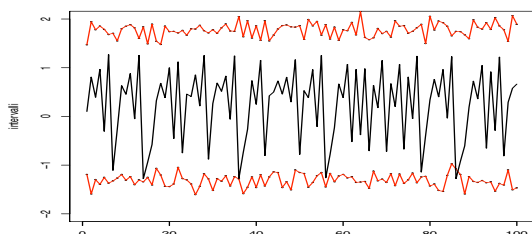


Figura 4.106: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

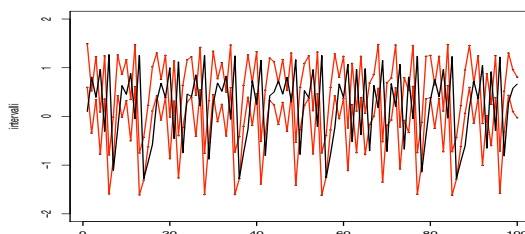


Figura 4.107: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sm.sp$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

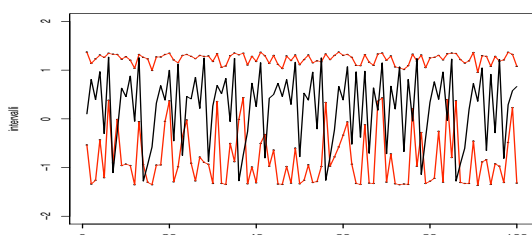


Figura 4.108: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

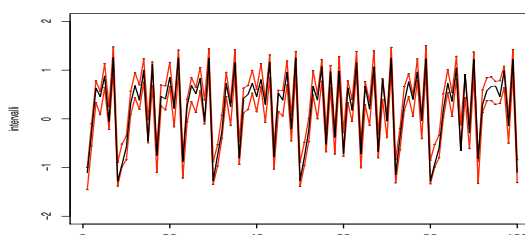


Figura 4.109: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $gam$  a partire da una serie HENMAP di lunghezza  $M = 1500$ .

#### 4.4 Commento risultati

Alla luce di quanto emerso dall'analisi effettuata su serie simulate si riportano una serie di riflessioni riguardo il funzionamento delle varie procedure di calcolo di densità predittiva in relazione alle particolari serie sulle quali sono state testate. Infatti non esiste una procedura univocamente migliore delle altre, ma ciascuna ha diversa capacità di cogliere aspetti della serie in esame per produrre buone previsioni dunque può risultare più appropriato usare un metodo piuttosto che un altro in base alle caratteristiche dei dati di partenza. Ad esempio nell'analisi compiuta su dati simulati si è ricorso a diverse serie sulle quali sono stati testati i metodi di calcolo previsionale presentati nel capitolo 2 proprio per sottolinearne gli aspetti virtuosi.

Nel caso di serie simulata da un processo AR-GARCH i migliori risultati in termini di previsioni sono stati trovati per le procedure parametriche e semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH e per la procedura non parametrica che modella anche la varianza condizionata  $rnp$ . In realtà osservando attentamente i risultati dei test eseguiti per valutare le previsioni calcolate a partire dalla serie AR-GARCH, si nota come essi peggiorino passando dall'orizzonte previsivo un passo in avanti a quello con  $T = 2$ . Questo peggioramento può essere percepito anche dall'osservazione degli istogrammi dei valori PIT che nel caso di orizzonte previsionale a due passi in avanti presentano dei picchi in corrispondenza dei valori estremi 0 e 1. Tuttavia anche in questo caso le procedure  $sp_1$  e  $sp_2$  sono in grado di produrre densità predittive i cui intervalli di confidenza hanno livello di copertura in linea con il livello dichiarato e la procedura  $sp_3$  risulta l'unica per la quale viene accettata l'ipotesi di bontà previsiva nelle code della distribuzione. Probabilmente il motivo per il quale queste procedure producono buone previsioni di densità se applicate a dati AR-GARCH è da individuare nel fatto che esse partono dalla stima di un modello ARMA-GARCH, ovvero della stessa famiglia del modello generatore dei dati, e poi, sfruttando diverse fonti di variabilità, generano le replicazioni delle previsioni puntuali che conducono poi alla stima non parametrica delle densità predittiva. Si ritiene

dunque che queste procedure producano buoni risultati se applicate a dati con caratteristiche assimilabili a quelle della classe di modelli ARMA-GARCH. Non si riscontrano evidenti differenze tra le procedure semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH che calcolano repliche delle previsioni puntuali sfruttando diverse fonti di variabilità se non per l'orizzonte previsivo due passi in avanti per il quale la procedura  $sp_3$ , che sfrutta la variabilità fornita dalle stime dei parametri del modello, è l'unica a presentare buona capacità previsiva nelle code, anche se non produce  $p$ -value tali da accettare i test che indagano la corretta copertura degli intervalli derivati dalle previsioni calcolate.

La procedura non parametrica basata su regressione *kernel*, probabilmente a causa del fatto che modella anche la varianza condizionata riuscendo quindi a cogliere l'eteroschedasticità condizionale presente nella serie di partenza, fornisce buoni risultati in merito ai test di *Kupiec* e di *Christoffersen*; dunque si ritiene che anche questa procedura sia adeguata nel produrre densità predittive di serie AR-GARCH poiché esse risultano in linea con i dati osservati in merito al livello di copertura degli intervalli ricavati sulle previsioni.

Si considera ora la serie simulata da un processo SETAR; data la non linearità del processo generatore dei dati ci si aspetta di incontrare buoni risultati dalle procedure non parametriche che si ritengono maggiormente in grado di individuare la struttura di dipendenza di un modello non lineare di come siano in grado di farlo le procedure parametriche o semiparametriche. Passando dunque in rassegna i risultati ottenuti tramite le procedure implementate relativamente a previsioni di densità di una serie proveniente da un modello SETAR si nota come il metodo *sm<sub>sp</sub>* sia quello per il quale si ottengono i migliori risultati. Con questa tecnica di calcolo previsionale infatti oltre che ottenere valori PIT con caratteristiche di uniformità, indipendenza e buona capacità previsiva nelle code, si ottengono anche previsioni di densità i cui intervalli conducono all'accettazione del test di *Kupiec* e *Christoffersen* dunque che rispettano il livello di copertura. Inoltre il funzionamento di questa procedura non risente dell'ampliarsi dell'orizzonte previsivo; anche con  $T = 2$  le previsioni ottenute presentano caratteristiche in linea con i

dati osservati. Buoni risultati si ottengono anche in merito alle altre procedure non parametriche, anche se per queste non vengono soddisfatte le ipotesi nulle dei test derivati dalle procedure di *backtesting* del VaR.

Per quanto riguarda le previsioni ottenute applicando le procedure presentate a serie provenienti da un modello caotico di mappa di *Hénon* si può dire che esse risultano meno buone di quanto non lo fossero per le altre serie simulate presentate. Infatti nessuna delle procedure di calcolo di densità predittive implementate conduce all'accettazione dei test di *Kupiec* e *Christoffersen*. Tuttavia si segnala che, tra le procedure basate su regressioni semplici o sulla stima di modelli univariati, la *sp<sub>AR</sub>* e la *sm<sub>sp</sub>* sono quelle che forniscono le densità più in linea con i dati osservati. Le caratteristiche dei valori PIT prodotti tramite queste procedure infatti sono buone sia in termini di uniformità che in termini di buona capacità previsiva di eventi situati nelle code. Per quanto riguarda la procedura di calcolo previsionale basata su regressione multipla si nota, dall'osservazione delle tabelle contenenti i *p-value*, come questa procedura sia in grado di produrre le migliori densità predittive in merito alla serie simulata HENMAP. Queste infatti producono valori PIT che, oltre che presentare caratteristiche di uniformità e tali da accettare l'ipotesi nulla del test  $LR_{tail}$ , risultano non dipendenti sia in relazione al test *SC* sia al test  $LR_{ind}$ . Quando si ha quindi a che fare con serie i cui livelli sembrano dipendere da più fattori, in quanto sono evidenti relazioni (lineari o non lineari) tra i livelli della variabile e i suoi ritardi o altri regressori, la scelta di calcolare densità predittive mediante tecniche di regressione multipla sembra oculata e produce buoni risultati.

## Capitolo 5

---

# APPLICAZIONI SU DATI REALI

---

Si passa ora alle analisi compiute, sempre mediante l'ausilio del *software* R, su serie di dati reali. Si è pensato di applicare le procedure di calcolo di densità predittive a tre tipologie differenti di dati per analizzare più nel dettaglio il funzionamento di queste in relazione alle diverse caratteristiche delle serie reali a disposizione. Si lavorerà dunque prima con dati provenienti dal mercato della borsa elettrica, successivamente saranno testate le tecniche implementate su dati di rendimenti finanziari per concludere il capitolo applicando le procedure per il calcolo di densità predittive a serie storiche della volatilità di un titolo azionario.

### 5.1 I prezzi del mercato elettrico inglese (UKPX)

Si è scelto di lavorare con serie provenienti dal mercato della borsa elettrica; ci si occuperà di analizzare e modellare la serie storica giornaliera del logaritmo dei prezzi del mercato elettrico inglese UKPX (*UK Power Exchange*) per il periodo dal 1 aprile 2005 al 31 dicembre 2010. Conoscendo il meccanismo di aste giornaliere che determina il prezzo per ciascun periodo (48 semi ore nel caso del mercato inglese) e date le caratteristiche di forte stagionalità di questi dati, si procede con l'analisi del prezzo di un singolo periodo del giorno; nella fattispecie in questa analisi si considera il periodo 24, ovvero quello che corrisponde al prezzo fissato dalle 11.30 alle 12.00 di ogni giorno e il periodo 36 che corrisponde alla fascia oraria dalle 17.30 alle 18.00. Si sono rese disponibili anche le serie storiche, per i medesimi periodi, del logaritmo della domanda e del logaritmo dei margini semi-orari. Per domanda di energia si intende la quantità di energia richiesta

in un certo istante mentre per margine si intende la quantità di energia che gli impianti sono ancora in grado di produrre dopo aver soddisfatto la domanda. Nei meccanismi di asta non vengono fissati solo i prezzi per ciascun periodo della giornata, ma anche si fissa la domanda e il margine per il giorno successivo; dunque le serie della domanda e dei margini disponibili in realtà indica una 'previsione' fatta in  $t - 1$  della domanda e del margine al tempo  $t$ . Queste ulteriori serie storiche saranno utili in fase di calcolo di densità predittive con procedure multivariate.

	simmetria	curtosi
$p_{24}$	0.68	3.90
$p_{36}$	0.74	3.65

Tabella 5.1: Coefficienti di simmetria e curtosi della serie dei log-prezzi giornalieri per il periodo 24 e 36.

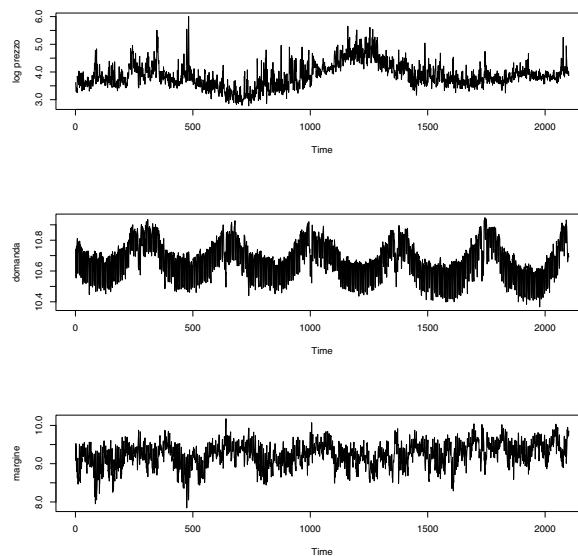


Figura 5.1: Serie storica giornaliera dei prezzi (in alto), della domanda (al centro) e dei margini (in basso) per il periodo 24.

Risulta utile in prima analisi osservare i grafici delle serie disponibili in figura 5.1, per il periodo 24, e in figura 5.2 per il periodo 36. Osservando le serie dei prezzi si nota subito come siano caratterizzate dalla presenza di picchi e dall'eteroschedasticità, ambedue caratteristiche ricorrenti in serie storiche di prezzi della borsa elettrica; in queste serie è presente anche una componente di stagionalità

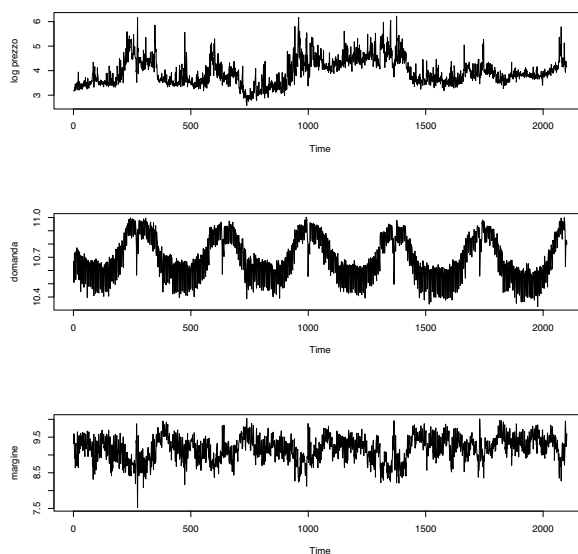


Figura 5.2: Serie storica giornaliera dei prezzi (in alto), della domanda (al centro) e dei margini (in basso) per il periodo 36.

annua non troppo evidente dai grafici. Molto più evidenti risultano le stagionalità delle serie della domanda e dei margini *day-ahead* anche se per quanto riguarda la seconda metà della serie del margine della 24-esima semiora di apertura di mercato elettrico si può dire che si perde la stagionalità annua o comunque essa non è ben percepibile ad occhio. Per quanto riguarda le distribuzioni si riconosce che i prezzi hanno una distribuzione asimmetrica e lievemente leptocurtica come si può verificare consultando la tabella 5.1.

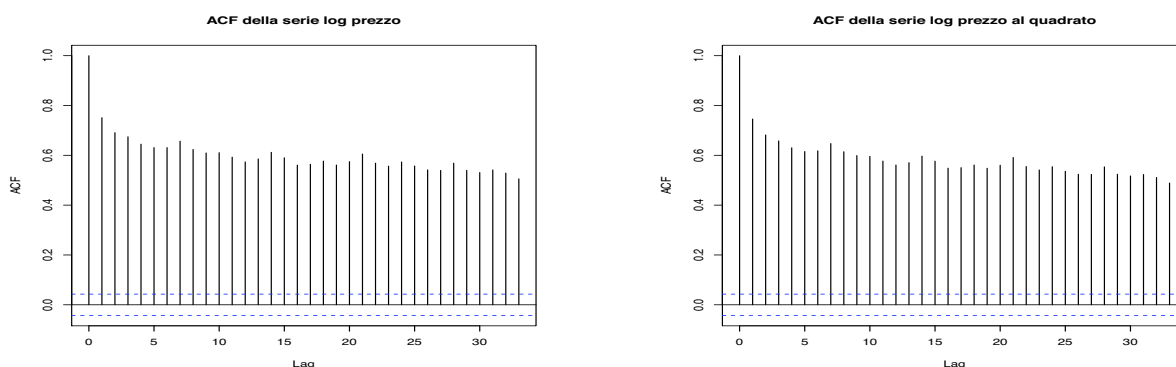


Figura 5.3: Autocorrelazione della serie dei livelli (a sinistra) e dei quadrati (a destra) dei log-prezzi relativi al periodo 24.

Essendo che alcune delle tecniche implementate per il calcolo delle densità predittive utilizzano stime di modelli per serie storiche è necessario studiare la

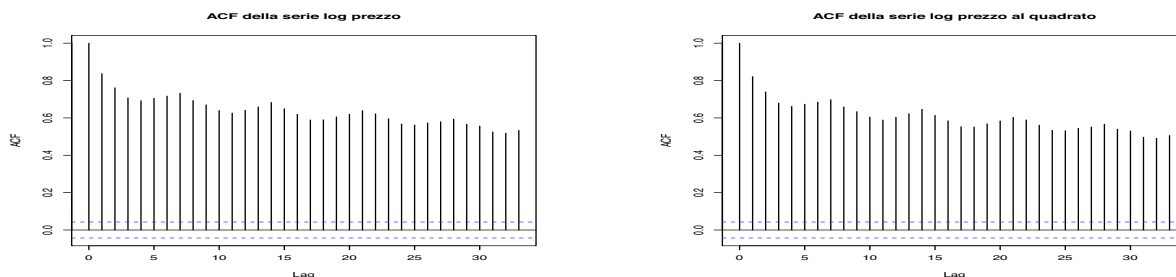


Figura 5.4: Autocorrelazione della serie dei livelli (a sinistra) e dei quadrati (a destra) dei log-prezzi relativi al periodo 36.

stazionarietà delle serie dei log-prezzi disponibili. Si riportano dunque in figura 5.3 e 5.4 le funzioni di autocorrelazione dei livelli e dei quadrati della serie dei log-prezzi per i due periodi in esame; dalla loro osservazione si evince una forte struttura di persistenza dunque, come già si poteva concludere dalle figure 5.1 e 5.2, le serie dei log-prezzi giornalieri non sono stazionarie.

Proprio a causa della non stazionarietà delle serie dei log-prezzi si è resa disponibile una sua scomposizione in due componenti, una componente di livello che si somma ad una componente residua:

$$P_t = LP_t + p_t$$

$$D_t = LD_t + d_t$$

$$M_t = LM_t + m_t$$

In questa fase di analisi non ci si è occupati di stimare la componente di livello per poter ricavare quella residua ma per ciascuna delle serie (prezzo, domanda e margine) sono stati forniti i dati relativi alla variabile originale, alla componente di lungo periodo e a quella residua. È possibile osservare i grafici delle serie originali, della componente in livello e della componente residua nelle figure 5.5 e 5.6.

Si prosegue dunque applicando le procedure di calcolo di densità predittiva alla serie dei log-prezzi depurata da effetti stagionali. Le serie  $p_t$  sono presentate in figura 5.7 per quanto riguarda il periodo 24 e in figura 5.8 per il periodo 36. Si riportano anche i coefficienti di simmetria e curtosi calcolati su di esse in tabella 5.2; si nota come aumentino ambedue i coefficienti rispetto ai valori calcolati sul-



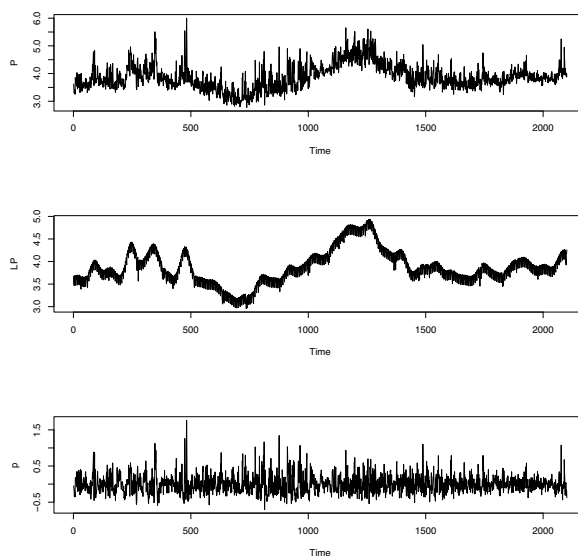


Figura 5.5: Scomposizione della serie giornaliera dei log-prezzi per il periodo 24.

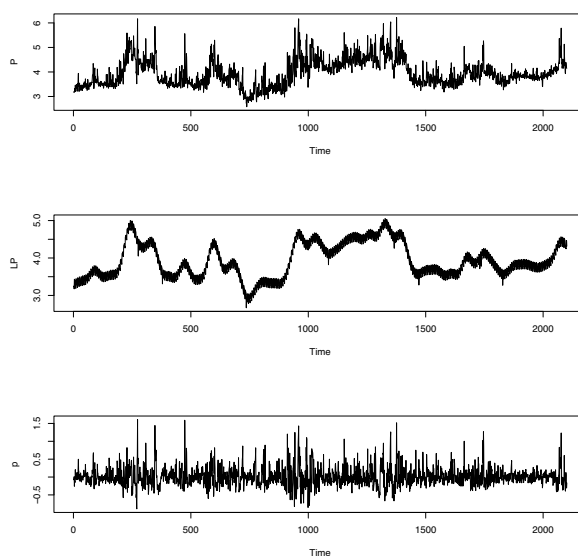


Figura 5.6: Scomposizione della serie giornaliera dei log-prezzi per il periodo 36.

le serie originali. Ora dunque i dati presentano maggiore asimmetria e una forte leptocurtosi.

A sostegno del fatto che, una volta depurate da effetti stagionali, le serie dei log-prezzi hanno un comportamento stazionario si riportano i grafici delle funzioni di autocorrelazione calcolati sui livelli e sui quadrati visibili in figura 5.9 e 5.10 per la fascia oraria dalle 11.30 alle 12.00 e in figura 5.11 e 5.12 per la fascia

	simmetria	curtosi
$p_{24}$	1.09	6.07
$p_{36}$	1.28	7.38

Tabella 5.2: Coefficienti di simmetria e curtosi della serie  $p_t$  per il periodo 24 e 36.

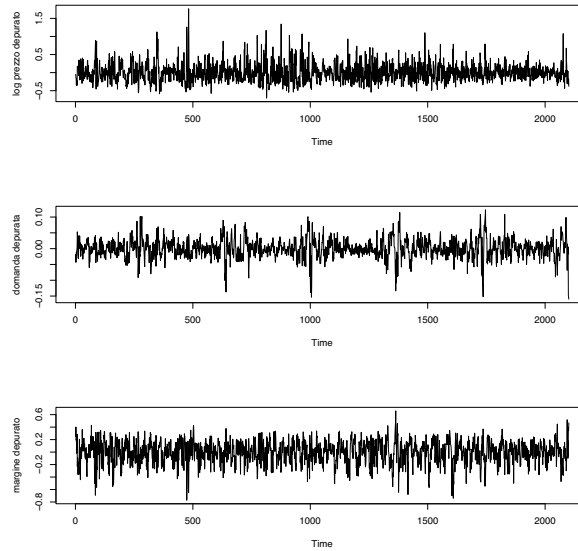


Figura 5.7: Serie storica giornaliera dei prezzi (in alto), della domanda (al centro) e dei margini (in basso) per il periodo 24.

dalle 17.30 alle 18.00. Dall'osservazione di queste figure si nota come la struttura di autocorrelazione decada a zero man mano che cresce il ritardo e questo induce a sostenere che le serie dei prezzi sono state ben depurate da effetti stagionali. Le serie dei prezzi destagionalizzate saranno dunque oggetto del calcolo delle densità predittive mediante i metodi implementati e descritti in precedenza; data la stazionarietà sarà possibile procedere con il calcolo delle previsioni anche tramite quei metodi che si basano sulla stima di modelli per serie storiche che richiedono stazionarietà.

### 5.1.1 Valutazione densità predittive

Si presentano in questa sezione i risultati delle procedure di valutazione applicate alle densità predittive calcolate a partire dai dati di borsa elettrica appena descritti. Come nel caso di dati simulati, anche qui saranno presentate delle tabelle contenenti i  $p$ -value dei test per ciascuna procedura che si è utilizzata per il

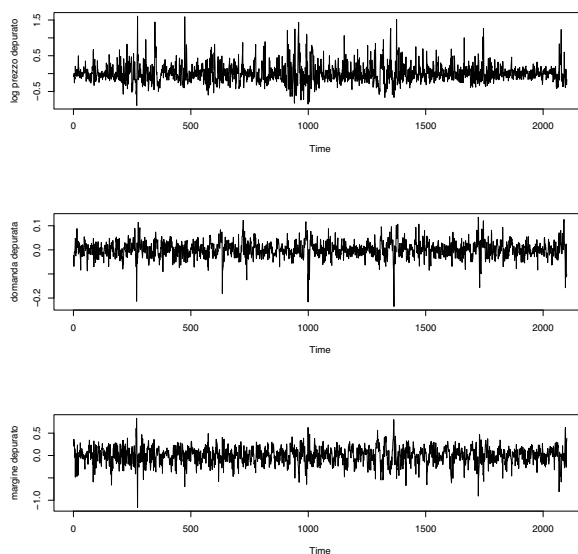


Figura 5.8: Serie storica giornaliera dei prezzi (in alto), della domanda (al centro) e dei margini (in basso) per il periodo 36.

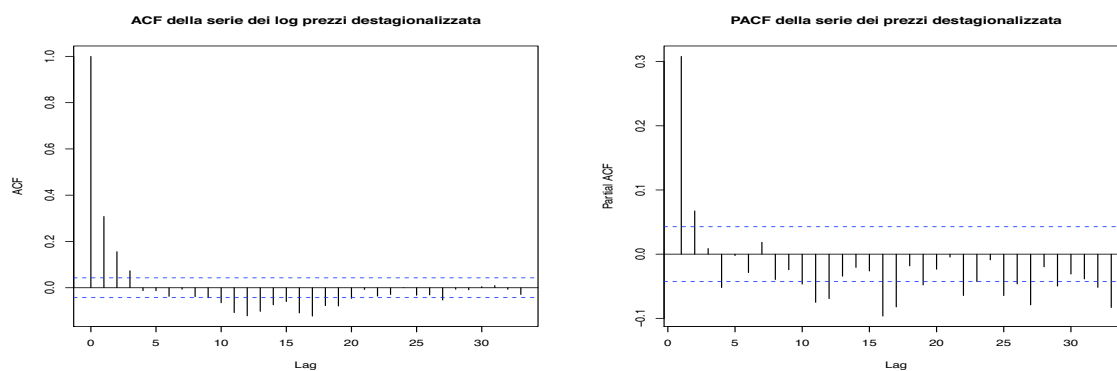


Figura 5.9: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) di  $p_t$  per il periodo 24.

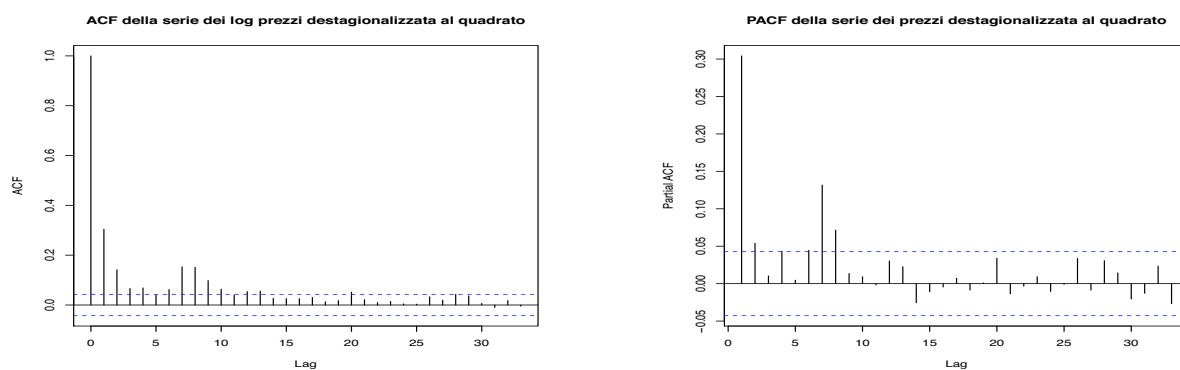


Figura 5.10: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) del quadrato di  $p_t$  per il periodo 24.

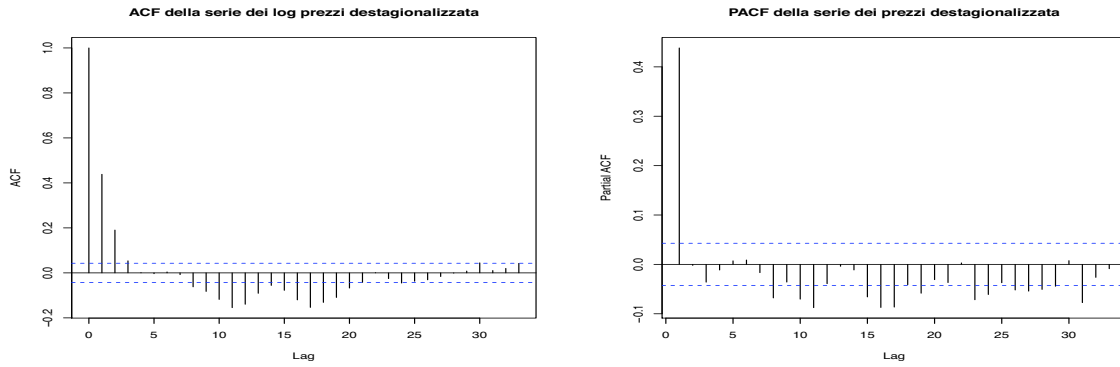


Figura 5.11: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) di  $p_t$  per il periodo 36.

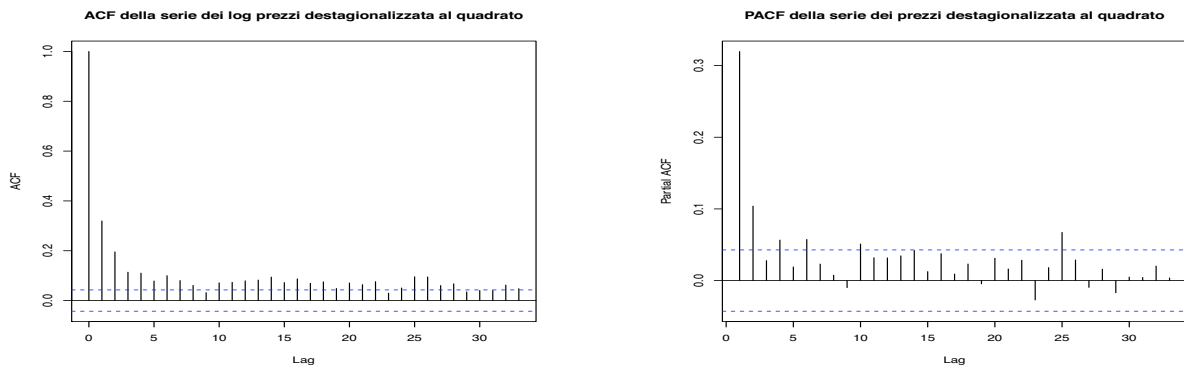


Figura 5.12: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) del quadrato di  $p_t$  per il periodo 36.

calcolo delle previsioni<sup>1</sup>; si riportano quindi, per ciascuna serie dei prezzi, una tabella contenente i risultati ottenuti effettuando previsioni ad un passo e una che invece riguarda i risultati ottenuti con un orizzonte previsivo di due passi in avanti.

Si riportano anche gli istogrammi dei valori PIT tramite i quali è possibile avere un'idea immediata dell'uniformità di essi, dunque della capacità della procedura in esame di produrre densità predittive coerenti con i dati osservati e i grafici relativi agli intervalli di confidenza al 95% calcolati sulle prime 100 densità predittive.

In tabella 5.3 sono riportati i livelli di significatività dei test implementati su previsioni a  $T = 1$  passo ottenute a partire dalla serie depurata del prezzo al periodo 24. Fanno riferimento a questa tabella le figure da 5.13 a 5.20 e la figura

<sup>1</sup>In ambito di prezzi elettrici si è ritenuto opportuno sottoporre a verifica della bontà previsiva solo la coda destra della distribuzione, ovvero quella inerente i picchi.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	0.135	0.736	0.082	< 0.001	0.030	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.004	0.242	0.034	< 0.001	0.003	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.155	0.517	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.151	0.532	0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.295	0.690	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	< 0.001	0.053	0.128	0.059	< 0.001	0.003	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.049	0.558	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	0.989	0.948	0.468	< 0.001	0.008	< 0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	0.002	0.429	0.891	0.332	< 0.001	< 0.001	0.004	< 0.001

Tabella 5.3: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie  $p_t$  del periodo 24 mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

5.77 che riportano gli istogrammi dei valori PIT, mentre i grafici degli intervalli di confidenza sono riportati in figura da 5.21 a 5.28 e in figura 5.78.

I test che si occupano di valutare l'uniformità dei valori PIT, ovvero il test di *Kolmogorov-Smirnov* e il test chi-quadrato, conducono al rifiuto di  $H_0$  per ciascuna delle procedure di calcolo implementate; un'attenta osservazione delle figure che riportano gli istogrammi dei valori PIT infatti suggerisce come nessun metodo di calcolo di densità predittive sia in grado di produrre una serie di valori PIT con caratteristiche di uniformità. In particolare si nota come le procedure semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH e la procedura *rnp*, che effettua regressioni *kernel*, producano istogrammi con picchi in corrispondenza dei valori estremi (0 e 1) che denotano l'incapacità di questi modelli di produrre densità coerenti con i dati realizzati. Dai grafici che riportano gli intervalli di confidenza delle densità predittive calcolate con le varie procedure si può risalire alla causa della scarsa uniformità dei valori PIT. Le procedure complessivamente non sono in grado di produrre densità predittive che seguano l'andamento dei dati osservati; le procedure che presentano istogrammi con picchi in corrispondenza dei valori estremi sono quelle procedure per le quali gli intervalli di confidenza sono molto stretti causando frequentemente sforamenti della serie osservata sia dal limite inferiore che da quello superiore. Le procedure invece per le quali gli istogrammi dei valori PIT hanno una conformazione a campana sono quelle che producono densità predittive troppo ampie per le quali

raramente il dato osservato cade nelle code.

Per quanto riguarda i test basati su regressioni ausiliarie, quello che si occupa di valutare la presenza di autocorrelazione seriale nella serie dei valori PIT (colonna *SC*), produce *p-value* elevati per tutte le procedure tranne che per quella semiparametrica che si basa sulla stima di un modello AR. Il test per la verifica di presenza di eteroschedasticità condizionale supporta l'ipotesi nulla di assenza di eteroschedasticità condizionale per tutte le procedure implementate.

Passando ad analizzare i risultati prodotti dai test *LR*, si nota che il test per l'indipendenza della serie dei valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  risulta significativo per quelle procedure i cui istogrammi dei valori PIT presentano picchi in corrispondenza dei valori estremi, ovvero *sp*<sub>1</sub>, *sp*<sub>2</sub>, *sp*<sub>3</sub> e *rnp*. Tuttavia queste stesse procedure sono le uniche che conducono ad accettazione dell'ipotesi nulla del test *LR*<sub>010</sub>.

Gli ultimi tre test che hanno lo scopo di valutare la bontà delle densità predittive spesso, nelle analisi su dati simulati, hanno riportato risultati analoghi; anche in questo caso di applicazione delle procedure di calcolo previsionale a serie di dati reali vi è corrispondenza tra i risultati ottenuti con questi test. Il test *LR*<sub>tail</sub> accetta l'ipotesi nulla di buona capacità previsiva nella coda destra solo per la procedura parametrica, mentre i test per la corretta copertura degli intervalli risultano significativi per tutte le procedure implementate.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR</i> <sub>ind</sub>	<i>LR</i> <sub>010</sub>	<i>LR</i> <sub>tail</sub>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	0.114	0.964	0.069	< 0.001	0.242	< 0.001	< 0.001
<i>sp</i> <sub>AR</sub>	< 0.001	0.003	0.387	0.729	0.234	< 0.001	0.003	< 0.001	< 0.001
<i>sp</i> <sub>1</sub>	< 0.001	< 0.001	0.374	0.784	0.009	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp</i> <sub>2</sub>	< 0.001	< 0.001	0.345	0.789	0.005	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp</i> <sub>3</sub>	< 0.001	< 0.001	0.888	0.661	0.907	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>smsp</i>	< 0.001	< 0.001	0.039	0.273	0.068	< 0.001	0.009	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.733	0.485	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	0.104	0.828	0.080	< 0.001	0.008	< 0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	< 0.001	0.411	0.985	0.302	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.4: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie  $p_t$  del periodo 24 mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Si passa ora al commento della tabella 5.4 che contiene i risultati della analisi

compiute sulle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate a partite dalla serie depurata del prezzo al periodo 24. Per completare l'analisi si sono riportati anche gli istogrammi dei valori PIT relativi alle densità predittive sottoposte a verifica in figura da 5.29 a 5.36 e 5.79 e i grafici degli intervalli di confidenza ricavati dalle prime 100 densità predittive calcolate con ciascuna procedura sono riportati in figura da 5.37 a 5.44 e in figura 5.80.

Come si è potuto osservare nel caso di previsione a un passo, anche ora i test che si occupano di valutare l'uniformità dei dati PIT risultano significativi per ogni procedura di calcolo previsionale implementata. Questi risultati sono coerenti con gli istogrammi riportati i quali non sono sufficientemente piatti; come nel caso di orizzonte temporale unitario, anche ora gli istogrammi derivanti dalle procedure semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH e dalla procedura non parametrica *rnp* (tutte procedure che si occupano di modellare non solo la media condizionale ma anche la varianza) presentano picchi in corrispondenza dei valori estremi. Valgono le stesse considerazioni fatte in merito alle previsioni ad un passo in avanti circa le cause che portano alle particolari conformazioni degli istogrammi dei valori PIT; esse sono da ricercare nelle ampiezze degli intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive.

I test basati su regressioni ausiliarie per valutare le caratteristiche di indipendenza e assenza di presenza di effetti ARCH nella serie dei valori PIT conducono a livelli di significatività osservati elevati per ogni procedura, quindi sostengono l'ipotesi nulla.

Il test che si occupa di valutare, tramite rapporto di verosimiglianza, l'indipendenza dei dati PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  non è del tutto in accordo con il test *SC*. Qui infatti viene rifiutata l'ipotesi nulla di assenza di dipendenza autoregressiva del primo ordine per le procedure *sp<sub>1</sub>*, *sp<sub>2</sub>* e *rnp*. Il test  $LR_{010}$ , analogamente a quando raccontato per la previsione a un passo in avanti, conduce a *p-value* prossimi all'unità solo per quelle procedure che hanno prodotto istogrammi con picchi in corrispondenza dei valori estremi.

Il test per valutare la bontà previsiva nella coda destra della distribuzione, così

come i test derivanti dalle procedure di *backtesting* del VaR, conducono ad un netto rifiuto di  $H_0$  per qualunque procedura implementata.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	0.129	0.899	0.175	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.036	0.010	0.242	< 0.001	0.018	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.031	0.458	0.004	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.029	0.464	0.139	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.045	0.792	0.422	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sm<sub>sp</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.144	0.014	0.314	< 0.001	0.036	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.025	0.684	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	< 0.001	0.086	0.268	0.161	< 0.001	0.013	< 0.001	< 0.001
<i>gam</i>	< 0.001	< 0.001	0.995	0.003	0.417	< 0.001	< 0.001	0.002	0.001

Tabella 5.5: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie  $p_t$  del periodo 36 mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Ci si occupa ora di analizzare i risultati riportati in tabella 5.5 che contiene i *p-value* dei test compiuti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate a partire dalla serie depurata del prezzo al periodo 36. Per completare l'analisi si sono riportati anche gli istogrammi dei valori PIT relativi alle densità predittive sottoposte a verifica in figura da 5.45 a 5.52 e 5.81 e i grafici degli intervalli di confidenza delle prime 100 densità predittive calcolate in figura da 5.53 a 5.60 e in figura 5.82. Le prime due colonne della tabella contengono i livelli di significatività osservati dei test implementati per valutare l'uniformità della serie dei valori PIT prodotta dalle densità predittive calcolate; si tratta di valori prossimi a zero per tutte le procedure implementate dunque non viene mai supportata l'ipotesi nulla di uniformità dei valori PIT. Gli istogrammi dei valori PIT sono analoghi a quelli presentati in merito all'analisi della serie dei prezzi del periodo 24 dunque anche l'interpretazione delle conformazioni che si discostano dall'uniformità è la stessa, imputabile quindi all'ampiezza, troppo ridotta o troppo elevata, delle densità predittive.

Passando ai test basati su regressioni ausiliarie si considera dapprima quello che valuta l'assenza di autocorrelazione seriale all'interno della serie dei valori PIT. Esso conduce a valori di significatività osservata elevati per la maggior parte delle procedure di calcolo previsionale; tuttavia le procedure semiparametriche e



quella non parametrica basata su regressioni *kernel* conducono ad accettare l'ipotesi nulla solo per livelli di significatività  $\leq 0.02$ . Il test che studia invece l'assenza di eteroschedasticità condizionale sempre nella serie dei valori PIT conduce ad una decisa accettazione di  $H_0$  per tutte le procedure implementate tranne che per  $sp_{AR}$ ,  $sm_{sp}$  e  $gam$ .

Il test rapporto di verosimiglianza per valutare l'indipendenza della serie dei valori PIT trasformati tramite  $\Phi^{-1}$  conduce al rifiuto dell'ipotesi nulla di assenza di dipendenza autoregressiva del primo ordine per tutte le procedure implementate a differenza di  $sp_1$  e  $rnp$ . Il test invece che si occupa, non solo di valutare l'assenza di dipendenza autoregressiva di primo ordine, ma anche di verificare che i parametri della normale standard siano compatibili con quelli stimati dalla serie dei valori PIT trasformati tramite  $\Phi^{-1}$ , riporta *p-value* prossimi a uno solo per quelle procedure i cui istogrammi dei valori PIT presentano picchi in corrispondenza di 0 e 1.

Le uniche procedure in grado di prevedere accuratamente la coda destra della densità predittiva sono  $sp_{AR}$ ,  $sm_{sp}$  e  $mf_d$ .

Nessuna delle procedure implementate produce densità predittive i cui intervalli di confidenza al 95% rispettano tale copertura in quando i test *Kup* e *Chris* forniscono *p-value* prossimi a zero.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.943	< 0.001	< 0.001	0.001	< 0.001	< 0.001
$sp_{AR}$	< 0.001	0.050	< 0.001	0.684	< 0.001	< 0.001	0.139	< 0.001	< 0.001
$sp_1$	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.540	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$sp_2$	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.493	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$sp_3$	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.561	0.049	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$sm_{sp}$	< 0.001	< 0.001	0.183	0.008	0.275	< 0.001	0.040	< 0.001	< 0.001
$rnp$	< 0.001	< 0.001	< 0.001	0.480	< 0.001	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$mf_d$	< 0.001	0.072	< 0.001	0.740	< 0.001	< 0.001	0.073	< 0.001	< 0.001
$gam$	< 0.001	< 0.001	0.763	0.003	0.239	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.6: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie  $p_t$  del periodo 36 mediante il metodo indicato in ciascuna riga.

Si conclude la presentazione dei risultati delle procedure di valutazione implementate sulle analisi compiute su dati reali commentando la tabella 5.6 con-

tenente i  $p$ -value dei test compiuti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate a partite dalla serie depurata del prezzo al periodo 36. Per completezza si riportano anche dei risultati grafici; sono visibili nelle figure da 5.61 a 5.68 e 5.83 gli istogrammi dei valori PIT ottenuti a partire dalle densità predittive a due passi calcolate mediante i vari metodi presentati e in figura da 5.69 a 5.76 e 5.84 i grafici relativi agli intervalli di confidenza.

Il test di *Kolmogorov-Smirnov* per la verifica dell'uniformità dei valori PIT risulta significativo per tutte le procedure di calcolo previsionale implementate in quanto fornisce  $p$ -value prossimi a zero. Per quanto riguarda invece il test chi-quadrato, anch'esso per valutare la distribuzione uniforme dei valori PIT, si incontrano i primi livelli di significatività osservati che possono condurre ad accettazione dell'ipotesi nulla. Non si rifiuta  $H_0$  al livello di significatività  $\alpha = 0.05$  per le procedure *sp<sub>AR</sub>* e *mf<sub>d</sub>*. Considerazioni del tutto analoghe a quelle espone in precedenza possono essere fatte in merito alle particolari conformazioni degli istogrammi dei valori PIT; istogrammi caratterizzati da picchi in corrispondenza dei valori estremi 0 e 1 derivano da procedure che forniscono densità predittive troppo poco ampie, mentre istogrammi la cui forma è similabile ad una campana derivano da procedure le cui densità predittive sono troppo ampie rispetto al campo di variazione dei dati osservati.

Rispetto alle previsioni ad un passo in avanti in questo caso il test *SC* fornisce risultati peggiori. Sono solamente due le procedure per le quali viene supportata l'ipotesi di assenza di autocorrelazione seriale e si tratta di *sm<sub>sp</sub>* e *gam*. Proprio queste procedure sono le uniche due per le quali risulta significativo invece il test per l'assenza di eteroschedasticità condizionale all'interno della serie dei valori PIT.

Il test rapporto di verosimiglianza per la verifica di indipendenza della serie dei valori PIT trasformati con  $\Phi^{-1}$ , contro ipotesi alternativa di dipendenza autoregressiva di primo ordine, è coerente con quanto osservato per il test *SC* per il fatto che nel caso di procedura *sm<sub>sp</sub>* viene accettata l'ipotesi nulla di assenza di dipendenza del primo ordine; tuttavia il test  $LR_{ind}$  fornisce livelli di significati-

vità che portano all'accettazione di  $H_0$  anche nel caso di procedura  $sp_3$  e  $gam$ . Come per tutte le tabelle relative ai dati reali analizzate si nota come il test  $LR_{010}$  conduca a  $p$ -value elevati solo nel caso di quelle procedure i cui istogrammi presentano picchi in corrispondenza di valori estremi.

A differenza di quanto detto per le tabelle contenenti i risultati delle analisi effettuate per valutare le densità predittive calcolate a partire da dati di borsa elettrica relativi al periodo 24, in questo caso (serie del prezzo al periodo 36 con orizzonte previsivo  $T = 2$ ), il test  $LR_{tail}$  conduce a livelli di significatività osservati tali da non rifiutare l'ipotesi nulla di buona capacità previsiva nella coda destra della distribuzione nel caso di procedura  $sp_{AR}$ ,  $sm_{sp}$  e  $mfd$ , esattamente come nel caso di orizzonte previsivo pari a 1.

I test derivanti dalla procedure di *backtesting* del VaR forniscono livelli di significatività osservati prossimi a zero, indicando la non capacità delle procedure di calcolo di densità predittive implementate di fornire intervalli di confidenza al 95% che rispettino il livello di copertura in relazione a dati reali.

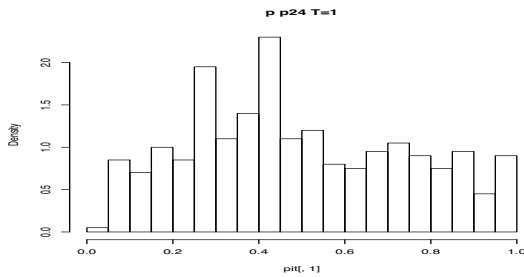


Figura 5.13: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

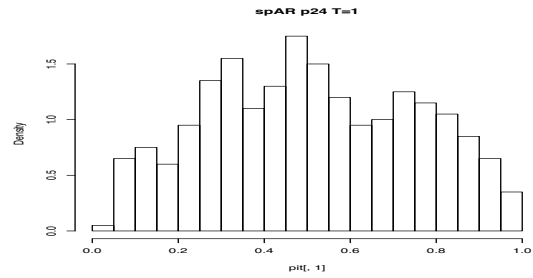


Figura 5.14: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $spAR$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

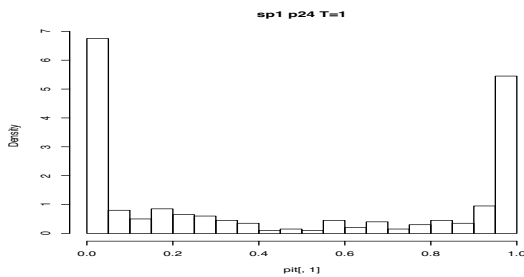


Figura 5.15: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

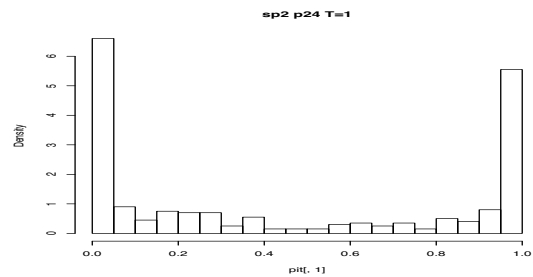


Figura 5.16: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

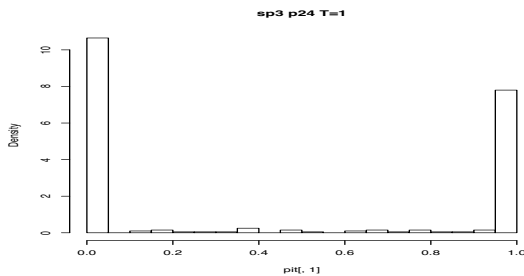


Figura 5.17: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

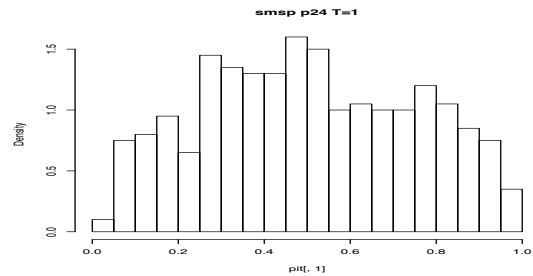


Figura 5.18: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

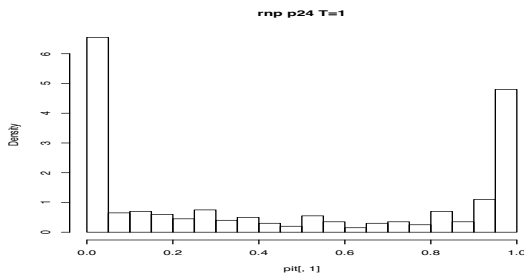


Figura 5.19: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

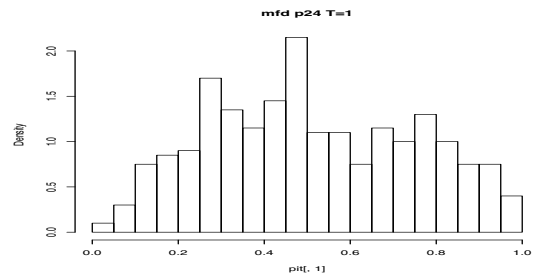


Figura 5.20: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mdf$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

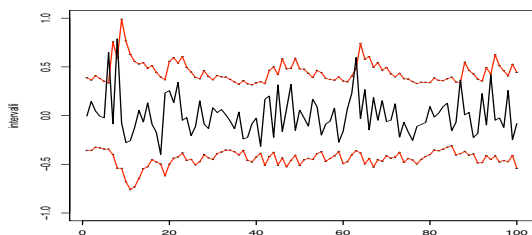


Figura 5.21: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

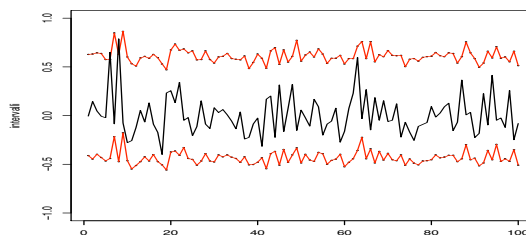


Figura 5.22: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

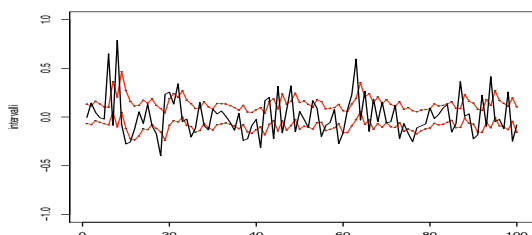


Figura 5.23: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

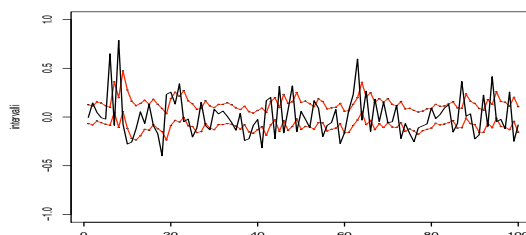


Figura 5.24: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

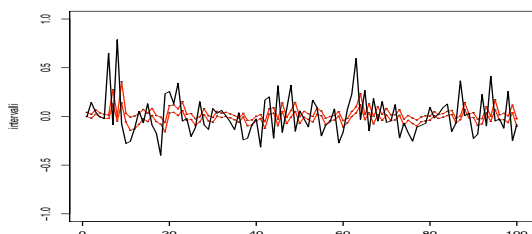


Figura 5.25: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

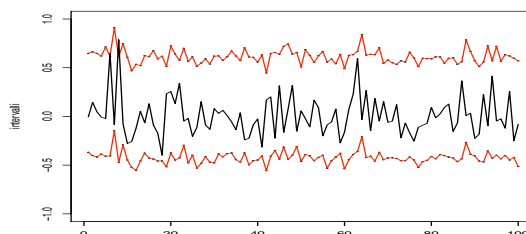


Figura 5.26: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

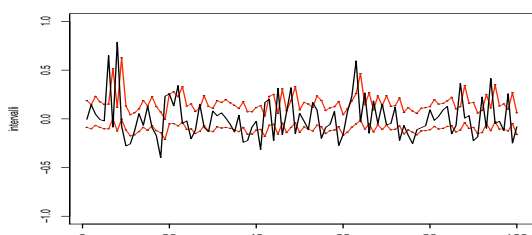


Figura 5.27: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

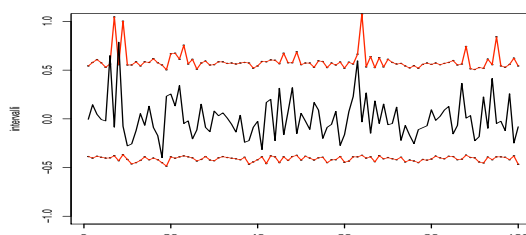


Figura 5.28: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

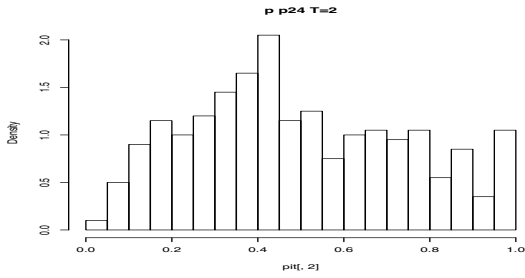


Figura 5.29: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

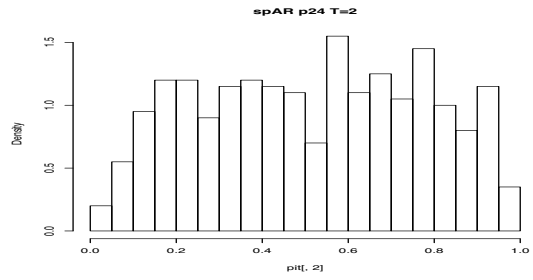


Figura 5.30: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $spAR$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

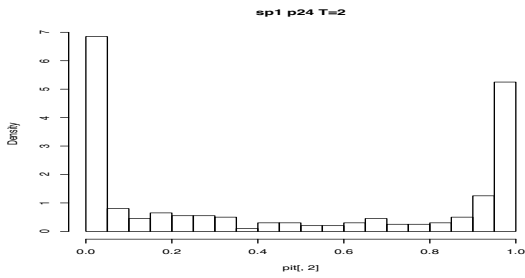


Figura 5.31: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

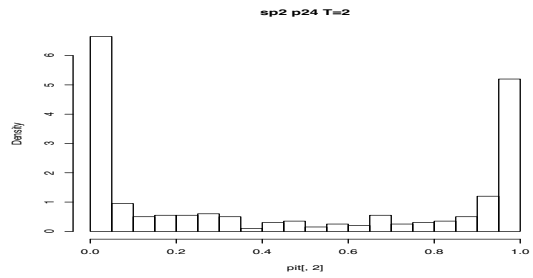


Figura 5.32: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

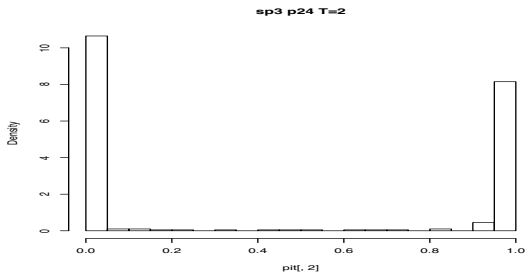


Figura 5.33: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

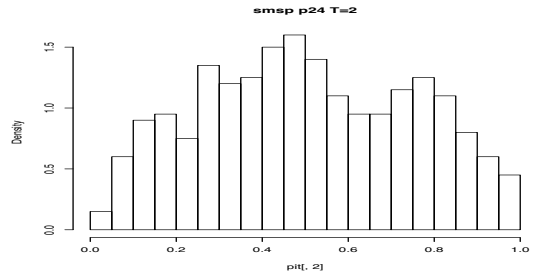


Figura 5.34: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smSP$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

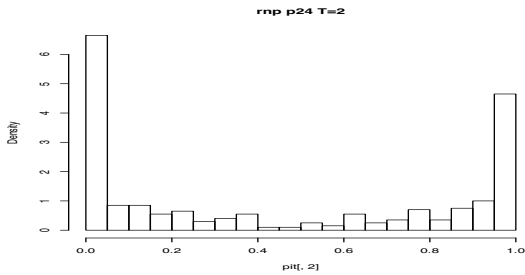


Figura 5.35: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

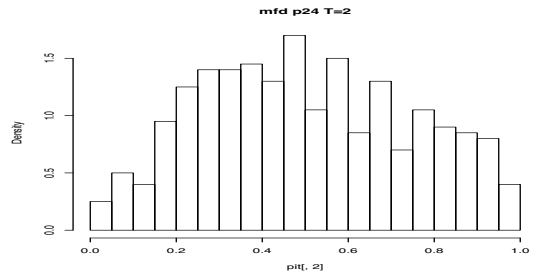


Figura 5.36: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

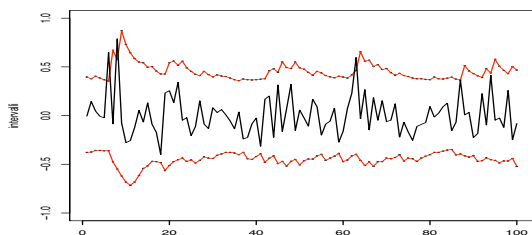


Figura 5.37: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

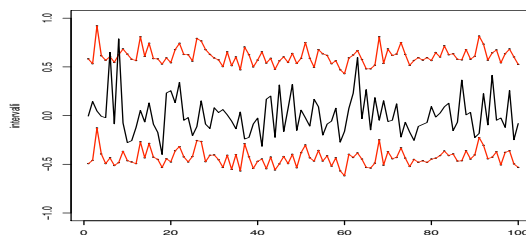


Figura 5.38: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

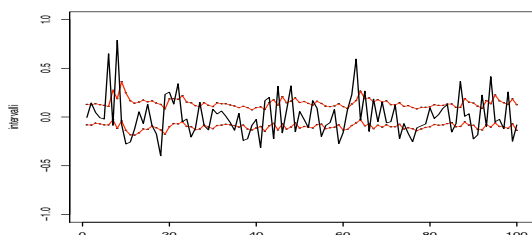


Figura 5.39: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

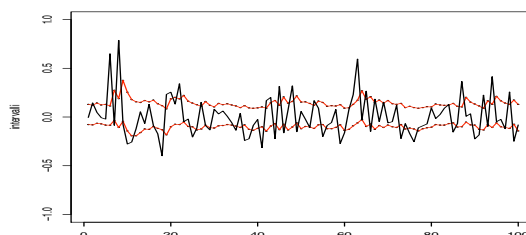


Figura 5.40: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

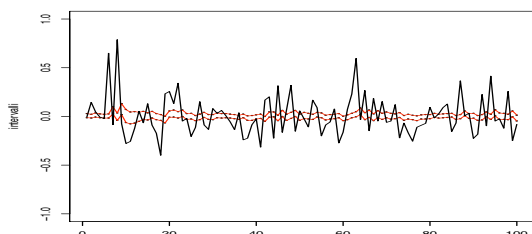


Figura 5.41: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

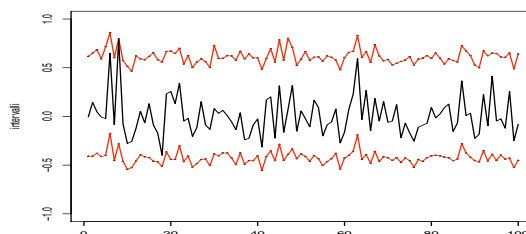


Figura 5.42: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sm_{sp}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

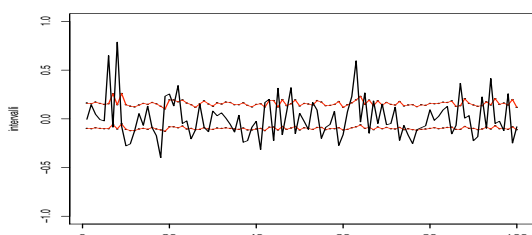


Figura 5.43: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

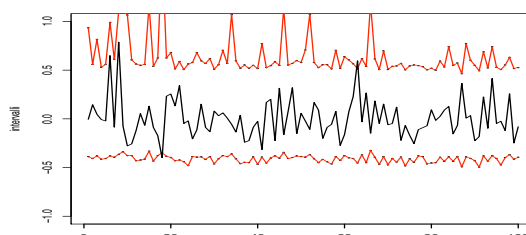


Figura 5.44: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

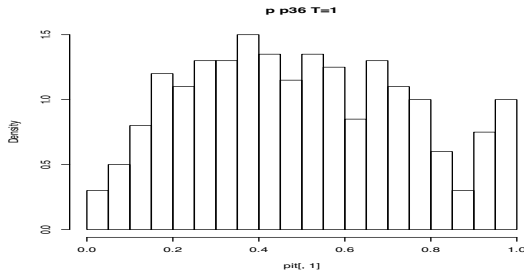


Figura 5.45: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

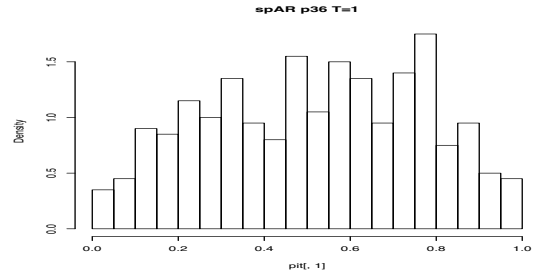


Figura 5.46: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $spAR$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

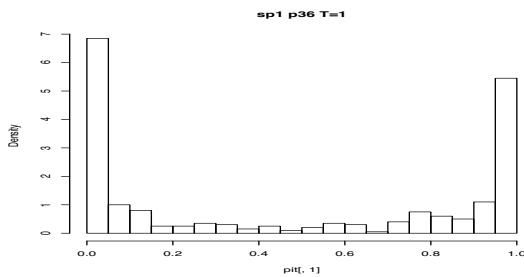


Figura 5.47: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

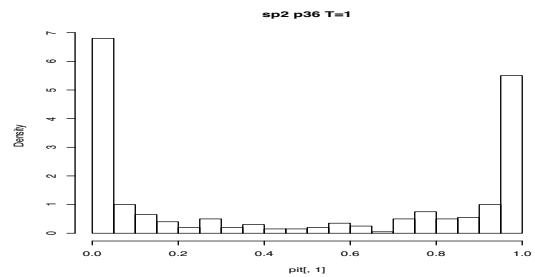


Figura 5.48: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

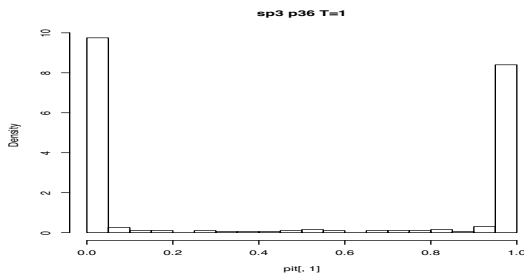


Figura 5.49: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

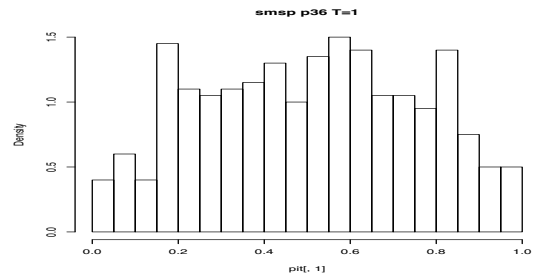


Figura 5.50: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

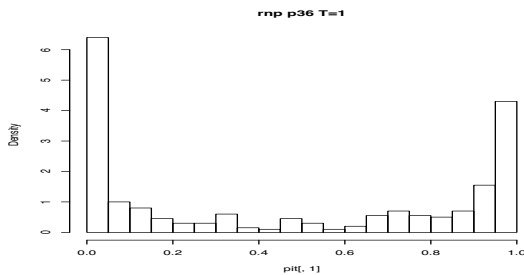


Figura 5.51: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

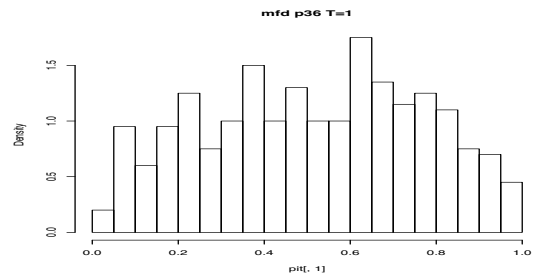


Figura 5.52: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.



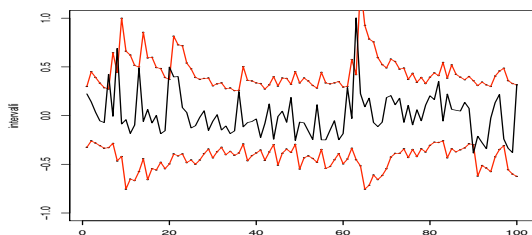


Figura 5.53: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

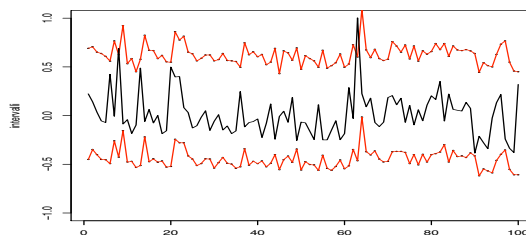


Figura 5.54: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

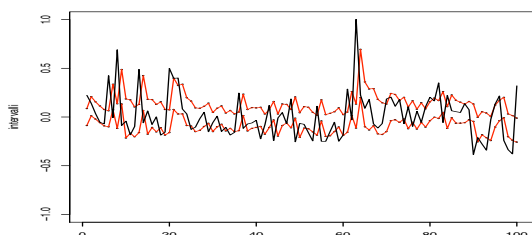


Figura 5.55: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

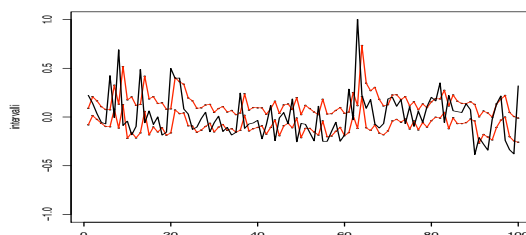


Figura 5.56: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

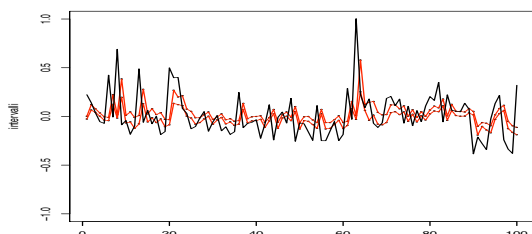


Figura 5.57: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

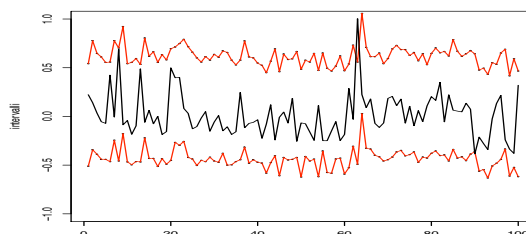


Figura 5.58: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

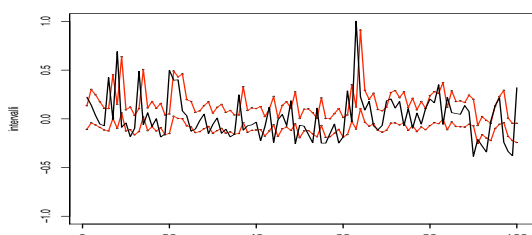


Figura 5.59: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

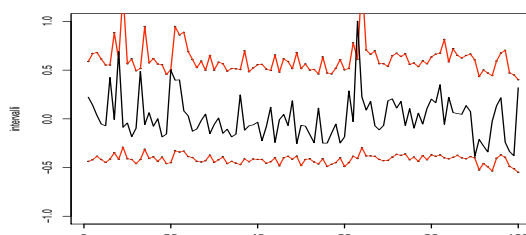


Figura 5.60: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

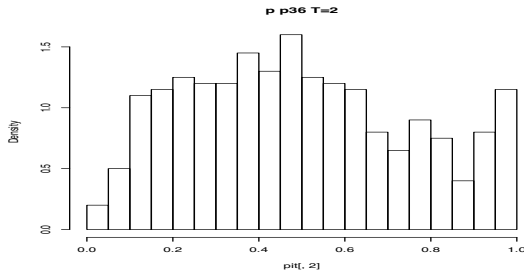


Figura 5.61: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

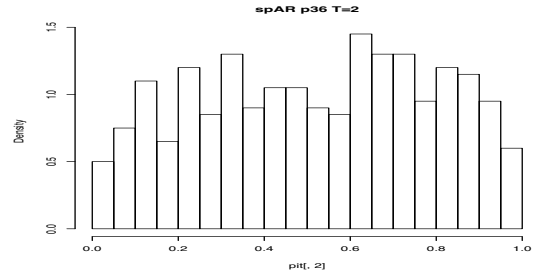


Figura 5.62: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $spAR$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

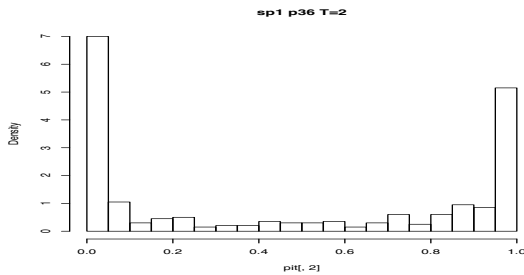


Figura 5.63: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

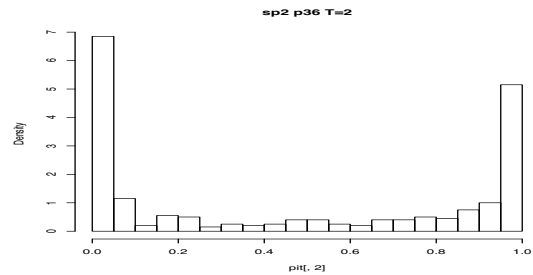


Figura 5.64: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

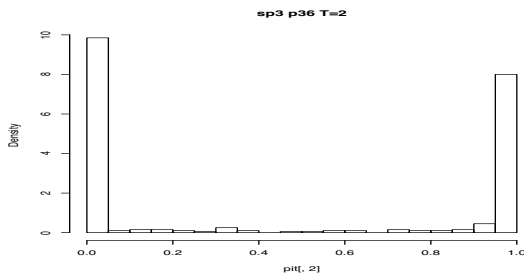


Figura 5.65: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

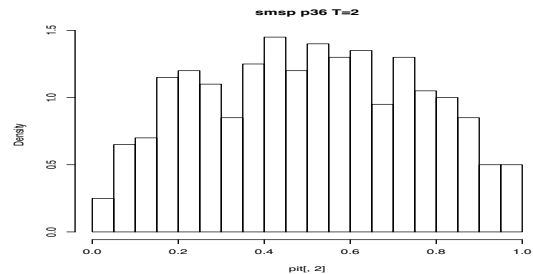


Figura 5.66: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

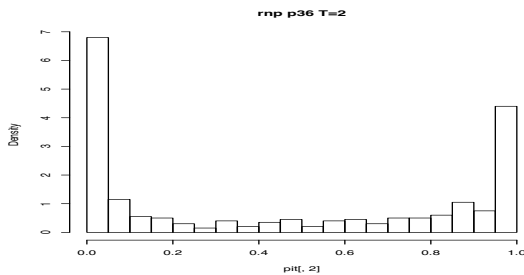


Figura 5.67: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

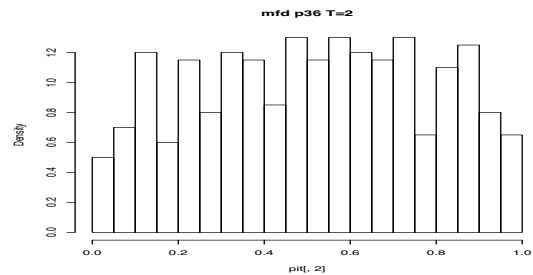


Figura 5.68: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mdf$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

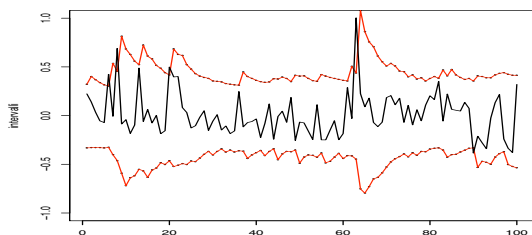


Figura 5.69: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

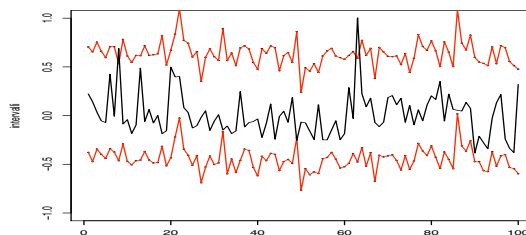


Figura 5.70: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

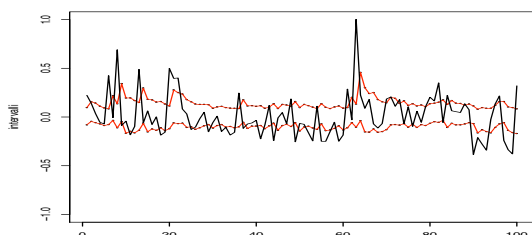


Figura 5.71: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

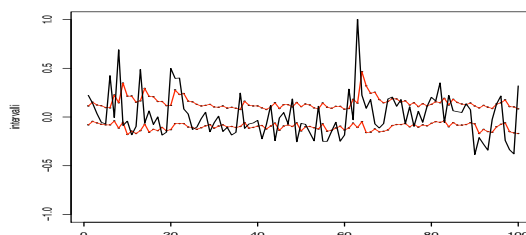


Figura 5.72: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

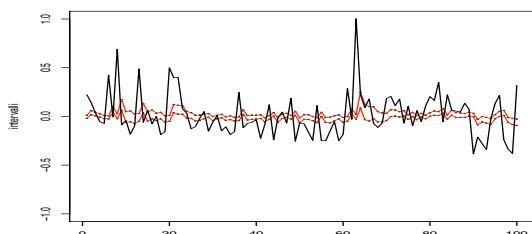


Figura 5.73: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

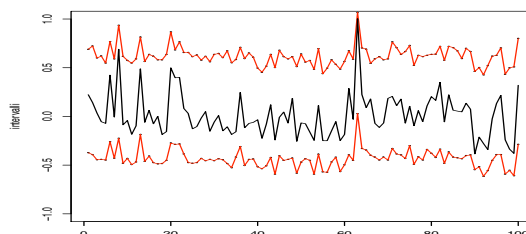


Figura 5.74: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sm_{sp}$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

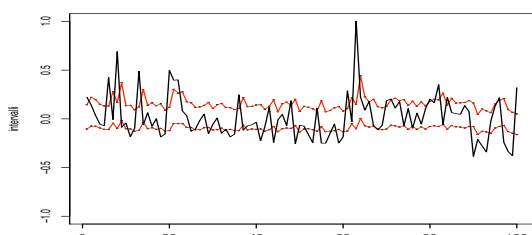


Figura 5.75: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

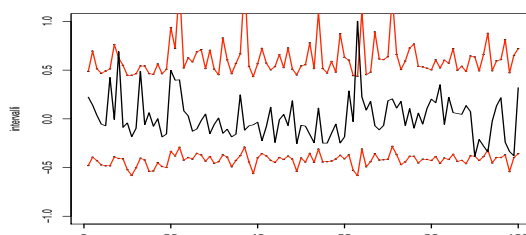


Figura 5.76: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

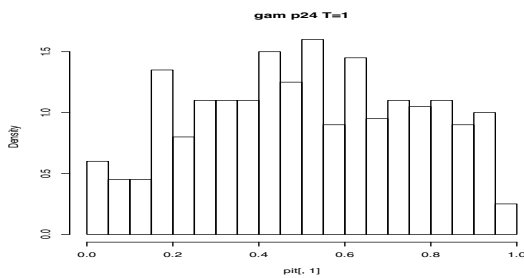


Figura 5.77: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

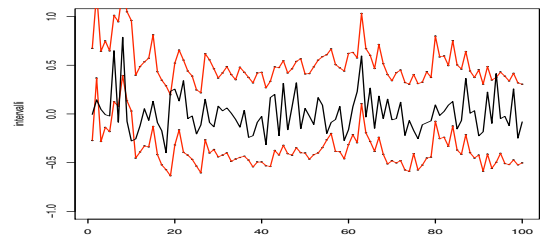


Figura 5.78: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

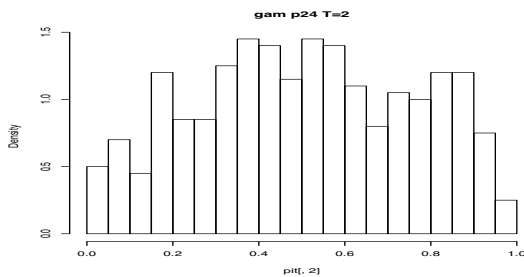


Figura 5.79: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

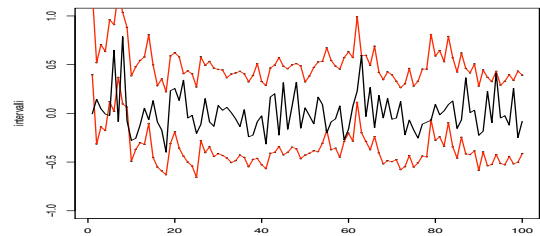


Figura 5.80: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 24.

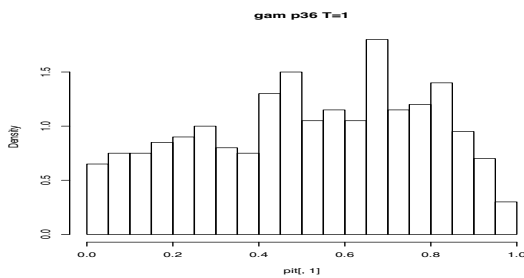


Figura 5.81: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

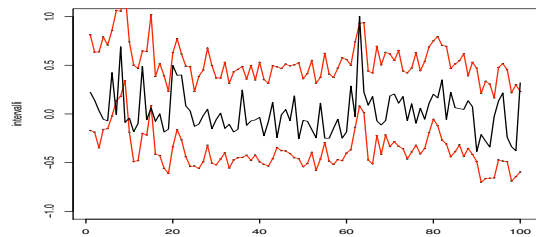


Figura 5.82: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

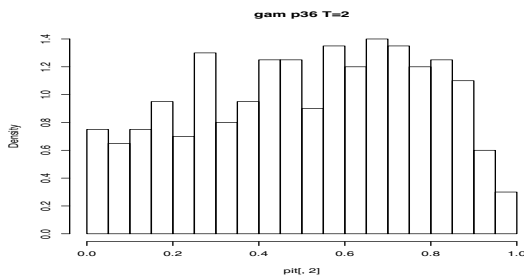


Figura 5.83: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

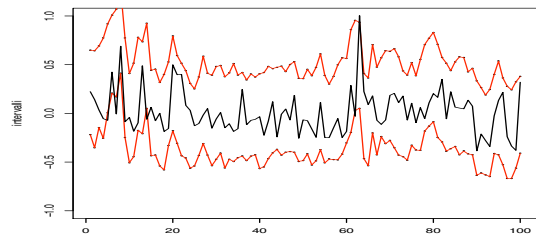


Figura 5.84: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura *gam* a partire dalla serie  $p_t$  per il periodo 36.

### 5.1.2 Commento dei risultati

Dopo aver commentato nel dettaglio i risultati delle procedure implementate per valutare le densità predittive a  $T = 1$  e  $T = 2$  passi in avanti, nel caso di dati reali, calcolate a partire dalle serie della componente residua del prezzo al periodo 24 e 36, si passa a una serie di considerazioni di carattere più generale sulla capacità delle procedure di calcolo previsionale implementate di produrre densità predittive coerenti con i dati osservati.

Non si incontrano drastiche differenze nelle procedure di valutazione tra le serie dei due periodi analizzati; pare però che i metodi di calcolo delle densità predittive implementati funzionino lievemente meglio, relativamente alla bontà previsiva nelle code della distribuzione, se applicate alla serie dei prezzi per il periodo 36.

Per tutti gli orizzonti previsivi e per ciascuna delle due serie analizzate pare che le procedure che si basano su modelli interessati a cogliere anche la varianza condizionale, dunque quelle procedure il cui obiettivo è quello di catturare gli effetti dell'eteroschedasticità condizionale all'interno della serie, non producano risultati soddisfacenti. Si nota il mal funzionamento delle procedure semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH ( $sp_1$ ,  $sp_2$ , e  $sp_3$ ) e di quella non parametrica basata su regressioni *kernel* non solo dal fatto che gli istogrammi presentano picchi in corrispondenza dei valori estremi 0 e 1, ma anche dal fatto che per queste procedure non viene mai accettata l'ipotesi di uniformità dei dati PIT né di bontà predittiva nelle code delle distribuzioni.

Per eleggere la miglior procedura di calcolo previsionale, relativamente all'applicazione su dati reali, si osservano i risultati dei test effettuati. Idealmente una procedura che produce valori PIT uniformi, per la quale vengono rifiutate le ipotesi di dipendenza all'interno della serie dei valori PIT e per la quale si è verificata una buona capacità previsiva nelle code della distribuzione oppure si è constatato che produce intervalli di confidenza che soddisfano le ipotesi nulle dei test provenienti dalle procedure di *backtesting* del VaR, è una procedura in grado di produrre previsioni di densità coerenti con i dati realizzati. Nessuna delle pro-

cedure implementate produce densità predittive che soddisfano congiuntamente le ipotesi di uniformità e di non dipendenza dei valori PIT da esse ricavati; si ritiene comunque che la procedura basata su una regressione multipla effettuata non parametricamente sfruttando i modelli GAM sia quella che ottiene i migliori risultati. I valori PIT derivanti dalle densità previste mediante questa procedura risultano avere caratteristiche di non dipendenza per tutti gli orizzonti previsivi e per tutte e due le serie analizzate; inoltre per la serie dei prezzi depurati relativa al periodo 36 il test  $LR_{tail}$  produce livelli di significatività osservati a sostegno dell'ipotesi di buona capacità previsiva nelle code della distribuzione.

## 5.2 L'indice Dow Jones

Si prosegue l'analisi del funzionamento delle procedure implementate applicate a dati provenienti dal mercato finanziario. Si è scelto di lavorare con la serie dei rendimenti giornalieri dell'indice *Dow Jones* relativi al periodo dal 3 gennaio 2007 al 14 marzo 2012. Le previsioni calcolate sono relative a rendimenti percentuali; infatti i rendimenti originali, il cui valore assoluto è dell'ordine di  $10^{-3}$ , non garantiscono buoni risultati previsivi. Riscalando per il fattore 100 la serie dei rendimenti si ottengono risultati previsivi di gran lunga migliori dunque i dati utilizzati nell'applicazione sono stati ricavati, dai prezzi alla chiusura del mercato, in questo modo:

$$r_t = 100 * [\log(p_t) - \log(p_{t-1})] \quad (5.1)$$

Si presenta in figura 5.85 la serie dei rendimenti utilizzata per il calcolo delle densità predittive e il loro istogramma. Dall'osservazione della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones* si notano le classiche caratteristiche di stazionarietà intorno allo zero e eteroschedasticità condizionale tipiche dei rendimenti finanziari; si distinguono infatti dei periodi di volatilità elevata e periodi invece più stabili riconoscendo così effetti di *clustering*.

Circa la distribuzione dei rendimenti si nota come sia accentuata la caratteristica di leptocurtosi; in tabella 5.7 infatti sono riportati i coefficienti di asimmetria e curtosi e, mentre non è così marcata l'asimmetria, lo stesso non si può dire per

la curtosi che è invece molto elevata, a sostenere la distribuzione tutt'altro che normale dei rendimenti.

Per quanto riguarda le caratteristiche di dipendenza della serie dei rendimenti si possono osservare in figura 5.86 e 5.87 le funzioni di autocorrelazione e autocorrelazione parziale dei livelli e dei quadrati della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*. Si nota come la struttura di autocorrelazione dei rendimenti sia molto debole, suggerendo incorrelazione. Osservare la funzione di autocorrelazione dei quadrati dei rendimenti risulta utile per diversi aspetti; in primis per constatare la non indipendenza dei rendimenti e poi, poiché il quadrato dei rendimenti può essere interpretato come volatilità istantanea, a constatare che la volatilità dipende dal proprio passato.

	simmetria	curtosi
$r_t$	-0.04	10.12

Tabella 5.7: Coefficienti di simmetria e curtosi della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

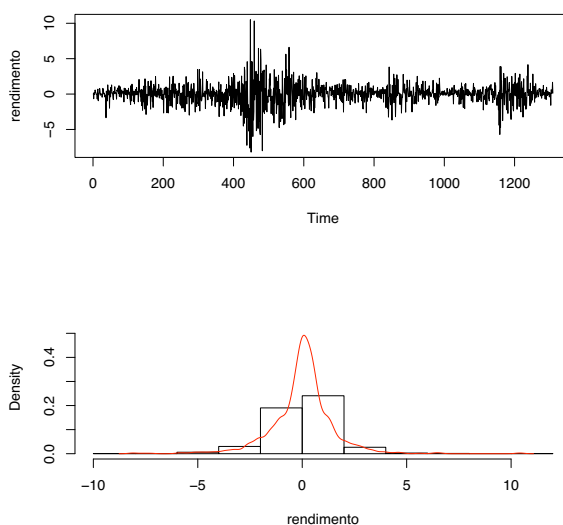


Figura 5.85: Serie storica e istogramma della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.



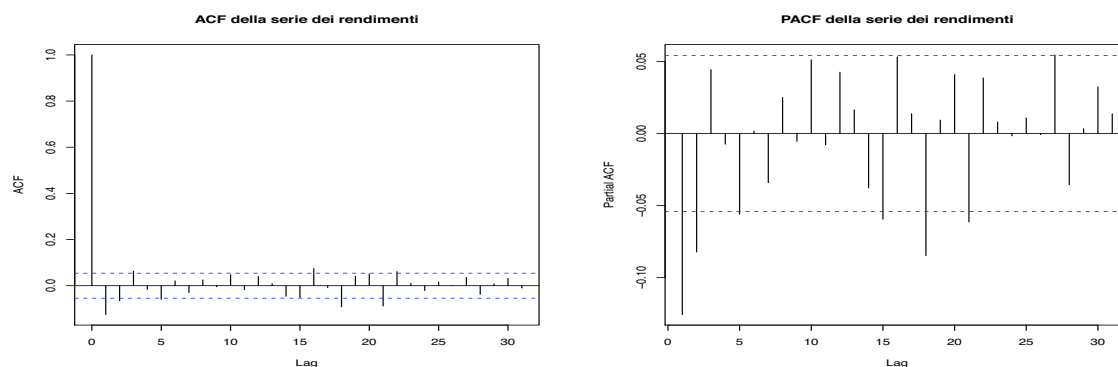


Figura 5.86: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) dei livelli della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

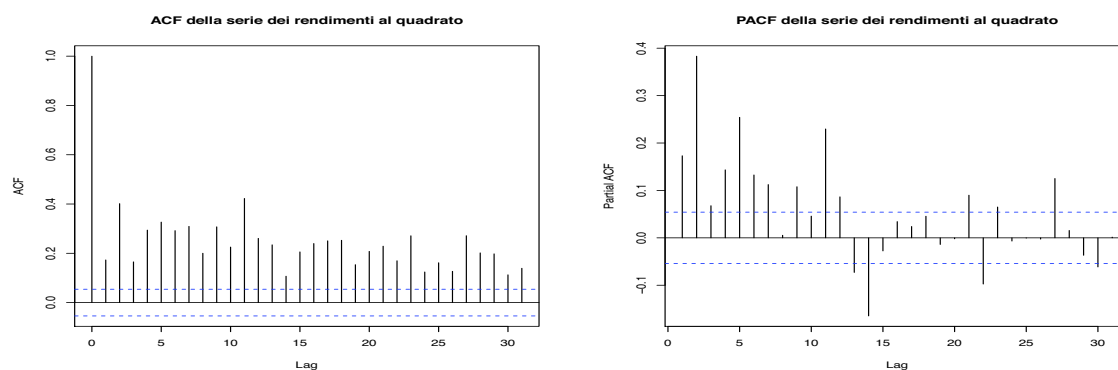


Figura 5.87: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) del quadrato della serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

### 5.2.1 Valutazione densità predittive

Si presentano ora i risultati relativi alla valutazione delle densità predittive calcolate in merito alla serie dei rendimenti percentuali giornalieri dell'indice *Dow Jones*. Come già effettuato nel caso di dati simulati e dati di borsa elettrica, si riportano delle tabelle contenenti i *p-value* dei test per valutare la bontà previsiva di 400 densità predittive con orizzonte pari a  $T = 1$  e  $T = 2$  passi in avanti.

Per quanto riguarda le procedure di calcolo previsionale utilizzate, si è ritenuto opportuno di applicare solo alcune di quelle descritte al capitolo 2, ovvero quelle più in grado di cogliere le caratteristiche di dipendenza di rendimenti finanziari. Si tratta principalmente di procedure che si occupano di modellare anche l'eteroschedasticità condizionale, ovvero la procedura parametrica, le procedure semiparametriche basate sulla stima di un modello ARMA-GARCH, la procedura non parametrica basata su regressione *kernel*, l'unica che tiene in considerazio-

ne anche la varianza condizionale oltre che la componente media (effettivamente poco interessante nel caso di rendimenti finanziari) e la procedura *mfd*, basata sull'assunto di dipendenza markoviana.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	0.849	0.775	0.386	< 0.001	0.004	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	0.002	0.941	0.464	0.355	< 0.001	0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.907	0.460	0.393	< 0.001	0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	0.001	0.830	0.001	0.264	< 0.001	0.036	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.152	< 0.001	0.203	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	0.661	0.573	< 0.001	0.692	< 0.001	0.214	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.8: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

Si comincia con la valutazione delle previsioni ad un passo, commentando i risultati in tabella 5.8, i cui istogrammi relativi ai valori PIT sono riportati nelle figure da 5.88 a 5.93 mentre i grafici degli intervalli di confidenza al 95% delle prime 100 densità predittive sono riportati in figura da 5.94 a 5.99.

Ambedue i test che si occupano di valutare l'uniformità dei dati osservati, trasformati mediante la *Probability Integral Transform*, sono significativi per la maggior parte delle procedure implementate; l'unica procedura per la quale viene accettata l'ipotesi di distribuzione uniforme del test *unif* è la *mfd*. In effetti anche osservando gli istogrammi dei valori PIT, si nota come essi non si discostino dall'uniformità; per alcune procedure, ed in particolare per quella non parametrica basata su regressione *kernel*, gli istogrammi dei valori PIT hanno una forma per nulla piatta presentando piuttosto una campana. In accordo con quanto affermato nell'analisi dei dati di borsa elettrica, anche qui la causa della conformazione a campana di alcuni istogrammi dei valori PIT è da ricercarsi nelle ampiezze delle densità predittive calcolate con le diverse procedure. Dai grafici degli intervalli di confidenza si nota come tutte le procedure, a differenza della *mfd*, producano densità predittive i cui estremi degli intervalli sono molto variabili; questa variabilità si traduce per le procedure semiparametriche in una eccessiva ampiezza degli intervalli che porta a produrre molti valori PIT attorno a 0.5 causando la forma a campana degli istogrammi. Invece, per queste procedure, le code del-

le distribuzioni predette non sono quasi mai toccate dalla serie dei rendimenti osservati. La procedura *mfd*, che fa registrare buoni risultati in termini di uniformità dei valori PIT, è quella per la quale gli estremi degli intervalli di confidenza risultano meno variabili e le ampiezze di tali intervalli sono più contenute.

Passando al commento delle colonne che riguardano i test basati su regressioni ausiliarie si nota che il test *SC*, per la verifica dell'assenza di autocorrelazione seriale all'interno della serie dei valori PIT, conduce sempre a *p-value* elevati, dunque tali da sostenere l'ipotesi nulla. Il test per la presenza di eteroschedasticità condizionale invece risulta significativo per le procedure *sp<sub>3</sub>*, *rnp* e *mfd*.

Proseguendo con i test che indagano le caratteristiche di dipendenza dei dati PIT, ci si concentra ora sui test basati sul rapporto di verosimiglianza. Quello per la verifica dell'assenza di dipendenza autoregressiva di primo ordine è del tutto in accordo con il test *SC*, ovvero conduce all'accettazione di  $H_0$  per ogni procedura implementata. Il test  $LR_{010}$  conduce invece al rifiuto dell'ipotesi nulla per tutte le procedure di calcolo di densità predittiva fornendo livelli di significatività osservati prossimi a zero.

Il test per la bontà previsiva delle code della distribuzione riguarda, nel caso di rendimenti finanziari, solo la coda sinistra. Questa decisione deriva dal fatto che questa coda riguarda rendimenti negativi, ovvero quelli che possono fare registrare perdite agli investitori, per i quali dunque è maggiore l'interesse nel conoscere la bontà delle previsioni effettuate. Solo le procedure *sp<sub>3</sub>* e *mfd* sono in grado di produrre densità predittive la cui coda sinistra è in linea con i dati osservati; tuttavia l'ipotesi nulla del test  $LR_{tail}$  non viene rifiutata, per la procedura semiparametrica che sfrutta tra le fonti di variabilità quella fornita dai parametri del modello ARMA-GARCH stimato, solo a un livello di significatività  $\leq 0.03$ .

I test che, piuttosto che valutare le caratteristiche dei valori PIT, indagano circa la coerenza tra il livello di copertura teorico e osservato di intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive, risultano sempre significativi per ciascuna delle procedure implementate.

Ci si concentra ora sulla tabella 5.9 che riporta i risultati delle analisi relative

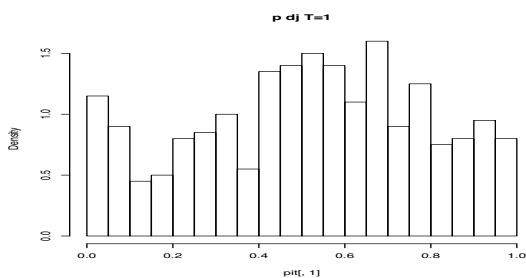


Figura 5.88: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $p$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

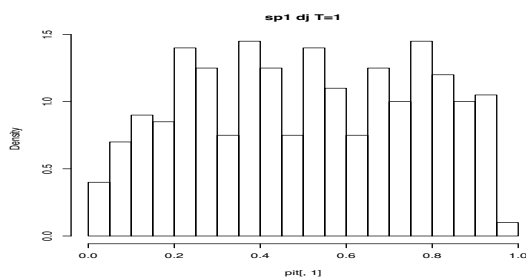


Figura 5.89: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

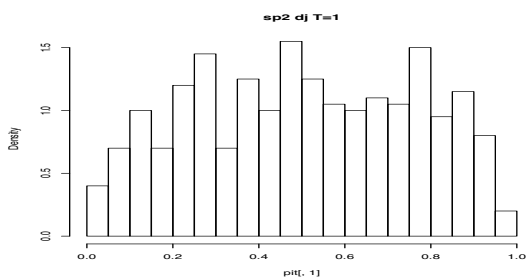


Figura 5.90: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

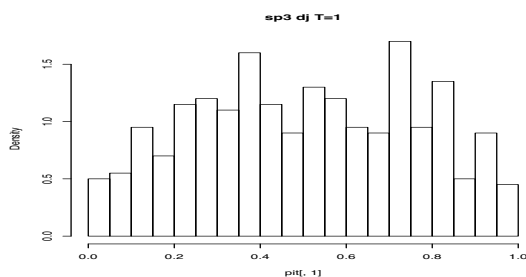


Figura 5.91: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

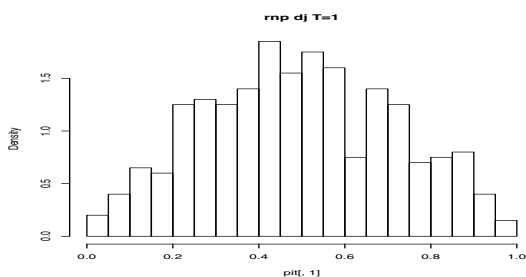


Figura 5.92: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

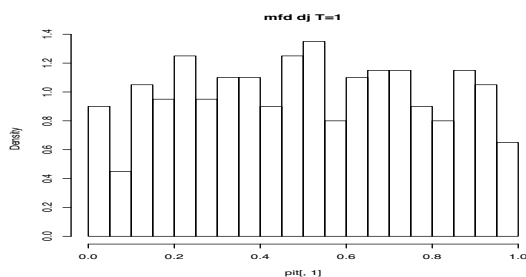


Figura 5.93: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

alle previsioni effettuate due passi in avanti. Fanno riferimento alle stesse previsioni anche le figure da 5.100 a 5.105, che riportano gli istogrammi dei valori PIT prodotti con ciascuna procedura di calcolo utilizzata e le figure da 5.106 a 5.111 che riguardano invece gli intervalli di confidenza al 95%.

Per quanto riguarda la verifica dell'uniformità dei dati PIT la situazione è del tutto analoga a quella osservata in merito alle previsioni a un passo. Qui infatti entrambe i test eseguiti per la verifica della corretta distribuzione uniforme risul-

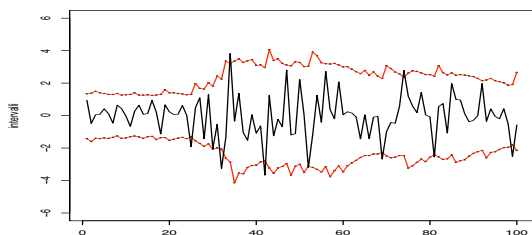


Figura 5.94: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

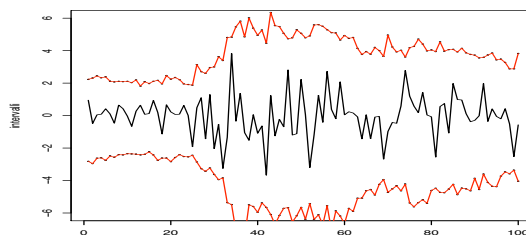


Figura 5.95: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

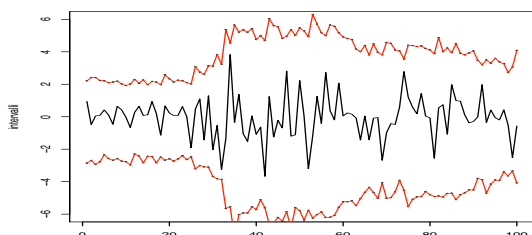


Figura 5.96: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

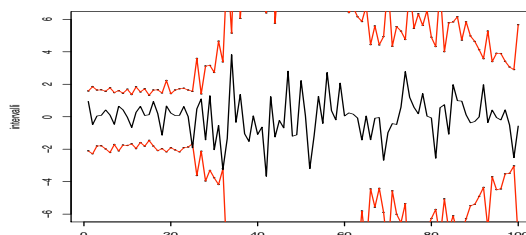


Figura 5.97: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

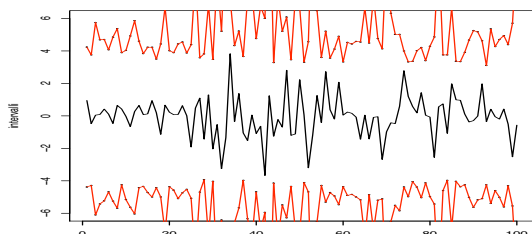


Figura 5.98: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

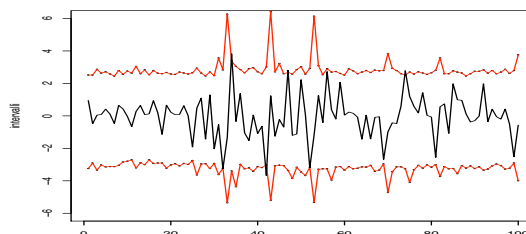


Figura 5.99: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 1$  passo calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

tano fortemente significativi per tutte le procedure ad eccezione della procedura  $mfd$  in relazione al test  $unif$ . Gli istogrammi dei valori PIT generati dalle previsioni a due passi infatti non sono piatti, anzi anche in questo caso la maggior parte dei valori si concentra nella parte centrale dell'istogramma per le motivazioni già spiegate in merito alle previsioni ad un passo in avanti.

Riguardo i test che effettuano regressioni ausiliarie per sottoporre a verifica i parametri, si nota come essi producano risultati del tutto in linea con quelli prodotti

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>p</i>	< 0.001	< 0.001	0.496	0.939	0.239	< 0.001	0.021	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>1</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.476	0.734	0.540	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>2</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.500	0.871	0.522	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>sp<sub>3</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.414	< 0.001	0.715	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>rnp</i>	< 0.001	< 0.001	0.718	< 0.001	0.500	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>mfd</i>	< 0.001	0.204	0.571	< 0.001	0.667	< 0.001	0.127	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.9: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

nel caso di orizzonte previsivo  $T = 1$ . Il test *SC* conduce a livelli di significatività osservati elevati a sostegno dell'ipotesi nulla di assenza di autocorrelazione seriale nella serie dei valori PIT. Il test *HET* risulta significativo solo per la procedura *sp<sub>3</sub>*, *rnp* e *mfd*, per le quali le serie di valori PIT generate non sono tali da rifiutare l'assenza di eteroscedasticità condizionale.

Tra i test basati sul rapporto di verosimiglianza quello che si occupa di valutare l'assenza di dipendenza autoregressiva di primo ordine all'interno della serie dei valori PIT opportunamente trasformata tramite  $\Phi^{-1}$ , conduce a *p-value* elevati per tutte le procedure in esame, dunque come nel caso di previsioni a un passo risulta in pieno accordo con il test *SC*. Il test *LR<sub>010</sub>* riporta livelli di significatività osservati prossimi a zero per tutte le procedure implementate, dunque conduce sempre ad un netto rifiuto dell'ipotesi nulla di congiunta nullità dei parametri autoregressivo e normalità standard dei valori PIT trasformati mediante la funzione di ripartizione della normale inversa.

Come nel caso di previsione ad un passo, l'unica procedura che produce densità la cui coda sinistra è in linea con i dati osservati è *mfd*; nel caso di previsione a due passi in avanti anche la procedura parametrica conduce ad accettare l'ipotesi nulla del test *LR<sub>tail</sub>* ma solo al livello di significatività  $\alpha = 0.02$ .

Nessuna procedura conduce ad accettazione di  $H_0$  nel caso del test di *Kupiec* e *Christoffersen*; dunque nessuna densità predittiva a  $T = 2$  passi in avanti è in grado di produrre intervalli di confidenza che rispettino il livello di copertura teorico.

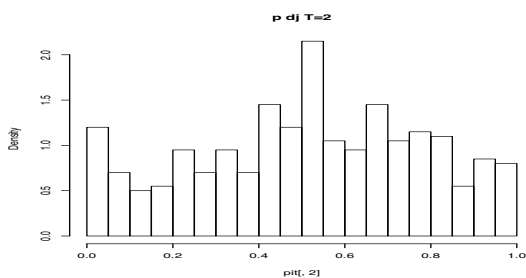


Figura 5.100: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $p$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

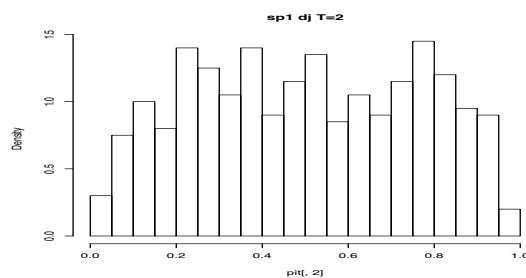


Figura 5.101: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

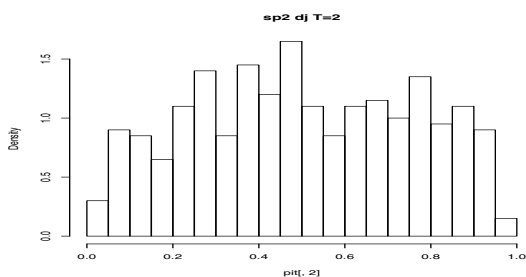


Figura 5.102: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

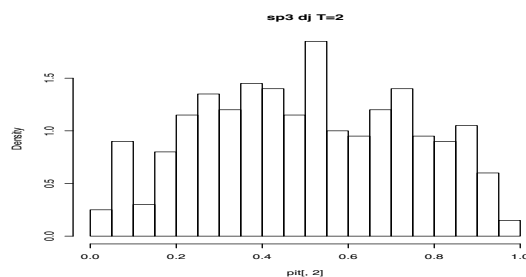


Figura 5.103: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

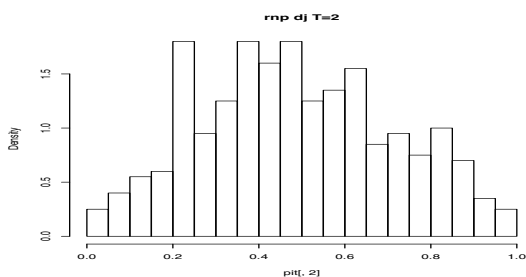


Figura 5.104: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

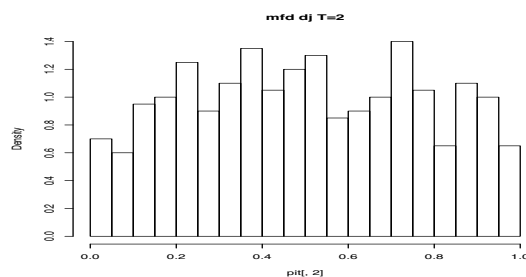


Figura 5.105: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

## 5.2.2 Commento dei risultati

Dopo aver osservato nel dettaglio i risultati delle procedure di valutazione applicati al caso di previsione a  $T = 1$  e  $T = 2$  passi si effettuano ora considerazioni di carattere generale sulla capacità dei metodi implementati di prevedere correttamente la densità condizionata dei rendimenti finanziari.

Dai risultati delle tecniche di valutazione delle densità predittive emerge che la procedura che è in grado di produrre valori PIT con le caratteristiche migliori è

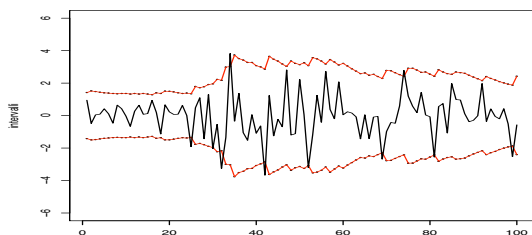


Figura 5.106: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $p$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

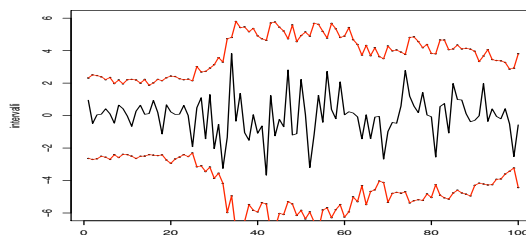


Figura 5.107: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_1$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

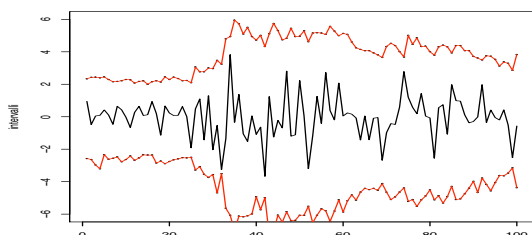


Figura 5.108: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_2$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

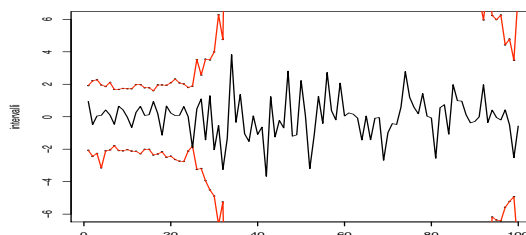


Figura 5.109: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $sp_3$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

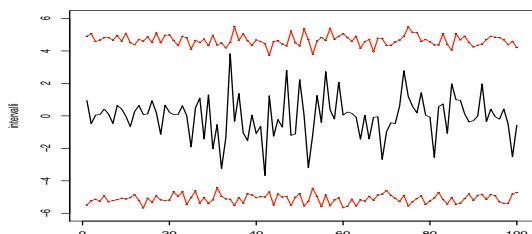


Figura 5.110: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $rnp$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

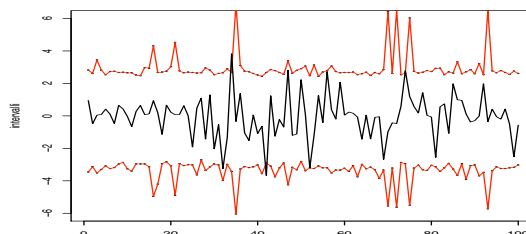


Figura 5.111: Intervalli di confidenza al 95% delle densità predittive a  $T = 2$  passi calcolate con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones*.

la  $mfd$ . La serie dei valori PIT supporta l'ipotesi di uniformità e anche di non dipendenza; inoltre il test per la bontà predittiva nelle code della distribuzione presenta livelli di significatività osservati tali da sostenere una buona capacità della procedure di produrre densità coerenti con le osservazioni situate nelle code della distribuzione.

Le altre procedure applicate al caso di dati finanziari non producono serie di valori PIT con caratteristiche di uniformità, mentre invece la non dipendenza risulta



supportata dall'evidenza empirica. Come si è già sottolineato queste procedure producono istogrammi dei PIT nei quali la maggior parte di valori si concentra al centro delle distribuzioni; per capire come mai alcune procedure forniscono istogrammi con questa particolare forma si fa riferimento alle ampiezze delle densità predette. Se una procedura produce densità ampie allora è sensato pensare che la maggior parte delle osservazioni disponibili si concentrino al centro di essa, producendo così istogrammi dei valori PIT le cui frequenze sono concentrate nel mezzo dell'intervallo  $[0, 1]$ ; tuttavia se le densità predittive sono meno ampie allora i valori osservati cadranno in maniera più uniforme all'interno di essa.

Osservando le ampiezze degli intervalli di confidenza al 95% ricavati dalle densità predette, si nota come la procedura *mfd* produca intervalli meno ampi rispetto alle altre procedure, dunque si verifica la supposizione che l'ampiezza delle densità influisca sulla bontà delle previsioni stesse. Le ampiezze degli intervalli relativi alla procedura *rnp* sono i più ampi e in effetti questa è la procedura che produce istogrammi dei valori PIT meno uniformi rispetto alle altre.

La procedura che indaga la dipendenza dei dati non parametricamente senza effettuare regressioni ma utilizzando una procedura basata sul solo assunto di dipendenza markoviana è dunque in grado di produrre buone densità predittive relativamente a dati di carattere finanziario.

### 5.3 La volatilità del titolo *DELL*

Si conclude l'analisi su dati reali applicando le procedure di calcolo previsionale implementate ad una ulteriore serie storica reale. Si considera qui la serie dei rendimenti logaritmici percentuali al quadrato del titolo *DELL*, quotato nel mercato americano, nel periodo dal 3 gennaio 2007 al 14 marzo 2012, ovvero per il medesimo periodo considerato per i rendimenti dell'indice *Dow Jones* già analizzati.

La serie in esame è stata calcolata a partire dai prezzi alla chiusura in questo modo:

$$r_t^2 = \{100 * [\log(p_t) - \log(p_{t-1})]\}^2 \quad (5.2)$$

Non è casuale la scelta di considerare i quadrati dei rendimenti in quanto questi rappresentano una quantità molto importante e studiata in ambito finanziario che viene interpretata come la volatilità istantanea. Essendo la volatilità una quantità non osservabile direttamente esistono molte tecniche per misurarla; la più semplice ed immediata, comunque sensata in quanto assume che la variabilità possa cambiare in ogni istante, è data dai rendimenti al quadrato:

$$v_t = \sigma_t = (r_t - \bar{r})^2 \cong r_t^2 \quad (5.3)$$

Si può osservare la serie della volatilità del titolo *DELL* in figura 5.112. Si nota come abbia caratteristiche di asimmetria, chiaramente la serie della volatilità assume solo valori positivi, e presenti dei picchi in corrispondenza di quei periodi nei quali la rischiosità del titolo è stata elevata. Si riportano anche, in figura 5.113 e 5.114, la struttura di autocorrelazione della serie dei livelli e dei quadrati dalle quali si nota come la volatilità sia tutt'altro che incorrelata ma presenti una struttura di autocorrelazione seriale piuttosto persistente.

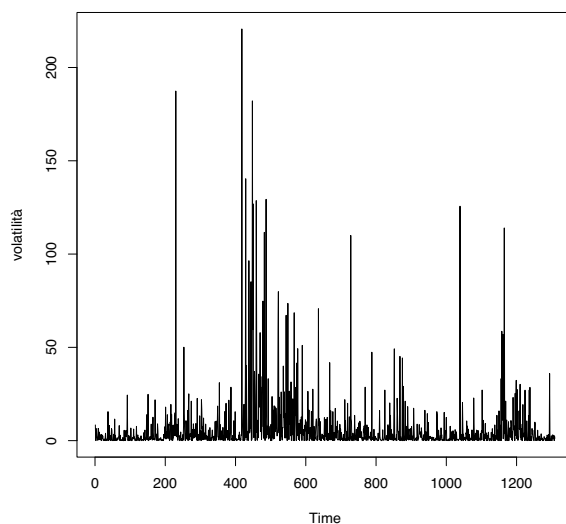


Figura 5.112: Serie storica dei rendimenti al quadrato del titolo *DELL*.

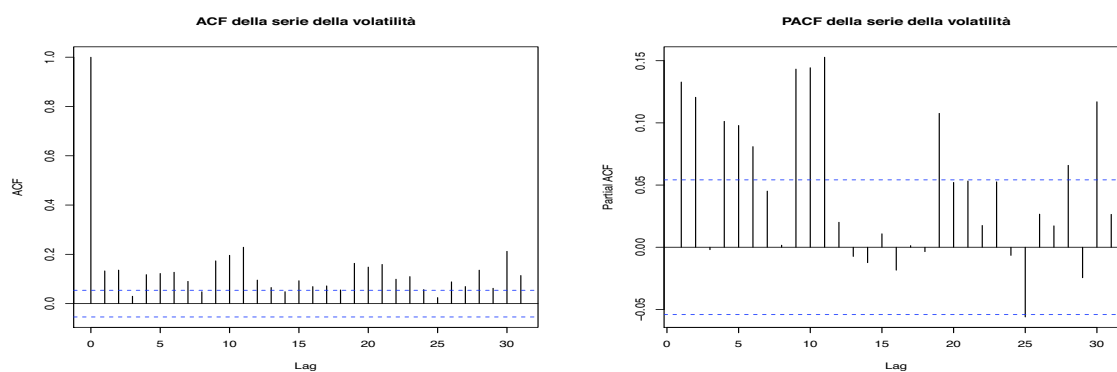


Figura 5.113: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) dei livelli della serie dei rendimenti al quadrato del titolo *DELL*.

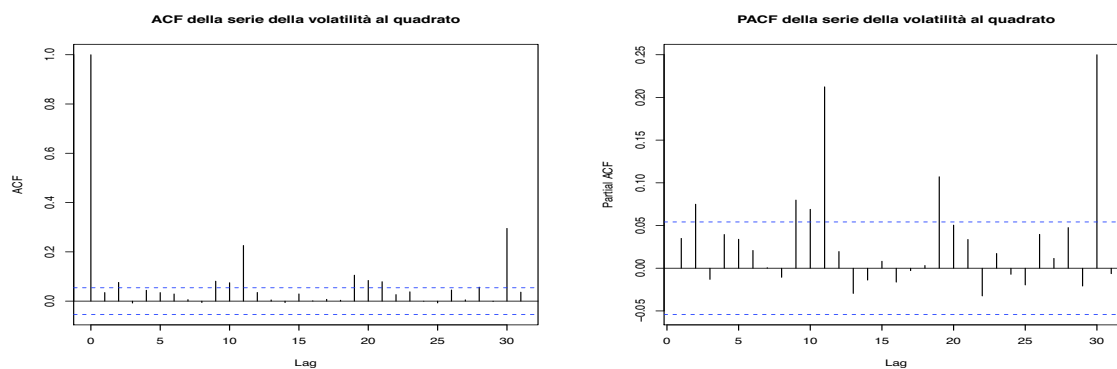


Figura 5.114: Autocorrelazione (a sinistra) e autocorrelazione parziale (a destra) del quadrato della serie dei rendimenti al quadrato del titolo *DELL*.

### 5.3.1 Valutazione densità predittive

Si presentano ora i risultati delle valutazioni delle densità predittive calcolate a partire dai dati della volatilità del titolo *DELL*. Come già effettuato in precedenza, si riportano delle tabelle contenenti i *p-value* dei test per valutare la bontà previsiva di 400 densità predittive con orizzonte pari a  $T = 1$  e  $T = 2$  passi in avanti. A causa delle caratteristiche della serie in esame si è ritenuto di calcolare le densità predittive solo tramite alcune delle procedure implementate. Data l'asimmetria dei dati a disposizione si è ritenuto di non applicare la procedura parametrica le cui densità prodotte hanno tutte forma gaussiana; non sono stati riscontrati buoni risultati in merito alle procedure basate su modelli o regressioni che tengono conto sia della componente media che di quella legata alla varianza condizionale, così si è scelto di applicare alla serie della volatilità del titolo *DELL* solo le procedure di calcolo previsionale  $sp_{AR}$ ,  $sm_{sp}$  e  $mfd$ , ovvero quelle che si occupano di modellare solo la media condizionale.

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	$LR_{ind}$	$LR_{010}$	$LR_{tail}$	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
$sp_{AR}$	< 0.001	0.094	< 0.001	0.508	< 0.001	< 0.001	0.355	< 0.001	< 0.001
$sm_{sp}$	< 0.001	< 0.001	0.700	0.413	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
$mfd$	< 0.001	0.218	0.397	0.926	0.773	< 0.001	0.771	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.10: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 1$  passo, calcolate a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

I risultati delle valutazioni relative alle previsioni con orizzonte temporale  $T = 1$  sono presentate in tabella 5.10; per completare l'analisi si presentano anche gli istogrammi dei valori PIT prodotti a partire dalle densità predittive calcolate e i grafici dei loro intervalli al 95% in figura da 5.115 a 5.120.

Per quanto riguarda i test che verificano l'uniformità dei dati PIT si nota come il test di *Kolmogorov-Smirnov* conduca al rifiuto di  $H_0$  per ciascuna delle procedure implementate, mentre il test chi-quadrato supporta l'ipotesi di uniformità per la procedura  $mfd$  e per la procedura basata sul processo AR(1). I risultati dei test concordano con l'aspetto degli istogrammi dei valori PIT; questi sembrano piuttosto piatti per le procedure  $sp_{AR}$  e  $mfd$  mentre la procedura basata su regressioni

effettuate con funzioni *spline* produce un istogramma tutt'altro che uniforme. I grafici relativi agli intervalli di confidenza delle prime 100 previsioni effettuate aiutano nel capire le cause che hanno portato a determinate configurazioni negli istogrammi dei valori PIT. La procedura *smsp* produce intervalli di confidenza piuttosto stretti per i quali l'estremo inferiore viene superato spesso dalla serie osservata procurando quel picco riconoscibile nel diagramma delle frequenze dei valori PIT; per le altre procedure i grafici si somigliano, quello determinato dalla procedura *mfd* si differenzia per produrre estremi superiori dell'intervallo di confidenza più variabili e capaci quindi di cogliere i picchi della serie della volatilità.

Tra test basati su regressioni ausiliarie, quello che valuta l'assenza di autocorrelazione seriale nella serie dei valori PIT non viene rifiutato per le procedure *smsp* e *mfd*, mentre quello che si occupa di valutare l'assenza di eteroschedasticità condizionale supporta l'ipotesi nulla per ciascuna delle procedure considerate.

Il test rapporto di verosimiglianza che valuta la non dipendenza autoregressiva di ordine 1 nella serie dei valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  è in totale accordo con il test *SC*; le procedure che hanno fornito valori PIT con caratteristiche di indipendenza sono ancora la *smsp* e la *mfd*. Il test  $LR_{010}$  produce *p-value* prossimi a zero per ciascuna delle procedure considerate nell'analisi, dunque supporta un netto rifiuto di  $H_0$ .

Il test sulla bontà predittiva nelle code della distribuzione considera, nel caso di dati relativi alla volatilità del titolo *DELL*, entrambe le code della distribuzione prevista. Questo fornisce buoni risultati per le procedure semiparametrica basata sul modello AR(1) e per quella non parametrica che assume dipendenza markoviana; entrambe queste procedure conducono a supportare l'ipotesi di bontà predittiva nelle code della distribuzione. Anche questo risultato è in linea con quello relativo alle ampiezze degli intervalli visibili nei grafici presentati; le procedure che forniscono intervalli di confidenza al 95% meno ampi sono quelle per le quali è garantita la miglior capacità di prevedere correttamente le code della distribu-

zione.

I test per la valutazione della corretta copertura degli intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive risultano sempre significativi e ciò sottolinea il fatto che le procedure implementate non sono in grado di produrre intervalli che rispettino la copertura teorica.

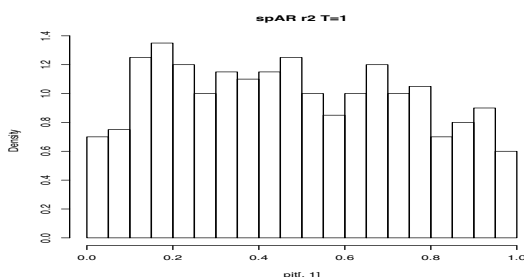


Figura 5.115: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura *spAR* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

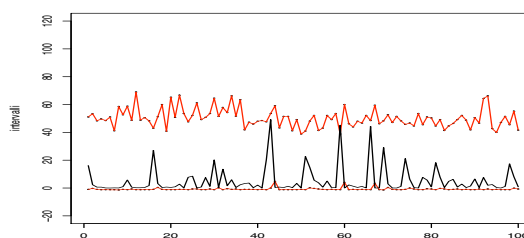


Figura 5.116: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 1 passo con la procedura *spAR* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

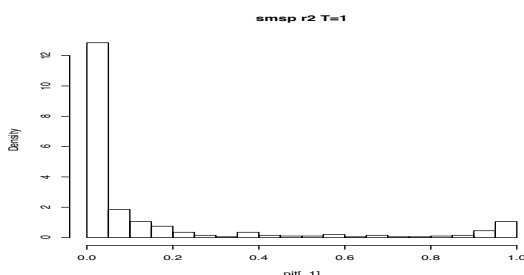


Figura 5.117: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura *smsp* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

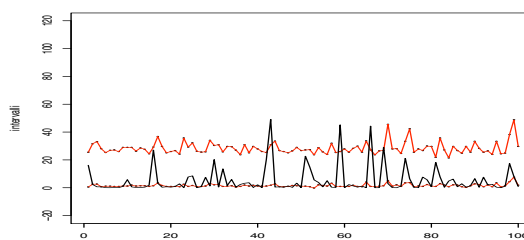


Figura 5.118: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 1 passo con la procedura *smsp* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

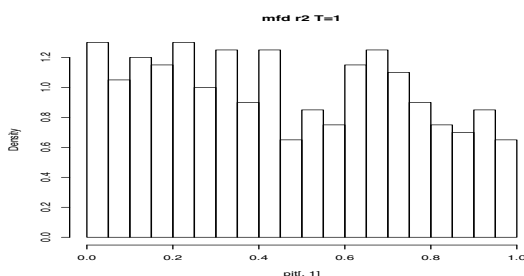


Figura 5.119: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 1 passo con la procedura *mfd* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

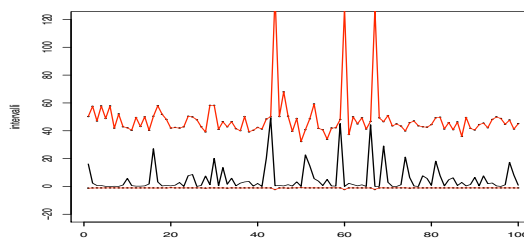


Figura 5.120: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 1 passo con la procedura *mfd* a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

Si passa ora al commento dei risultati forniti dalle procedure di valutazione delle densità predittive a  $T = 2$  passi in avanti. I *p-value* dei test implementati so-

	<i>KS</i>	<i>unif</i>	<i>SC</i>	<i>HET</i>	<i>LR<sub>ind</sub></i>	<i>LR<sub>010</sub></i>	<i>LR<sub>tail</sub></i>	<i>Kup</i>	<i>Chris</i>
<i>sp<sub>AR</sub></i>	< 0.001	0.054	0.997	0.035	0.913	< 0.001	0.658	0.001	0.002
<i>sm<sub>sp</sub></i>	< 0.001	< 0.001	0.603	0.406	1.000	< 0.001	< 0.001	< 0.001	< 0.001
<i>m<sub>fd</sub></i>	< 0.001	0.257	0.592	0.758	0.579	< 0.001	0.234	< 0.001	< 0.001

Tabella 5.11: *P-value* dei test eseguiti sulle densità predittive a  $T = 2$  passi, calcolate a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

no presentati in tabella 5.11 mentre gli istogrammi dei valori PIT e i grafici delle ampiezze degli intervalli di confidenza al 95% sono riportati in figura da 5.121 a 5.126.

Analogamente a quanto detto in merito alle previsioni ad un passo in avanti anche ora il test *KS* non supporta mai l'uniformità dei valori PIT, mentre il test chi-quadrato rifiuta l'ipotesi nulla di distribuzione uniforme solo nel caso di procedura *sm<sub>sp</sub>*. Si possono fare le medesime considerazioni fatte in merito all'orizzonte previsivo unitario; dunque gli istogrammi di valori PIT che appaiono piatti sono quelli della procedura *sp<sub>AR</sub>* e quello della procedura basata sull'assunto di dipendenza markoviana mentre quello prodotto dalla procedura *sm<sub>sp</sub>* presenta un picco in corrispondenza del valore 0 causato dal fatto che l'estremo inferiore dell'intervallo al 95% viene spesso superato come si può vedere in figura 5.124.

Il test *SC* per l'assenza di autocorrelazione nella serie dei valori PIT conduce a *p-value* elevati per tutte le procedure considerate. Il test, sempre basato su regressioni ausiliarie, che sottopone a verifica l'assenza di eteroschedasticità condizionale nella serie dei valori PIT risulta sempre a sostegno di  $H_0$  anche se solo al livello  $\alpha = 0.03$  per la procedura *sp<sub>AR</sub>*.

Il test *LR<sub>ind</sub>*, per lo studio della dipendenza della serie dei valori PIT, è in accordo con quello che sfrutta regressioni ausiliarie; supporta quindi l'assenza di dipendenza autoregressiva di ordine 1 per la serie dei valori PIT trasformati mediante  $\Phi^{-1}$  per tutte le procedure. Il test rapporto di verosimiglianza *LR<sub>010</sub>* produce livelli di significatività osservati prossimi a zero per tutte le procedure considerate.

Sono buoni invece i risultati in merito alla bontà previsiva nelle code della distri-

buzione per le procedure  $sp_{AR}$  e  $mfd$ , le stesse per le quali è supportata l'uniformità dei dati.

I test di *Kupiec* e di *Christoffersen* producono  $p$ -value prossimi a zero e suggeriscono quindi che gli intervalli di confidenza al 95% ricavati dalle densità predittive calcolate non rispettino il livello di copertura teorico.

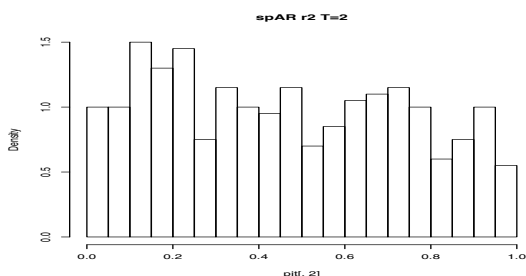


Figura 5.121: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

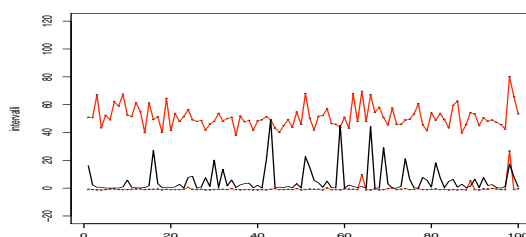


Figura 5.122: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $sp_{AR}$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

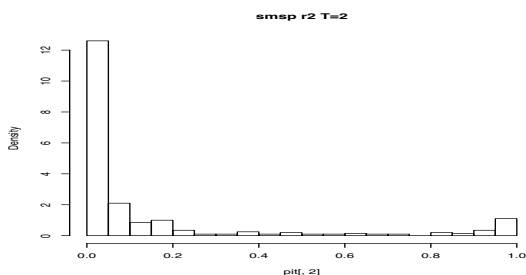


Figura 5.123: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

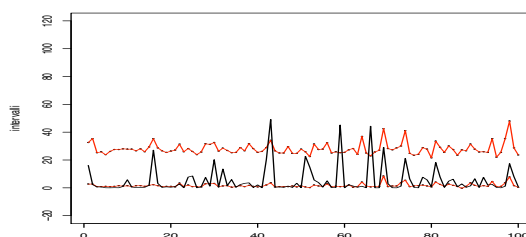


Figura 5.124: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $smsp$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

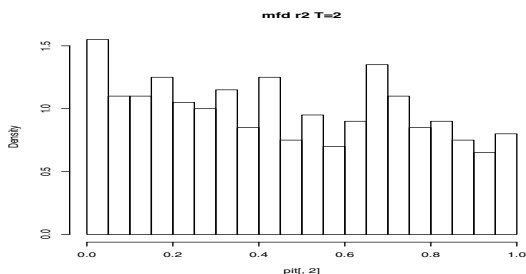


Figura 5.125: Istogramma dei valori PIT prodotti dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.

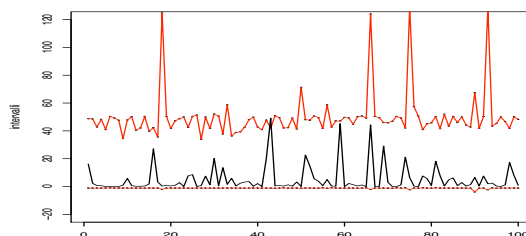


Figura 5.126: Ampiezza degli intervalli ricavati dalle previsioni a 2 passi con la procedura  $mfd$  a partire dalla serie della volatilità del titolo *DELL*.



### 5.3.2 Commento dei risultati

Si passa ora a delle considerazioni generali circa il funzionamento delle procedure di calcolo di densità predittive applicate a serie di rendimenti al quadrato, ovvero alla serie della volatilità del titolo *DELL*.

Si ricorda che molte delle procedure implementate per produrre densità predittive non sono state applicate a questo tipo di dati in quanto, basandosi su modelli o regressioni effettivamente non adatti ad essere applicati a serie di volatilità, forniscono pessimi risultati.

Tra le procedure impiegate comunque si riconosce come quelle per le quali si ottengono i migliori risultati siano la *sp<sub>AR</sub>* e la *mfd*. Per queste procedure infatti i test che riguardano lo studio dell'uniformità e dell'indipendenza dei valori PIT conducono ad accettazione dell'ipotesi nulla e inoltre anche in test sulla bontà previsiva nelle code della distribuzione supporta la correttezza delle previsioni prodotte in corrispondenza appunto delle code.

Con questa ulteriore analisi effettuata emerge quindi che tra le procedure implementate per il calcolo di densità predittive ce ne sono alcune in grado di produrre buoni risultati anche in merito a dati di volatilità di rendimenti finanziari.

L'analisi effettuata sui dati della volatilità del titolo *DELL* permette di fare considerazioni circa la capacità delle varie procedure implementate di produrre buone densità predittive in relazione a diverse serie a cui vengono applicate. Così come nel caso di rendimenti finanziari, anche nel caso di volatilità, tra le migliori procedure, in termini di densità predittive prodotte, si trova la *mfd* e questo sostiene la flessibilità di questa tecnica previsionale che si riesce ad adattare bene a dati con diverse caratteristiche.



## Capitolo 6

---

# CONCLUSIONI

---

Il lavoro effettuato ha permesso di studiare diversi aspetti legati al calcolo e alla valutazione di densità predittive.

Riguardo al calcolo di queste densità le procedure implementate sono orientate a prevedere la media condizionale della serie in esame e alcune di queste si preoccupano di modellare anche la varianza condizionale, così da poter catturare eventuali possibili effetti ARCH.

Si sono elaborate procedure che si differenziano per lo studio della struttura di dipendenza della serie in esame e per eventuali assunzioni distributive. Si distinguono quindi procedure parametriche, le quali si basano su assunti parametrici appunto sia riguardo il modello generatore dei dati che riguardo la forma distributiva per le densità predittive, procedure semiparametriche che sono analoghe alle prime per quanto riguarda lo studio della dipendenza dei dati ma procedono non parametricamente nel calcolo della densità predittiva e procedure non parametriche per le quali non si effettuano assunzioni parametriche nè circa il modello generatore dei dati nè circa la forma delle distribuzioni previste.

Per citare alcune tra le tecniche di regressione non parametrica utilizzate si ricordano le *smoothing spline* e la *kernel regression*; si è sviluppata anche una procedura di regressione non parametrica multipla ricorrendo ai modelli additivi (GAM) grazie ai quali è stato possibile studiare la dipendenza della serie in esame considerando più di un regressore.

La logica secondo la quale si sono calcolate le densità predittive delle procedure semiparametriche e parametriche, nelle quali non si effettuano assunzioni distri-

butive, è quella di generare diverse repliche di previsioni puntuali per stimarne in seguito una densità tramite *kernel*. Le densità predittive vengono calcolate condizionatamente all'informazione  $I_t$  dunque, per creare la variabilità necessaria a calcolare le numerose repliche delle previsioni puntuali, è stato necessario considerare appunto alcune fonti di variabilità. Queste sono state principalmente individuate nel termine di errore del modello stimato e utilizzate mediante tecniche di *bootstrap* o di simulazione da distribuzione stimata dei residui; altre fonti individuate nel corso della trattazione riguardano la variabilità fornita dalle stime dei parametri (nei modelli semiparametrici), sfruttata grazie al calcolo preventivo delle loro distribuzioni, e quella fornita dal parametro di liscio (nel caso di procedura basata su *smoothing spline*) sfruttata grazie a tecniche di *bootstrap* a blocchi per dati dipendenti.

Per quanto riguarda la valutazione delle densità predittive si ricorda come essa non risulti banale dal momento che non è possibile effettuare un confronto diretto tra oggetto previsto e la "vera" distribuzione che non è nota. Si è ricorso quindi all'artificio teorico della *Probability Integral Transform*, ottenendo così una serie di valori che, sotto l'ipotesi di corretta densità predittiva, si distribuiscono uniformemente e sono indipendenti. I test implementati dunque si occupano principalmente di studiare le caratteristiche di uniformità ed indipendenza dei valori ottenuti tramite la PIT. Si sono inclusi nell'analisi anche due test, basati sul rapporto di verosimiglianza, che valutano la corretta copertura di intervalli di confidenza ricavati dalle densità predittive.

Dal punto di vista applicativo dapprima sono stati utilizzati dati simulati e successivamente serie di dati reali. I modelli considerati sono stati un modello lineare con presenza di eteroschedasticità condizionale e due non lineari, di cui uno stocastico e uno proveniente dalla teoria dei sistemi dinamici e caotici. Le densità predittive calcolate su queste serie hanno presentato buone caratteristiche; le procedure semiparametriche, che colgono la media condizionata ma modellano anche la componente di varianza, ottengono i migliori risultati nei caso di dati simulati da processi lineari. Le procedure non parametriche invece si differenziano

---

in quanto a bontà delle previsioni fornite nel caso di dati simulati da processi non lineari; in particolare la procedura basata sulla regressione multipla ha riportato buoni risultati nel prevedere i dati simulati dalla mappa di *Hénon*, che in effetti presentano relazioni evidenti tra i primi ritardi. Complessivamente le procedure di calcolo implementate sono state in grado di fornire buone densità predittive.

I metodi studiati sono stati applicati anche a una serie di prezzi della borsa elettrica e solo poche tra le procedure implementate sono state in grado di condurre a valori PIT con caratteristiche di indipendenza ma nessuna anche con evidenti caratteristiche di uniformità. Comunque le procedure non parametriche sono quelle che hanno fornito risultati lievemente migliori; tra queste si ricordano quella basata su assunto di dipendenza markoviana e quella che utilizza regressione multipla.

Per le serie dei rendimenti dell'indice *Dow Jones* solo la procedura che indaga la dipendenza non parametricamente sfruttando probabilità di ricampionamento ottenute grazie a funzioni nucleo (*mfd*) fornisce buoni risultati. I dati PIT forniti da questa presentano buone caratteristiche in termini di uniformità e indipendenza, inoltre sono positivi anche i risultati legati alla bontà previsiva della coda sinistra della distribuzione.

Le analisi condotte sulla volatilità del titolo *DELL*, intesa come rendimento al quadrato, hanno riportato risultati soddisfacenti sebbene solo tre procedure di calcolo di densità predittive sono state applicate a questo tipo di dati. Anche in questo caso la procedura basata sull'assunto di markovianità è stata in grado di produrre densità predittive i cui valori PIT presentano buone caratteristiche. Si ritiene quindi di segnalare la notevole flessibilità applicativa della procedura *mfd* che è quella che funziona meglio in più occasioni, specialmente in merito a dati finanziari.



---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] AMISANO, G. e GIACOMINI, R. (2007). *Comparing Density Forecasts via Weighted Likelihood Ratio Tests*, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 25, No. 2, pp 177-190.
- [2] BERKOWITZ, J. (2000). *Testing Density Forecast, with Application to Risk Management*, Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 19, No. 4, pp 465-474.
- [3] BAO, Y., LEE, T.-H. e SALTOGLU, B. (2007). *Comparing Density Forecast Models*, Journal of Forecasting, Vol. 26, No. 3, pp 203-225.
- [4] CARNEY, M. e CUNNINGHAM, N. (2006). *Evaluating Density Forecasting Models*, Dublin, Trinity College Dublin, Department of Computer Science, TCD-CS-2006-21, pp12
- [5] CORRADI, V. e SWANSON, N. (2006). *Predictive Density Evaluation*, Handbook of Economic Forecasting, Vol. 1, Chapter 5, pp 197-284.
- [6] DIEBOLD, F. X., GUNTHER, T. e TAY, A. (1998). *Evaluating Density Forecasts with Application to Financial Risk Management*, International Economic Review, Vol. 39, No. 4, pp 863-883.
- [7] GRANGER, W. J. e JEON, Y. (2002). *Density Forecasting with Macroeconomic Survey Data*.
- [8] HALL, S. e MITCHELL, J. (2004). *Density Forecast Combination*, National Institute of Economic and Social Research (NIESR) Discussion Papers, No. 249.

- 
- [9] HURLIN, C. e TOKPAVI, S. (2007). *Backtesting Value-at-Risk Accuracy: A New Simple Test*, The Journal of Risk, Vol. 9, No. 2, pp. 19-37.
- [10] HYNDMAN, R. J. e FAN, S. (2008). *Density Forecasting for Long-Term Peak Electricity Demand*, Working Paper, MONASH University, Department of Econometrics and Business Statistics.
- [11] MANZAN, S. e ZEROM, D. (2008). *A bootstrap-based non-parametric forecast density*, International Journal of Forecasting, Vol. 24, pp 535-550.
- [12] NIGUEZ, T. M. e PEROTE, J. (2004). *Forecasting the Density of Asset Returns*, STICERD–Econometrics Discussion Papers Series EM/2004/479. London School of Economics
- [13] TAY, A. S. e WALLIS, K. F. (2001). *Density forecasting: a survey*, Journal of Forecasting, Vol. 19, pp 235-254.