

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Alcuni invarianti algebrici e geometrici dei nodi

Relatrice:
Prof.ssa Alessandra Bertapelle

Laureando: Luca Gamba
Matricola: 2003985

Anno Accademico 2022/2023

22/09/2023

Indice

Introduzione	4
1 Definizioni e Teorema di Reidemeister	6
1.1 Definizioni base	6
1.2 Teorema di Reidemeister	9
1.3 Simmetrie ed operazioni tra nodi	15
1.4 Generalizzazioni	16
2 Approccio algebrico	18
2.1 Gruppo di un nodo	18
2.2 Presentazione di Wirtinger	19
2.3 Esempi importanti	22
3 Approccio geometrico	25
3.1 Superfici di Seifert	25
3.2 Polinomio di Alexander	28
4 Calcolo di Fox e ideali elementari	34
4.1 Calcolo di Fox	34
4.2 Ideali elementari	37
Tabella dei nodi	43
Bibliografia	44

Introduzione

La teoria dei nodi nasce come branca della topologia algebrica, con l'obiettivo di caratterizzare tutti i possibili tipi di nodi. I primi risultati in questo ambito sono da attribuire a Gauss. Tuttavia le origini della teoria dei nodi come la conosciamo oggi sono da attribuire alla chimica. Intorno al 1880 infatti Lord Kelvin ipotizzò che gli atomi non fossero altro che nodi composti di etere. Descrivere in modo completo tutti i nodi distinti avrebbe permesso quindi di creare una tavola degli elementi, uno per ciascun nodo. Come sappiamo però, questa teoria si rivelò errata. Tuttavia, molti matematici rimasero affascinati dall'impresa e ne proseguirono lo studio. In particolare lo scozzese P. Tait intraprese il primo tentativo di una classificazione sistematica dei nodi. L'obiettivo principale della teoria è quindi quello di trovare degli invarianti per ciascun tipo di nodo, in modo da riconoscere quando due nodi siano distinti oppure no. Questo è il metodo ad oggi più efficace per distinguere i nodi. Nel 1961 infatti il matematico W. Haken descrisse un algoritmo in grado di dire se un dato nodo fosse un nodo banale, ma risultò troppo lento e complesso anche per casi semplici [Hak61, pg.245-375]. Lo scopo di questa tesi è quindi quello di presentare alcuni di questi invarianti. In particolare ci focalizzeremo su alcuni che hanno carattere più algebrico o geometrico, mettendone in mostra i relativi punti di forza e di debolezza. Cercheremo poi di evidenziare alcuni collegamenti tra i diversi approcci.

Presentiamo ora più nel dettaglio il contenuto della tesi. Il primo capitolo consiste di una introduzione classica alla teoria dei nodi. Vengono introdotte le definizioni di base con degli esempi. Tra queste ricordiamo la nozione di isotopia ambientale, la quale ci permetterà di dire quando due nodi sono “dello stesso tipo”. Per classificarli, ci ridurremo a considerare nodi di tipo poligonale, per i quali la nozione di isotopia ambientale è equivalente a una semplice operazione detta Δ -mossa. Dopodiché ci riduciamo a studiare la proiezione di un nodo su un piano. Grazie al Teorema di Reidemeister dimostriamo come le Δ -mosse inducono tre semplici operazioni sulle proiezioni. Infine presentiamo la somma connessa tra due nodi oltre che il simmetrico e l'opposto di un nodo, insieme ad alcuni risultati importanti come il Teorema di fattorizzazione unica.

Nel secondo capitolo invece introduciamo un invariante algebrico, ovvero il gruppo di un nodo. Esso è un invariante completo per i nodi primi, ma è abbastanza difficile da calcolare. Per ottenere una presentazione di tale gruppo introduciamo la presentazione di Wirtinger. Tramite essa riusciamo ad ottenere, a partire da un diagramma di un nodo, una presentazione del suo gruppo tramite generatori e relazioni. Grazie a questa presentazione dimostriamo l'esistenza di un nodo non banale e studiamo un esempio classico di nodo wild.

Col terzo capitolo, passiamo invece alla visione più geometrica dell'argomento. Definiamo infatti le superfici di Seifert associate ad un nodo e il genere di un nodo, e presentiamo qualche risultato a riguardo. La rimanente parte del capitolo è dedicata alla costruzione di uno degli invarianti più importanti di questa teoria: il polinomio di Alexander. Per farlo passiamo attraverso le definizioni di linking number, forma di Seifert e matrice di Seifert, portando per ciascuna nozione esempi adeguati. Dimostriamo poi alcune importanti proprietà di questo invariante e accenniamo ad un altro, ovvero la segnatura di un nodo.

Infine nell'ultimo capitolo di questa tesi approfondiamo un quesito lasciato aperto nel capitolo 2 e incontriamo per altra via il polinomio di Alexander introdotto nel capitolo 3. Tramite il calcolo alla Fox introduciamo gli ideali elementari, ovvero invarianti per i nodi costruiti a partire da una particolare presentazione del gruppo di un nodo, ma che non dipendono dalla scelta della presentazione. Introduciamo infine un invariante strettamente più debole degli ideali elementari detto h -esimo polinomio Δ_h di un nodo

e mostriamo che il polinomio Δ_1 coincide con il polinomio di Alexander ottenuto con tecniche geometriche nel capitolo 3.

Parte del lavoro della tesi è consistito nella generazione di immagini che facilitassero la comprensione dei risultati teorici. Esse sono state create in modo originale grazie all'utilizzo di tre programmi: Inkscape, per tutti i diagrammi dei nodi e le illustrazioni nelle dimostrazioni, SeiferView, per tutte le rappresentazioni 3D dei nodi e delle superfici di Seifert e infine KnotPlot, per creare la tabella dei nodi posta in appendice.

Capitolo 1

Definizioni e Teorema di Reidemeister

1.1 Definizioni base

In ambito topologico per nodo si intende quell'oggetto che, intuitivamente, consiste di una linea chiusa infinitamente sottile aggrovigliata nello spazio. Questa nozione può essere formalizzata nel modo seguente:

Definizione 1.1. Un *nodo* è una immersione $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Per immersione o inclusione topologica (*embedding* in inglese) intendiamo qui una funzione continua che sia un omeomorfismo sull'immagine. Inoltre notiamo che è equivalente pensarla con codominio \mathbb{R}^3 o $\mathbb{S}^3 := \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$, poiché posso passare da uno all'altro tramite una proiezione stereografica e la sua inversa. Più precisamente, la proiezione stereografica è un omeomorfismo tra \mathbb{S}^3 tolto un punto N e \mathbb{R}^3 : ciò non crea problemi poiché l'immagine di f in \mathbb{R}^3 è compatta, essendo \mathbb{S}^1 compatto. Questo ci dice che f è limitata e quindi possiamo comporre con l'inversa della proiezione stereografica e vedere l'immagine di f come sottoinsieme di $\mathbb{S}^3 \setminus N$. Viceversa, si consideri f come immersione in \mathbb{S}^3 , essa non è mai suriettiva e perciò, a meno di omeomorfismi, possiamo supporre che l'immagine di f non contenga N e comporre f con la proiezione. Useremo indifferentemente l'una e l'altra definizione; preferendo la prima quando sia necessario facilitare l'intuizione. Inoltre nei primi esempi rappresenteremo l'immagine di nodi come tubi invece che linee per facilitare la comprensione delle sovrapposizioni.

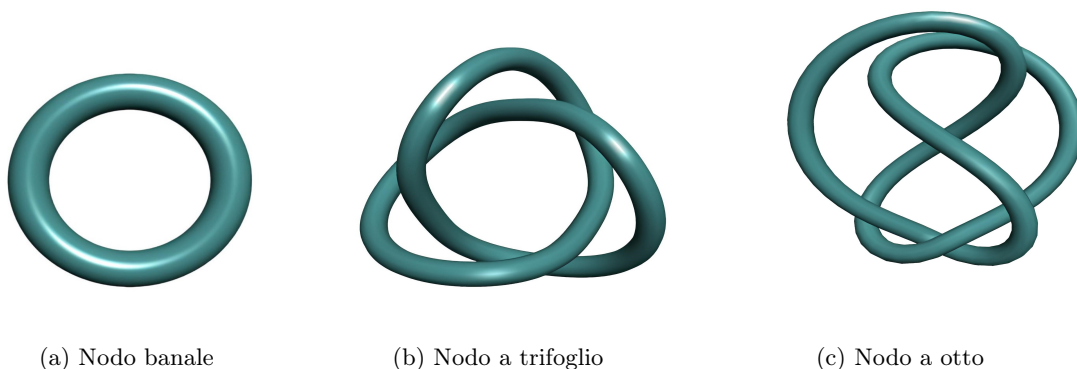


Figura 1.1: Primi esempi elementari di nodi.

Ovviamente nella definizione data sopra ricade anche il caso banale dell'immersione di \mathbb{S}^1 in una circonferenza di \mathbb{R}^3 . Questo è detto il *nodo banale* (*unknot*) ed è motivo di interesse capire quando l'immagine di un nodo apparentemente aggrovigliato sia in realtà “equivalente” ad un nodo banale (Fig. 1.1(a)).

I primi e più conosciuti esempi di nodi non banali sono il nodo a trifoglio e quello a otto (Fig.1.1 (b) e (c)), i quali già si possono distinguere per il numero di incroci e per la forma caratteristica.

Legate alla nozione di nodo sono le nozioni di link e nastro. Un link (o *catena*) può essere visto come l'insieme di più nodi. Questi possono essere “legati” o meno tra loro.

Definizione 1.2. Un *link* è l'unione di nodi a due a due disgiunti, ovvero è un immersione $\coprod_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (o \mathbb{S}^3).

Un *nastro* in \mathbb{R}^3 è un immersione $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Un *link di nastri* è un'unione di nastri a due a due disgiunti.

Tra gli esempi importanti e più conosciuti di link ricordiamo il link di Hopf, il link di Whitehead e gli anelli di Borromeo. Gli ultimi due hanno particolare importanza poiché i loro complementari in \mathbb{S}^3 hanno una struttura di spazio iperbolico, inoltre terzo prende il nome dallo stemma araldico che simboleggia l'alleanza tra le tre famiglie italiane dei Borromeo, dei Visconti e degli Sforza. Questo ha la proprietà che ciascun nodo è legato agli altri due, ma se ne viene rimosso uno dei tre, gli altri due non risultano più legati tra loro (con un chiaro significato metaforico riguardo questa triplice alleanza).

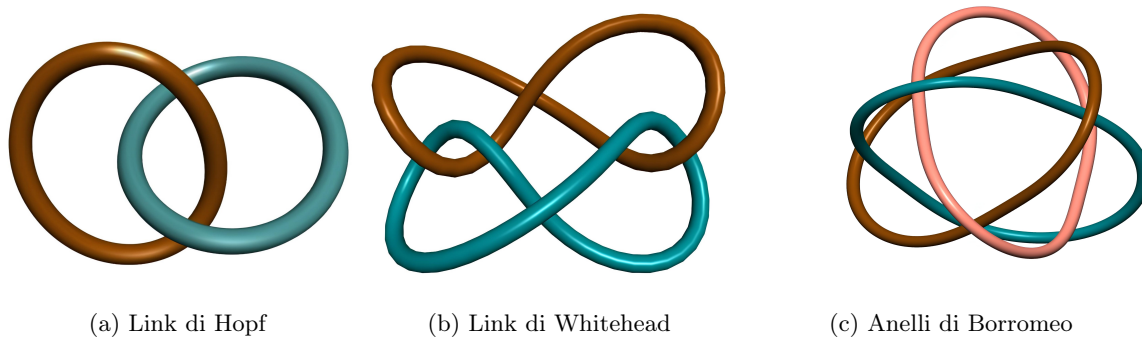


Figura 1.2: Esempi elementari di links.

In questa tesi studieremo però prevalentemente i nodi, evitando di focalizzarci sulle generalizzazioni ai link.

Buona parte dell'interesse della teoria dei nodi è rivolto al problema di capire se, dati due nodi, essi sono “equivalenti”, ovvero se esiste un modo di deformare uno nell'altro, oppure no. Questo corrisponde al problema reale di due lacci aventi ciascuno le estremità incollate: se trovo una sequenza di mosse che mi porta dal primo al secondo avrò che i due nodi si equivalgono; se non la trovo però non posso dire a priori che i due nodi non siano equivalenti. Topologicamente, possiamo approssciare questo problema studiando i seguenti modi di passare da un'immersione all'altra:

Definizione 1.3. Dati due spazi di Hausdorff X e Y e due immersioni $f_0, f_1: X \rightarrow Y$, esse si dicono:

1. *Isotope*, se esiste una funzione continua $F: X \times I \rightarrow Y$ tale che $\forall t \in I \forall x \in X, F(x, t) = f_t: X \rightarrow Y$ è un'immersione. Una tale F è detta isotopia tra f_0 e f_1 ;
2. *Ambientalmente isotope*, se esiste una funzione continua $H: Y \times I \rightarrow Y$, tale che $\forall t \in I \forall y \in Y, H(y, t) = h_t(y)$ è un omeomorfismo, $h_0 = id_Y$ e h_1 è tale che $f_1 = h_1 \circ f_0$.

Remark. A differenza della nozione di omotopia, la quale richiede che $\forall t$ la funzione f_t sia continua, l'isotopia richiede che f_t sia un omeomorfismo sull'immagine (immersione). Questo perché vogliamo che ogni passaggio della trasformazione sia a sua volta un nodo.

L'isotopia sembra l'approccio più ragionevole e semplice al problema, ma possiamo vedere che sorge subito una criticità: si può dimostrare infatti che due qualsiasi immersioni f_0 e $f_1: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sono isotope. Questo segue dal fatto che ogni nodo è isotopo a quello banale; una isotopia consiste localmente nello “stringere” l'immagine del nodo in modo da farla diventare un arco di circonferenza. Infatti, se considero

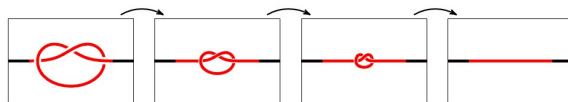


Figura 1.3: Isotopia tra un nodo qualsiasi e quello banale (localmente)

f_0 il nodo iniziale e f_1 il nodo banale, $\forall t < 1$, f_t è un’immersione (non si autointerseca) e così vale anche per $t = 1$.

Questo ci suggerisce dunque che sono necessarie ulteriori ipotesi di regolarità per procedere. La nozione di isotopia ambientale sembra avvicinarsi di più alle nostre richieste: questa infatti, a differenza dell’isotopia, non solo muove in modo continuo $f_0(X)$ su $f_1(X)$ ma richiede che pure $Y \setminus f_t(X)$ si muova con continuità, coerentemente a quanto fa $f_t(X)$. Analogamente possiamo dire che questa implichi che $h_1|_{Y \setminus f_0(X)}: Y \setminus f_0(X) \rightarrow Y \setminus f_1(X)$ sia un omeomorfismo. A questo punto possiamo identificare due nodi a meno di isotopie ambientali e studiare le classi di nodi più in generale. Ad esempio chiameremo banali anche quei nodi che sono ambientalmente isotopi al nodo banale.

In base alle definizioni date fin qui rimane un caso “patologico” da analizzare, il *nodo wild* (Fig.1.4). Questo è un caso particolare che analizzeremo meglio nella parte finale del secondo capitolo.

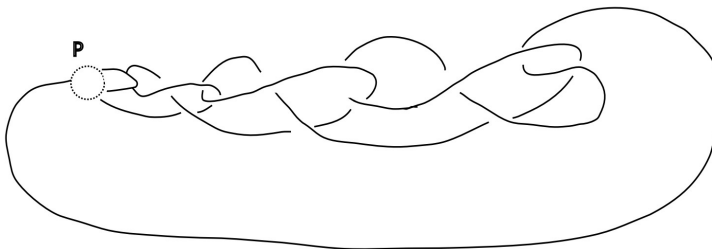


Figura 1.4: Nodo wild

Per evitare quest’ultimo caso ci restringeremo a considerare nodi aventi una struttura più regolare, ovvero d’ora in poi considereremo una delle due seguenti famiglie:

- *Nodi lineari a tratti*: una qualunque linea poligonale chiusa in \mathbb{R}^3 , priva di autointersezioni e con finiti vertici, è detta nodo lineare a tratti o poligonale;
- *Nodi C^∞* : un nodo C^∞ o liscio è definito tramite una funzione $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, continua e iniettiva. Inoltre, considerandone la parametrizzazione $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$, essa è infinitamente differenziabile con derivata prima non nulla: $(\frac{df_x}{dt}, \frac{df_y}{dt}, \frac{df_z}{dt}) \neq (0, 0, 0)$.

In ciascuna famiglia la nozione di isotopia ambientale è opportunamente modificata in modo da garantire che i nodi $h_t \circ f_0$ rimangano nella famiglia. L’equivalenza di queste due definizioni di nodo è data da un fatto che non dimostreremo, ovvero la classificazione delle 1-varietà: ogni 1-varietà compatta connessa senza bordo è diffeomorfa a \mathbb{S}^1 [GP74, appendice 2].

La definizione di nodo poligonale è quella che ci permetterà di descrivere più facilmente le “mosse” valide per passare da un nodo all’altro, perciò d’ora in avanti sarà quella che utilizzeremo, a meno di specificazioni. Le immagini saranno comunque rappresentate come curve lisce per comodità e per facilitare l’immaginazione. A questo punto definiamo la seguente classe di nodi:

Definizione 1.4. Un nodo si dice *moderato* (*tame*) se esso è ambientalmente isotopo ad un nodo poligonale. In caso alternativo esso è detto *selvaggio* (*wild*).

Questa condizione pone dei vincoli di regolarità che, nella definizione di nodo liscio, si traducono in:

Teorema 1.5. *Se un nodo è di classe C^1 , allora è tame.*

Per quanto questo risultato possa sembrare intuitivo, la dimostrazione risulta abbastanza lunga ed è riportata in [CF63, Appendice 1].

D'ora in avanti, se non altrimenti detto, con nodo intenderemo un nodo tame e con isotopia, una isotopia ambientale. Inoltre indicheremo generalmente con K l'immagine di un nodo f , che chiameremo a sua volta nodo. Con un abuso di notazione, più avanti useremo la lettera K per entrambi, se ciò non creerà confusione.

L'obiettivo ora è quello di trovare un modo di descrivere esplicitamente un'isotopia tra nodi. Questo studio passerà attraverso una proiezione su \mathbb{R}^2 , e questo semplificherà notevolmente il problema.

1.2 Teorema di Reidemeister

Abbiamo detto che la definizione di nodo poligonale sembra essere quella più adatta ad uno studio delle isotopie tra nodi. Cerchiamo ora di definire rigorosamente proprio queste isotopie.

Dato un nodo K , come in figura, tale che il segmento AC sia un lato di K e preso un punto $B \notin K$ tale che $A \notin BC$ e $C \notin AB$, allora possiamo definire la mossa elementare (concisamente Δ -mossa), con evidente significato dei simboli $+$ e $-$:

$$\Delta_{AC}^B K = K - AC + AB + BC$$

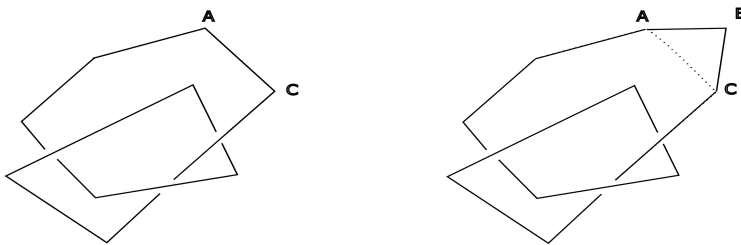


Figura 1.5: Δ -mossa

Diremo invece Δ^{-1} la mossa inversa, che è anch'essa una mossa elementare. Queste mosse portano con sé una nozione di equivalenza tra nodi che è la seguente:

Definizione 1.6. Dati due nodi, essi sono *combinatoriamente equivalenti* se esiste una successione finita di $\Delta^{\pm 1}$ -mosse che porta un nodo nell'altro.

Ora vogliamo mostrare che due nodi sono combinatoriamente equivalenti se e solo se sono isotopi. In tal modo si semplifica notevolmente lo studio delle equivalenze tra nodi e si possono creare algoritmi basati su successioni delle $\Delta^{\pm 1}$ -mosse. Iniziamo introducendo qualche notazione utile per dimostrare i successivi risultati:

- Siano A, B due sottoinsiemi di \mathbb{R}^n ; definiamo l'involuppo convesso della loro unione come $AB := \{\lambda a + \mu b \mid a \in A, b \in B, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}$. In particolare, se $A = \{a\} \not\subseteq B$, l'insieme aB è detto *cono* di vertice a e base B se ogni coppia di segmenti ab_1 e ab_2 con $b_1 \neq b_2$ si incontra unicamente in a ;
- Un sottoinsieme $P \subset \mathbb{R}^n$ è detto un *poliedro* se ogni punto $a \in P$ ha un intorno in P dato da un cono $N = aL$ con L compatto. N è detto *stella di vertice* a ;

- Siano $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ poliedri; una applicazione $f: P \rightarrow Q$ si dice *lineare a tratti* (altrimenti detto *p.l.* da *piecewise linear* in inglese) se per ogni punto $a \in P$ esiste una stella $N = aL$ tale che $f(\lambda a + (1 - \lambda)x) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(x)$, per ogni $0 \leq \lambda \leq 1$ e $x \in L$;
- Una mappa p.l. $f: P \rightarrow Q$ si dice un *immersione p.l.* se $f(P)$ è un sottopoliedro di Q , ovvero un poliedro tale che l'inclusione sia p.l., e $f: P \rightarrow f(P)$ sia un omeomorfismo;
- Un *n-simplesso* $A = [a_0, \dots, a_n] \subset \mathbb{R}^n$ è dato dall'involuppo convesso di $n + 1$ punti in posizione generale a_0, a_1, \dots, a_n
- Una *n-palla p.l.* B è una varietà omeomorfa ad un n -simplesso (equiv. ad I^n)

Diamo quindi il risultato cercato di “equivalenza di equivalenze”, che include pure un terzo caso utile in fase di dimostrazione:

Teorema 1.7. *Dati due nodi f_1 e $f_2: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3$, indichiamo con K_1 e K_2 le loro immagini. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1) f_1, f_2 sono ambientalmente isotopi,
- (2) K_1, K_2 sono combinatoriamente equivalenti,
- (3) esiste un omeomorfismo $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ che preserva l'orientazione e tale che $f(K_1) = K_2$.

Per questa dimostrazione occorrono due risultati:

Lemma 1.8 (di Alexander). *Ogni omeomorfismo p.l. f di una n -palla p.l. B in sé che è l'identità sul bordo è isotopo all'identità tramite un'isotopia ambientale che è l'identità sul bordo.*

Dimostrazione. Definiamo $H(x, t)$ su $\partial(B \times I)$ in questo modo:

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{per } t = 0 \\ x & \text{per } x \in \partial B \\ f(x) & \text{per } t = 1 \end{cases}$$

Per estendere a tutto $B \times I$, fissiamo un punto P in $B \times \{0\}$ e notiamo che ogni punto (x, t) con $t > 0$ giace su un unico segmento in $B \times I$ tra P e un punto variabile di $\partial(B \times I)$. A questo punto basta estendere linearmente su questi segmenti per ottenere l'isotopia ambientale richiesta. \square

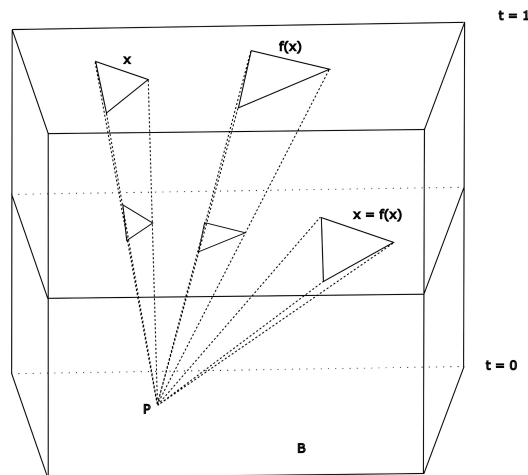


Figura 1.6

Teorema 1.9 (di Alexander-Schoenflies). *Sia $i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ un'immersione (p.l.). Allora:*

$$\mathbb{S}^3 = B_1 \cup B_2, \quad i(\mathbb{S}^2) = B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

dove B_i sono delle 3-palle p.l..

Quest'ultimo risultato è la generalizzazione in dimensione due del più noto Teorema della curva di Jordan. Possiamo ora dimostrare il Teorema 1.7:

Dimostrazione. (3) \Rightarrow (1): Mostriamo che esiste un isotopia $H(x, t) = h_t$ di \mathbb{S}^3 tale che $h_1 \circ f$ fissi un 3-simplesso $[P_0, P_1, P_2, P_3]$. Se $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ ha un punto fisso, scegliamo P_0 come quel punto, altrimenti sia P_0 un punto interno di un 3-simplesso $[s^3]$ di \mathbb{S}^3 . C'è un isotopia che fissa $\overline{\mathbb{S}^3 \setminus [s^3]}$ e porta P_0 in un altro punto interno di $[s^3]$. Inoltre, se $[s'^3]$ è un altro 3-simplesso con in comune una 2-faccia con $[s^3]$, si può costruire facilmente un'isotopia che sia l'identità fuori da $[s^3] \cup [s'^3]$ che porti P_0 in un punto interno di $[s'^3]$ detto P'_0 . Quindi esiste un'isotopia H^0 tale che fissi P_0 , ovvero $h_1^0 \circ f(P_0)$, in quanto qualsiasi due 3-simplessi possono essere connessi da una catena di 3-simplessi adiacenti.

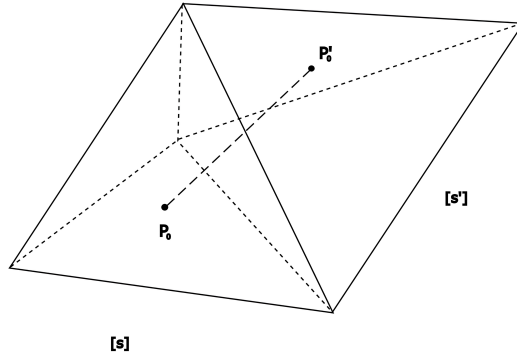


Figura 1.7

Successivamente scegliamo un punto $P_1 \neq P_0$ nel simplesso dato dalla stella di P_0 , e con un argomento analogo possiamo costruire un'isotopia H^1 tale che $h_1^1 \circ h_1^0 \circ f$ tenga fisso l'1-simplesso $[P_0, P_1]$. Allo stesso modo arriviamo a $h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0 \circ f$ che tiene fisso il 2-simplesso $[P_0, P_1, P_2]$. A questo punto occorre utilizzare che f preservi l'orientazione: un punto $P_3 \notin [P_0, P_1, P_2]$ ma nella stella di $[P_0, P_1, P_2]$ sarà mappato da $h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0 \circ f$ in P'_3 nello stesso semi-spazio in riferimento alla divisione data dal piano in cui giace $[P_0, P_1, P_2]$. Questo assicura l'esistenza dell'ultima isotopia H^3 tale che $h_1^3 \circ h_1^2 \circ h_1^1 \circ h_1^0 \circ f$ fissi $[P_0, P_1, P_2, P_3]$. Segue dunque che l'isotopia richiesta è $H = H^3 \circ H^2 \circ H^1 \circ H^0$.

Ora, dal Teorema di Alexander-Schoenflies segue che il complementare in \mathbb{S}^3 di $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ è una 3-palla p.l. e dal Lemma di Alexander deduciamo che c'è un'isotopia che porta $h_1 \circ f$ all'identità di \mathbb{S}^3 .

(1) \Rightarrow (3) : Segue dalla definizione di isotopia ambientale: se H è isotopia ambientale tra f_1 e f_2 , allora l'omeomorfismo cercato è dato da $f(K_1) = h_1 \circ K_1$, ove $h_1 = H|_{\mathbb{S}^1 \times \{1\}}$

(3) \Rightarrow (2) : Sia f come da ipotesi. Come sopra si prova che esiste un omeomorfismo $h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ che preserva l'orientazione tale che $h(K_1) = K_1$ e $f \circ h$ fissa un qualche 3-simplesso $[s^3]$ preso al di fuori di intorni (regolari) di K_1 e K_2 . Consideriamo P punto interno di $[s^3]$ e vediamo $\mathbb{S}^3 \setminus \{P\}$ come \mathbb{R}^3 . Esiste allora una traslazione τ in \mathbb{R}^3 tale che $\tau(K_1) \subset [s^3]$. Chiaramente questa traslazione equivale a una sequenza di Δ -mosse. Resta da mostrare che $K_2 = f \circ h(K_1)$ e $\tau(K_1) = f \circ h \circ \tau(K_1)$ sono combinatoriamente equivalenti. Per mostrare ciò scegliamo una suddivisione della triangolazione di \mathbb{S}^3 in modo che i triangoli usati nelle Δ -mosse tra K_1 e K_2 formino un sottocomplesso di \mathbb{S}^3 . C'è quindi una sequenza di Δ -mosse definita sui triangoli della suddivisione, perciò $f \circ h: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ mappa questo sottocomplesso in un altro tramite un'equivalenza combinatoria.

(2) \Rightarrow (3) : Ci basta provare il caso in cui K_1 e K_2 differiscono solamente di una Δ -mossa. Se considero un intorno U del triangolo coinvolto nella mossa, mi basta costruire un omeomorfismo di \mathbb{S}^3 in sé che preservi l'orientazione ed agisca come l'identità al di fuori di U , e realizzi la Δ -mossa all'interno di U . \square

Il passaggio successivo nella semplificazione dello studio dei nodi passa attraverso la rappresentazione di un nodo su un piano invece che nello spazio. Il modo in cui operiamo questo cambio di prospettiva ricalca quello che accade quando stendiamo una corda aggrovigliata su una superficie. Formalmente questo si traduce in:

Definizione 1.10. Dato un nodo $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un nodo di classe C^1 , chiamiamo un *diagramma* (o *proiezione*) di K una proiezione ortogonale di K su un piano tale che:

1. Le tangenti ad ogni punto del nodo non degenerino in un punto;
2. Non più di due punti del nodo vengano proiettati sullo stesso punto del piano;
3. Il numero di incroci (*crossing points*) sia finito e in ciascuno le proiezioni delle due tangenti non coincidano.

Tramite piccole variazioni dell'orientazione del piano scelto si prova facilmente che esiste una configurazione in "posizione generale" che verifica queste tre condizioni. Inoltre, fissato un vettore normale al piano, dotiamo questa proiezione di una specifica sopra-sotto. Legati a questi diagrammi esistono diversi invarianti che sono in generale di difficile computazione. Alcuni dei risultati più significativi valgono solo per alcune classi speciali di diagrammi come quella dei nodi *alterni*, ovvero quei nodi in cui muovendosi lungo ciascuna componente del diagramma in un verso fissato si passa da sopra a sotto in modo alternato. Tra i più noti, che non approfondiremo, ci sono il numero minimo di incroci (su cui sono basate le tavole di classificazione dei nodi), il bridge number, il numero di snodamento e il linking number (che invece riprenderemo più avanti).

Così come per i nodi poligonalari ci interessiamo a quando due di questi diagrammi sono tra loro equivalenti. Per fare ciò identifichiamo diagrammi che sono ottenibili l'uno dall'altro tramite omeomorfismi di \mathbb{R}^2 .

Definizione 1.11. Una *mossa di Reidemeister* corrisponde a una delle tre operazioni che seguono e agiscono su una diagramma di un nodo cambiandone gli incroci.

1. Prima mossa di Reidemeister: permette di togliere o aggiungere un "twist" nel diagramma;
2. Seconda mossa di Reidemeister: permette di togliere o aggiungere due incroci;
3. Terza mossa di Reidemeister: permette di far scorrere un filamento dall'altra parte di un incrocio.

Denotiamo queste mosse rispettivamente con Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 .

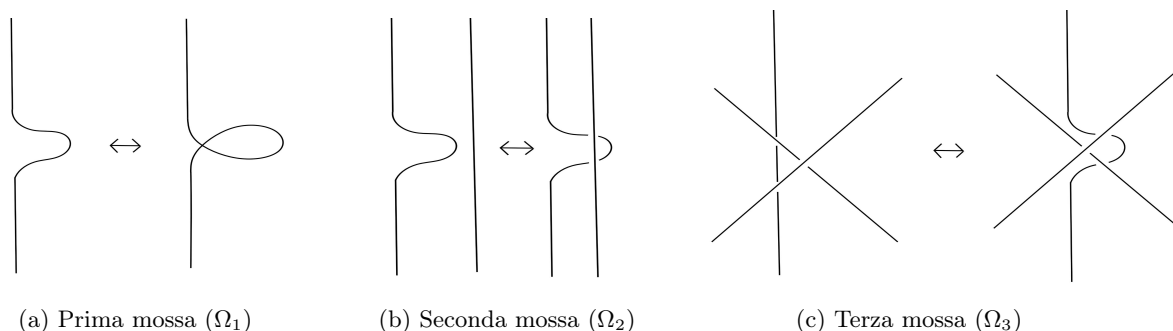


Figura 1.8: Mosse di Reidemeister

Definizione 1.12. Due diagrammi D_1, D_2 sono detti *equivalenti* se è possibile passare da D_1 a D_2 tramite un numero finito di mosse di Reidemeister.

Notiamo che intuitivamente queste mosse non alterano la struttura del nodo. Corrispondono infatti a delle naturali trasformazioni che si possono apportare ad un nodo per passare da una specifica rappresentazione ad un'altra. Il nostro obiettivo è dimostrare che queste sono tutte e sole quelle che servono per effettuare un'operazione di questo tipo, a meno di omeomorfismi di \mathbb{R}^2 . Vediamo ad esempio come sia possibile passare dal seguente diagramma del nodo a trifoglio a quello standard:

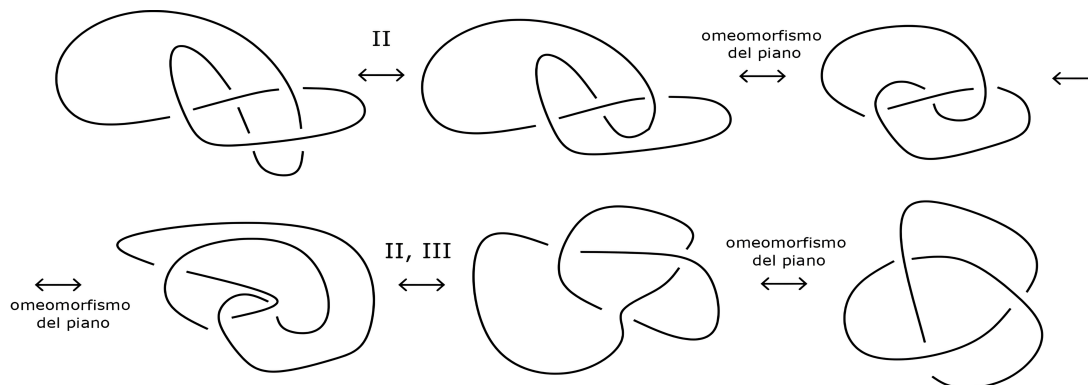


Figura 1.9

Il secondo risultato fondamentale di questo capitolo corrisponde proprio nel dimostrare che le definizioni date finora sono legate l'una all'altra tramite il seguente teorema [PS96, pg. 11-12]:

Teorema 1.13 (di Reidemeister). *Dati due nodi K_1, K_2 e detti D_1, D_2 i rispettivi diagrammi, allora f_1 è isotopo a f_2 se e solo se i diagrammi D_1 e D_2 sono equivalenti.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Questa prima implicazione è banale: si nota infatti che ciascuna delle mosse di Reidemeister e le isotopie planari (proiezioni delle Δ -mosse sul diagramma che rispettano le sovrapposizioni) possono essere ottenute da una o più $\Delta^{\pm 1}$ -mosse. Dunque queste producono un'isotopia.

(\Rightarrow)

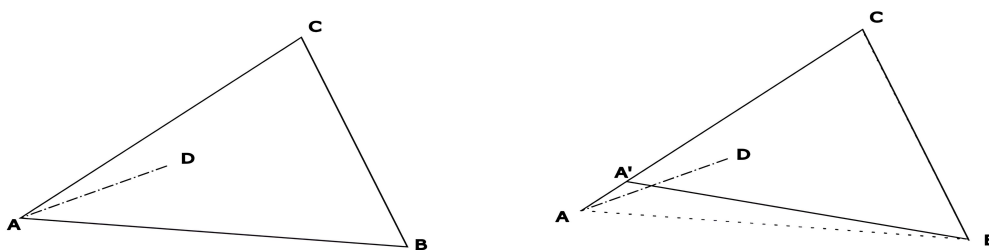


Figura 1.10

Assumiamo che i nodi con cui lavoriamo siano poligonali e isotopi (ambientalmente). Possiamo assumere che i due nodi differiscano unicamente per una Δ -mossa $[AB] \rightarrow [AC] \cup [BC]$. Il caso generale segue reiterando la dimostrazione per ciascuna delle Δ -mosse coinvolte. Possiamo inoltre assumere che i lati $[DA]$ e $[BE]$ che rispettivamente terminano in A e originano in B non intersechino l'interno del triangolo $[ABC]$: supponiamo che, ad esempio, il segmento $[DA]$ intersechi $int[ABC]$ (vedi Fig. 1.10), allora possiamo scegliere A' vicino ad A sulla retta soggiacente ad $[AC]$, che corrisponde ad una mossa Ω_1 , di modo che il nuovo triangolo $[A'BC]$ rispetti la definizione di proiezione di un nodo.

Denotiamo ora con D_1 la proiezione del primo nodo sul piano su cui giace il triangolo $[ABC]$. Notiamo che le componenti di $D_1 \cap \text{int}[ABC]$ sono di due tipi: superiori o inferiori, corrispondenti alle parti di K_1 che stanno sopra o sotto il piano $[ABC]$; immaginiamo siano colorate rispettivamente di rosso e verde.

Dividiamo ora il triangolo $[ABC]$ in triangoli più piccoli (i cui lati non contengono vertici di $D_1 \cap \text{int}[ABC]$); questi saranno di quattro tipi:

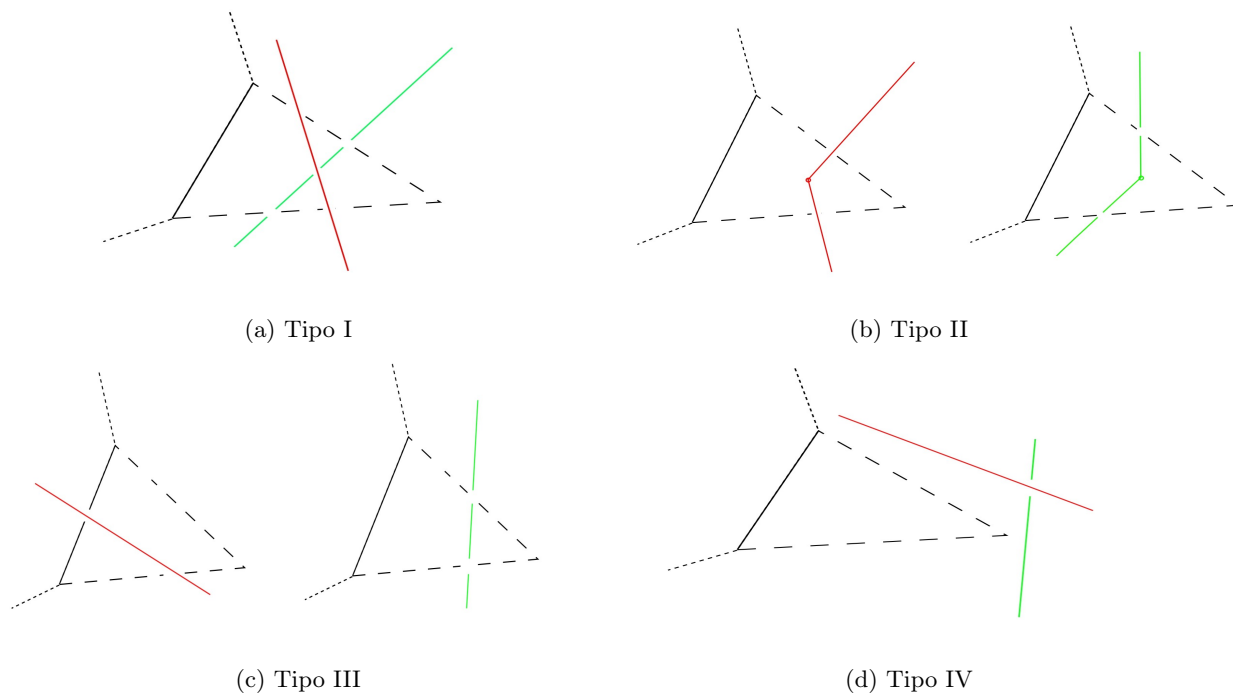


Figura 1.11

- (I) Triangolo T la cui intersezione con D_1 è intorno del punto di intersezione tra lati che intersecano T solo in due lati;
- (II) Triangoli T che contengono un solo vertice di D_1 e parti dei lati che originano da esso;
- (III) Triangoli T che contengono solo parte di un lato di D_1 e nessuno dei suoi vertici;
- (IV) Triangoli T che non contengono nulla, ovvero in cui l'intersezione tra l'interno del triangolo e D_1 è vuota.

Per costruire una simile triangolarizzazione si procede così: prima si costruiscono triangoli a due a due disgiunti di tipo (I) e (II) per tutti i punti di intersezione e vertici di L_0 dentro $[ABC]$, poi triangolo il resto con triangoli di tipo (III) e (IV).

Ora ci basta procedere, invece che con mosse di Reidemeister, con sequenze di mosse sui triangolini, partendo da $[AB]$ e arrivando a $[AC] \cup [CB]$. Durante questo processo bisogna fare attenzione al fatto che tutti i triangoli sono posizionati sotto le parti rosse e sopra quelle verdi di $D_1 \cap \text{int}[ABC]$ e specificare le nuove sovra/sottoposizioni.

Possiamo ora concludere notando che una mossa su un triangolo del tipo (I) corrisponde alla mossa di Reidemeister Ω_3 ; su (II) e (III) corrisponde a Ω_2 o ad un'isotopia planare; infine sul tipo (IV) corrisponde ovviamente ad un'isotopia planare. \square

1.3 Simmetrie ed operazioni tra nodi

Durante lo studio dei nodi sorgono spontanee delle domande sulla simmetria degli oggetti studiati. Sarà inoltre fruttuoso in alcuni casi porre un'orientazione al nodo, ovvero un verso di percorrenza, per avere dei risultati interessanti. Daremo una breve introduzione alla terminologia e al tipo di problemi studiati:

Notazione: dato un nodo K , diciamo K^* la sua immagine tramite la riflessione rispetto ad un piano in \mathbb{R}^3 . Se il nodo è orientato possiamo considerare anche $-K$, ovvero il nodo con orientazione (o verso di percorrenza) opposta.

Non è affatto scontato, ad esempio, dire se, dato un nodo, il relativo nodo costruito per simmetria o cambiando orientazione sia isotopo a quello iniziale. In analogia alla definizione di molecole chirali che viene data in chimica, diamo la seguente:

Definizione 1.14. Un nodo K si dice *non chirale* (*amiphicheiral*) se è isotopo a K^* , altrimenti è detto *chirale*. Un nodo K si dice *invertibile* se è orientato e isotopo a $-K$.

Si possono trovare esempi di nodi famosi che soddisfano o meno ciascuna delle proprietà appena introdotte. Tra quelli visti finora, il nodo a trifoglio è invertibile e chirale e il nodo a otto è invertibile e non chirale (vedi Fig. 1.1 (b) e (c)). Gli altri casi sono coperti da nodi che, nella tabella dei nodi presente alla fine della tesi, sono indicati con 8_{17} e 9_{32} . In particolare, il primo non è invertibile né chirale, mentre il secondo non è invertibile ma è chirale (considerando dunque 9_{32} , -9_{32} , 9_{32}^* e -9_{32}^* come nodi orientati, essi non sono isotopi uno all'altro).

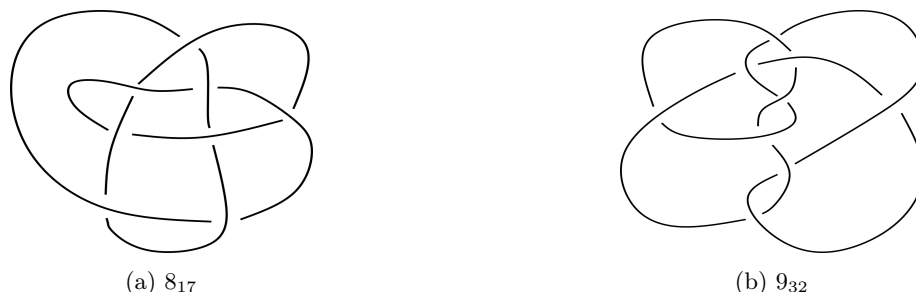


Figura 1.12

Un'altra importante classe di nodi è quella dei nodi torici, ossia dei nodi la cui immagine giace sulla superficie di un toro. Ricordiamo il risultato principale di questa teoria:

Teorema 1.15. Un elemento $pe_1 + qe_2$ in $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ è rappresentato da un'immersione $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2$ se e solo se p e q sono coprimi oppure $p = 0$ e $q = 1$ oppure $p = 1$ e $q = 0$.

Costruiamo i nodi di questo tipo: guardando \mathbb{S}^1 e \mathbb{S}^3 rispettivamente come circonferenza unitaria in \mathbb{C} e sfera unitaria in \mathbb{C}^2 , essi sono dati dalla composizione di $f_{p,q}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $z \mapsto (z^p, z^q)$ con l'immersione $j: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$, $j(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}})$. Un tale nodo è indicato con $K_{p,q}$. Ad esempio si può vedere che il nodo $K_{2,3}$ è il nodo a trifoglio. Generalizzando il Teorema 1.15, si ha che $K_{p,q}$ è un link, per p e q qualsiasi, con $M.C.D(p, q)$ componenti e che si avvolge p volte nel senso dei meridiani e q nel senso dei paralleli del toro.

Dati due nodi K_1 e K_2 possiamo ora definirne la *composizione o somma connessa* $K_1 \# K_2$, che equivale alla somma connessa in topologia. Questa consiste nell'applicare un taglio in un arco di ciascuno dei due nodi K_1 , K_2 per poi reincollarli tra loro in modo da formare un unico nodo che contiene entrambe le strutture originarie. Questa operazione è commutativa, associativa e possiede un elemento neutro dato dal nodo banale. Notiamo però che non è ben posta se non fissiamo un'orientazione sui nodi. Se infatti non poniamo un'orientazione ai due nodi, esistono due modi distinti di incollare le estremità, che possono portare a nodi non equivalenti. Se invece i nodi hanno un verso di percorrenza ben definito, per rispettare le orientazioni ci sarà un'unica scelta in fase di incollamento. Vediamo ora un esempio di quanto detto

sopra, ovvero nodi in cui la scelta dell'orientazione porta a nodi inequivalenti tra loro. Questo si può vedere nella somma connessa del sopra citato nodo 8_{17} con sé stesso e con 8_{17}^* , ne risultano due nodi non equivalenti nonostante 8_{17} sia isotopo a 8_{17}^* .

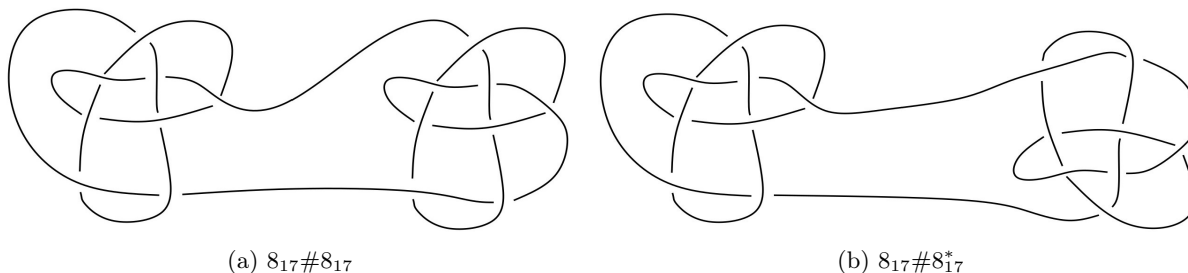


Figura 1.13

Questa operazione è inoltre indipendente dai punti in cui si sono tagliati i nodi K_1 e K_2 , rendendo perciò la composizione ben definita. Diamo ora una definizione legata a questa operazione e analoga alla corrispondente versione algebrica:

Definizione 1.16. Dati due nodi K_1, K_2 , un nodo K è detto *primo* se $K = K_1 \# K_2$ implica che K_1 o K_2 è banale.

Due importanti risultati che seguono da queste nozioni sono i seguenti:

Teorema 1.17 (Fattorizzazione unica). *Sia K un nodo tale che $K = K_1 \# \dots \# K_t$ con K_i nodo primo $\forall i = 1, \dots, t$. Una tale fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei K_i .*

Proveremo l'esistenza di tale fattorizzazione nel terzo capitolo, mentre l'unicità dipende da una argomentazione che coinvolge tagli e incollamenti.

Teorema 1.18. *Se K_1 è un nodo non banale, così lo è anche $K_1 \# K_2$ per ogni nodo K_2 .*

Questo teorema è una conseguenza del Teorema 1.7 di "equivalenze di equivalenze":

Dimostrazione. Denotiamo con \sim e \approx rispettivamente le equivalenze combinatorie e quelle tramite omeomorfismo di \mathbb{S}^3 in sé che preservano l'orientazione ((2) e (3) nel Teorema 1.7). Notiamo che in un nodo wild solo \approx ha senso, in quanto \sim richiede un numero finito di mosse per passare da un nodo all'altro. Supponiamo ora per assurdo che $K_1 \# K_2 \sim 0$, con 0 il nodo banale. Costruiamo il nodo wild dato dalla somma connessa infinita di copie di $K_1 \# K_2$. Usando l'associatività e la commutatività della somma connessa segue $0 \approx (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2) \# \dots \approx K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \# \dots \approx K_1$. Per il Teorema 1.7 $K_1 \approx 0$ implica $K_1 \sim 0$, il che è assurdo. \square

1.4 Generalizzazioni

I link sono la generalizzazione più immediata e quasi tutti i risultati visti finora per i nodi valgono anche per i link.

Si noti che lo studio della teoria dei nodi si colloca nel più generale studio delle immersioni $\mathbb{S}^p \hookrightarrow \mathbb{S}^q$. In quest'ambito un risultato fondamentale è quello che afferma che esiste un unico tipo di nodo di \mathbb{S}^p in \mathbb{S}^q quando la codimensione $q - p$ è maggiore di 2. Dimostriamo i seguenti casi:

Teorema 1.19. • *Ogni immersione $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ è banale;*

- *Ogni immersione $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^n$ con $n > 3$ è banale.*

Per dimostrare il primo punto useremo un'altra generalizzazione del Teorema della curva di Jordan, ovvero:

Teorema 1.20 (di Schoenflies). *Se J è una curva semplice in \mathbb{R}^2 , allora $\mathbb{R}^2 \setminus J$ ha esattamente due componenti e J è il bordo di ciascuna. Inoltre la chiusura di una delle due componenti è omeomorfa al disco unitario \mathbb{D}^2 .*

Una dimostrazione di questo teorema si può trovare in [Cai60, pg. 860-867]. Inoltre questo teorema si può anche riformulare sostituendo \mathbb{S}^2 al posto di \mathbb{R}^2 e, in questo caso, entrambe le componenti di $\mathbb{S}^2 \setminus J$ sono omeomorfe a \mathbb{D}^2 . Dimostriamo ora il primo punto del Teorema 1.19

Dimostrazione. Siano ora K_1, K_2 nodi in \mathbb{S}^2 . Per quanto detto ad inizio capitolo possiamo vederli in \mathbb{R}^2 . Chiamiamo U_i e V_i , $i = 1, 2$ le componenti in cui questi nodi dividono il piano come da Teorema 1.20 (di Schoenflies), con $\overline{U_i}$ e $\overline{V_i}$ omeomorfi a \mathbb{D}^2 . Sia $h: K_1 \rightarrow K_2$ un omeomorfismo. Dal Lemma di Alexander segue che posso estendere questo omeomorfismo a $h_1: \overline{U_1} \rightarrow \overline{V_1}$ ed a $h_2: \overline{U_2} \rightarrow \overline{V_2}$. Incollando h_1 e h_2 abbiamo un omeomorfismo $h: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ che porta K_1 in K_2 . \square

Una dimostrazione del secondo punto si può trovare in [PP98, pg. 8-9]. Inoltre si può dimostrare che il caso di codimensione 1 ha come unica eccezione il caso $q = 4$, di cui non ci sono studi completi. [PS96, Capitoli 5 e 7] Noi proseguiremo il nostro studio nel caso dato nei paragrafi precedenti.

Capitolo 2

Approccio algebrico

2.1 Gruppo di un nodo

La nozione di isotopia (ambientale) ci permette di utilizzare strumenti topologici per studiare i nodi. In seguito alla sua definizione si era sottolineato infatti che, dati f_0 e f_1 nodi, una isotopia H tra f_0 e f_1 , con $h_1 = H(\cdot, 1)$, induce un omeomorfismo $h_1|_{Y \setminus f_0(X)}: Y \setminus f_0(X) \rightarrow Y \setminus f_1(X)$ tra i complementari dei nodi. Da ciò segue facilmente che se due nodi f_1 e f_2 sono isotopi, allora $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ e $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ sono omeomorfi, e dunque hanno lo stesso gruppo fondamentale. In particolare definiamo:

Definizione 2.1. Sia f un nodo in \mathbb{R}^3 e sia x_0 un punto in $\mathbb{R}^3 \setminus K$; allora il gruppo fondamentale $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, x_0)$ è detto gruppo del nodo f .

Poiché $\mathbb{R}^3 \setminus K$ è connesso per archi, allora si può omettere il punto base x_0 e scrivere solo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Un recente risultato provato da Gordon e Luecke [GL89, pg. 83-86] ci dice che vale anche l'implicazione opposta a meno di una specifica, ovvero:

Teorema 2.2. *Siano f_1 e f_2 nodi in \mathbb{S}^3 . Allora esiste un omeomorfismo $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tale che $f(K_1) = K_2$ se e solo se i complementari dei nodi in \mathbb{S}^3 sono omeomorfi.*

Si noti che da questo teorema non segue che se i complementari di due nodi sono omeomorfi allora i nodi sono isotopi. Dal Teorema 1.7 vediamo che per avere ciò è richiesto che f preservi l'orientazione. Il risultato si può interpretare come: due nodi hanno complementari omeomorfi se e solo se due loro qualsiasi diagrammi sono equivalenti rispetto alle mosse di Reidemeister e all'inversione simultanea di tutti gli incroci (quest'ultima operazione consiste nel considerare un diagramma del nodo speculare ottenuto tramite riflessione). Questa specifica è importante perché si vede facilmente che, preso un nodo e la sua immagine riflessa tramite un piano, questi hanno complementari omeomorfi, ma essi non sono necessariamente isotopi (si vedano esempi nel Capitolo 1).

Inoltre è noto che, in generale, non è vero che se due spazi topologici hanno gruppo fondamentale isomorfo allora essi sono omeomorfi tra loro. Si può provare che invece questo risultato vale nel caso dei nodi primi [Whi87, pg. 41-43]:

Teorema 2.3 (di rigidità). *Siano K_1 e K_2 nodi primi in \mathbb{S}^3 ; allora se i rispettivi gruppi sono isomorfi, i complementari in \mathbb{S}^3 sono omeomorfi.*

Combinando i teoremi precedenti otteniamo il seguente risultato:

Teorema 2.4. *Siano K_1 e K_2 nodi primi in \mathbb{S}^3 ; allora i rispettivi gruppi sono isomorfi se e solo se esiste un omeomorfismo $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ tale che $f(K_1) = K_2$.*

Nel prossimo capitolo mostreremo un esempio di come il gruppo di un nodo non sia un invariante sufficientemente fine. Infatti presenteremo un esempio di nodi non primi e non equivalenti aventi lo stesso gruppo. Questa introduzione giustifica la ricerca di tecniche per rappresentare il gruppo di un nodo, che in generale non è un problema semplice. Infatti il gruppo di un nodo risulta essere l'invariante più generico (per i nodi primi è un invariante completo) ma anche il più difficile da calcolare, in quanto serve esibirne generatori e relazioni.

2.2 Presentazione di Wirtinger

Nella teoria dei nodi esistono vari modi per costruire una presentazione del gruppo di un nodo e alcune di queste risultano più o meno facili da calcolare a seconda del contesto. La più usata e diffusa in letteratura è la presentazione di Wirtinger, particolarmente attrattiva per la semplicità delle relazioni tra i generatori. Altre presentazioni sono le cosiddette *over* e *under presentations*, approfondite in [CF63, Capitolo VI].

Introduciamo ora e dimostriamo un risultato sulla presentazione di Wirtinger. Sia K un nodo: senza perdita di generalità possiamo supporre che il nodo sia contenuto nel piano $z = 0$ a meno di un intorno di ciascun punto di incrocio, in cui il ramo che passa sopra giace nel piano $z = 0$ mentre quello sotto passerà dal semispazio inferiore $z < 0$ ad una distanza $\varepsilon < 1$.

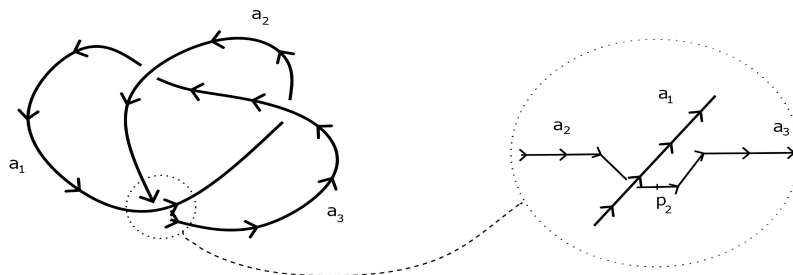


Figura 2.1

A questo nodo si associa immediatamente un diagramma dato dalla proiezione su $z = 0$. Siano dunque P' l'insieme dei punti di incrocio del diagramma e P l'insieme dei punti nell'antimmagine di P' rispetto alla proiezione e appartenenti a $z < 0$. Fissiamo poi un verso di percorrenza del nodo.

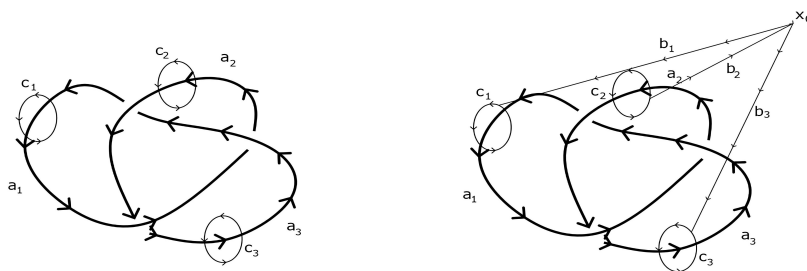


Figura 2.2

In questo modo i punti di P risultano naturalmente ordinati $P = (p_1, \dots, p_n)$ e proprio P divide K in una successione di archi a_1, \dots, a_n con a_i avente i punti p_i e p_{i+1} come estremi. Per studiare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, consideriamo ora delle circonferenze c_i in $\mathbb{R}^3 \setminus K$ di centro un punto di a_i , a due a due disgiunte, di raggio $< \varepsilon$ e orientate come in figura. Ora, fissiamo un punto $x_0 \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \cap \{t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ e denotiamo con b_i un arco che congiunge x_0 e un punto fissato di c_i e con γ_i il coppia ottenuto come prodotto di camini b_i, c_i e \bar{b}_i . Infine poniamo per comodità di notazione $a_{n+1} = a_1, \dots, \gamma_{n+1} = \gamma_1$.

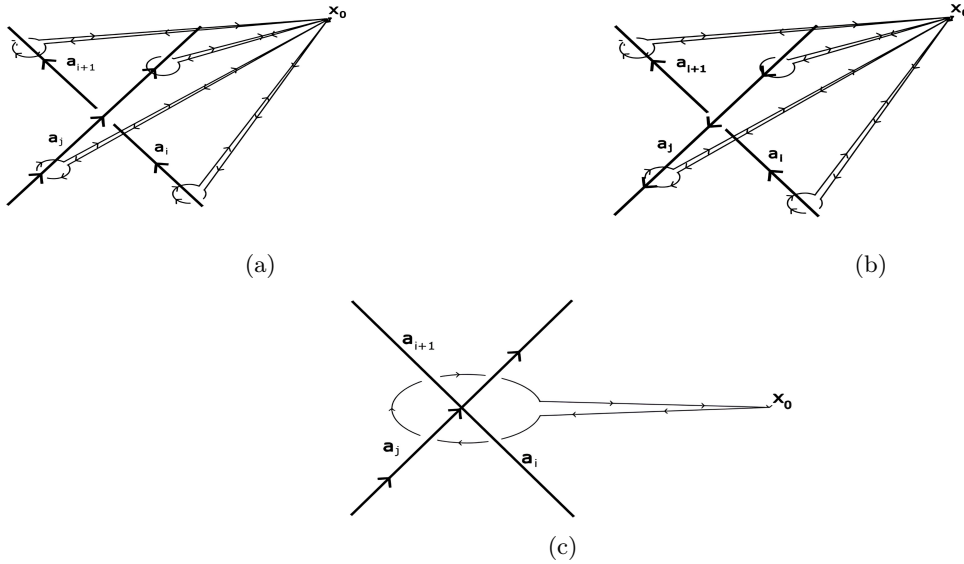


Figura 2.3

Il nostro obiettivo è quello di dimostrare che le classi di equivalenza $[\gamma_i]$ del coppia γ_i generano il gruppo del nodo. Per non appesantire ulteriormente la notazione useremo la stessa lettera per un coppia e la sua classe di equivalenza. Inoltre tra questi elementi sussistono delle relazioni che possono essere lette nella figura 2.3. In formule queste si scrivono: nel caso (a) $\gamma_i \gamma_j \tilde{\gamma}_{i+1} \tilde{\gamma}_j = \varepsilon_{x_0} = 1$, mentre nel caso (b) $\gamma_i \tilde{\gamma}_j \tilde{\gamma}_{i+1} \gamma_j = \varepsilon_{x_0} = 1$.

Ora possiamo finalmente enunciare e dimostrare il seguente teorema (si veda anche [Kos88, pg. 258-260]):

Teorema 2.5. *Il gruppo di K è generato da $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ con le relazioni*

$$\gamma_i = \gamma_j^{\varepsilon_i} \gamma_{i+1} \gamma_j^{-\varepsilon_i}$$

con $\varepsilon_i = \pm 1$ e al variare di i e j come sopra. Equivalentemente

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid \gamma_i = \gamma_j^{\varepsilon_i} \gamma_{i+1} \gamma_j^{-\varepsilon_i} \rangle$$

Inoltre, ognuna di queste relazioni è una conseguenza delle altre.

Dimostrazione. Per dimostrare il risultato applichiamo il Teorema di Seifert van-Kampen a due opportuni sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Per fare ciò introduciamo i sottospazi C e A di \mathbb{R}^3 come segue:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > -\frac{2\varepsilon}{3}\} \quad \tilde{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < -\frac{\varepsilon}{3}\}$$

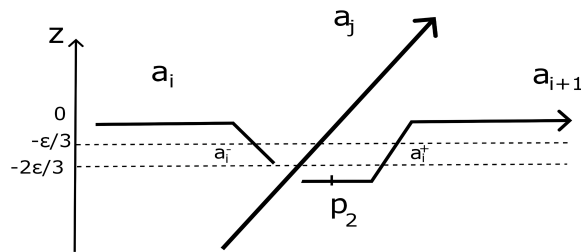


Figura 2.4

Poiché il punto x_0 fissato appartiene a C ma non ad \tilde{A} , definiamo un arco b da x_0 ad \tilde{A} che non intersechi K . Allora esiste $\delta > 0$ tale che $T = \{t \in \mathbb{R}^3 \mid d(t, b) < \delta\}$ non intersechi K . Definiamo allora $A = \tilde{A} \cup T$ e poniamo $X = C \setminus K$, $Y = A \setminus K$ e studiamo i gruppi fondamentali di X , Y e $X \cap Y$.

- $\pi_1(X, x_0)$: notiamo che $C \cap K$ consiste in archi disgiunti che iniziano e terminano nel piano $\{z = -\frac{2\epsilon}{3}\}$. In particolare si può sempre trovare un omeomorfismo $h: C \rightarrow C$ tale che $h(C \cap K) = \bigsqcup_{i=1}^n (S_i \cap C)$, ove S_i è la circonferenza data da $S_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = i, y^2 + z^2 = 1\}$ (vedi fig. 2.5). Quindi segue che X è omotopicamente equivalente a un disco tolti n punti. Il gruppo fondamentale è dato dunque dal prodotto libero dei $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

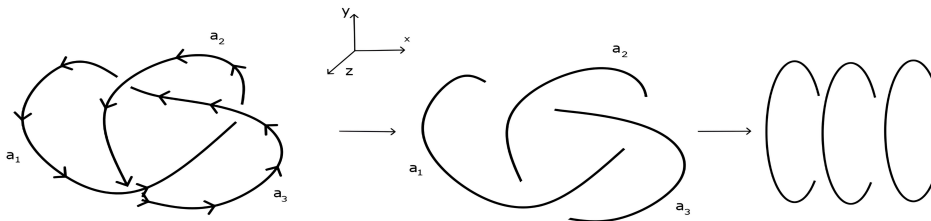


Figura 2.5

- $\pi_1(Y, x_0)$: analogamente a quanto fatto per i γ_i , definiamo β_i come il loop di punto base x_0 che percorre l'arco b , gira intorno all'arco in cui sta p_i e poi torna ad x_0 tramite \tilde{b} . Allora segue, tramite la stessa costruzione fatta per X , che Y è il gruppo libero generato dagli β_1, \dots, β_n .
- $\pi_1(X \cap Y, x_0)$: denotiamo con a_i^\pm gli archi di $X \cap Y = (B \cap C) \setminus K$ compresi tra a_i e a_{i+1} , con a_i^- il tratto con coordinata z decrescente e a_i^+ con z crescente. Quindi $X \cap Y$ consiste in $2n$ archi di questo tipo e con una costruzione analoga a quella dei punti precedenti troviamo dei loop α_i^\pm di punto base x_0 , ove α_i^- passa attorno ad a_i^- e α_i^+ passa attorno a a_i^- e a_i^+ , le cui classi generano liberamente $\pi_1(X \cap Y, x_0)$.

A questo punto applichiamo il Teorema di Seifert van-Kampen: osserviamo che, dette φ_B e φ_C gli omeomorfismi sui gruppi fondamentali indotti dalle inclusioni $(B \cap C) \setminus K \hookrightarrow B \setminus K$ e $(B \cap C) \setminus K \hookrightarrow C \setminus K$, allora abbiamo che:

$$\varphi_B(\alpha_i^-) = \beta_i \quad \varphi_B(\alpha_i^+) = \epsilon_{x_0} \quad \varphi_C(\alpha_i^-) = \gamma_i$$

e che:

$$\varphi_C(\alpha_i^+) = \gamma_i \bar{\gamma}_j \bar{\gamma}_{i+1} \gamma_j \quad \text{o} \quad \varphi_C(\alpha_i^+) = \gamma_i \gamma_j \bar{\gamma}_{i+1} \bar{\gamma}_j$$

a seconda dell'orientazione, come visto in figura 2.3.

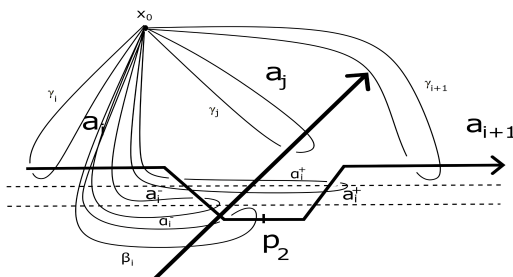


Figura 2.6

A questo punto applicando il teorema segue la prima parte dell'enunciato.

Resta da dimostrare la seconda asserzione, ovvero che ciascuna relazione è conseguenza delle altre. Sia $N > 0$ tale che la palla di centro 0 e raggio N contenga tutto K (esiste sempre poiché K è compatto).

Definiamo $A' := A \cup \{t \in \mathbb{R}^3 \mid \|t\| > N\}$ e $B' := B \cap A' = (B \cap A) \cup (B \cap \{t \in \mathbb{R}^3 \mid \|t\| > N\})$, allora il gruppo fondamentale di $B' \setminus K$ è lo stesso di $B \setminus K$ mentre quello di $(B' \cap C) \setminus K$ ha un generatore in meno di quello di $(B \cap C) \setminus K$: infatti esso è omotopicamente equivalente ad una sfera tolti $2n$ punti. Sia α_i^+ tale generatore in meno, allora la relazione $\gamma_i = \gamma_j^{\epsilon_i} \gamma_{i+1} \gamma_j^{-\epsilon_i}$ non è più necessaria. \square

2.3 Esempi importanti

Vediamo ora che possiamo applicare la presentazione di Wirtinger allo studio del gruppo del nodo banale e del nodo a trifoglio. Il gruppo del nodo banale ha un solo generatore e nessuna relazione (se consideriamo il diagramma dato da una circonferenza, esso ha un solo arco e nessun incrocio), allora possiamo dire che il suo gruppo è ciclico infinito. Per il nodo a trifoglio, denotiamo con a_1, a_2 e a_3 i tre archi come in figura e con γ_i come sopra. Allora dal teorema appena dimostrato segue che il gruppo del nodo è generato da γ_1, γ_2 e γ_3 con le relazioni $\gamma_1 = \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3$ (I), $\gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1$ (II) e $\gamma_3 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_2$ (III). Come dimostrato,

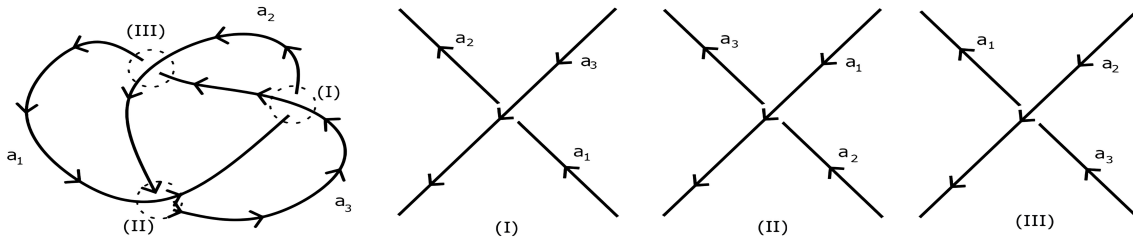


Figura 2.7

una qualsiasi di queste relazioni può essere omessa. Vediamo ad esempio che la terza dipende dalle altre due:

$$\gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 (\gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3) = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_3 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_2$$

Possiamo quindi scrivere il gruppo del nodo come

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_1 = \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3, \gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1 \rangle &\cong \langle \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_2 = (\gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3)^{-1} \gamma_3 (\gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3) \rangle \\ &\cong \langle \gamma_2, \gamma_3 \mid \gamma_2 \gamma_3 \gamma_2 = \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3 \rangle \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle; \end{aligned}$$

inoltre si può vedere che tale gruppo è isomorfo a $\langle a, b : a^2 = b^3 \rangle$, che è il gruppo del nodo torico $K_{2,3}$, poiché le relazioni di questi seguono l'una dall'altra (dimostreremo accuratamente questa affermazione nel Capitolo 4).

Grazie a questo esempio possiamo dare la prima dimostrazione di esistenza di un nodo non banale: nodi primi con gruppi non isomorfi implicano la non equivalenza di questi. Dimostriamo quindi che il gruppo del nodo a trifoglio appena trovato non è ciclico infinito. Per fare ciò notiamo che esiste un omomorfismo suriettivo θ del gruppo del nodo sul gruppo S_3 . Basta definire $\theta(a) = (12)$ e $\theta(b) = (23)$; infatti (12) e (23) generano S_3 e la relazione tra a e b si trasforma in:

$$\theta(aba) = \theta(a)\theta(b)\theta(a) = (12)(23)(12) = (13),$$

$$\theta(bab) = \theta(b)\theta(a)\theta(b) = (23)(12)(23) = (13);$$

ovvero diventa una relazione banale. Possiamo dunque concludere notando che S_3 non è abeliano, dunque non lo è nemmeno il gruppo del nodo a trifoglio e quindi certamente non è ciclico infinito.

Un'altra applicazione del gruppo fondamentale come invariante consiste nello studio più approfondito del nodo wild presentato in [Fox49, cap. 1]. Notiamo preliminarmente che il nodo banale ha gruppo abeliano. L'implicazione opposta, ovvero che un nodo moderato con gruppo abeliano sia banale, non è semplice e si basa sul lemma di Dehn [SW58, pg. 175-178]. D'altra parte esistono nodi wild con gruppo abeliano.

Notiamo inoltre che un nodo è banale se e solo se è isotopo ad un sottoinsieme di un piano in \mathbb{R}^3 . Questo perché il nodo banale è isotopo ad una circonferenza, che è un sottoinsieme di un piano in \mathbb{R}^3 . D'altra parte, se un nodo è isotopo ad un sottoinsieme di un piano in \mathbb{R}^3 , allora è costituito da una curva chiusa senza autointersezioni immersa in un piano, che è quindi isotopa al nodo banale. In analogia definiamo:

Definizione 2.6. Un nodo K è detto *quasi banale* se per ogni punto p e ogni intorno U di p esiste un intorno $V \subset U$ di p e un omeomorfismo φ di \mathbb{R}^3 in sé tale che:

- i $\varphi(q) = q$ per ogni $q \in V$,
- ii $\varphi(K \setminus V)$ è un sottoinsieme di un piano in \mathbb{R}^3 .

A questo punto affermiamo e dimostriamo che il nodo in figura 2.8 ha gruppo non abeliano nonostante sia quasi banale.

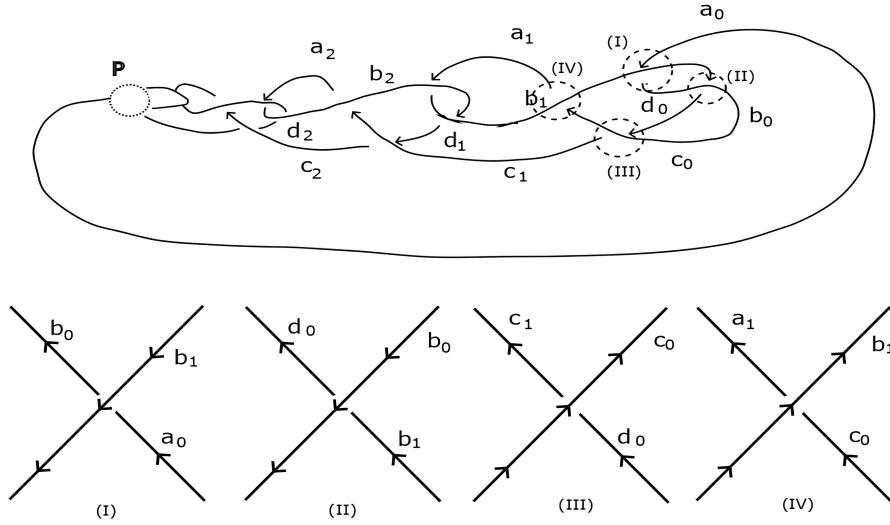


Figura 2.8

Denotiamo $a_n, b_n, c_n (n \geq 0)$ i generatori del gruppo e, con un abuso di notazione, anche i cappi del gruppo del nodo, da cui ricaviamo tramite la presentazione di Wirtinger quattro tipi di relazioni, che scriviamo nel caso $n = 0$ mostrato in figura:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad a_0 &= b_1^{-1} b_0 b_1 \Rightarrow b_0 = b_1 a_0 b_1^{-1} \\
 \text{(II)} \quad b_1 &= b_0^{-1} d_0 b_0 \\
 \text{(III)} \quad c_0 &= b_1 a_1 b_1^{-1} \Rightarrow a_1 = b_1^{-1} c_0 b_1 \\
 \text{(IV)} \quad d_0 &= c_0 c_1 c_0^{-1}
 \end{aligned}$$

Ora, sostituiamo (IV) in (II), e, generalizzando per ogni $n \geq 0$, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 \text{(1n)} \quad b_n &= b_{n+1} a_n b_{n+1}^{-1} \\
 \text{(2n)} \quad b_{n+1} &= b_n^{-1} (c_n c_{n+1} c_n^{-1}) b_n \Rightarrow c_{n+1} = c_n^{-1} b_n b_{n+1} b_n^{-1} c_n \\
 \text{(3n)} \quad a_{n+1} &= b_{n+1}^{-1} c_n b_{n+1}
 \end{aligned}$$

Queste relazione basterebbero a descrivere K al di fuori della sfera tratteggiata centrata in p . Per descrivere accuratamente il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus K$ allora dobbiamo passare attraverso un altro risultato. Siano anzitutto D_n cilindri solidi aperti di \mathbb{R}^3 tali che abbiano basi parallele al piano yz e che esse intersechino rispettivamente $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ e a_n, b_n, c_n (andando nel verso delle ascisse crescenti). A questo punto usiamo il seguente:

Teorema 2.7. *Sia $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ una catena di spazi topologici e supponiamo che M_m sia aperto in $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$ e scegliamo un punto base in M_1 . Allora $\pi_1(M)$ è il limite diretto della successione di omomorfismi $\pi_1(M_1) \rightarrow \pi_1(M_2) \rightarrow \dots$, ove gli omomorfismi $\Phi_m : \pi_1(M_m) \rightarrow \pi_1(M_{m+1})$ sono indotti dall'inclusione.*

Tale teorema è meglio approfondito e dimostrato in [Ste36, pg. 669]. Nel nostro caso gli M_m saranno uguali al complementare di $K \cup \bigcup_{n \geq m} D_n$. Avremo dunque che il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus K = G$ è dato dal limite diretto dei gruppi fondamentali G_m degli M_m . Tale gruppo si ottiene unendo tutti i generatori x_{m_i} dei G_m e ponendo le relazioni r_{m_j} di ciascun G_m con l'aggiunta di $x_{m_j} = \Phi(x_{m_j})$ ($m = 1, 2, \dots; \forall j$), ma tali relazioni in questo caso sono banali perché ciascun generatore viene mandato in sé stesso. Resta dunque da capire quali siano le relazioni degli M_m : per farlo stringiamo $\bigcup_{n \geq m} D_n$ al punto P e modifichiamo opportunamente il resto di M_m in modo che gli archi che terminavano sulla faccia di D_m si congiungano tutti in P (che nel nostro caso è diventato un punto quadruplo). Questa operazione conserva il gruppo fondamentale ma non rientra nello studio che abbiamo fatto finora. Nonostante ciò questa situazione impone una semplice relazione (si veda di più in [Whi39, pg. 151-156]) che si scrive come prodotto libero dei generatori che terminano nel punto, con esponente $+1$ se sono orientati in direzione entrante e -1 se in direzione uscente, posto uguale ad 1. In questo modo avremo che le relazioni nei G_m saranno un sottoinsieme di quelle già ricavate con la presentazione di Wirtinger e in aggiunta la relazione $1 = a_0^{-1} c_m b_m^{-1} a_m \Rightarrow a_0 = c_m b_m^{-1} a_m$. In questo modo abbiamo finalmente ottenuto un insieme di generatori e relazioni che descrivono il gruppo di K . In particolare i generatori sono come in figura e le relazioni sono:

$$(1n) \quad b_n = b_{n+1} a_n b_{n+1}^{-1}$$

$$(2n) \quad c_{n+1} = c_n^{-1} b_n b_{n+1} b_n^{-1} c_n$$

$$(3n) \quad a_{n+1} = b_{n+1}^{-1} c_n b_{n+1}$$

$$(4n) \quad a_0 = c_n b_n^{-1} a_n$$

da (1₀) segue che $b_0 = c_0$ (come si vede dalla figura), ma allora da (4₀), (4₁), \dots segue che $b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots$. Di conseguenza da (1_n) segue che $a_n = a_0$ e da (3₀) che $a_0 = b_1 b_0 b_1^{-1}$. Si può concludere dunque che G è generato dunque da b_0, b_1, b_2, \dots insieme alle relazioni $b_1 b_0 b_1^{-1} = b_2 b_1 b_2^{-1} = b_3 b_2 b_3^{-1} = \dots$, ma questo gruppo non è abeliano poiché un'altra presentazione di questo gruppo si ottiene assegnando la permutazione (12) a b_n quando n è pari, (23) quando n è dispari. Le relazioni diventano banali e perciò abbiamo un omomorfismo con il gruppo S_3 , che come voluto non è abeliano.

Capitolo 3

Approccio geometrico

3.1 Superfici di Seifert

Per quanto visto nel Capitolo 2 il gruppo di un nodo è un potente invariante, che però risulta molto spesso difficile da calcolare. Per questo motivo si studiano altri invarianti che nascono da particolari costruzioni geometriche legate ai nodi.

Definizione 3.1. Una n -cella C è un poliedro convesso compatto in \mathbb{R}^m che genera un sottospazio vettoriale di dimensione n . Sia ora $x \in C$; definiamo $\langle x, C \rangle$ come l'unione di tutte le rette L in \mathbb{R}^m passanti per x e tali che $L \cap C$ contenga x come punto interno. Se non esistono tali rette, definiamo $\langle x, C \rangle = x$ e diciamo che x è un vertice di C , mentre in generale chiamiamo *faccia* una cella data da $\langle x, C \rangle \cap C$ denotata C_x e scriveremo $C_x < C$.

Definizione 3.2. Un *complesso di celle* F è una collezione finita di celle in \mathbb{R}^m tale che:

1. Se $C \in F$ e $B < C$, allora $B \in F$;
2. Se $B, C \in F$, allora $B \cap C$ è faccia sia per B che per C .

Poste queste definizioni, associamo a ciascun nodo una famiglia di superfici.

Definizione 3.3. Dato un nodo K , è detta *superficie di Seifert* per K una superficie S immersa in \mathbb{S}^3 che sia compatta, connessa e orientabile tale che $\partial S = K$.

Ovviamente queste superfici non sono uniche, né relativamente all'immagine di una immersione fissata, né al variare di questa tramite isotopie. Non è scontato, ma è importante, che almeno una di queste superfici esista per ciascun nodo:

Teorema 3.4. Dato un nodo orientato K , allora esiste sempre una superficie di Seifert per K .

Dimostrazione. Questo risultato può essere dimostrato in maniera costruttiva tramite l'algoritmo di Seifert, il quale consiste in:

1. Dato K , consideriamo un suo diagramma e la relativa proiezione associata.

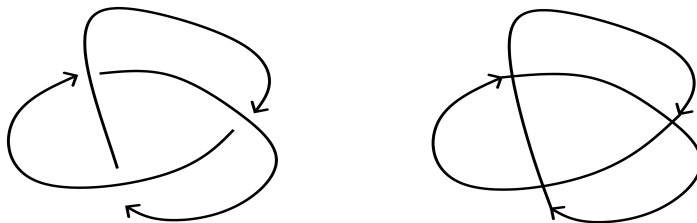


Figura 3.1

2. Operiamo come in figura in ciascuno dei punti doppi della proiezione, in questo modo otterremo un insieme di curve chiuse orientate e disgiunte a meno di isotopie di diagrammi, dette *cicli di Seifert*.

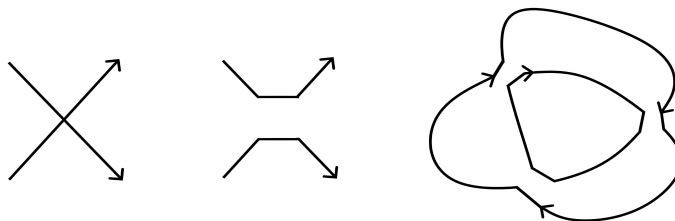


Figura 3.2

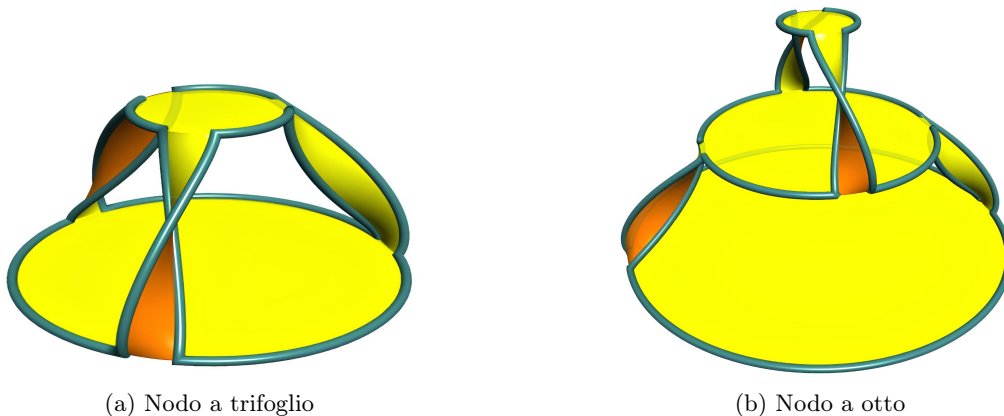
3. A questo punto incolliamo un disco a ciascun ciclo ricordando, nel caso vi siano cicli annidati l'uno dentro l'altro, di sollevarli prima in piani diversi partendo dal più interno (che starà più in alto). Per formare la superficie richiesta ora non resta che incollare i dischi tra loro nei pressi degli incroci in cui abbiamo operato al punto 2 tramite rettangoli incrociati (vedi figura 3.3). Chiaramente questa superficie è orientata ed ha K come bordo.



Figura 3.3

□

Esplicitiamo l'algoritmo di Seifert nel caso del nodo a trifoglio. Come visto nella dimostrazione del teorema precedente esso produce due cicli di Seifert: quello interno viene sollevato e tre rettangoli incrociati vanno a connettere i due dischi ove abbiamo effettuato le operazioni nella prima fase dell'algoritmo. Quello che ne risulta è ciò che possiamo vedere in figura 3.4 (a). Di fianco abbiamo inserito invece una superficie di Seifert per il nodo a otto. Di fianco abbiamo inserito invece una superficie di Seifert per il nodo a otto.



(a) Nodo a trifoglio

(b) Nodo a otto

Figura 3.4: Superficie di Seifert ottenute dall'algoritmo di Seifert

Avendo associato delle superfici a ciascun nodo K viene naturale chiedersi se sia possibile associare un genere a K . A ciascuna delle superfici di Seifert di K è infatti associato un genere, ma questo può variare al variare della superficie. Ciò che è sempre vero è che esiste sempre un minimo tra questi.

Definizione 3.5. Sia K un nodo, allora il suo *genere* $g(K)$ è il minimo dei generi delle superfici di Seifert di K .

Un risultato significativo riguardo al comportamento del genere dei nodi rispetto alla somma è il seguente ([Rol76, 5.A.14]):

Teorema 3.6. Dati due nodi K_1 e K_2 , allora $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$

Dimostrazione. La disuguaglianza \leq si ricava facilmente. Notiamo infatti che date due superfici di Seifert S_1 e S_2 di genere minimo per K_1 e K_2 , la loro somma connessa $S_1 \# S_2$ è chiaramente una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$. Il suo genere è uguale a $g(K_1) + g(K_2)$ poiché genere di una somma connessa di due superfici orientabili. Sia invece ora M una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$ di genere minimo. Vorremmo trovare un'altra superficie di Seifert M' per questo nodo che si divida in una somma connessa di superfici di Seifert M_1 e M_2 per K_1 e K_2 rispettivamente. In questo modo avremo che $g(K_1) + g(K_2) \leq g(M_1) + g(M_2) = g(M') = g(K_1 \# K_2)$. Per trovare una tale M' , consideriamo un disco D in \mathbb{R}^3 che divida $K_1 \# K_2$ nei suoi due addendi. Possiamo inoltre supporre che D e M si intersechino trasversalmente. Se $M \cap D$ consiste in un singolo arco, possiamo semplicemente porre $M' = M$, poiché tale arco dividerebbe M in due superfici aventi come bordo nodi equivalenti a K_1 e K_2 . Alternativamente abbiamo che $M \cap D$ consiste in un arco e un numero finito di curve chiuse. Il nostro obiettivo è quello di rimuovere queste curve chiuse per poter concludere. In particolare procediamo per induzione.

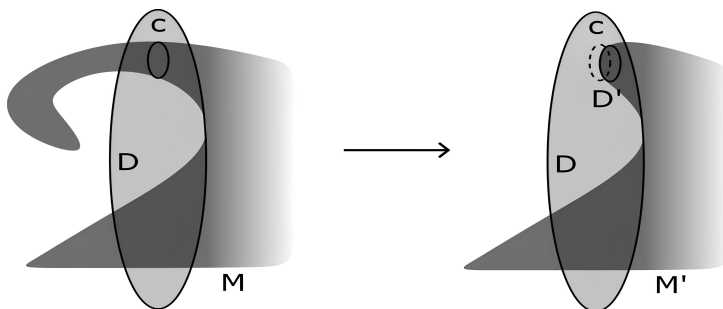


Figura 3.5

Consideriamo una curva chiusa $C \subset M \cap D$ tale che C sia il bordo di un disco in D' con $\text{int}(D') \cap M = \emptyset$. Sotto queste ipotesi C separa M in due componenti. Allora scartiamo la parte di $M \setminus C$ che non interseca ∂M e rimpiazziamola con il disco D' . Ora ci basta spostare la nuova superficie ottenuta in modo che D' abbia intersezione vuota con D e chiamiamo questa superficie M_1 . Notiamo che $\partial M = \partial M_1$ e M_1 ha strettamente meno componenti che intersecano D . Inoltre si può vedere, tramite uso della caratteristica di Eulero-Poincaré, che questa operazione non aumenta il genere, perciò M_1 è ancora una superficie di genere minimo. \square

Poiché un disco è una superficie di Seifert per la circonferenza data dal suo bordo, il nodo banale ha genere 0. Da ciò e dal teorema sopra deduciamo che se un nodo ha genere 1, allora esso è primo. Notiamo infine che segue da ciò una ulteriore dimostrazione del Teorema 1.18 e una prova della prima parte del Teorema 1.17: se infatti un nodo si decompone in una somma connessa di nodi non banali, questi avranno genere strettamente minore del nodo originale. Iterando questa operazione arriveremo ad avere una somma connessa di nodi primi con genere > 1 oppure di nodi con genere 1, che come visto sopra sono dunque a loro volta primi. Una prova dell'unicità di tale fattorizzazione è contenuta in [BZ03, Capitolo 7.B].

Dimostriamo ora una formula esplicita per trovare il genere di una assegnata superficie di Seifert: sia S una superficie di Seifert del nodo K costruita con l'algoritmo di Seifert. In particolare siano c il numero

di cicli di Seifert e r il numero dei rettangoli inseriti (che è lo stesso numero di incroci di K). Allora

$$g(S) = 1 - \frac{1}{2}(c - r).$$

Per provare tale formula richiamiamo la definizione della caratteristica di Eulero-Poincaré per le n -celle: dato un complesso di celle F , $\chi(F) = m_0 - m_1 + m_2 - \dots$, ove m_n è il numero delle n -celle di F . Inoltre ricordiamo che $\chi(F) = 2 - 2g(F)$, perciò ci basta trovare il modo di vedere S come un complesso di celle e trovare gli m_n . Per fare ciò ci basta descrivere S in modo che i vertici siano i quattro vertici di ogni rettangolo, i lati sono quelli descritti dai rettangoli e quelli dati dai bordi dei dischi tra i vertici e infine le facce siano i dischi e i rettangoli. A questo punto segue facilmente che $m_0 = 4r$, $m_1 = 6r$, $m_2 = r + c$. Da quanto detto sopra segue dunque il risultato voluto.

Ovviamente questa formula ci permette di trovare il genere di una specifica superficie di Seifert, non del nodo associato. È noto però che questo è esattamente il genere del nodo per alcune classi di nodi come quelle dei nodi alterni e dei nodi torici.

3.2 Polinomio di Alexander

Ora che abbiamo introdotto le superfici di Seifert vorremmo trovare un invariante ad esso legato. Ciò che ancora non abbiamo studiato è ciò che succede a queste superfici al variare del nodo per isotopie ambientali.

Teorema 3.7. *Siano K_1 e K_2 due nodi isotopi, S_1 e S_2 superfici di Seifert di K_1 e K_2 rispettivamente. Allora S_1 è equivalente a S_2 rispetto alla relazione di equivalenza generata da:*

1. isotopie ambientali;
2. 0-chirurgie: data α una curva in S che è il bordo di un disco in $\mathbb{R}^3 \setminus S$, si rimuove $\alpha \times [0, 1]$ da S e si incolla un disco in $\alpha \times \{0\}$ e $\alpha \times \{1\}$;
3. 1-chirurgie: si ottiene rimuovendo da S due dischi D_0 e D_1 e incollando un manico dato da $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, identificando ∂D_0 con $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ e ∂D_1 con $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$

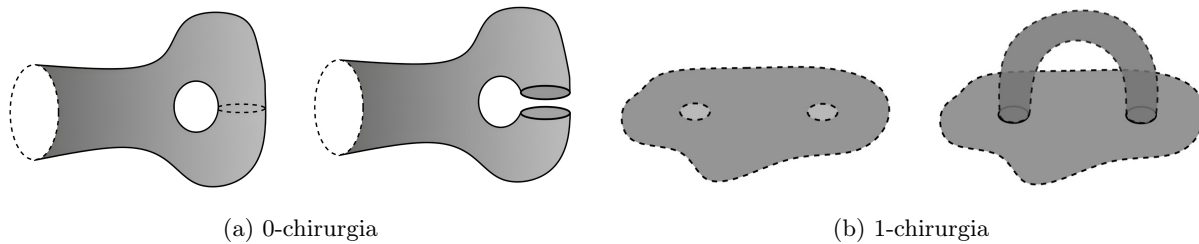


Figura 3.6

Una dimostrazione si può trovare in [Lev69, pg.229-244]. Tale relazione di equivalenza è comunemente detta *s-equivalenza*, la quale però è notevolmente complicata da utilizzare. Come detto, il nostro obiettivo è quello di costruire un invariante a partire da una interpretazione geometrica, e per fortuna per farlo avremo bisogno solo di informazioni su $H_1(S)$, ovvero l'abelianizzato del gruppo fondamentale di S , il quale varia per s -equivalenza in modo più controllato. Procediamo ora nella direzione dichiarata.

Definizione 3.8. Dati J, K nodi orientati in \mathbb{R}^3 , prendiamo una proiezione regolare di $J \cup K$. Sia P l'insieme dei punti in cui nella proiezione si incrociano archi di J e K ; allora è ben definito il *linking number* $lk(J, K) = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} \varepsilon(p)$, con ε definito come segue:

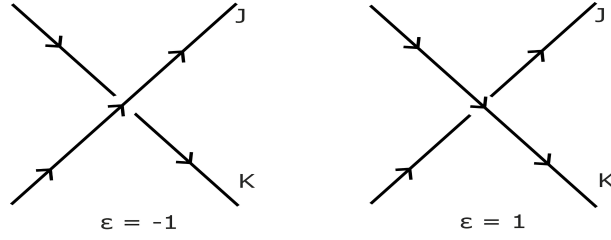


Figura 3.7

Equivalentemente avremmo potuto porre $\varepsilon = -1$ se l'angolo compreso tra l'arco che passa sopra e quello che passa sotto (misurato in senso orario) ha seno positivo, $\varepsilon = 1$ se esso ha seno negativo. Si vede infine che questa definizione è indipendente dalla proiezione scelta, ovvero che il linking number è invariante rispetto alle mosse di Reidemeister.

Vi sono inoltre molte altre definizioni equivalenti del linking number (per approfondire si veda [Rol76, pg.132-134]). Quella data qui sopra è quella combinatorica e più semplice da calcolare. Vale la pena darne un'altra, per far capire come questa dipenda da $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Anzitutto notiamo che $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ è isomorfo a \mathbb{Z} : infatti basta vedere la presentazione di Wirtinger di un nodo qualsiasi: essa avrà n generatori r_1, \dots, r_n e n relazioni, le quali nell'abelianizzato implicano $r_1 = r_2, r_2 = r_3, \dots, r_n = r_1$, ovvero rimane un unico generatore senza relazioni come nel caso del nodo banale. A questo punto possiamo scegliere un generatore α per $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ e diciamo che se $[J] = n\alpha$ è la classe di omologia in $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ rappresentata da J , allora $lk(J, K) = n$.

Ora possiamo ricollegarci alle superfici di Seifert grazie alle seguente definizione generale.

Definizione 3.9. Data una superficie orientata S immersa in \mathbb{R}^3 , si definisce *forma di Seifert* di S come $\theta: H_1(S) \times H_1(S) \rightarrow \mathbb{Z}$, ove $\theta(a, b) = lk(a^+, b)$, ove a^+ è la curva chiusa che si ottiene sollevando di poco a in $\mathbb{R}^3 \setminus S$ nella direzione normale positiva ad S .

Questa è chiaramente una forma biadditiva a cui si associa una matrice detta *matrice di Seifert* che indicheremo con $[\theta]$.

Studiamo ora questa forma e le sue proprietà. Definiamo sullo stesso dominio la forma di intersezione $a \cdot b$ come quella che, ad ogni intersezione, assegna il valore 1 (rispettivamente -1) se un osservatore posto nella direzione della normale positiva alla superficie vede ruotare a su b in senso orario (rispettivamente antiorario) e infine ne somma i valori. Questa forma si può anche scrivere come $a \cdot b = lk(a^+ - a^-, b)$, ove a^- è, analogamente ad a^+ , il sollevamento di a in direzione normale negativa. Segue allora che

$$\begin{aligned} \theta(a, b) - \theta(b, a) &= lk(a^+, b) - lk(b^+, a) = lk(a^+, b) - lk(a, b^+) = \\ &= lk(a^+, b) - lk(a^-, b) = lk(a^+ - a^-, b) = a \cdot b. \end{aligned}$$

Si può inoltre caratterizzare le matrici associate a queste forme [BZ03, pg. 108-109]: data una matrice $V \in M_n(\mathbb{Z})$, allora essa è una matrice di Seifert se e solo se n è pari e $V - V^t$ è congruente tramite una matrice unimodulare ad una matrice a blocchi del tipo $\bigoplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. In particolare notiamo che dovremmo trovare una forma particolare per il nodo K e la superficie di Seifert associata S (di genere g) in cui sia particolarmente facile lavorare con una base di $H_1(S)$. Come segue da quanto detto sopra e dalla caratterizzazione delle superfici con bordo in \mathbb{R}^3 (si veda [Mas77, Capitolo 1.12]), questa forma è costituita da un disco D a cui sono incollati $2g$ nastri con entrambe le estremità incollate al disco che possono essere tra loro annodati o presentare degli avvitamenti. Tali nastri sono degli intorni di curve chiuse orientate a_i che hanno punto base in D e possono essere scelti in modo che non si intersechino fra loro. Questi a_i costituiscono un sistema canonico su S se tagliando lungo essi si ottiene un disco. In tal caso allora $H_1(S) \cong \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}a_i$. In particolare si può modificare ulteriormente trasformando gli avvitamenti del nastro in loop come in figura 3.8. Questa forma è detta *proiezione a nastro* del nodo.

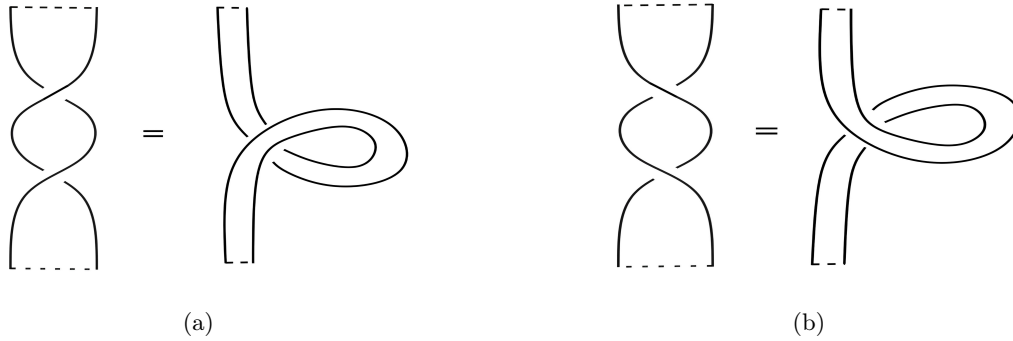


Figura 3.8

Diamo ora un esempio dato dal trifoglio: in figura si vede la sua presentazione nella forma sopra descritta. H_1 è generato dai soli a e b come in figura, restano da calcolare allora solo quattro casi:

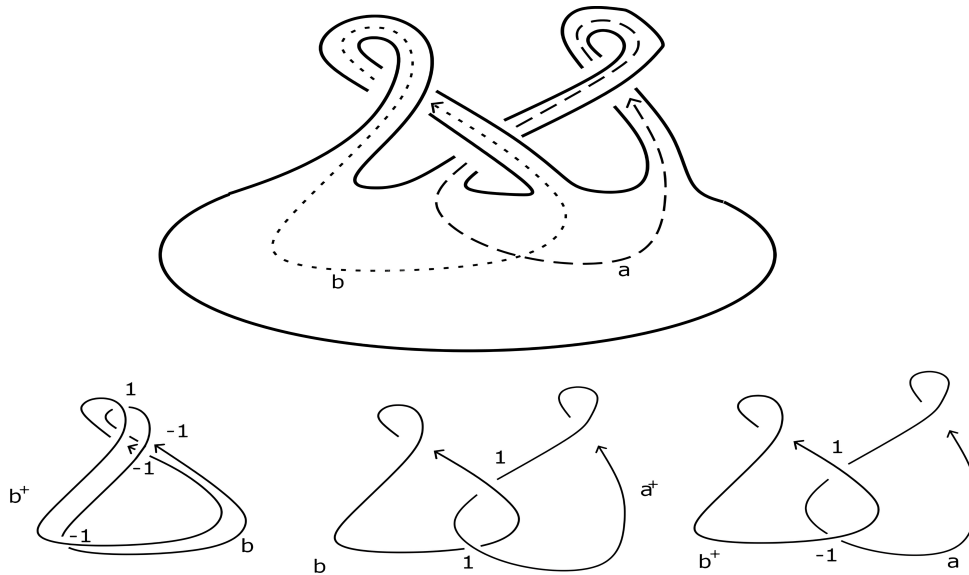


Figura 3.9

Il quarto caso ovvero $lk(a^+, a)$ è del tutto analogo a $lk(b^+, b)$. Concludiamo dunque che la sua matrice di Seifert è $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Ora vogliamo studiare cosa succede alla forma θ al variare della superficie di Seifert scelta. Questo risultato è ciò a cui ci si riferiva in seguito all'enunciato del Teorema 3.7.

Teorema 3.10. *Siano S_1 e S_2 due superfici di Seifert e siano θ_1 e θ_2 le rispettive forme di Seifert associate. Se S_1 e S_2 sono s -equivalenti, allora $[\theta_1]$ e $[\theta_2]$ si equivalgono secondo la relazione generata da:*

(1) $A \equiv BAB^t, B \in GL(\mathbb{Z});$

(2) $A \equiv \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix},$ ove α è un vettore riga qualsiasi di lunghezza opportuna.

Chiameremo tale equivalenza ancora s -equivalenza.

Dimostrazione. Questo risultato segue direttamente dal Teorema 3.7. Facciamo vedere il caso di due superfici che differiscono solo di una 1-chirurgia. Sia quindi S_2 la superficie che si ottiene aggiungendo un

manico ad S_1 . Consideriamo ora le curve chiuse a e b date rispettivamente da un meridiano del manico e da un loop che passa una sola volta dal manico e interseca semplicemente a .

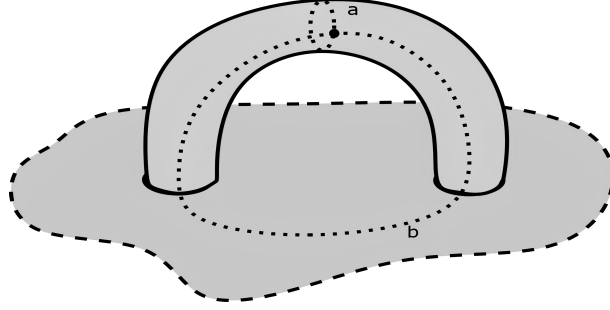


Figura 3.10

A questo punto calcoliamone la matrice di Seifert: $\theta_2(a, a) = 0, \theta_2(a, b) = 1, \theta_2(b, a) = 0, \theta_2(a, x) = \theta_2(x, a) = 0, \forall x \in H_1(S_1)$. Segue che, estendendo la base fissata di $H_1(S_1)$ tramite a e b , otteniamo una base per $H_1(S_2)$ con matrice:

$$[\theta_2] = \begin{bmatrix} [\theta_1] & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Vediamo ora che possiamo ricondurci alla forma (2) tramite operazioni del tipo (1). Sia infatti $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ e consideriamo la matrice $E_{ij}(\lambda) = I_{n+2} + \lambda e_{ij}$. Notiamo che se moltiplichiamo $[\theta_2]$ a sinistra per $E_{i,n+1}(-\beta_i)$ otteniamo una matrice uguale ad $[\theta_2]$ a meno dell'entrata $(i, n+1)$ ove invece di β_i compare uno 0. Moltiplicando invece a destra per la trasposta $E_{n+1,i}(-\beta_i)$ non avviene alcun cambiamento. Iterando questa operazione per $i = 1, \dots, n$ e infine per $E_{n+2,n+1}(-\gamma)$ otteniamo il risultato voluto. \square

Finalmente possiamo definire l'invariante principale di questo capitolo, il polinomio di Alexander:

Definizione 3.11. Dato un nodo orientato K e una sua forma di Seifert θ , allora definiamo il *polinomio di Alexander* come $\Delta_K(t) = \det([\theta] - t[\theta]^t)$

Non resta ora che vedere che è effettivamente un invariante.

Teorema 3.12. *Se considerato a meno di potenze di t e del segno, il polinomio di Alexander Δ_K è un invariante di K .*

Dimostrazione. In virtù del Teorema 3.10 basta verificare che Δ_K non cambia se $[\theta]$ varia per s -equivalenza. Poiché l'operazione (1) non altera il determinante di $[\theta]$ non resta che verificare cosa succede applicando

(2). Consideriamo dunque $[\theta'] = \begin{bmatrix} [\theta] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e calcoliamo sviluppando il determinante rispetto alla penultima riga:

$$\det([\theta' - t\theta'^t]) = \begin{vmatrix} [\theta] - t[\theta]^t & 0 & -t\alpha^t \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & -t & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} [\theta] - t[\theta]^t & 0 \\ \alpha & -t \end{vmatrix} = t \det([\theta] - t[\theta]) = t \Delta_K(t)$$

\square

Sfruttando l'esempio precedente sulle forme di Seifert, calcoliamo il polinomio di Alexander del nodo a trifoglio K : poiché la sua matrice di Seifert è $[\theta] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, allora $\Delta_K(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -t & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - t + 1$. Utilizziamo ora il simbolo \simeq per dire che due polinomi in t differiscono per una potenza di t o per un segno e presentiamo delle importanti proprietà di questo invariante.

Teorema 3.13. (a) $\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t)$

(b) $\Delta_K(t) \simeq \Delta_{K^*}(t)$

(c) $\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t)\Delta_{K_2}(t)$

(d) $\Delta_K(t) \simeq \Delta_K(t^{-1})$

Dimostrazione. (a), (b): proviamo che se $[\theta]$ è una matrice di Seifert per K , allora $[\theta]^t$ e $-[\theta]^t$ sono rispettivamente le matrici di Seifert per $-K$ e K^* . Ricordiamo che è possibile ottenere un diagramma di $-K$ invertendo l'orientazione di un diagramma di K e uno di K^* invertendo simultaneamente tutti gli incroci di uno di K , che portano alle matrici richieste. A questo punto verifichiamo:

$$\Delta_{-K}(t) = \det([\theta]^t - t[\theta]) = \det(([\theta] - t[\theta]^t)^t) = \det([\theta] - t[\theta]^t) = \Delta_K(t)$$

$$\Delta_{K^*}(t) = \det(-[\theta]^t + t[\theta]) = \det([\theta] - t[\theta]^t) = \Delta_K(t).$$

ove in quest'ultima uguaglianza si è usato il fatto che $\det(A^t) = \det(A)$ e $\det(-A) = (-1)^{2g}\det(A) = \det(A)$.

(c): Siano S_1 e S_2 due superfici di Seifert per K_1 e K_2 . Allora unendo opportunamente S_1 e S_2 con un nastro si ottiene una superficie di Seifert per $K_1 \# K_2$, la cui matrice è la matrice a blocchi data dalla somma diretta delle matrici relative a S_1 e S_2 .

(d): Applichiamo i punti precedenti:

$$\Delta_K(t) = \det([\theta] - t[\theta]^t) = \det([\theta]^t - t[\theta]) \simeq \det(t^{-1}[\theta]^t - [\theta]) \simeq \det([\theta] - t^{-1}[\theta]^t) = \Delta_K(t^{-1}).$$

□

Vale la pena ricapitolare il metodo per trovare il polinomio di Alexander di un nodo K . Tale procedimento è riportato in [Liv93, Capitolo 3.5] e non ne daremo una giustificazione dettagliata. Consideriamo un diagramma orientato di tale nodo. A questo punto numeriamo gli n archi del diagramma e gli incroci. Formiamo una matrice $n \times n$ formata in questo modo: consideriamo l'incrocio numero l , ove si incontrano gli archi numero i, j, k . Se questi si dispongono come in figura 3.11(a), inseriamo nella l -esima riga: $1 - t$ nella i -esima colonna, -1 nella j -esima e t nella k -esima. Se invece gli archi sono disposti con in figura 3.11(b), mettiamo gli stessi valori del caso precedente invertendo le posizioni di -1 e t . Il resto della riga è completata da degli zeri. La matrice ottenuta da questa rimuovendo l'ultima riga e colonna viene chiamata *matrice di Alexander* di K e il suo determinante è il polinomio di Alexander di K .

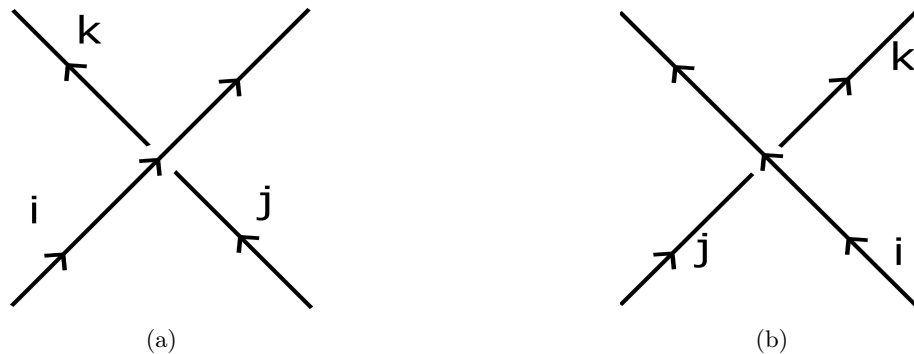


Figura 3.11

La costruzione di θ fatta fin qui ci permette inoltre di definire un altro notevole invariante, ovvero la *segnatura* σ di un nodo K . Più precisamente, sia K un nodo, S una sua superficie di Seifert e $[\theta]$ la matrice associata. Ovviamente $[\theta] + [\theta]^t$ è una matrice simmetrica, perciò ha senso considerarne la segnatura, che ricordiamo essere definita come la differenza del numero di autovalori positivi e numeri di autovalori negativi, che chiameremo segnatura del nodo. Analogamente a quanto fatto per il polinomio di Alexander,

per dimostrare l'invarianza della segnatura è sufficiente mostrarne l'invarianza per s -equivalenza: essa è infatti invariante per congruenza e per la seconda operazione del Teorema 3.10:

$$\sigma \begin{vmatrix} [\theta] + [\theta]^t & 0 & \alpha^t \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} [\theta] + [\theta]^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma([\theta] + [\theta]^t) + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma([\theta] + [\theta]^t).$$

Inoltre seguono facilmente i seguenti risultati:

1. $\sigma(K_1 \# K_2) = \sigma(K_1) + \sigma(K_2)$;
2. $\sigma(K^*) = -\sigma(K)$.

Interessante è vedere come la segnatura ci dia modo di creare l'esempio richiesto all'inizio del Capitolo 2, ovvero quello di due nodi non primi inequivalenti che hanno stesso gruppo: Consideriamo infatti due nodi K_1 e K_2 costruiti rispettivamente come somma connessa di due copie del nodo a trifoglio classico (che chiameremo *destra*) e del nodo a trifoglio destro e il suo simmetrico (nodo a trifoglio *sinistra*). Si vede facilmente che questi due nodi hanno lo stesso gruppo: abbiamo già notato infatti che un nodo e il suo riflesso hanno stesso gruppo fondamentale, e applicando il Teorema di Seifert-Van Kampen ai complementari otteniamo quanto voluto, in particolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_2) \cong \langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = zxz \rangle$.

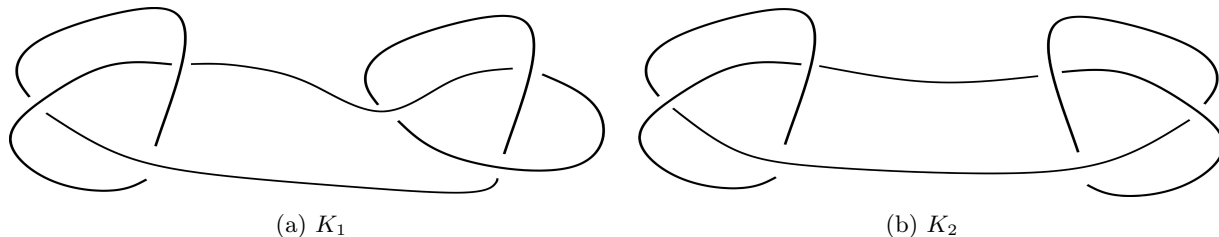


Figura 3.12

D'altra parte ricordiamo che il trifoglio classico ha matrice $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ di segnatura -2 e, dalle proprietà sopra, il suo simmetrico avrà matrice di Seifert $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, di segnatura 2 . Sempre grazie a quanto detto sopra allora avremo che K_1 avrà segnatura -4 e K_2 invece 0 , provando così che i due nodi sono inequivalenti.

Capitolo 4

Calcolo di Fox e ideali elementari

4.1 Calcolo di Fox

In quest'ultimo capitolo l'obiettivo è affinare lo studio del gruppo di un nodo e vedere come ciò si collega al polinomio di Alexander introdotto nel Capitolo 3. Il problema principale che si riscontra nel calcolo del gruppo di un nodo è quello di capire quando due diverse presentazioni con generatori e relazioni definiscono gruppi isomorfi. In generale non esiste un algoritmo che risolva questo problema, perciò cercheremo di definire degli invarianti indipendenti dalle presentazioni di un gruppo. Tali invarianti sono gli ideali elementari.

Iniziamo introducendo gli strumenti algebrici che andremo ad utilizzare:

Definizione 4.1. Siano G un gruppo (non necessariamente abeliano) in notazione moltiplicativa e \mathbb{Z} l'anello degli interi. Definiamo l'*anello gruppane* $\mathbb{Z}[G]$ nel modo seguente:

- Gli elementi sono le mappe $v: G \rightarrow \mathbb{Z}$ tali che $v(g) = 0$ per quasi ogni $g \in G$
- L'addizione è data da $(v_1 + v_2)g = v_1g + v_2g, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{Z}[G], g \in G$
- La moltiplicazione è data da $(v_1v_2)g = \sum_{h \in G} (v_1h)(v_2h^{-1}g), \forall v_1, v_2 \in \mathbb{Z}[G], g \in G$

Si verifica facilmente che questo è un anello. Inoltre è ben definita, come per ogni anello, la moltiplicazione per un intero n . In particolare, dal secondo punto della definizione segue

$$(nv)g = n(vg)$$

per ogni $v \in \mathbb{Z}[G]$ e $g \in G$.

Notiamo che esiste sempre una mappa $G \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ tale che ad ogni $g \in G$ assegna la funzione g^* definita da

$$g^*(h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = g \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ed è iniettiva e preserva il prodotto. Dato che l'immagine di ogni mappa da un gruppo ad un anello che preserva il prodotto è a sua volta un gruppo, concludiamo che la mappa $g \mapsto g^*$ è un isomorfismo di gruppi.

Consideriamo ora un elemento v non nullo di $\mathbb{Z}[G]$. Siano $g_1, \dots, g_k, k \geq 1$, elementi di G per cui $v(g_i) = n_i \neq 0$ in \mathbb{Z} . Allora possiamo scrivere

$$v = n_1g_1^* + \dots + n_kg_k^*.$$

e dunque, a meno di identificare g con g^* , è possibile scrivere gli elementi di $\mathbb{Z}[G]$ come combinazione lineare di elementi di G . Inoltre si prova facilmente che se $n_1g_1 + \dots + n_kg_k = 0$ e i g_i sono distinti,

allora $n_1 = \dots = n_k = 0$. Segue dunque che la scrittura sopra è unica e $\mathbb{Z}[G]$ è il gruppo abeliano libero generato da G con un naturale prodotto,

$$(\sum_{g \in G}^* n_g g)(\sum_{g \in G}^* m_g g) = \sum_{g \in G}^* (\sum_{uv=g} n_u m_v) g$$

ove le \sum^* hanno coefficienti quasi tutti nulli. Studiando le mappe che coinvolgono questo anello si ricavano i seguenti risultati [CF63, pg. 95-96]:

Teorema 4.2 (Proprietà universale dell'anello gruppale). *Data una mappa $\Phi: G \rightarrow A$, con A gruppo abeliano additivo, allora esiste un'unica estensione ad un omomorfismo additivo $\Phi: \mathbb{Z}[G] \rightarrow A$. Inoltre, se A è un anello con unità e Φ induce un omomorfismo di G in A^* , l'estensione è un omomorfismo di anelli.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità poniamo $\Phi(e) = 0$, con e elemento neutro di G . Ogni elemento v di $\mathbb{Z}[G]$ si scrive unicamente come $v = n_1 g_1 + \dots + n_k g_k$ nelle ipotesi precedenti. Per ottenere l'estensione di Φ a $\mathbb{Z}[G]$ definiamo allora

$$\Phi(n_1 g_1 + \dots + n_k g_k) = n_1 \Phi(g_1) + \dots + n_k \Phi(g_k).$$

Definita in questo modo, Φ preserva banalmente la somma. Dato che ogni altra estensione deve verificare questa proprietà ne segue anche l'unicità. Infine, se A è un anello e Φ preserva il prodotto di G , allora segue

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum_i n_i g_i \sum_j n'_j g'_j\right) &= \Phi\left(\sum_{ij} n_i n'_j g_i g'_j\right) = \sum_{ij} n_i n'_j \Phi(g_i) \Phi(g'_j) = \\ &= \sum_i n_i \Phi(g_i) \sum_j n'_j \Phi(g'_j) = \Phi\left(\sum_i n_i g_i\right) \Phi\left(\sum_j n'_j g'_j\right) \end{aligned}$$

□

Da questo segue facilmente

Corollario 4.3. *Dato un omomorfismo di gruppi $\Phi: G \rightarrow G'$, esiste un'unica estensione ad un omomorfismo di anelli $\Phi: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G']$.*

Di questi omomorfismi ne evidenziamo due che ci verranno utili in seguito. Il primo è l'*abelianizzatore*, con cui intendiamo sia l'omomorfismo di gruppi

$$a: G \rightarrow G/[G, G]$$

che la sua estensione all'anello gruppale. Il secondo è il *trivializzatore*, con cui intendiamo l'estensione della mappa $\varepsilon: G \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $\varepsilon(g) = 1$ per ogni $g \in G$. Nell'anello gruppale tale estensione di ε agisce in questo modo:

$$\varepsilon\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i.$$

In particolare ci concentreremo successivamente sul caso $\mathbb{Z}[H]$, ove H è l'abelianizzato del gruppo di un nodo. Osserviamo infine che la mappa $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ definita da $n \mapsto ne$, dove e è l'identità del gruppo G , è un isomorfismo di anelli. In questo modo possiamo considerare sia G che \mathbb{Z} come sottoinsiemi dell'anello gruppale $\mathbb{Z}[G]$.

Introduciamo ora il calcolo differenziale.

Definizione 4.4. Sia G un gruppo, chiamiamo ε -*derivazione* (o semplicemente *derivazione*) sull'anello gruppale $\mathbb{Z}[G]$ una applicazione $D: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ tale che $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{Z}[G]$ valgano le seguenti:

- (1) $D(v_1 + v_2) = D(v_1) + D(v_2)$,
- (2) $D(v_1 v_2) = (Dv_1)\varepsilon(v_2) + v_1 D(v_2)$.

Questi assiomi ci permettono di verificare le seguenti proprietà:

Lemma 4.5. *Sia $D: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ una derivazione. Valgono allora le seguenti:*

1. $D(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.
2. $D(g^{-1}) = -g^{-1}D(g), \forall g \in G$
3. $D(g^n) = \frac{g^n - 1}{g - 1}D(g), \forall g \in G$

Dimostrazione. 1. Notiamo che da (2) segue che $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$, quindi $D(1) = 0$ e più in generale $D(n) = 0$.

$$2. 0 = D(g^{-1}g) = D(g^{-1}) + g^{-1}D(g).$$

3. Proviamolo per induzione su $|n|$: per $n = 0, \pm 1$ ci si riconduce ai casi precedenti. Sia $|n| > 1$, supponiamo che la formula valga per n positivo:

$$D(g^{n+1}) = D(g^n) + g^n D(g) = \sum_{i=0}^{n-1} g^i D(g) + g^n D(g) = \frac{g^n - 1}{g - 1} D(g).$$

Analogamente si dimostra per n negativo. □

Ora applichiamo questi strumenti alla classe di anelli gruppali che ci interessa studiare, ovvero quella associata a gruppi liberi. Iniziamo introducendo il seguente lemma per giustificare l'esistenza delle derivate di Fox.

Lemma 4.6. *Sia F il gruppo libero generato da x_1, \dots, x_n . Allora, dati w_1, \dots, w_n in $\mathbb{Z}[F]$, esiste un'unica derivazione $D: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ tale che $D(w_i) = x_i$, per $i = 1, \dots, n$.*

Dimostrazione. Se una tale derivazione esiste, allora $D(x_i^{-1}) = -x_i^{-1}w_i$. L'unicità segue come prima dalla definizione di derivazione. Proviamone ora l'esistenza. Sia $w = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, con $m_i \in \mathbb{Z}$, allora definiamo $D(w)$ reiterando $n - 1$ volte al regola del prodotto:

$$D(w) := D(x_1^{m_1}) + x_1^{m_1} D(x_2^{m_2}) + \dots + x_1^{m_1} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} D(x_n^{m_n}).$$

Si deduce anche che $D(uv) = D(u) + uD(v)$. Per dire che una tale D è ben definita non ci resta che vedere che il suo valore su una parola $z = uv$ non dipende dalla presentazione:

$$D(ux_i^\lambda x_i^{-\lambda} v) = D(u) + uD(x_i^\lambda) + ux_i^\lambda D(x_i^{-\lambda}) + uD(v) = D(u) + uD(v) = D(uv) = D(z), \lambda = \pm 1.$$

□

Ad esempio possiamo considerare $D_\varepsilon: \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$, $D_\varepsilon(v) = v - \varepsilon(v), \forall v \in \mathbb{Z}[F]$. Questa è una derivazione in quanto estensione di $\varphi: F \rightarrow F$, $\varphi(g) = g - 1$ che è a sua volta una derivazione:

$$(1) D(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 - \varepsilon(v_1 + v_2) = v_1 - \varepsilon(v_1) + v_2 - \varepsilon(v_2) = D(v_1) + D(v_2);$$

$$(2) D(g_1 g_2) = g_1 g_2 - 1 = g_1 - 1 + g_1(g_2 - 1) = D(g_1) + g_1 D(g_2).$$

A questo punto possiamo definire:

Definizione 4.7. Dato F gruppo libero generato da x_1, \dots, x_n , chiamiamo *derivate di Fox* le derivazioni di $\mathbb{Z}[F]$ date da $D = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ tali che

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

ove δ_{ij} è la delta di Kronecker.

Consideriamo un esempio elementare di derivata di Fox. Sia F come sopra e consideriamo $D = \frac{\partial}{\partial x_1}$:

$$D(x_1) = 1$$

$$D(x_1^2) = D(x_1) + x_1 D(x_1) = 1 + x_1$$

$$D(x_1^3) = D(x_1 x_1^2) = D(x_1) + x_1 D(x_1^2) = 1 + x_1 + x_1^2.$$

E così via. Osserviamo che data una derivazione D ,

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} D(x_i). \quad (4.8)$$

Segue dalle proprietà di $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$ che il membro di destra è una derivazione. Allora ci basta notare che su un generatore di F agiscono allo stesso modo:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} D(x_i) \right) x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_i} D(x_i) = D(x_j)$$

Diamo allora un risultato fondamentale riguardo a queste derivate.

Teorema 4.8. *Sia F il gruppo libero generato da x_1, \dots, x_n ; per ogni $v \in \mathbb{Z}[F]$ vale la seguente formula fondamentale*

$$v - \varepsilon(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} (x_i - 1).$$

Dimostrazione. A questo punto è sufficiente applicare (4.8) alla derivazione $D_\varepsilon : v \mapsto v - \varepsilon(v)$. \square

4.2 Ideali elementari

Ora che abbiamo introdotto questi strumenti vogliamo concentrarci sulla costruzioni degli invarianti che ci eravamo prefissati. Per farlo dobbiamo anzitutto definire una equivalenza tra presentazioni di un gruppo. Successivamente vorremmo trovare, come fatto in precedenza, delle “equivalenze elementari” per riuscire a dimostrare l’indipendenza di un invariante dalla particolare presentazione del gruppo. Iniziamo anzitutto dando alcune definizioni in quest’ambito.

Definizione 4.9. Siano $f, f_1, \dots, f_n \in Q$ gruppo qualsiasi. Diremo che f è *conseguenza* di f_1, \dots, f_n se f è contenuto in ogni sottogruppo normale di Q che contiene tutti gli elementi f_1, \dots, f_n . Chiameremo *insieme delle conseguenze* di f_1, \dots, f_n l’insieme di tutti gli f che sono conseguenza di f_1, \dots, f_n .

Concentriamoci ora sulle presentazioni di gruppi. Siano $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\underline{r} = (r_1, \dots, r_m)$ rispettivamente i generatori del gruppo libero $F(\underline{x})$ e le relazioni (ovvero elementi di $F(\underline{x})$) di un gruppo G . Denotiamo compattamente con $\langle \underline{x} | \underline{r} \rangle$ tale presentazione e avremo che $G = F(\underline{x})/R$, ove R è il sottogruppo normale generato dagli elementi in \underline{r} in $F(\underline{x})$. Con abuso di notazione talvolta useremo la stessa notazione $\langle \underline{x} | \underline{r} \rangle$ per indicare sia il gruppo sia la sua presentazione. Sarà chiaro a seconda del contesto a cosa ci stiamo riferendo. Descriviamo ora le relazioni tra queste presentazioni.

Definizione 4.10. Siano $\langle \underline{x} | \underline{r} \rangle$ e $\langle \underline{y} | \underline{s} \rangle$ due presentazioni di gruppi. Un’applicazione di presentazioni $f: \langle \underline{x} | \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{y} | \underline{s} \rangle$ consiste in un omomorfismo $f: F(\underline{x}) \rightarrow F(\underline{y})$ tale che $f(\underline{r}) \subseteq S$, ove S è l’insieme delle conseguenze di \underline{s} .

Ogni mappa f di questo tipo induce inoltre un omomorfismo di gruppi dato da $f_*: F(\underline{x})/R \rightarrow F(\underline{y})/S$ che soddisfa $f_*\gamma = \delta f$, ove γ e δ sono rispettivamente gli omomorfismi canonici $F(\underline{x}) \rightarrow F(\underline{x})/R$ e $F(\underline{y}) \rightarrow F(\underline{y})/S$.

Definizione 4.11. Una applicazione di presentazioni $f: \langle \underline{x} | \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{y} | \underline{s} \rangle$ è detta una *equivalenza di presentazioni* se l’omomorfismo indotto f_* è un isomorfismo.

Diamo ora un risultato sulle equivalenze di presentazioni dovuto a Tietze [CF63, pg.44-45].

Teorema 4.12. *Due presentazioni finite sono tra loro equivalenti se e solo se è possibile passare da una all'altra con un numero finito di operazioni elementari del tipo:*

$$I \ \Phi : \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{x} \mid \underline{r} \cup m \rangle, \ \Phi = Id_{F(\underline{x})}, m \in R$$

$$II \ \Phi' : \langle \underline{x} \mid \underline{r} \cup m \rangle \rightarrow \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle, \ \Phi' = Id_{F(\underline{x})}, m \in R$$

$$III \ \Psi : \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{x} \cup y \mid \underline{r} \cup y\xi^{-1} \rangle, \ \Psi : F(\underline{x}) \hookrightarrow F(\underline{x} \cup y), y \notin \underline{x}, \xi \in F(\underline{x})$$

$$IV \ \Psi' : \langle \underline{x} \cup y \mid \underline{r} \cup y\xi^{-1} \rangle \rightarrow \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle, \ \Psi'(x) = x \ \forall x \in \underline{x}, y \notin \underline{x}, \xi \in F(\underline{x})$$

dove \cup significa allungare la n -upla con quell'elemento.

Queste operazioni non sono altro che la scrittura formale di operazioni che in realtà non aggiungono o tolgono nulla al gruppo. Le prime due infatti consentono di aggiungere o togliere una relazione che sia derivabile dalle altre. La terza permette invece di aggiungere un generatore che deve essere scrivibile come parola nei generatori già esistenti (questa informazione è contenuta nella relazione $y\xi^{-1}$). Analogamente, se un generatore si può scrivere come parola nei rimanenti generatori, allora è possibile rimuoverlo insieme alla relazione che ne dava la scrittura tramite l'ultima operazione. Vediamo ad esempio come queste operazioni si possono applicare all'esempio del gruppo del nodo a trifoglio già trattato nel Capitolo 2. In quell'occasione avevamo detto che era possibile dimostrare che $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle &= \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a = xy, b = yxy \rangle \\ &= \langle x, y, a, b \mid xyx = yxy, a^3 = b^2, a = xy, b = yxy, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2 \rangle \\ &= \langle x, y, a, b \mid a^3 = b^2, x = a^{-1}b, y = b^{-1}a^2 \rangle \\ &= \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle. \end{aligned}$$

Sia ora $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ una presentazione per il gruppo $G = F/R$ e sia $H = G/[G, G]$ il suo abelianizzato. Ricordiamo ora che con γ ed a indichiamo rispettivamente le mappe $F \rightarrow F/R$ e l'abelianizzatore, intese sia come omomorfismi di gruppi che come omomorfismi di anelli gruppalì. Consideriamo allora la seguente composizione:

$$\mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{a} \mathbb{Z}[H].$$

che ci permette di definire la matrice di Alexander.

Definizione 4.13. Data la notazione sopra, definiamo la *matrice di Alexander* della presentazione $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ di G come $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{Z}[H])$ definita da

$$a_{ij} = a\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$$

Remark. La matrice di Alexander definita alla fine del Capitolo 3 e questa matrice sono matrici distinte che presentano lo stesso nome.

Questa definizione si può dare in realtà sostituendo a $\mathbb{Z}[H]$ un qualsiasi anello commutativo R . Possiamo ora definire finalmente definire gli ideali elementari.

Definizione 4.14. Definiamo il *k-esimo ideale elementare* della matrice di Alexander A con entrate in R come:

$$E_k(A) = \begin{cases} \text{ideale generato dai minori di ordine } n-k & \text{se } 0 < n-k \leq m, \\ 0 & \text{se } n-k > m, \\ R & n-k \leq 0. \end{cases}$$

Dato che il determinante di una matrice può essere scritto come combinazione dei cofattori di una riga o colonna segue immediatamente che questi ideali formano una catena ascendente

$$E_0(A) \subset E_1(A) \subset \dots \subset E_n(A) \subset E_{n+1}(A) = R.$$

Introduciamo ora una relazione di equivalenza sulle matrici $M_{m,n}(R)$ definita dalle seguenti operazioni:

(1) Operazioni elementari di Gauss:

- (a) Scambio di due righe;
- (b) Sommare ad una riga un multiplo di un'altra;
- (c) Moltiplicare la matrice per un elemento $x \in R^*$ invertibile;

(2) Aggiungere una riga di zeri, $A \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$;

(3) Dato un vettore riga a di lunghezza n , aggiungere una riga e colonna nel modo seguente, $A \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$.

Si verifica che questa è effettivamente una relazione di equivalenza. Diciamo allora che due matrici sono equivalenti se differiscono per un numero finito di operazioni di questo tipo. L'utilità di questa relazione risiede nel seguente:

Lemma 4.15. *Siano $A \in M_{m,n}(R)$ e $A' \in M_{m',n'}(R)$ matrici equivalenti; allora esse definiscono la stessa catena di ideali elementari.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre che A ed A' differiscano di una sola delle operazioni (1), (2) o (3). Per le operazioni di tipo (1) il risultato è noto: formalmente cambio i minori al più moltiplicando per un invertibile. Supponiamo ora che le matrici differiscano per una operazione del tipo (2). In questo caso abbiamo che $n' = n$ e $m' = m + 1$. Inoltre se $0 < n - k \leq m$ allora $0 < n' - k \leq m'$. In questo caso abbiamo $E_k(A) = E_k(A')$. L'unico caso particolare è dato quando $n - k = m'$. Qui $E_k(A) = 0$ per definizione e d'altra parte $E_k(A') = 0$ poiché ogni sottomatrice quadrata di ordine m' ha una riga di zeri. Consideriamo infine matrici che differiscono per un'operazione del tipo (3). Qui $n' = n + 1$ e $m' = m + 1$. Come prima notiamo che l'asserto è sempre vero se $n - k > m$. Supponiamo ora $n - k \leq 0$; allora $n' - k \leq 1$. In questo caso dalla definizione $E_k(A) = R$ e così vale anche per A' : se $n' - k \leq 0$, segue dalla definizione, se $n' - k = 1$, $E_k(A')$ è l'ideale generato dagli elementi di A' , tra cui c'è 1. Resta da dimostrare il caso $0 < n - k \leq m$. Data una sottomatrice di ordine $n - k$ di A , sotto queste ipotesi è sempre possibile estenderla in modo naturale ad una sottomatrice di A' di ordine $n' - k$: è sufficiente orlare la sottomatrice con gli opportuni elementi dell'ultima riga e colonna di A' . Sviluppando per Laplace nell'ultima colonna otteniamo che il determinante di queste due sottomatrici è uguale, perciò $E_k(A) \subset E_k(A')$. Viceversa, data una sottomatrice di ordine $n' - k$, possono verificarsi due casi: questa contiene l'ultima riga oppure no. Se la contiene, sviluppando in quella riga vediamo che il determinante della sottomatrice è un generatore per $E_k(A)$. Se non la contiene, il suo determinante appartiene ad $E_{k-1}(A) \subset E_k(A)$. Concludiamo quindi che in entrambi i casi $E_k(A') \subset E_k(A)$. \square

Sia data una applicazione di presentazioni $f: \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{y} \mid \underline{s} \rangle$ come sopra. Detti G e \tilde{G} i relativi gruppi e f_* l'applicazione indotta su di essi, indichiamo con $f_{**}: G/[G, G] \rightarrow \tilde{G}/[\tilde{G}, \tilde{G}]$ l'applicazione indotta da f_* sugli abelianizzati. In particolare, se f è un'equivalenza, avremo che f_{**} è un isomorfismo e $G = \tilde{G}$. Possiamo dare ora un risultato sull'estensione di quest'ultima agli anelli gruppali.

Teorema 4.16. *Sia $f: \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{y} \mid \underline{s} \rangle$ un'equivalenza di presentazioni finite per un gruppo G e siano $\{E_k\}$ ed $\{\tilde{E}_k\}$ le relative catene di ideali elementari associati. Allora $f_{**}(E_k) = \tilde{E}_k, \forall k$.*

Dimostrazione. Da quanto detto sopra sappiamo che f_{**} è un isomorfismo. Inoltre possiamo supporre, grazie al Teorema di Tietze, che f sia una delle operazioni elementari descritte nel teorema. In particolare allora ci basterà dimostrare i due casi $f = \Phi$ e $f = \Psi$:

Studiamo anzitutto il caso $f = \Phi$: ciò significa che $\langle \underline{y} \mid \underline{s} \rangle = \langle \underline{x} \mid \underline{r} \cup m \rangle$, inoltre $f: F(\underline{x}) \rightarrow F(\underline{x})$ è l'identità, quindi anche f_* e f_{**} sono l'identità. In virtù del lemma 4.15 è sufficiente allora mostrare che le rispettive matrici di Alexander sono equivalenti. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{Z}[H])$ la matrice di Alexander della presentazione $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$, allora quella relativa a $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \cup m \rangle$ sarà del tipo:

$$\begin{bmatrix} A \\ a\gamma\left(\frac{\partial m}{\partial x_j}\right) \end{bmatrix} \in M_{m+1,n}(\mathbb{Z}[H]).$$

Proviamo che l'ultima riga di questa matrice è combinazione lineare delle precedenti. Come sappiamo dal Teorema 4.12, m deve appartenere ad R , ovvero essere scrivibile come $m = \prod_{k=1}^l u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}$, ove $r_{i_k} \in R$ e $u_k \in F$. A questo punto basta usare che $\gamma(r_{i_k}) = 1$ e le regole della derivata di Fox:

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{\partial m}{\partial x_j}\right) &= \gamma\left(\sum_{k=1}^l \left(\prod_{t=1}^{k-1} u_t r_{i_t}^{\alpha_t} u_t^{-1}\right) \frac{\partial(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1})}{\partial x_j}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^l \gamma\left(\frac{\partial(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1})}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^l \alpha_k \gamma(u_k) \gamma\left(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}\right). \end{aligned}$$

Ora basta porre $c_k = \alpha_k a(\gamma(u_k))$ e si ha

$$a\gamma\left(\frac{\partial m}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^l c_k a_{i_k j}.$$

Sia ora invece $f = \Psi: \langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle \rightarrow \langle \underline{x} \cup \underline{y} \mid \underline{r} \cup \underline{y} \xi^{-1} \rangle$, $F(\underline{x}) \hookrightarrow F(\underline{x} \cup \underline{y})$, come prima dobbiamo mostrare che, detta \tilde{A} la matrice di Alexander della seconda presentazione, allora $\Psi_{**}(E_k(A)) = E_k(\tilde{A})$. Come prima, questo segue dal fatto che $\Psi_{**}(A)$ e \tilde{A} sono equivalenti. In particolare mostriamo che

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \Psi_{**}(A) & 0 \\ a' & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[F(\underline{x})] & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{Z}[F(\underline{x} \cup \underline{y})] \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma \\ \mathbb{Z}[G] & \xrightarrow{\Psi_*} & \mathbb{Z}[G] \\ \downarrow a & & \downarrow a \\ \mathbb{Z}[H] & \xrightarrow{\Psi_{**}} & \mathbb{Z}[H] \end{array}$$

Allora per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$:

$$\Psi_{**}(a_{ij}) = \Psi_{**}\left(a\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)\right) = a\gamma\Psi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = a_{ij}.$$

Inoltre abbiamo che $\frac{\partial r_i}{\partial y} = 0$, $i = 1, \dots, m$ e $\frac{\partial y \xi^{-1}}{\partial y} = 1$ e concludiamo. \square

Ricordiamo adesso quanto affermato nel Capitolo 3: se G è il gruppo di un nodo K , allora il suo abelianizzato H è isomorfo a \mathbb{Z} . Da ciò segue anche che allora il relativo anello gruppale $\mathbb{Z}[H]$ è isomorfo a $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Quest'ultimo non è un anello a ideali principali, ma è comunque un dominio a fattorizzazione unica. Resta perciò ben definita la seguente:

Definizione 4.17. Sia K un nodo con gruppo G , $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ una presentazione di G ; chiamiamo l' h -esimo polinomio Δ_h della presentazione $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ l'M.C.D. dei minori di ordine $n - h$ della sua matrice di Alexander. Equivalentemente, Δ_h può essere definito come il generatore del minimo ideale principale contenente E_h .

Per come è posta la definizione, Δ_h è definito a meno di elementi invertibili di $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, ovvero $\pm t^{\pm n}$. La seconda definizione equivalente data sopra viene dal fatto che il più piccolo ideale contenente un dato insieme finito è il più piccolo ideale contenente l'ideale generato dagli elementi di questo insieme finito. Ciò che vogliamo dimostrare è che questo polinomio è un invariante per il nodo K .

Teorema 4.18. Sia Δ_h l' h -esimo polinomio di un nodo K . Allora Δ_h è un invariante di K .

Dimostrazione. Ci basta provare che, se f è una equivalenza di presentazioni di G e Δ_h, Δ'_h sono i relativi polinomi, allora $f_{**}(\Delta_h) = \Delta'_h$. Dalla definizione equivalente sappiamo che $E_k \subseteq (\Delta_h), E'_k \subseteq (\Delta'_h)$; dal Teorema 4.16 sappiamo inoltre che $f_{**}(E_h) = E'_h$, perciò $E'_h = f_{**}(E_h) \subseteq f_{**}(\Delta_h)$. Dato che $f_{**}(\Delta_h)$ è un ideale principale e (Δ'_h) è il minimo ideale principale che contiene E'_h , allora $\Delta'_h \subseteq f_{**}(\Delta_h)$. Seguendo un argomento analogo, $f_{**}^{-1}(\Delta'_h) \supseteq (\Delta_h)$, e quindi $f_{**}(E_h) \subseteq f_{**}(\Delta_h) \subseteq \Delta'_h$. \square

Notiamo come questi polinomi Δ_h siano un invariante strettamente più debole degli ideali elementari. Possiamo vederne un esempio nel caso del *nodo di Stevedore* 6_1 e del nodo 9_{46} . Per entrambi infatti si ha che $\Delta_1 = 2 - 5t + 2t^2$ e $\Delta_h = 1, \forall h \geq 1$. D'altra parte abbiamo che gli ideali elementari sono

$$\begin{cases} E_k = (1), k \geq 2 \\ E_1 = (2 - 5t + 2t^2) \end{cases} \quad \text{per } 6_1, \quad \begin{cases} E_k = (1), k \geq 3 \\ E_2 = (2 - t, 1 - 2t) \\ E_1 = (2 - 5t + 2t^2) \end{cases} \quad \text{per } 9_{46}$$

Non solo, notiamo anche che due nodi con stessa matrice di Alexander possono avere gruppi non isomorfi, come infatti avviene per 7_4 e 9_2 .

Diamo ora un ultimo risultato.

Lemma 4.19. *Sia A la matrice di Alexander A di una presentazione finita $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$ di un gruppo di un nodo. Se essa soddisfa la relazione $a\gamma x_i = a\gamma x_j, \forall i, j = 1, \dots, n$, allora A è equivalente alla matrice ottenuta rimpiazzando una sua qualsiasi colonna con una di zeri.*

Dimostrazione. Dal Teorema 4.8 abbiamo

$$r_i - 1 = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) (x_j - 1).$$

Ricordando inoltre che $\gamma(r_i) = 1$, possiamo ricavare:

$$0 = a\gamma(r_i) - 1 = \sum_{j=1}^n a\gamma \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) (a\gamma(x_j) - 1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (a\gamma(x_1) - 1)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'ipotesi. Ricordiamo ora che $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ è un dominio di integrità e $(a\gamma(x_1) - 1) \neq 0$, in quanto $a\gamma(x_1)$ è un generatore del gruppo abelianizzato ciclico infinito $\langle \underline{x} \mid \underline{r} \rangle$, concludiamo che $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$. Allora sommando ad una qualsiasi colonna le restanti si ottiene una colonna di zeri. \square

Questo lemma ci viene utile per calcolare E_1 . Preso un nodo infatti consideriamo una presentazione di Wirtinger del suo gruppo G data da n generatori ed $n - 1$ relazioni. Una tale presentazione rientra nelle ipotesi del lemma appena visto, perciò, a meno di equivalenza, possiamo supporre che la matrice di Alexander $A \in M_{n-1, n}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ sia del tipo $A = [\tilde{A} \ 0], \tilde{A} \in M_{n-1}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$. Ma allora l'ideale generato da E_1 è principale ed è generato da $\det(\tilde{A})$.

Infine, vale la pena notare che, tramite uno studio che passa tramite il rivestimento ciclico infinito, si può dimostrare (si veda [PP98, Teorema 5.4.4]) che il polinomio Δ_1 che genera E_1 è esattamente il polinomio di Alexander Δ_K . Riprendiamo il solito esempio del nodo a trifoglio per vedere che questi polinomi coincidono.

Sia K il nodo a trifoglio classico. Come visto in precedenza, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$, perciò la matrice di Alexander della presentazione associata è data da

$$a_{11} = a\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} (xyx - yxy) \right) = a\gamma(1 + xy - y), \quad a_{12} = a\gamma \left(\frac{\partial}{\partial y} (xyx - yxy) \right) = a\gamma(x - 1 - yx)$$

ove abbiamo usato il fatto che, in generale, data la relazione $r_j = s_j$, ad esso corrisponde il relatore $r_j s_j^{-1}$:

$$\frac{\partial r_j s_j^{-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial r_j}{\partial x_i} - r_j s_j^{-1} \frac{\partial s_j}{\partial x_i}$$

da cui segue

$$a_{ji} = a\gamma\left(\frac{\partial r_j s_j^{-1}}{\partial x_i}\right) = a\gamma\frac{\partial}{\partial x_i}(r_j - s_j).$$

Dunque, ponendo $a\gamma(x) = a\gamma(y) = t$, otteniamo la matrice di Alexander di K :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - t + t^2 & -1 + t - t^2 \end{bmatrix},$$

da cui ricaviamo, come voluto, che $\Delta_1(t) = t^2 - t + 1$, in concordanza con quanto ottenuto nel Capitolo 3.

Tabella dei nodi



Bibliografia

- [BZ03] Gerhard Burde e Heiner Zieschang. *Knots*. Berlin: Walter de Gruyter, 2003.
- [Cai60] Stewart S. Cains. «An elementary proof of the Jordan-Schoenflies Theorem». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* (1960).
- [CF63] Richard H. Crowell e Ralph H. Fox. *Introduction to knot theory*. New York: Springer-Verlag, 1963.
- [Fox49] Ralph H. Fox. «A Remarkable Simple Closed Curve». In: *Annals of Mathematics* (1949).
- [GL89] Cameron McA. Gordon e John E. Luecke. «Knots are determined by their complements». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* (1989).
- [GP74] Victor Guillemin e Alan Pollack. *Differential Topology*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1974.
- [Hak61] Wolfgang Haken. «Theorie der Normalflächen». In: *Acta mathematica* (1961).
- [Kos88] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. Milano: Zanichelli, 1988.
- [Lev69] Jerome Levine. «Knot cobordism group in codimension two». In: *Commentarii Mathematici Helvetici* (1969).
- [Liv93] Charles Livingstone. *Knot theory*. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1993.
- [Mas77] William S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977.
- [PP98] Paolo Papi e Claudio Procesi. *Invarianti di nodi*. Bologna: Pitagora Editrice, 1998.
- [PS96] Victor V. Prasolov e Alexei B. Sossinsky. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Rhode Island: American Mathematical Society, 1996.
- [Rol76] Dale Rolfsen. *Knots and Links*. Rhode Island: American Mathematical Society, 1976.
- [RS72] Colin P. Rourke e Brian J. Sanderson. *Introduction to piecewise-linear topology*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [Ste36] Norman E. Steenrod. «Universal Homology Groups». In: *Annals of Mathematics* (1936).
- [SW58] Arnold Shapiro e John H. C. Whitehead. «A proof and extension of Dehn's lemma». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* (1958).
- [Whi39] John H. C. Whitehead. «On the asphericity of regions in a 3-sphere». In: *Fundamenta Mathematicae* (1939).
- [Whi87] Whilbur Whitten. «Knot complements and groups». In: *Topology* (1987).