N. matricola 349123 Padova 14 luglio 2004

PAVAN PAOLA

GEOMETRIA DELLE COORDINATE

LA RETTA E IL PIANO AMPLIATI

COORDINATE OMOGENEE E COORDINATE PROIETTIVE NEL PIANO

TRIANGOLO FONDAMENTALE DELLE COORDINATE

OMOGRAFIE TRA PIANI

UN TEOREMA DELL'OMOGRAFIA

Geometria delle coordinate

L'idea di base della geometria analitica, e che collega la geometria all'algebra, è quella di identificare un punto dello spazio con una sequenza ordinata di numeri.

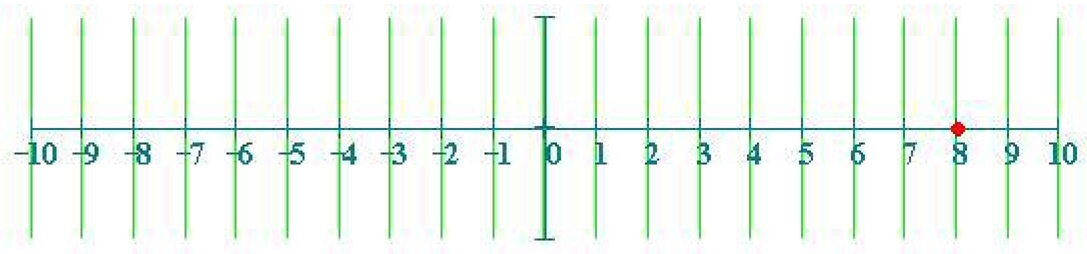
Il metodo delle coordinate

Come individuare la posizione di un punto sopra una retta, nel piano.

- Su una retta scegliamo un punto che assumiamo come origine O a cui associeremo ***0*** e un altro punto U (punto unitario) a cui sarà associato 1 . L'origine è il punto di partenza, la distanza tra l'origine e il punto unitario stabilisce una scala sulla nostra retta. Ogni punto della semiretta che contiene il punto 1 può essere individuato tramite la sua distanza dall'origine, rappresentata come multiplo della distanza tra 0 e 1; se un punto sta sulla semiretta opposta, sarà individuato dalla sua distanza da 0, questa volta preceduta da un segno negativo.

In questo modo è stato scelto sulla retta un ***riferimento cartesiano*** e la retta è denominata ***retta cartesiana.***

Si può dire che ogni punto corrisponde a un numero reale, che è la sua coordinata (possiamo denominarla ascissa), e viceversa ogni numero reale corrisponde a un punto.



Distanza tra due punti di una retta cartesiana

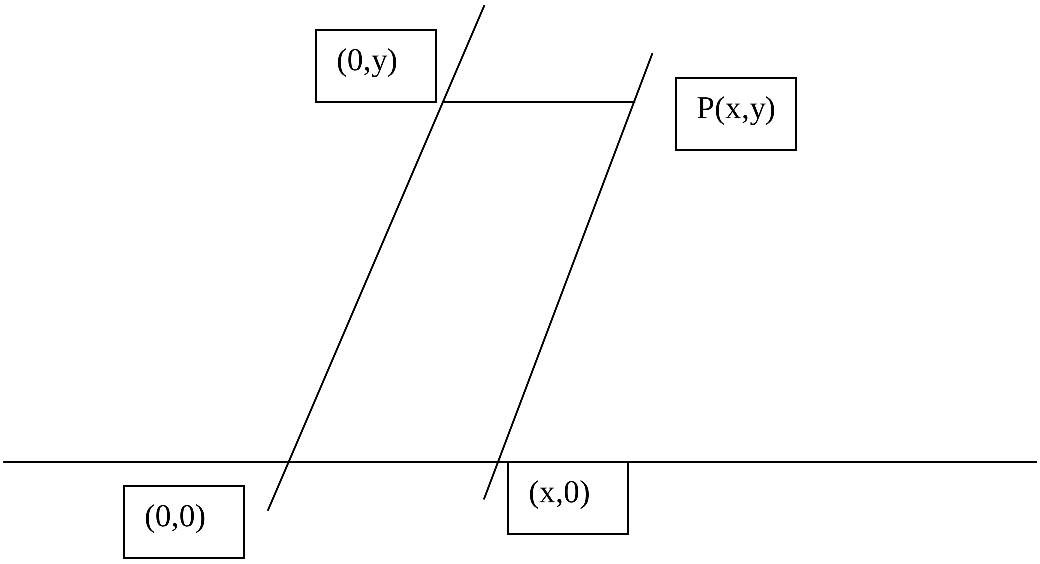
Siano ***P (x_1)*** e ***Q (x_2)*** due punti della retta cartesiana r. Definiamo distanza di P da Q , e scriviamo ***d(P,Q)***, il valore assoluto $|x_1 - x_2|$, in simboli:

$$\mathbf{d(P,Q)=}\ |x_1 - x_2|$$

Poiché la retta può essere pensata come un insieme di punti che sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali e su di essa, dati due punti P e Q, si può calcolare la loro distanza, essa costituisce uno spazio unidimensionale e metrico.

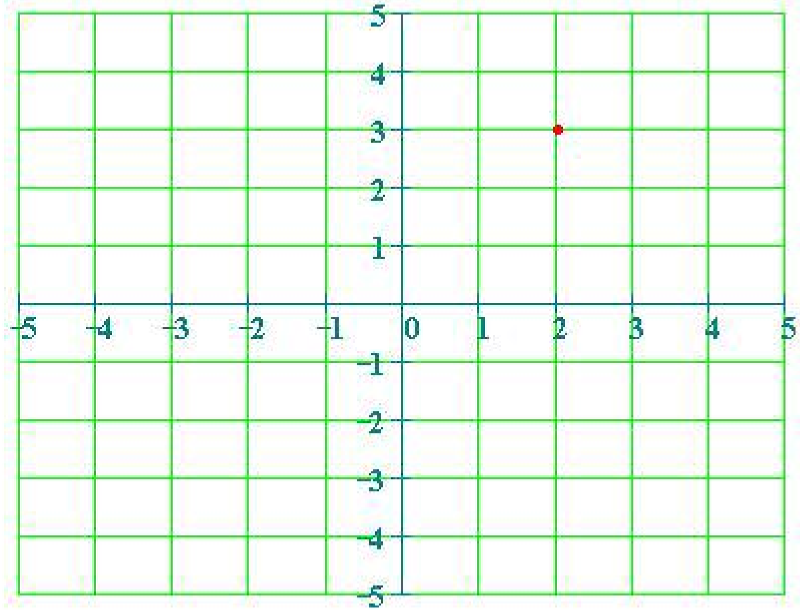
Stabiliamo ora come si può adattare quanto visto finora ad un piano:

- Per stabilire le coordinate dei punti del **piano** , prendiamo in primo luogo due rette cartesiane non parallele, chiamate assi coordinati. Il punto in cui si incontrano, che chiameremo origine, sarà individuato dalla coppia **(0,0) ;**
- i punti del primo asse saranno associati alle coppie ***(x,0)*** ;
- i punti del secondo asse alle coppie ***(0,y);***
- dato ora un punto ***P*** qualsiasi del piano, possiamo tracciare le parallele agli assi coordinati che passano per quel punto e che incontreranno il primo asse in un punto del tipo ***(x,0)*** , il secondo asse in un punto del tipo ***(0,y);***
- la posizione del punto rispetto agli assi coordinati che abbiamo scelto è determinata dalla coppia di numeri ***(x,y)*** ; ***x*** è detta ***ascissa***, ***y*** è l'***ordinata;*** il punto (x,y) è il quarto vertice di un parallelogramma che ha un vertice nell'origine e gli altri vertici in ***(x,0)*** e ***(0,y)***.



Nella geometria delle coordinate possiamo esprimere questa costruzione geometrica definendo le coordinate della somma di due coppie di numeri (cioè di due punti) come la somma delle coordinate corrispondenti :
Qualunque sia il punto P, troviamo quindi che (x,y)=(x,0)+(0,y) , e quindi ogni punto può essere espresso come somma di punti degli assi coordinati.
In questo sistema di coordinate, se scegliamo gli assi coordinati perpendicolari tra loro possiamo definire l'usuale piano cartesiano che siamo abituati a trattare.
Il piano può essere così pensato come un insieme di punti che sono in corrispondenza biunivoca con coppie ordinate di numeri reali. Con coppia ordinata stiamo ad indicare che il primo numero appartiene all'asse delle x, e il secondo all'asse delle y. Ecco che ogni coppia (x,y) appartiene all'insieme RxR, perché la prima coordinata è scelta

sull'asse dei reali e la seconda anche. Questo è il motivo per cui il piano si indica anche con R^2



LA RETTA E IL PIANO AMPLIATI

Uno degli esempi più importanti di spazi metrici sono gli spazi euclidei, in particolare la retta dei reali R e il piano complesso R^2, oggetti che ci sono familiari.

Ricordiamo la definizione di spazio metrico:

Sia X un insieme , i cui elementi sono detti punti, sia $d: X \times X \longrightarrow R$ una applicazione che fa corrispondere le coppie ordinate di X a numeri reali .
L'applicazione d si indica esplicitamente con $d(x , y)$, rappresenta la distanza fra i due punti e si chiama metrica se soddisfa le seguenti condizioni.

- 1- $d(x , y) \geq 0$ per ogni x ed y appartenenti ad X

ciò significa che la distanza d fra due punti qualunque è positiva o nulla

- 2- $d(x , y) = 0 \leftrightarrow x = y$

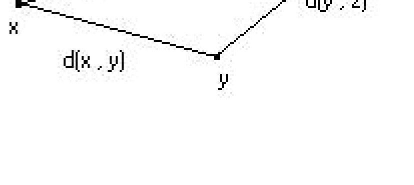
cioè se la distanza fra due punti è nulla, allora i punti coincidono e viceversa

- 3- $d(x , y) = d(y , x)$ per ogni x ed y appartenenti ad X

cioè la distanza è simmetrica

- 4- $d(x , y) \leq d(x , z) + d(y , z)$

è la cosiddetta **disuguaglianza triangolare** :



L'insieme X munito della metrica d è detto **spazio metrico** e si indica con (X ; d).
Gli elementi di X si dicono **punti** e la funzione $d(x , y)$ si chiama (come già affermato) **distanza** fra due punti.

Esempi di spazi metrici :

- 1 - **spazio euclideo reale n-dimensionale R^n :**

sia $R^n = R \times R \times \dots \times R$ (n volte) il prodotto cartesiano n-esimo di R (insieme dei numeri reali) ovvero l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali.

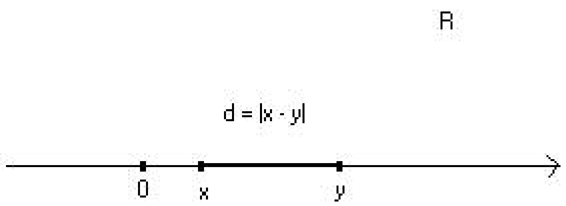
Sia $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ed $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dove x_i ed y_i appartengono ad R per $i = 1, 2, \dots, n$. Sia definita la distanza fra x ed y da :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Le 4 condizioni della definizione di spazio metrico sono soddisfatte (omettiamo la dimostrazione) ed R^n dotato della metrica sopra definita si chiama spazio euclideo reale n-dimensionale.

Lo spazio euclideo è lo spazio della nostra esperienza in cui valgono le regole della geometria euclidea ed in particolare il teorema di Pitagora.

Se $n = 1$ lo spazio metrico R si chiama **retta reale**
Per la retta reale la metrica si riduce a $d(x, y) = |x - y|$.



Se n=2 lo spazio metrico R^2 si chiama piano e la distanza è quella pitagorica

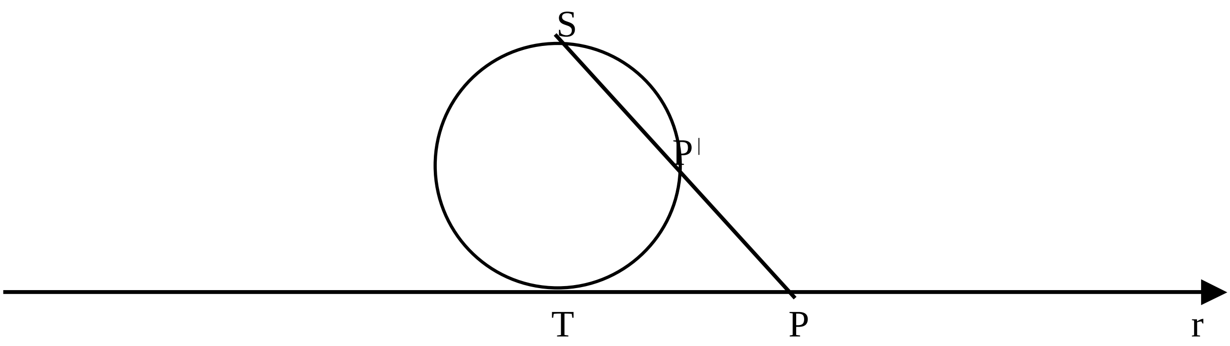
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

dove $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ sono le coordinate dei punti.

La retta è perciò uno spazio metrico, ma non compatto (cioè chiuso e limitato).

Per rendere la retta un insieme compatto è sufficiente aggiungere un punto, definire i suoi intorni, che sono costituiti dal punto stesso e da due semirette aperte. Aggiungendo questi intorni ottengo una topologia nella quale la retta è compatta.

Diamo una giustificazione geometrica.



Siano

- r una retta
- *C* un circolo
- T il punto di tangenza del circolo con la retta
- S il punto diametralmente opposto a T

Preso un qualsiasi punto $P \in r$, si congiunga P con S. La retta PS taglia C in due punti uno è S l'altro è P' .
Nasce così un applicazione fra la retta e il circolo

$$\pi : \text{ retta} \longrightarrow \text{circolo}$$

Questa corrispondenza è in generale "biunivoca", nel nostro caso continua e iniettiva, ma non biiettiva :

- punti distinti della retta vanno in punti distinti del circolo
- l'immagine della retta è costituita da tutti i punti del circolo tranne il punto S. Il punto S , cioè, non proviene da nessun punto della retta.
- Notiamo che se $P \to \infty$, $P' \to S$.

Perciò se ai punti propri della retta aggiungo il punto P_∞, che chiamo punto improprio e ad esso faccio corrispondere il punto S del circolo, la corrispondenza π diventa biiettiva:

$$\pi : \text{ retta} \longleftrightarrow \text{circolo}$$

ad ogni punto della retta corrisponde un punto del circolo, e ad ogni punto del circolo corrisponde un punto della retta.
La retta così definita diviene un insieme chiuso e limitato che chiamo retta ampliata.
Considero ora il piano cartesiano e ad esso aggiungo i punti impropri di tutte le sue rette.
Ottengo quello che si chiama piano ampliato.

COORDINATE OMOGENEE E COORDINATE PROIETTIVE NEL PIANO

Consideriamo un piano reale Π (ampliato e luogo di punti reali e complessi). Fissato in Π un sistema di coordinate cartesiane , le coordinate omogenee sono una terna ordinata di numeri x_0, x_1, x_2 tali che per ogni punto proprio si ha :

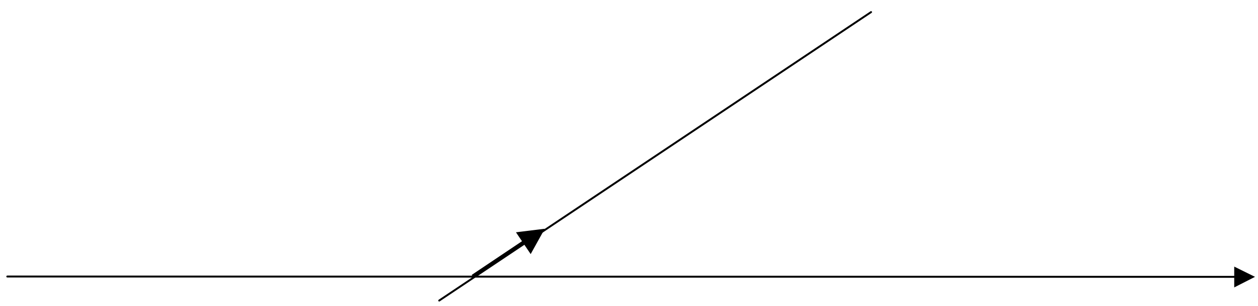
$$x = \frac{x_1}{x_o} \qquad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Per le coordinate omogenee si hanno le seguenti proprietà:

1. Le coordinate omogenee di un punto sono definite a meno di un fattore di proporzionalità. In altre parole, due punti le cui coordinate omogenee differiscono tra loro per una costante di proporzionalità k, corrispondono allo stesso punto in coordinate cartesiane. Infatti, dati P (x_0, x_1, x_2) e Q(kx_0, kx_1, kx_2), ricaviamo da ciascuno di essi il corrispondente in coordinate cartesiane :

   $$\text{P=}\left(x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0} \right) \qquad \text{Q=}\left(x = \frac{kx_1}{kx_0}, y = \frac{kx_2}{kx_0} \right)$$

   Otteniamo quindi che P=Q, come volevamo dimostrare.
2. I punti in coordinate omogenee con coordinata x_0 nulla sono detti punti impropri. Questi punti non hanno apparentemente un significato geometrico nello spazio cartesiano. Un punto improprio rappresenta una direzione, quindi un vettore OP con P=(x,y) generico mediante le coordinate omogenee $(0, x_1, x_2)$



X

Siano x_0, x_1, x_2 le coordinate di un punto qualsiasi P(x_0, x_1, x_2) del piano. Sia data inoltre una sostituzione lineare del tipo $y = Ax$, col modulo del determinante $D = |A| \neq 0$.
E' possibile rappresentare tale trasformazione con il sistema :

$$\begin{cases} y_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 \\ y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \qquad \text{A=}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

dove A è la matrice 3x3 della trasformazione
Allora il punto P determina, a meno di un fattore di proporzionalità, i tre numeri non tutti nulli x_0, x_1, x_2 e questi , mediante la $y = Ax$, determinano, a meno di un fattore di proporzionalità, i tre numeri y_0, y_1, y_2 ; i quali sono ancora non tutti nulli poiché $D = |A| \neq 0$. Viceversa, dati, a meno di un fattore di proporzionalità, tre numeri y_0, y_1, y_2, non tutti nulli, mediante la sostituzione lineare $x = A^{-1}y$ inversa della precedente risultano determinate le coordinate cartesiane omogenee di un punto P di Π.
I punti, P di Π sono in questo modo, cioè attraverso il sistema cartesiano ausiliario fissato e la sostituzione lineare prescelta $y = Ax$, posti in corrispondenza biunivoca con le terne y_0, y_1, y_2 di numeri complessi, non considerando come distinte due terne tra di loro proporzionali, ed escludendo la terna di valori nulli. I numeri della terna y_0, y_1, y_2 possono quindi assumersi come coordinate omogenee dei punti P di Π: Esse si dicono **coordinate proiettive** (omogenee) di P.
La corrispondenza così definita si chiama un sistema di coordinate proiettive omogenee del piano ampliato.
Il piano diventa uno " **spazio proiettivo**" se , oltre ad un certo sistema di coordinate proiettive date, si ammettono tutti e soli quelli che provengono da trasformazioni lineari di questo.
Si verifica che :

1. La nozione di coordinate proiettive non dipende dal particolare sistema di riferimento. Infatti: dato un sistema di coordinate proiettive (x), tutti gli altri si ottengono da questo con una trasformazione lineare del tipo: y=Ax , trasformazione che è una relazione di equivalenza.
2. Se abbiamo due sistemi di coordinate proiettive y_0, y_1, y_2 e z_0, z_1, z_2 possiamo entrambi riferirli al medesimo sistema di coordinate x_0, x_1, x_2 in questo modo:

$$y=Ax \qquad \text{perciò } x=A^{-1}y \qquad |A| \neq 0$$

$$\text{con} \quad |B| \neq 0$$

$$z=Bx \quad \Rightarrow \quad z=Cy \qquad |C| \neq 0$$

   Passo da un sistema ad un altro con una sostituzione lineare.

3. Le coordinate cartesiane si possono interpretare come particolari coordinate proiettive :alla coppia (x,y) posso associare la terna in coordinate proiettive
(ρ, ρx, ρy), dove ρ è un numero reale diverso da zero.

4. Se ho un sistema di coord proiettive y_0, y_1, y_2 e, mediante la sostituzione z=By $|B| \neq 0$, passo al sistema di coord. z_0, z_1, z_2, anche queste ultime sono coordinate proiettive. Infatti

$$y=Ax \qquad z=By \quad \Rightarrow \quad z=BAx \qquad \mathbf{z=Cx} \qquad \text{con } C=AB$$

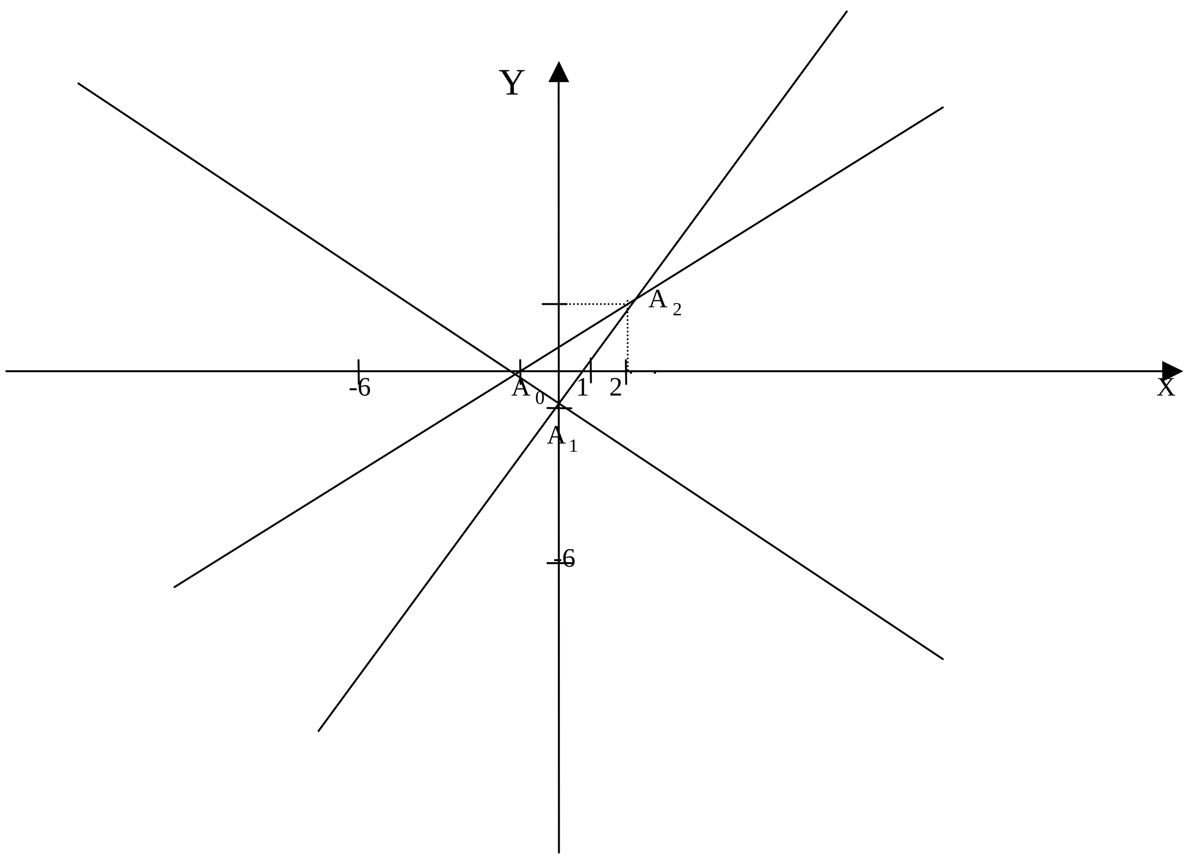
$$(\; |A| \neq 0 \neq |B| \quad \Rightarrow \quad |C| \neq 0 \;)$$

TRIANGOLO FONDAMENTALE DELLE COORDINATE

Consideriamo un sistema di coordinate proiettive y_0, y_1, y_2 in un piano.
I tre punti non allineati che sono :
A_0=(1,0,0) A_1=(0,1,0) A_2=(0,0,1) si dicono i punti fondamentali (vertici del triangolo fondamentale) del sistema di coordinate proiettive fissate.
I lati a_0, a_1, a_2 di questo triangolo sono tre rette che hanno in coordinate proiettive equazioni : $y_0 = 0$ $y_1 = 0$ $y_2 = 0$
Queste rette non passano per un medesimo punto, poichè la matrice delle loro coordinate ha determinante diverso da zero. Infatti

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si dice punto unità U del sistema il punto di coordinate proiettive $y_0 = y_1 = y_2$ cioè U(1,1,1). Poiché il punto unità U non appartiene ai lati del triangolo fondamentale, i vertici A_0, A_1, A_2 e U sono quattro punti a tre a tre non allineati.
Viceversa si può dimostrare che quattro punti A_0, A_1, A_2,U arbitrari , a tre a tre non allineati si possono sempre interpretare rispettivamente come punti fondamentali e punto unità di un sistema di coordinate proiettive che risulta da essi determinato.
Per dimostrarlo proviamo a fare un esempio numerico



Sia dato un sistema di coordinate proiettive (x) e quattro punti a tre a tre non allineati di coordinate:

A_0(-1,1,0) A_1(1,0,-1) A_2(1,2,2) e U(1,3,1). Esiste ed è unico un sistema di coordinate proiettive che ha A_0 ,A_1, A_2 come punti fondamentali e U come punto unità. Questo significa che esiste una trasformazione lineare y=Ax e quindi un sistema di coordinate proiettive (y) nel quale le coordinate dei punti diventano :

$A_0^|$ (1,0,0) $A_1^|$ (0,1,0) $A_2^|$ (0,0,1) $U^|$=(1,1,1).

Posso cercare la matrice del cambiamento di coordinate A , imponendole le condizioni desiderate :

se A=$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ è la matrice della trasformazione , impongo le condizioni seguenti:

$$A_0^| = A\,A_0 \qquad A_1^| = A\,A_1 \qquad A_2^| = A\,A_2$$

cioè

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ciò che ottengo è un sistema a 9 equazioni a 9 incognite che sono le $a_{i,j}$ della matrice A. Risolvendo tale sistema ottengo la matrice che cerco.

$$A=\begin{vmatrix} -2/5 & 3/5 & -2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{vmatrix}$$

Un metodo meno laborioso è pensare alle coordinate (x) come trasformate lineari delle (y).

Si dovrà avere, perciò, X=DY

Quindi la matrice D si può trovare con le seguenti condizioni:

$$\lambda_0 A_0 = DA_0^| \qquad \lambda_1 A_1 = DA_1^| \qquad \lambda_2 A_2 = DA_2^|$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ottengo una matrice con parametri λ così fatta:

$$D=\begin{vmatrix} -\lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_0 & 0 & 2\lambda_2 \\ 0 & -\lambda_1 & 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

La matrice D ha determinante diverso da zero poiché i punti presi non sono tra loro allineati.
Ora basta scegliere i parametri λ in modo che

$$U = DU'$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ottengo la matrice $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ che è l'inversa di A. Ho cioè $A = D^{-1}$

Omografie tra piani

Siano dati due piani δ, δ^1 e siano (x_0,x_1,x_2), coordinate proiettive associate in δ ed analogamente (y_0,y_1,y_2) coordinate proiettive associate in δ^1.
Una sostituzione lineare associata , che operi sopra le coordinate proiettive dei due piani:

(1) $\qquad y = Ax, \qquad\qquad (con \quad |A| \neq 0),$

assieme alla sua inversa :

(2) $\qquad x = A^{-1}y$

determina e rappresenta una corrispondenza biunivoca Ω tra i punti (e rette) dei due piani δ, δ^1 che si dice **un'omografia.**
Le (1) e (2) si dicono **equazioni dell'omografia**. Si verifica che :

1. La definizione ora data di omografia è indipendente dai particolari sistemi di coordinate proiettive fissati nei due piani δ, δ^1 . Infatti eseguiamo, rispettivamente in δ e δ^1, le trasformazioni sulle coordinate proiettive

   $$\bar{x} = Bx \qquad (|B| \neq 0)$$
   $$\bar{y} = Cy \qquad (|C| \neq 0)$$

   Passando, col prodotto di tre sostituzioni lineari, da $\bar{x}$ ad x, da x a y, da y a $\bar{y}$, e ricordando che $y = Ax$ si ottiene:

   $\bar{y} = CAB^{-1}\ \bar{x},$ posto $D = CAB^{-1}$, $\quad (|D| \neq 0),$

risulta

$$\bar{y} = D\ \bar{x}$$

2. I due piani δ e δ^1 sono dati nell'ordine δ , δ^1 . Col simbolo Ω si indica più particolarmente l'omografia "diretta", rappresentata dalle sostituzioni (1), con cui si passa dal primo piano δ al secondo piano δ^1 . La sua corrispondenza inversa, che porta da δ^1 a δ, rappresentata dalle (2), si dice l'omografia "inversa" della Ω e si indica con Ω^{-1}.
3. L'insieme delle omografie di un piano in sé è un gruppo rispetto alla composizione. Vediamo perché:
   Le corrispondenze omografiche godono delle proprietà transitiva ed associativa. Infatti, se un omografia Ω_1 tra piani δ e δ^1 ha equazione:

$$y = Ax$$

ed un'omografia Ω_2 tra piani δ^1 e δ^{11} ha equazione:

$$z = By\ .$$

Posto $$D = BA$$

la sostituzione lineare prodotto:

$$z = BAx = Dx$$

stabilisce una omografia Ω tra i due piani δ^1 e δ^{11} che è appunto il prodotto delle omografie Ω_1, Ω_2. Si scrive $\Omega = \Omega_1\ \Omega_2$.
In particolare, detta I l' identità, tra due piani sovrapposti $\delta=\delta^1$, rappresentata dalla sostituzione identica y = I x ,cioè la corrispondenza in cui ad ogni punto P di $\delta = \delta^1$ corrisponde lo stesso punto, si ha $\Omega\ \Omega^{-1} = I$.
Sia data inoltre una terza omografia Ω_3 tra due piani δ^{11} e δ^{111} con l'equazione:

$$t = Cz$$

Poiché il prodotto di matrici gode della proprietà associativa, posiamo
Porre:

$$D = C(BA) = (CB)A = CBA.$$

Le sostituzioni lineari prodotto:

$$t = CBAx = Dx$$

rappresentano quindi un' omografia Ω tra i piani δ e δ^{111} , che è il prodotto delle tre omografie Ω_1 , $\Omega_2\ \Omega_3$, comunque esse si associno:

$$\Omega = (\Omega_1\ \Omega_2)\ \Omega_3 = \Omega_1\ (\Omega_2\ \Omega_3) = \Omega_1\ \Omega_2\ \Omega_3\ .$$

Supponiamo ora che i vari piani relativi alle osservazioni precedenti coincidano, consideriamo cioè le omografie che mutano un piano δ in sé. Per queste omografie valgono dunque le quattro proprietà:

1) $\Omega_1\,\Omega_2 = \Omega$, (definizione di prodotto);
2) $(\Omega_1\,\Omega_2)\,\Omega_3 = \Omega_1\,(\Omega_2\,\Omega_3)$, (proprietà associativa);
3) $\Omega\,\mathrm{I} = \Omega$, (esistenza dell'identità);
4) $\Omega\,\Omega^{-1} = \mathrm{I}$, (esistenza dell'inversa di Ω).

Perciò si dice che queste omografie costituiscono un gruppo: il **gruppo delle omografie piane.**

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'OMOGRAFIA TRA PIANI

Un' omografia tra due piani è individuata da quattro coppie di punti corrispondenti; purché sia i quattro punti del primo piano che i quattro punti del secondo piano siano a tre a tre non allineati.

Dimostriamo il teorema: Indichiamo i quattro punti del primo piano con A_0, A_1,A_2 ,U ,e , ordinatamente, i quattro punti del secondo piano con A_0^1, A_1^1, A_2^1, U^1

Assumiamo in δ i punti A_0, A_1, A_2 ed U come vertici del triangolo fondamentale e punto unità di un sistema di coordinate proiettive (x_0,x_1,x_2) ed analogamente in δ^1 assumiamo A_0^1, A_1^1, A_2^1, U^1 come punti fondamentali ed unità di un sistema di coordinate proiettive (y_0,y_1,y_2).

Un'omografia: $\Omega \begin{pmatrix} A_0 A_1 A_2 U \\ \\ A_0^1 A_1^1 A_2^1 U^1 \end{pmatrix}$,

in cui quelle quattro coppie si corrispondono esiste, ed ha necessariamente come equazioni $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ cioè Y=X.

Esempio: Siano dati ,nel primo piano, un sistema di coordinate proiettive (x) che ha come punti fondamentali e punto unità rispettivamente A_0(-1,1,0) A_1(1,0,-1) A_2(1,2,2) e U(1,3,1), e nel secondo piano un sistema di coordinate (y) che ha come punti fondamentali e punto unità $A_0^|$ (1,2,0) $A_1^|$ (0,1,1) $A_2^|$ (1,0,1) e $U^|$=(2,3,2).

Cerchiamo la matrice C dell'omografia che opera in questo modo:

$$A_i^| = CA_i \qquad \forall \quad i = 0,1,2$$

Risolvendo il sistema a 9 equazioni e 9 incognite ottengo la matrice

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 4/5 & -1/5 \\ -2/5 & 8/5 & -7/5 \\ 3/5 & 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

L'applicazione Ω manda i punti del primo piano nei rispettivi punti del secondo piano, con una corrispondenza biunivoca, determinata da una sostituzione lineare di matrice C.