

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria  
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

## Tesi di Laurea Triennale

### Controllo di sistemi non lineari tramite retroazione dallo stato

Laureando:  
Davide Del Testa

Relatore:  
Prof. Mauro Bisiacco



Anno Accademico 2010-2011



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Sistemi a tempo discreto . . . . .	5
1.1.1	Caso ad ingresso singolo . . . . .	7
1.2	Forma compagna . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Raggiungibilità</b>	<b>9</b>
2.1	Forma canonica di controllo . . . . .	10
2.2	Calcolo dell'ingresso e cambiamento di base . . . . .	11
2.3	Forma di Kalman . . . . .	11
2.4	Test PBH di raggiungibilità . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Controllabilità</b>	<b>15</b>
3.0.1	Condizioni di controllabilità . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Feedback dallo stato</b>	<b>19</b>
4.0.2	Caso non lineare . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Controllo di un pendolo inverso</b>	<b>23</b>
5.1	Modellizzazione . . . . .	23
5.2	Linearizzazione . . . . .	25
5.3	Stabilità . . . . .	26
5.4	Raggiungibilità . . . . .	26
5.5	Calcolo della forma canonica di controllo . . . . .	27
5.6	Allocazione degli autovalori . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Simulazioni a tempo continuo</b>	<b>29</b>
6.1	Sistema linearizzato . . . . .	29
6.2	Sistema non lineare . . . . .	33
<b>7</b>	<b>Analisi del sistema a tempo discreto</b>	<b>37</b>
7.1	Discretizzazione . . . . .	37
7.2	Linearizzazione . . . . .	37
7.3	Raggiungibilità . . . . .	38
7.4	Calcolo della forma canonica di controllo . . . . .	38
7.5	Allocazione degli autovalori . . . . .	38

<b>8 Simulazioni a tempo discreto</b>	<b>41</b>
8.1 Sistema linearizzato . . . . .	41
8.2 Sistema non lineare . . . . .	45
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Lo scopo di questa trattazione è quello di introdurre il metodo della retroazione dallo stato al fine di applicarlo al controllo di un sistema fisico non lineare (pendolo inverso).

Dopo una prima parte in cui vengono illustrate le nozioni teoriche necessarie alla realizzazione del controllore si è considerato il sistema fisico del pendolo inverso, per il quale sono state individuate le equazioni delle variabili e, attraverso una linearizzazione, le matrici di stato.

Si è applicata quindi la retroazione dallo stato al sistema in esame supponendo prima di utilizzare un controllore a tempo continuo e, successivamente, di adoperarne uno a tempo discreto che rispecchiasse il funzionamento dei moderni sistemi di controllo computerizzati.

Sono state infine eseguite delle simulazioni tramite Simulink per entrambi i metodi, evidenziando come la presenza della retroazione rendesse il sistema pendolo, inizialmente instabile, completamente stabile.

### 1.1 Sistemi a tempo discreto

Si dice sistema dinamico un sistema che esprime la variabilità di uno stato nel tempo mediante relazioni matematiche di tipo dinamico. Quando la variabile temporale viene intesa come un numero intero ( $n \in \mathbb{Z}$ ) multiplo di un quanto fondamentale  $T$ , allora si parla di sistema dinamico a tempo discreto.

Se si suppone che il sistema sia caratterizzato dall'ingresso  $u \in \mathbb{R}^m$ , dallo stato interno  $x \in \mathbb{R}^n$  e dall'uscita  $y \in \mathbb{R}^p$  la formula generale di un tale sistema ricorrerà ad equazioni alle differenze (dove  $f$  e  $h$  sono funzioni vettoriali):

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n), u(n)) \\ y(n) = h(x(n), u(n)) \end{cases} \quad (1.1)$$

Se il sistema è lineare, ovvero se tutte le funzioni presenti sono lineari, si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(n+1) = f_{11}x_1(n) + \dots + f_{1n}x_n(n) + g_{11}u_1(n) + \dots + g_{1m}u_m(n) \\ \vdots \\ x_n(n+1) = f_{n1}x_1(n) + \dots + f_{nn}x_n(n) + g_{n1}u_1(n) + \dots + g_{nm}u_m(n) \\ y_1(n) = h_{11}x_1(n) + \dots + h_{1n}x_n(n) + j_{11}u_1(n) + \dots + j_{1m}u_m(n) \\ \vdots \\ y_p(n) = h_{p1}x_1(n) + \dots + h_{pn}x_n(n) + j_{p1}u_1(n) + \dots + j_{pm}u_m(n) \end{array} \right.$$

e, definendo le matrici

$$F \doteq \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \quad G \doteq \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nm} \end{bmatrix}$$

$$H \doteq \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_{m1} & \dots & h_{mn} \end{bmatrix} \quad J \doteq \begin{bmatrix} j_{11} & \dots & j_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ j_{p1} & \dots & j_{pm} \end{bmatrix}$$

ci si può ricondurre alla forma matriciale:

$$\begin{cases} x(n+1) = Fx(n) + Gu(n) \\ y(n) = Hx(n) + Ju(n) \end{cases}$$

Nel caso lineare, a differenza del caso non lineare, si riesce ad esprimere in modo semplice la soluzione del sistema. Essa è infatti calcolabile ricorsivamente:

$$x(1) = Fx(0) + Gu(0)$$

$$x(2) = Fx(1) + Gu(1) = F^2x(0) + FG u(0) + Gu(1)$$

⋮

$$\begin{aligned} x(n) &= F^n x(0) + Gu(n-1) + \dots + F^{n-1} Gu(0) \\ &= F^n x(0) + \sum_{i=0}^{n-1} F^{n-i-1} Gu(i) \end{aligned} \quad (1.2)$$

in cui gli ultimi due elementi costituiscono, rispettivamente, l'evoluzione libera e l'evoluzione forzata del sistema.

### 1.1.1 Caso ad ingresso singolo

Poichè nel seguito si tratterà principalmente il caso in cui l'ingresso  $u$  del sistema è singolo, è utile riportare le variazioni delle rappresentazioni appena introdotte.

Si ha, quindi, che  $u \in \mathbb{R}$  e le matrici  $G$  e  $J$  assumono rispettivamente dimensioni  $(n \times 1)$  e  $(p \times 1)$ :

$$G = g \doteq \begin{bmatrix} g_{11} \\ \vdots \\ g_{n1} \end{bmatrix} \quad J = j \doteq \begin{bmatrix} j_{11} \\ \vdots \\ j_{p1} \end{bmatrix}$$

da cui risulta:

$$\begin{cases} x(n+1) = Fx(n) + gu(n) \\ y(n) = Hx(n) + ju(n) \end{cases}$$

## 1.2 Forma compagna

Se una matrice  $F$  è ciclica si può dimostrare che è sempre possibile, tramite un opportuno cambio di base, portarla in una forma particolare, detta **Forma compagna**:

$$F = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\alpha^T & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{array} \right] \quad (1.3)$$

dove  $\mathbf{0}$  è un vettore di  $n - 1$  zeri,  $\mathbf{I}$  è la matrice identità di ordine  $n - 1$  e  $\alpha^T$  è un vettore riga di  $n$  coefficienti arbitrari.

L'utilità di questa rappresentazione è evidente dalla seguente proprietà e sarà più chiara nel capitolo dedicato al feedback.

Le matrici in forma compagna posseggono la seguente

**Proprietà 1.2.1.** *Il polinomio caratteristico di una matrice  $F$  in forma compagna (1.3) è:*

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{F}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0.$$

**Esempio 1.2.2.** *La matrice in forma compagna  $A = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 6 & 5 & -2 \end{array} \right)$  ha polinomio*

*caratteristico:*

$$s^3 + 2s^2 - 5s - 6 = (s+3)(s+1)(s-2) \text{ e dunque autovalori } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2.$$





## Capitolo 2

# Raggiungibilità

Un sistema si dice **raggiungibile** se è possibile far sì che esso raggiunga, partendo da condizione iniziale nulla  $x(0) = 0$ , un determinato stato  $x(n) = \tilde{x}$ , scelto in modo qualsiasi.

La formula generale (1.2), per condizioni iniziali nulle, diventa quindi

$$x(n) = \sum_{i=0}^{n-1} F^{n-i-1} G u(i)$$

che può essere scritta come:

$$\left[ G \mid FG \mid F^2G \mid \dots \mid F^{n-1}G \right] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \doteq \mathcal{R}_n u_n \quad (2.1)$$

$\mathcal{R}_n$  si dice **matrice di raggiungibilità** (che ha dimensione  $n \times nm$ ) in  $n$  passi e  $u_n$  è il vettore che impila i vari ingressi  $u(0), \dots, u(n-1)$ .

Risulta dunque:  $x(n) = \mathcal{R}_n u_n$ .

L'insieme degli stati raggiungibili dal sistema in  $n$  passi, partendo dallo stato nullo, si indica con  $\mathcal{X}_R(n)$  e coincide con lo spazio generato dalle colonne di  $\mathcal{R}_n$  e quindi con l'immagine di questa matrice:  $\mathcal{X}_R(n) = \text{Im } \mathcal{R}_n$ .

In particolare, si ha che lo spazio degli stati raggiungibili in  $i-1$  passi è contenuto in quello generato in  $i$  passi, se  $i \leq n-1$ : infatti, ponendo  $i = n$  si ottiene:

$$\mathcal{R}_{n+1} = \left[ G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G \quad F^nG \right]$$

in cui le colonne del blocco costituito dalla matrice  $F^nG$ , in base al teorema di Cayley-Hamilton, possono essere espresse come combinazioni lineari delle colonne delle matrici precedenti ( $G, FG, \dots, F^{n-1}G$ ). Ciò significa che l'ultimo blocco introduce delle colonne linearmente dipendenti, che non aggiungono informazione rispetto alle colonne dei blocchi precedenti.

Si può quindi generalizzare questo risultato col seguente

**Teorema 2.0.3.** *Gli spazi di raggiungibilità soddisfano la catena di inclusioni*

$$\mathcal{X}_R(1) \subseteq \mathcal{X}_R(2) \subseteq \dots$$

ed inoltre esiste un intero  $i$ , detto indice di raggiungibilità del sistema, tale che:

$$\mathcal{X}_R(i) = \mathcal{X}_R(j), \forall j \geq i, i \leq n.$$

Se  $\mathcal{X}_R = \mathbb{R}^n$  il sistema si dice **completamente raggiungibile** e di conseguenza  $\text{Im}\mathcal{R} = \mathbb{R}^n$  e  $\rho(\mathcal{R}) = n$  (la matrice di raggiungibilità ha rango pieno).

Conseguentemente, se il sistema ha un unico ingresso, i vettori  $g, F^2g, \dots, F^{n-1}g$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^n$  e quindi la matrice  $F$  è ciclica<sup>1</sup>: di conseguenza è possibile portare  $F$  in forma compagna.

È immediato comprendere, allora, come, perchè un sistema ad un unico ingresso sia completamente raggiungibile, deve essere verificato che:

$$\det\mathcal{R} \neq 0.$$

**Esempio 2.0.4.** *Siano*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora  $\mathcal{R}_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{array} \right]$  che ha determinante nullo. Il sistema è quindi non completamente raggiungibile.

**Esempio 2.0.5.** *Siano*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Allora  $\mathcal{R}_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{array} \right]$  che ha determinante non nullo. Il sistema è quindi completamente raggiungibile.

## 2.1 Forma canonica di controllo

In base a quanto precedentemente enunciato, risulta chiaro che, se il sistema ad un unico ingresso è completamente raggiungibile, la matrice  $F$ , ciclica, può essere scritta, utilizzando una opportuna matrice  $T$  di cambio base, in forma compagna:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Una matrice  $A$  ( $n \times n$ ) può venire definita ciclica quando consente di generare l'intero spazio mediante un unico generatore; in altri termini quando esiste un vettore  $v$  ( $n \times 1$ ) tale che la matrice  $C = [v \quad Av \quad A^2v \quad \cdots \quad A^{n-1}v]$  ha rango massimo

mentre

$$g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e in questo caso si dice che il sistema è espresso in **forma canonica di controllo**.

## 2.2 Calcolo dell'ingresso e cambiamento di base

In (2.1) si è visto che  $x(n) = \mathcal{R}_n u_n$ . Quindi, assegnato  $x(n)$  e supposto il sistema (con ingresso unico) raggiungibile in  $n$  passi, risulta che l'ingresso che risolve il problema di raggiungere  $x(n)$  dallo stato zero è dato da:  $u_n = \mathcal{R}_n^{-1}x(n)$ .

Sia ora  $(F, G)$  una coppia di matrici proprie di un sistema completamente raggiungibile. Applicando il cambiamento di base  $z = T^{-1}x$ , il sistema di partenza (1.1) diventa:

$$\begin{aligned} z(n+1) &= T^{-1}x(n+1) = T^{-1}(FTz + Gu) \\ &= T^{-1}FTz(n) + T^{-1}Gu(n) \\ &= \bar{F}z(n) + \bar{G}u(n) \end{aligned}$$

Quindi la matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}$  diventa:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &= \left[ \bar{G} \mid \bar{F}\bar{G} \mid \dots \mid \bar{F}^{n-1}\bar{G} \right] \\ &= \left[ T^{-1}G \mid T^{-1}FTT^{-1}G \mid \dots \mid T^{-1}F^{n-1}TT^{-1}G \right] \\ &= T^{-1} \left[ G \mid FG \mid \dots \mid F^{n-1}G \right] = T^{-1}\mathcal{R} \end{aligned}$$

Poichè  $\rho(\bar{\mathcal{R}}) = \rho(\mathcal{R})$  il cambiamento di base non modifica la raggiungibilità e quindi la coppia  $(\bar{F}, \bar{G})$  rappresenta ancora un sistema completamente raggiungibile; la matrice  $T$  di cambio base, nel caso di un ingresso, si calcola facilmente da  $\bar{\mathcal{R}} = T^{-1}\mathcal{R}$ :

$$T = \bar{\mathcal{R}}\mathcal{R}^{-1}.$$

## 2.3 Forma di Kalman

Finora sono stati considerati solo sistemi completamente raggiungibili. Si possono verificare, tuttavia, situazioni in cui il sistema non è completamente raggiungibile: la **forma canonica di Kalman** fornisce un meccanismo di partizionamento dello spazio di stato, in modo da separare gli stati raggiungibili da quelli non raggiungibili. Sia quindi

$$\mathcal{R} = \left[ G \mid FG \mid \dots \mid F^{n-1}G \right]$$

e  $\rho(\mathcal{R}) = k < n$ . Sarà possibile individuare una matrice  $T$  di cambio base in grado di separare il sottospazio raggiungibile  $\mathcal{X}_R$  con  $\dim(\mathcal{X}_R) = k$  dal sottospazio non raggiungibile  $\mathcal{X}_{NR}$  con  $\dim(\mathcal{X}_{NR}) = n - k$ . Prima di procedere è necessario introdurre la seguente

**Proprietà 2.3.1.**  $\mathcal{X}_R$  è  $F$ -invariante<sup>2</sup> e contiene  $\text{Im}G$ .

Siano  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$   $k$  vettori linearmente indipendenti costituenti una qualsiasi base del sottospazio  $\mathcal{X}_R$  e  $(p_{k+1}, \dots, p_n)$   $n-k$  vettori linearmente indipendenti dai precedenti costituenti una base di  $\mathcal{X}_{NR}$ . Un qualsiasi vettore appartenente allo spazio raggiungibile avrà la forma:

$$x = \left[ \underbrace{\alpha_1 \ \dots \ \alpha_k}_{\text{base di } \mathcal{X}_R} \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{\text{base di } \mathcal{X}_{NR}} \right]^T$$

Ora, essendo  $\mathcal{X}_R$   $F$ -invariante, se  $v \in \mathcal{X}_R$  anche  $Fv \in \mathcal{X}_R$  e si ha:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in cui  $F$  è stata partizionata in modo che la sottomatrice  $F_{11}$  abbia dimensioni  $k \times k$  e i sottovettori  $v_1$  e  $w_1$  hanno dimensione  $k$ . Deve essere pertanto  $F_{21}v_1 = 0$ ,  $\forall v_1 \in \mathbb{R}^k$  e quindi  $F_{21} = 0$ . Inoltre, siccome  $\text{Im}G \subseteq \mathcal{X}_R$ , si ha che partizionando opportunamente la matrice  $G$  in  $\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$  deve essere:  $G_2 = 0$ . Si ottengono dunque:

$$F_K = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G_K = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

e il sistema si dice in **Forma canonica di Kalman**.

La matrice di raggiungibilità in forma di Kalman:

$$\mathcal{R}_K = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} G_1 & F_{11}G_1 & \dots & F_{11}^{n-1}G_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

è legata alla matrice di raggiungibilità di partenza  $\mathcal{R}$  dalla relazione  $\mathcal{R}_K = T^{-1}\mathcal{R}$  e quindi ha il suo medesimo rango  $k$ . Allora le prime  $k$  righe sono linearmente indipendenti e quindi anche la matrice

$$\mathcal{R}_{(1)} = [ G_1 \mid F_{11}G_1 \mid \dots \mid F_{11}^{k-1}G_1 ]$$

ha rango  $k$  (perchè il rango non cambia effettuando un cambio di base, le righe nulle sono irrilevanti ai fini del rango e le colonne  $F_{11}^i G_1$  con  $k \leq i \leq n-1$  sono anch'esse inutili per il teorema di Cayley-Hamilton).

Se ne deduce perciò che il sottosistema  $(F_{11}, G_1)$  è completamente raggiungibile

**Osservazione 1.** Affinchè un sistema sia in forma di Kalman devono valere contemporaneamente:

- la matrice  $F$  è triangolare a blocchi, con blocco  $F_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$  nullo;
- gli elementi non nulli della matrice  $G$  appartengono tutti alla sottomatrice  $G_1$  costituita dalle prime  $k$  righe;

<sup>2</sup>Si ricorda che uno spazio vettoriale  $W$  si dice  $F$ -invariante se  $\forall v \in W \Rightarrow Fv \in W$

- la coppia  $(F_{11}, G_1)$  è raggiungibile.

Per individuare la matrice  $T$  di cambio base si procede nel modo seguente: presi  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  e  $(p_{k+1}, \dots, p_n)$  si usino questi  $n$  vettori come colonne nella costruzione della nuova matrice. Si ottiene così la matrice desiderata:

$$T = [ p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_k \mid p_{k+1} \mid p_{k+2} \mid \cdots \mid p_n ].$$

Inoltre, scrivendo  $x = \begin{bmatrix} x_R \\ x_{NR} \end{bmatrix}$ , si ha:

$$\begin{bmatrix} x_R(n+1) \\ x_{NR}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(n) \\ x_{NR}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n) \quad (2.3)$$

ovvero:

$$\begin{cases} x_R(n+1) = F_{11}x_R(n) + [ F_{12} \mid G_1 ] \begin{bmatrix} x_{NR}(n) \\ u(n) \end{bmatrix} \\ x_{NR}(n+1) = F_{22}x_{NR}(n) \end{cases} \quad (2.4)$$

da cui si intuisce come il sistema sia diviso in un sottosistema completamente raggiungibile con ingresso  $u(n)$  ed uno completamente non raggiungibile, privo di ingressi.

**Esempio 2.3.2.** Si consideri il sistema:

$$x(n+1) = Fx(n) + Gu(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(n)$$

La matrice di raggiungibilità è:

$$\mathcal{R} = [ G \quad FG \quad F^2G \quad F^3G ] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ha rango 3 e quindi  $\dim \mathcal{X}_R = 3$ . Per ridurre il sistema in forma di Kalman si sceglie una base in cui i primi tre vettori generino lo spazio  $\mathcal{X}_R$ . Tale base si può ottenere prendendo da  $\mathcal{R}$  tre colonne linearmente indipendenti e aggiungendo un quarto vettore colonna linearmente indipendente dai primi tre. Una matrice di cambio base è data da

$$T = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e in corrispondenza alla nuova base si ottengono:

$$T^{-1}FT = F_c = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$T^{-1}G = G_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Test PBH di raggiungibilità

Finora si è visto come la condizione di raggiungibilità di un sistema lineare sia:

$$\rho([ G \mid FG \mid F^2G \mid \dots \mid F^{n-1}G ]) = n.$$

Esiste però un altro criterio che permette di verificare la raggiungibilità senza dover calcolare  $\mathcal{R}$  :

**Teorema 2.4.1** (Test PBH di raggiungibilità). *La matrice*

$$[ zI - F \mid G ]$$

*(detta matrice PBH di raggiungibilità) ha rango pieno se e solo se  $z$  non è autovalore di  $F_{22}$ . Perciò se tale matrice ha rango pieno  $\forall z \in \mathbb{C}$  allora la  $F_{22}$  è assente (di dimensione nulla) ed il sistema è completamente raggiungibile (e viceversa).*

## Capitolo 3

# Controllabilità

Il problema della controllabilità consiste nel dover individuare un ingresso  $u$  capace di portare il sistema da una condizione iniziale  $x(0) = \tilde{x}$  preassegnata ad uno stato finale  $x(n) = 0$ .

Deve essere quindi:

$$x(n) = F^n x(0) + \mathcal{R}_n u_n = 0$$

che equivale a

$$-F^n \tilde{x} = \mathcal{R}_n u_n$$

da cui si deduce che, perchè il problema sia risolubile:

$$F^n x(0) \in \text{Im} \mathcal{R}_n. \quad (3.1)$$

L'insieme  $\mathcal{X}_C(n)$  degli stati soddisfacenti la (3.1) ha la struttura di spazio vettoriale ed è detto sottospazio controllabile in  $n$  passi:

$$\mathcal{X}_C(n) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : F^n x \in \text{Im} \mathcal{R}_n\} \quad (3.2)$$

Risulta facile vedere come, analogamente a quanto visto per la raggiungibilità, ogni stato controllabile in  $k$  passi lo è anche in  $k + 1$ . Infatti, se  $\bar{x}$  è controllabile in  $k$  passi, esiste una successione

$$u(0), u(1), \dots, u(k-1)$$

che porta il sistema dallo stato  $x(0) = \bar{x}$  nello stato  $x(k) = 0$ . Quindi applicando  $u(k) = 0$  il sistema rimane nello stato zero all'istante  $k + 1$ .

Di conseguenza si ha la catena di inclusioni:

$$\mathcal{X}_C(k) \subseteq \mathcal{X}_C(k+1), \quad \mathcal{X}_C(i) = \mathcal{X}_C(n) \doteq \mathcal{X}_C \quad (\forall i \geq n)$$

Inoltre, valgono le seguenti:

**Proposizione 3.0.2.**

$$\dim[\mathcal{X}_C(n)] \geq \dim[\mathcal{X}_R(n)], \forall n$$

**Proposizione 3.0.3.**

$$\mathcal{X}_R \subseteq \mathcal{X}_C$$

*Dimostrazione.* Si ricordi che  $x \in \mathcal{X}_C$  se e solo se  $F^n x \in \mathcal{X}_R$ . Dunque  $F^n(Fx) = F(F^n x) \in F\mathcal{X}_R \subseteq \mathcal{X}_R$ , per l' $F$ -invarianza di  $\mathcal{X}_R$ . Quindi anche  $Fx$  è controllabile. Inoltre,  $\text{Im}G \subseteq \mathcal{X}_R$  e l' $F$ -invarianza di  $\mathcal{X}_R$  implicano che le colonne di  $F^n G$  sono elementi di  $\mathcal{X}_R$ . Perciò  $\text{Im}G \subseteq \mathcal{X}_C$ . Poichè  $\mathcal{X}_R$  è il più piccolo sottospazio  $F$ -invariante che include  $\text{Im}G$ , il sottospazio  $\mathcal{X}_C$  include  $\mathcal{X}_R$ .  $\square$

Un sistema si dirà **completamente controllabile** se  $\mathcal{X}_C = \mathbb{R}^n$ . Scrivendo il sistema in forma di Kalman (se non raggiungibile), si ha:

$$\begin{bmatrix} x_R(n+1) \\ x_{NR}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R(n) \\ x_{NR}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

cioè:

$$\begin{cases} x_R(n+1) = F_{11}x_R(n) + F_{12}x_{NR}(n) + G_1u(n) \\ x_{NR}(n+1) = F_{22}x_{NR}(n) \end{cases}$$

da cui si deduce che

$$x_{NR}(n) = F_{22}^n x_{NR}(0).$$

Quindi mentre sull'evoluzione del sottosistema raggiungibile è possibile operare attraverso l'ingresso in modo da annullare  $x_{NR}(n)$ , il sottosistema non raggiungibile deve convergere a zero in evoluzione libera e quindi è necessario che  $F_{22}^n = 0$  per qualche  $n$ .

Un sistema discreto è pertanto controllabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $F_{22}$  sono nulli<sup>1</sup>.

*Risulta quindi che se un sistema è completamente raggiungibile, essendo  $F_{22}$  assente, esso è anche controllabile, mentre se non è completamente raggiungibile la controllabilità richiede che tutti gli autovalori di  $F_{22}$  siano nulli.*

Risulta inoltre che  $\mathcal{X}_R = \mathcal{X}_C$  se e solo se  $F_{22}$  è invertibile: in tal caso si ha  $x_{NR}(n) = 0$  (qualsiasi sia  $n \geq 0$ ) se e solo se  $x_{NR}(0) = 0$ : quindi

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_R(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{NR}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_R(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui  $x(0) \in \mathcal{X}_R$ .

Un altro modo per verificare la controllabilità di un sistema è quello di utilizzare il test PBH: se la matrice PBH di raggiungibilità avrà rango massimo per ogni  $z$  diverso da zero, allora il sistema sarà o raggiungibile o con la sottomatrice  $F_{22}$  con autovalori nulli, ed in entrambi i casi il sistema sarà controllabile.

Infine, poichè in base a (3.2) si ha che  $\mathcal{X}_C = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall x F^n x \in \text{Im}\mathcal{R}$ , risulta che:

$$\text{Im}F^n \subseteq \text{Im}\mathcal{R} = \mathcal{X}_R$$

che è un'ulteriore condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità.

<sup>1</sup>perchè in tal caso si ha che  $\lambda^n$  è polinomio annullatore per  $F_{22}$ , il che può verificarsi solo se  $\lambda = 0$  è l'unico autovalore di  $F_{22}$



**Esempio 3.0.4.** Si consideri il sistema discreto con matrici:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sottospazio raggiungibile in un passo è dato da  $\mathcal{X}_R(1) = \text{Im } g = \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  
mentre i sottospazi raggiungibili in almeno due passi ( $k > 1$ ) sono tutti uguali e dati da:

$$\mathcal{X}_R(k) = \text{span} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right].$$

Il sottospazio controllabile in un passo

$$\mathcal{X}_C(1) = \left\{ x : Fx \in \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \in \text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

ha dimensione 2, ma non contiene  $\mathcal{X}_R(1)$ .

Calcoliamo allora:

$$\mathcal{X}_C(2) = \left\{ x : F^2x \in \text{Im } \mathcal{R}_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \in \text{span} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Quindi  $\mathcal{X}_C(2) = \mathcal{X}_C = \mathbb{R}^3$  e quindi il sistema è controllabile in due passi.

Verifichiamo questo risultato anche mediante un test PBH:  
la matrice PBH di raggiungibilità

$$[ zI - F \mid g ] = \left[ \begin{array}{ccc|c} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & z \\ 0 & 0 & z-1 & 1 \end{array} \right]$$

ha infatti rango 3 per ogni  $z$  diverso da zero (mentre il rango vale  $1 < 3$  per  $z = 0$ ).

Infine controlliamo che valga anche la condizione  $\text{Im } F^n \subseteq \text{Im } \mathcal{R}$ . Poichè

$$F^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_3 = [ g \mid Fg \mid F^2g ] = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

risulta che:

$$\text{span} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \subseteq \text{span} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.0.1 Condizioni di controllabilità

Come si vedrà nel prossimo capitolo, esiste un metodo di controllo, detto *feedback dallo stato*, che permette, sotto certe condizioni, di allocare gli autovalori della matrice  $F$  in modo arbitrario. Quando in un sistema discreto si fa in modo che essi siano tutti nulli risulta che il polinomio caratteristico (che coincide in caso di matrici cicliche col polinomio annullatore minimo)  $\Delta_F(\lambda) = \lambda^n$  e quindi lo stato del sistema, in assenza di ingressi esterni, raggiunge l'origine al massimo in  $n$  passi a prescindere dalla condizione iniziale.

Una retroazione di questo tipo è detta un **Dead Beat Controller** (DBC) per il sistema.

È possibile, a questo punto, riassumere quanto detto in questo capitolo enunciando il seguente

**Teorema 3.0.5** (Condizioni di controllabilità). *Per un sistema discreto  $\Sigma$ , sono equivalenti le seguenti proposizioni:*

- $\Sigma$  è controllabile
- $\Sigma$  è completamente raggiungibile o, se non lo è, nella forma di Kalman il sottosistema non raggiungibile ha gli autovalori nulli (cioè  $F_{22}$  ha autovalori nulli)
- $\Sigma$  ammette un DBC
- La matrice di raggiungibilità  $\begin{bmatrix} zI - F & G \end{bmatrix}$  ha rango pieno per ogni  $z$  complesso, eccetto che per  $z = 0$
- $ImF^n \subseteq Im\mathcal{R} = \mathcal{X}_R$

# Capitolo 4

## Feedback dallo stato

Si consideri un ingresso nella forma:

$$u(n) = Kx(n) + v(n).$$

Sostituendo in (1.1) si ottiene:

$$\begin{cases} x(n+1) = Fx(n) + GKx(n) + Gv(n) = (F + GK)x(n) + Gv(n) \\ y(n) = Hx(n) + JKx(n) + Jv(n) = (H + JK)x(n) + Jv(n) \end{cases}$$

dando luogo ai cambiamenti di matrici:

$$\begin{aligned} F &\rightarrow F + GK \\ G &\rightarrow G \\ H &\rightarrow H + JK \\ J &\rightarrow J \end{aligned}$$

e se  $J = 0$  anche  $H$  rimane invariato e quindi l'unica matrice modificata è la matrice di stato  $F$ .

Valgono i seguenti

**Teorema 4.0.6** (invarianza del sottospazio raggiungibile). *I sottospazi di raggiungibilità del sistema  $\Sigma$  e del sistema  $\Sigma_K$  ottenuto mediante retroazione dallo stato  $u = Kx + v$  coincidono  $\forall K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .*

*In particolare  $\Sigma_K$  è raggiungibile se e solo se  $\Sigma$  è raggiungibile.*

**Teorema 4.0.7** (invarianza degli autovalori del sottosistema non raggiungibile). *Se il sistema  $\Sigma$  è in forma di Kalman:*

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

*allora anche il sistema retroazionato  $\Sigma_K$  è in forma di Kalman e in entrambi i casi la matrice  $F_{22}$  è quella che caratterizza la parte non raggiungibile.*

*Dimostrazione.* Si partizioni la matrice  $K$  in modo conforme alla partizione di  $F$ :

$$K = [ K_1 \mid K_2 ]$$

Si ha allora

$$F + GK = \left[ \begin{array}{c|c} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ \hline 0 & F_{22} \end{array} \right]$$

La coppia  $(F + GK, G)$  è ancora in forma di Kalman dato che, per il teorema precedente,  $(F_{11} + G_1K_1, G_1)$  è raggiungibile per ogni  $K_1$ .  $\square$

Scrivendo il sistema in forma di Kalman, partizionando  $K_K$  come

$$K_K = [ K_1 \quad K_2 ]$$

si ottiene quindi:

$$F_K + G_K K_K = \left[ \begin{array}{cc} F_{11} + G_1K_1 & F_{12} + G_1K_2 \\ 0 & F_{22} \end{array} \right]$$

La retroazione ha lasciato invariata la  $F_{22}$ , quindi gli autovalori di  $F_{22}$  sono invarianti rispetto alla retroazione.

Definendo pertanto la stabilizzabilità di un sistema come l'esistenza di una retroazione in grado di rendere il sistema asintoticamente stabile, si può affermare che *condizione necessaria affinché un sistema possa essere stabilizzato è che la sottomatrice  $F_{22}$  sia già asintoticamente stabile.*

Si consideri un sistema ad un unico ingresso ( $m = 1$ ) e completamente raggiungibile. Allora è possibile scrivere il suddetto sistema in forma canonica di controllo tramite un'opportuna matrice di cambio base  $T$ :

$$F_C = T^{-1}FT, \quad G_C = T^{-1}G$$

Le matrici  $(F + GK)$  e

$$T^{-1}(F + GK)T = T^{-1}FT + T^{-1}G \underbrace{KT}_{\doteq K_C} = F_C + G_C K_C$$

hanno gli stessi autovalori e pertanto è possibile assegnare gli autovalori di  $(F_C + G_C K_C)$  attraverso la scelta di  $K_C$ .

Si ha dunque:

$$T^{-1}FT = F_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad g_C = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, essendo  $m = 1$ ,  $K_C$  è una matrice riga:

$$K_C = [ k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1} ]$$

La matrice ad anello chiuso risulta:

$$\begin{aligned}
 F_{cK} &\doteq F_C + G_C K_C \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [ k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1} ] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 - k_0) & -(a_1 - k_1) & \cdots & -(a_{n-1} - k_{n-1}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

e ha quindi polinomio caratteristico:

$$s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \dots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)$$

che è arbitrariamente modificabile agendo sui coefficienti  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

**Esempio 4.0.8.** *Siano*

$$F_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e si supponga di voler allocare gli autovalori del sistema retroazionato in  $-2, -2, 1$ . Affinchè il polinomio  $p(s) = (s + 2)^2(s + 1) = s^3 + 5s^2 + 8s + 4$  sia il polinomio caratteristico della matrice

$$F_C + g_C K_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 + k_0 & 1 + k_1 & 1 + k_2 \end{bmatrix}$$

i coefficienti  $k_i$  devono essere:

$$K_C = [ k_0 \quad k_1 \quad k_2 ] = [ -3 \quad -9 \quad -6 ]$$

## 4.0.2 Caso non lineare

È possibile applicare la retroazione dallo stato anche a sistemi non lineari, in cui si ha:

$$x(n+1) = f(x(n), u(n)) \quad (4.2)$$

Infatti, se  $u(n) = Kx(n) + v(n)$ , la (4.2) diventa:

$$x(n+1) = f(x(n), Kx(n) + v(n)) = g(x(n), v(n))$$

e si può dimostrare che linearizzare il sistema non lineare e successivamente applicare la retroazione è equivalente ad applicare la retroazione sul sistema non lineare prima di linearizzarlo.

Tale proprietà consente perciò di calcolare i coefficienti  $k_i$  sul sistema non lineare linearizzato e applicare la retroazione direttamente sul sistema non lineare, avendo la garanzia di ottenere comunque il polinomio caratteristico voluto.

**Esempio 4.0.9.** Consideriamo il sistema discreto non lineare:

$$x(n+1) = 6x^4(n) + 13(5x^2(n) + 6)u(n)$$

e dimostriamo che linearizzare e poi retroazionare è equivalente a retroazionare e poi linearizzare.

**a.1) linearizzazione in  $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$**

si ha che:

$$J_{x,u}(x(n+1)) = [ 24x^3 + 130ux \quad 13(5x^2 + 6) ] |_{x=0,u=0} = [ 0 \quad 78 ]$$

perciò il sistema linearizzato è:

$$x(n+1) = 78u(n)$$

**a.2) feedback con  $u = 7x + v$**

considerando un ingresso retroazionato  $u(n) = 7x(n) + v(n)$  si ottiene infine:

$$x(n+1) = 78(7x + v) = 546x(n) + 78v(n).$$

**b.1) feedback con  $u = 7x + v$**

Proviamo ora ad applicare direttamente la retroazione. Il sistema non lineare diventa:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 6x^4 + 13(5x^2 + 6)(7x + v) \\ &= 6x^4 + 13(35x^3 + 5x^2v + 42x + 6v) \\ &= 6x^4 + 455x^3 + 65x^2v + 546x + 78v \end{aligned}$$

**b.2) linearizzazione in  $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$**

e quindi:

$$J_{x,u}(x(n+1)) = [ 24x^3 + 1365x^2 + 130xv + 546 \quad 65x^2 + 78 ] |_{x=0,u=0} = [ 546 \quad 78 ]$$

perciò la linearizzazione porta ad avere il sistema caratterizzato dalla seguente equazione:

$$x(n+1) = 546x(n) + 78v(n)$$

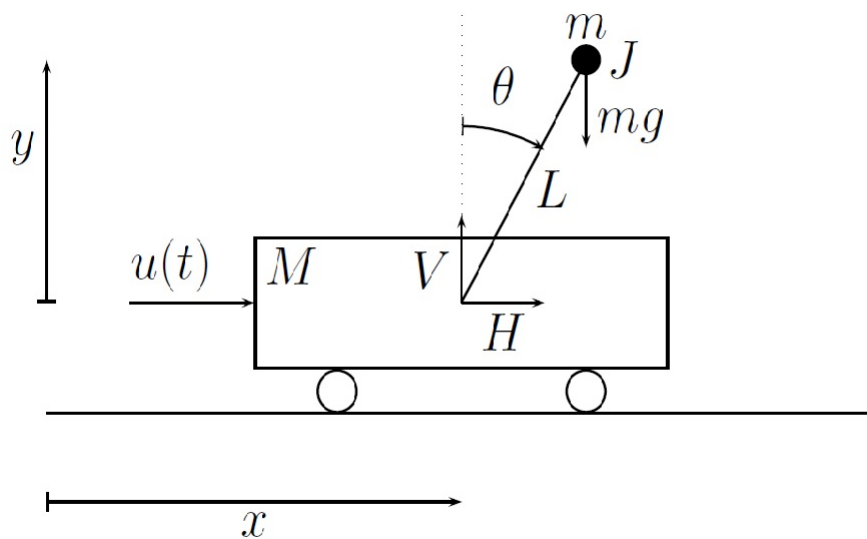
che è la stessa trovata alla fine di (a.2).

## Capitolo 5

# Controllo di un pendolo inverso

### 5.1 Modellizzazione

Si consideri ora il seguente sistema:



**Figura 5.1:** Sistema da controllare

in cui:

- $m$  è la massa applicata al pendolo
- $J$  è il momento di inerzia del pendolo attorno alla massa  $m$
- $L$  è la lunghezza del pendolo
- $M$  è la massa del carrello
- $V$  e  $H$  sono le forze di interazione tra pendolo e carrello
- $u$  è la forza esterna applicata al carrello

Per determinare il modello fisico è utile scomporre le forze in gioco agenti su di esso:

### Carrello

Le forze che agiscono verticalmente vengono compensate dalla reazione vincolare del terreno mentre le forze che agiscono orizzontalmente sono date da:

$$M\ddot{x} = u + H - c\dot{x} \quad (5.1)$$

in cui  $c\dot{x}$  rappresenta l'attrito.

### Pendolo

Il bilancio delle forze agenti orizzontalmente è:

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x + L\sin\theta) = -H$$

quindi:

$$\begin{aligned} -H &= m\ddot{x} + mL \frac{d^2}{dt^2} \sin\theta \\ &= m\ddot{x} + mL \frac{d}{dt}(\dot{\theta} \cos\theta) \\ &= m\ddot{x} + mL(-\dot{\theta}^2 \sin\theta + \ddot{\theta} \cos\theta) \\ H &= -m\ddot{x} - mL\dot{\theta}^2 \cos\theta + mL\ddot{\theta} \sin\theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Analizzando invece l'equilibrio verticale si ottiene:

$$\begin{aligned} -V - mg &= m \frac{d^2}{dt^2}(L\cos\theta) \\ &= mL \frac{d}{dt}(-\dot{\theta} \sin\theta) \\ &= -mL(\dot{\theta}^2 \cos\theta + \ddot{\theta} \sin\theta) \\ -V &= mg - mL\dot{\theta}^2 \cos\theta - mL\ddot{\theta} \sin\theta \end{aligned} \quad (5.3)$$

Infine scrivendo l'equazione che descrive l'equilibrio dei momenti:

$$J\ddot{\theta} = -VL\sin\theta + HL\cos\theta$$

e sostituendo (5.2) e (5.3) si trova:

$$J\ddot{\theta} = L\sin\theta(mg - mL\dot{\theta}^2 \cos\theta - mL\ddot{\theta} \sin\theta) + L\cos\theta(-m\ddot{x} - mL\dot{\theta}^2 \cos\theta + mL\ddot{\theta} \sin\theta)$$

a questo punto, poichè il momento d'inerzia  $J$  è di valore trascurabile (in quanto supponiamo l'asta di massa trascurabile), si ha

$$\begin{aligned} (mL^2)\ddot{\theta} &= mgL\sin\theta - mL\ddot{x}\cos\theta \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{L}(g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta) \end{aligned} \quad (5.4)$$



Infine unendo (5.1) e (5.2):

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta = mL\dot{\theta}^2\sin\theta + u - c\dot{x}$$

e sostituendo (5.4):

$$(M + m)\ddot{x} + m\cos\theta(g\sin\theta - \ddot{x}\cos\theta) = mL^2\dot{\theta}^2\sin\theta + u - c\dot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{mL\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta + u - c\dot{x}}{M + m\sin^2\theta}$$

che, sostituita in (5.4), dà:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{1}{L} \left( g\sin\theta - \cos\theta \frac{mL\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta + u - c\dot{x}}{M + m\sin^2\theta} \right) \\ &= \frac{Mg\sin\theta + mg\sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - mL\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - u\cos\theta + c\dot{x}\cos\theta}{L(M + m\sin^2\theta)} \\ &= \frac{(M + m)g\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - u\cos\theta + c\dot{x}\cos\theta}{L(M + m\sin^2\theta)}\end{aligned}$$

A questo punto è possibile scrivere le relazioni tra le variabili del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{mL\dot{\theta}^2\sin\theta - mg\sin\theta\cos\theta + u - c\dot{x}}{M + m\sin^2\theta} \\ \dot{\theta} = \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = \frac{(M + m)g\sin\theta - mL\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta - u\cos\theta + c\dot{x}\cos\theta}{L(M + m\sin^2\theta)} \end{cases}$$

e, applicando il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mLx_4^2\sin x_3 - mg\sin x_3\cos x_3 + u - cx_2}{M + m\sin^2 x_3} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(M + m)g\sin x_3 - mLx_4^2\sin x_3\cos x_3 - u\cos x_3 + cx_2\cos x_3}{L(M + m\sin^2 x_3)} \end{cases} \quad (5.5)$$

risulta quindi un sistema di ordine 4 con quattro variabili di stato: la posizione  $x_1 = x$ , la velocità  $x_2 = \dot{x}$ , l'angolo  $x_3 = \theta$  e la velocità angolare  $x_4 = \dot{\theta}$ .

## 5.2 Linearizzazione

Ponendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x}_4 = u = 0$  nel sistema (5.5) risulta che i possibili punti di equilibrio sono:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scegliendo di linearizzare nel primo punto di equilibrio, (5.5) diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_2 \\ \dot{x}_2 = & -\frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{M}u - \frac{c}{M}x_2 \\ \dot{x}_3 = & x_4 \\ \dot{x}_4 = & \frac{(M+m)g}{LM}x_3 - \frac{1}{LM}u + \frac{c}{LM}x_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

e quindi si possono ricavare le matrici di stato  $F$  e  $G$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c}{LM} & \frac{(m+M)g}{LM} & 0 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}}_g u$$

### 5.3 Stabilità

Il polinomio caratteristico del sistema linearizzato è:

$$\det(sI - F) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{b}{M} & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & -\frac{b}{LM} & -\frac{M+m)g}{ML} & s \end{bmatrix}$$

che, trascurando l'attrito ( $c = 0$ ), diventa:

$$\det(sI - F) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{M+m)g}{ML} & s \end{bmatrix} = s^2 \left( s^2 - \frac{(M+m)g}{ML} \right)$$

da cui è chiaro come il sistema in assenza di attrito abbia due poli nell'origine, un polo reale positivo e un polo reale negativo e quindi sia instabile.

### 5.4 Raggiungibilità

La matrice di raggiungibilità è:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} g & Fg & F^2g & F^3g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & -\frac{c}{M^2} & \frac{c^2}{M^3} + \frac{mg}{LM^2} \\ \frac{1}{M} & -\frac{c}{M^2} & \frac{c^2}{M^3} + \frac{mg}{LM^2} & -\frac{c^3}{M^4} - \frac{mgc}{LM^3} - \frac{mgc}{LM^3} \\ 0 & -\frac{1}{LM} & \frac{c}{LM^2} & -\frac{c^2}{LM^3} - \frac{(m+M)g}{L^2M^2} \\ -\frac{1}{LM} & \frac{c}{LM^2} & -\frac{c^2}{LM^3} - \frac{(M+m)g}{L^2M^2} & \frac{c^3}{LM^4} + \frac{(m+M)gc}{L^2M^3} + \frac{mgc}{L^2M^3} \end{bmatrix}$$

sostituendo ai parametri letterali utilizzati i seguenti valori:

$g = 10 \frac{m}{s^2}$ ,  $M = 10 \text{ Kg}$ ,  $m = 1 \text{ Kg}$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $c = 0.1 \frac{\text{Kg}}{s}$  si trova:

$$\mathcal{R} = [ g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g ] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & -0.001 & 0.10001 \\ 0.1 & -0.001 & 0.10001 & -0.0020001 \\ 0 & -0.1 & 0.001 & -1.10001 \\ -0.1 & 0.001 & -1.10001 & 0.0120001 \end{bmatrix}$$

che ha determinante uguale a 0.01.

Il rango della matrice di raggiungibilità  $\mathcal{R}$  è perciò massimo e quindi il sistema è completamente raggiungibile.

## 5.5 Calcolo della forma canonica di controllo

Gli autovalori della matrice  $F$  sono: 0, 3.3162, -3.3171, -0.0091 che sono radici del polinomio:  $s^4 + 0.01s^3 - 11s^2 - 0.1s$ . Quindi la matrice di cambiamento di base che riduce  $(F, G)$  in forma canonica di controllo  $(F_C, g_C)$  è:

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_C^{-1} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} -0.1 & -11 & 0.01 & 1 \\ -11 & 0.01 & 1 & 0 \\ 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Si ha dunque che

$$F_C = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1 & 11 & -0.01 \end{bmatrix}$$

e

$$g_C = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 5.6 Allocazione degli autovalori

Volendo allocare gli autovalori del sistema retroazionato in -2, -3, -4, -5 bisogna fare in modo che il polinomio  $p(s) = (s+2)(s+3)(s+4)(s+5) = s^4 + 14s^3 + 71s^2 + 154s + 120$  sia il polinomio caratteristico di

$$F_C + g_C K_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_0 & 0.1 + k_1 & 11 + k_2 & -0.01 + k_3 \end{bmatrix}$$

Deve essere quindi:

$$K_C = [ -120 \quad -154.1 \quad -82 \quad -13.99 ]$$

che nella vecchia base corrisponde a:

$$K = K_C T^{-1} = [ 120 \quad 154.1 \quad 940 \quad 294 ]$$



## Capitolo 6

# Simulazioni a tempo continuo

In tutte le simulazioni si è posto come segnale di ingresso  $u$  o  $v$  un gradino di ampiezza nulla e come condizioni iniziali i valori:  $x_1(0) = 1.2$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 0.3$ ,  $x_4(0) = 0.1$ .

### 6.1 Sistema linearizzato

Il sistema (5.6) può essere rappresentato (in forma canonica di controllo), in ambiente Simulink, come:

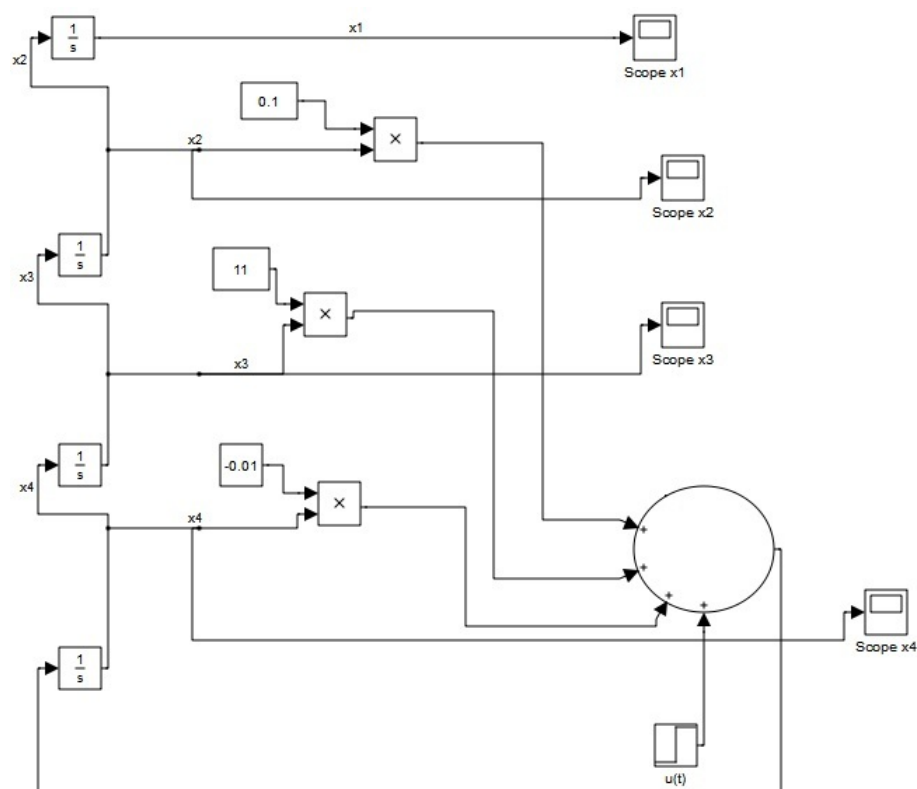
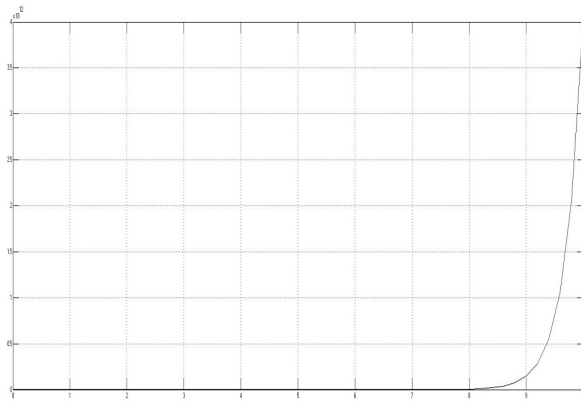
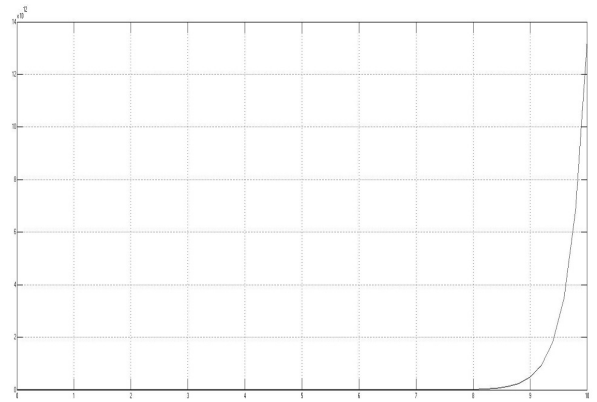
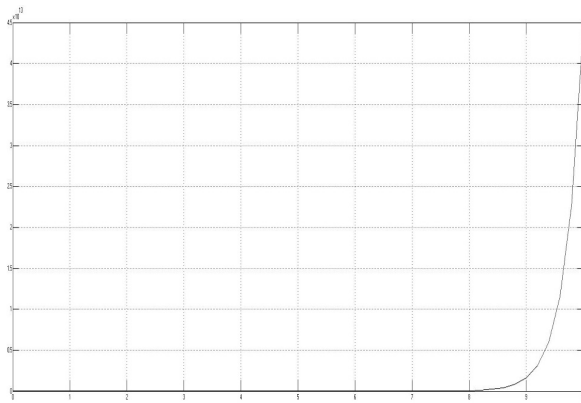
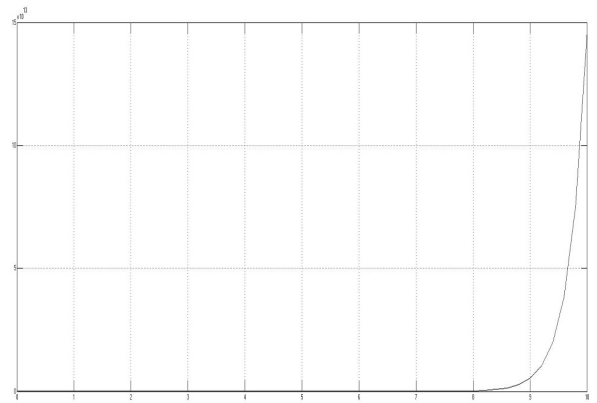


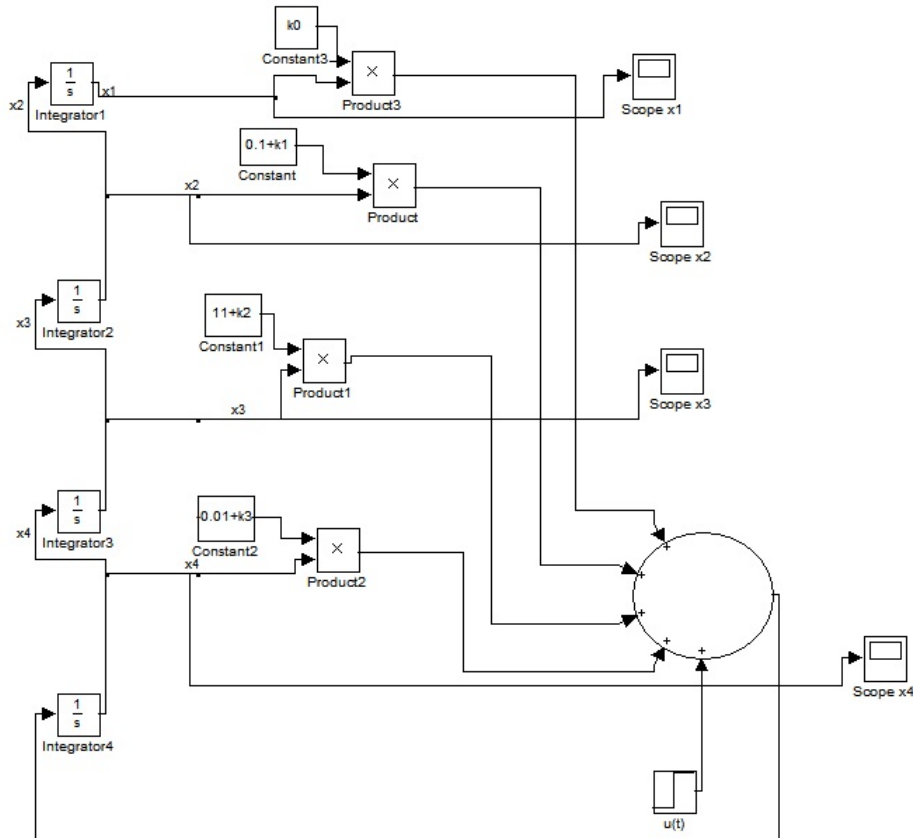
Figura 6.1: Sistema linearizzato senza feedback

e gli andamenti delle sue variabili di stato, riportati in figura 6.2, ne confermano la instabilità.

(a) Variabile  $x_1$ (b) Variabile  $x_2$ (c) Variabile  $x_3$ (d) Variabile  $x_4$ 

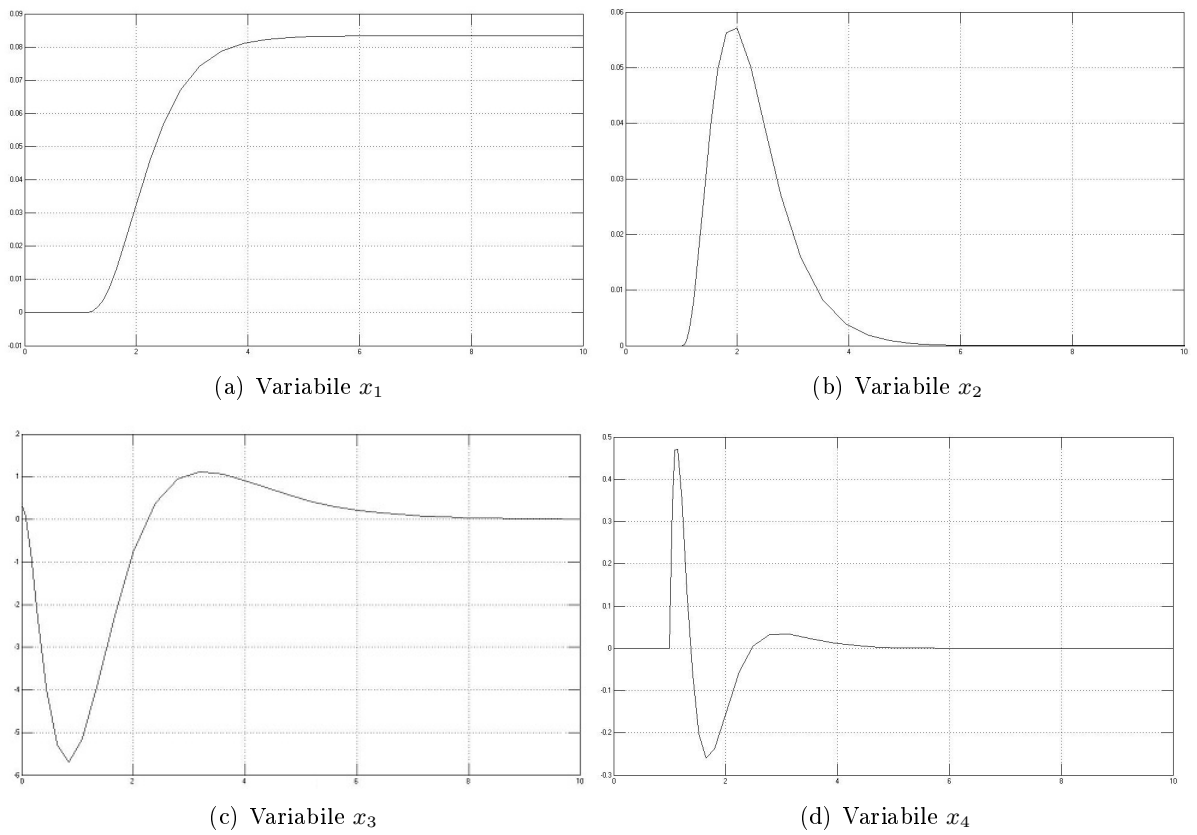
**Figura 6.2:** Variabili di stato del sistema linearizzato non retroazionato

In accordo a quanto detto precedentemente, attuando una retroazione dallo stato sul sistema linearizzato, si giunge allo schema di figura 6.3, in cui le variabili di stato compaiono moltiplicate per i coefficienti  $k_i$  della matrice  $K_C$  calcolata nel paragrafo (5.6). Come si può vedere dalla figura 6.4, grazie alla suddetta retroazione si ottiene



**Figura 6.3:** Sistema linearizzato con feedback

un sistema asintoticamente stabile.

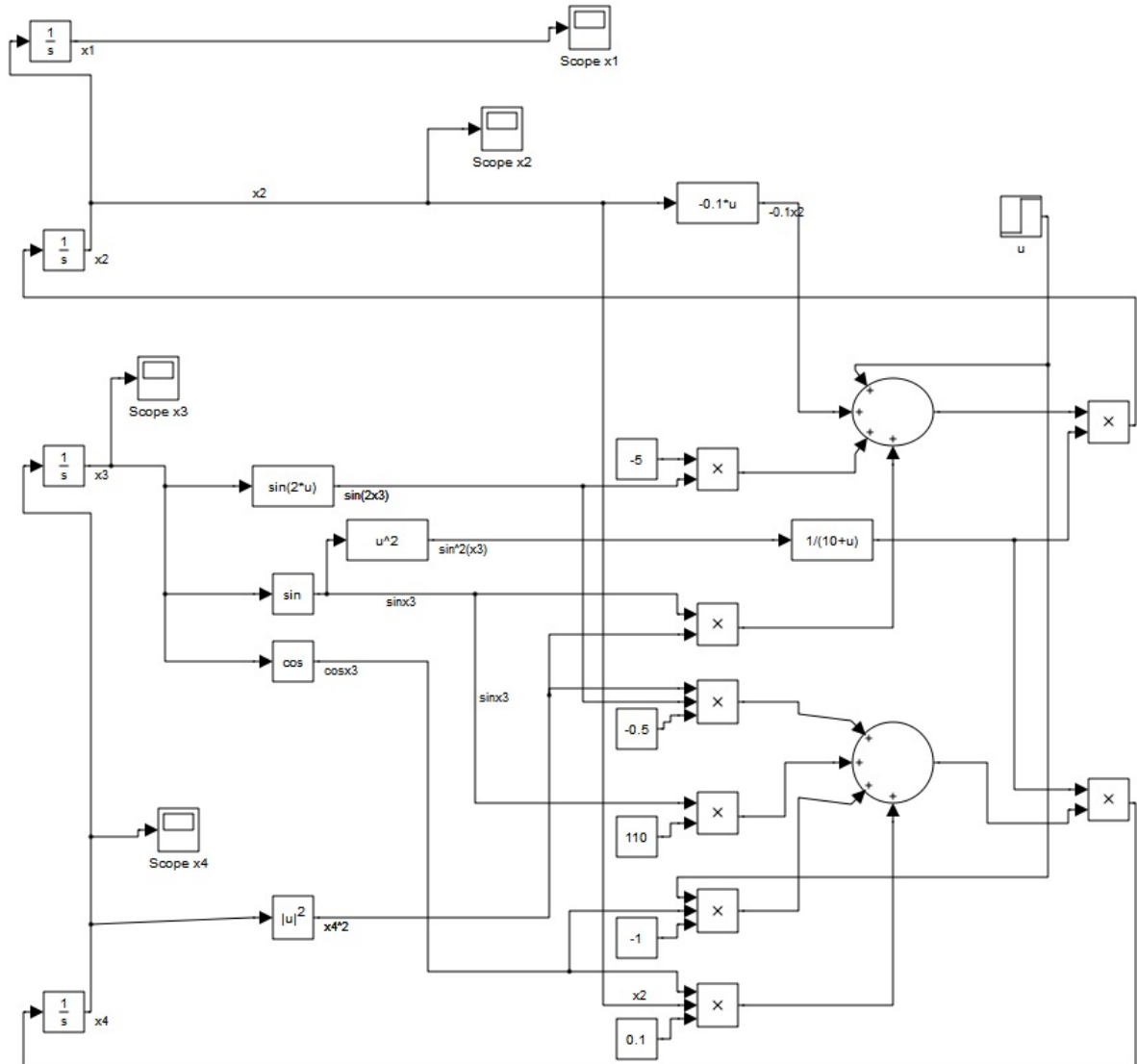


**Figura 6.4:** Variabili di stato del sistema linearizzato e retroazionato



## 6.2 Sistema non lineare

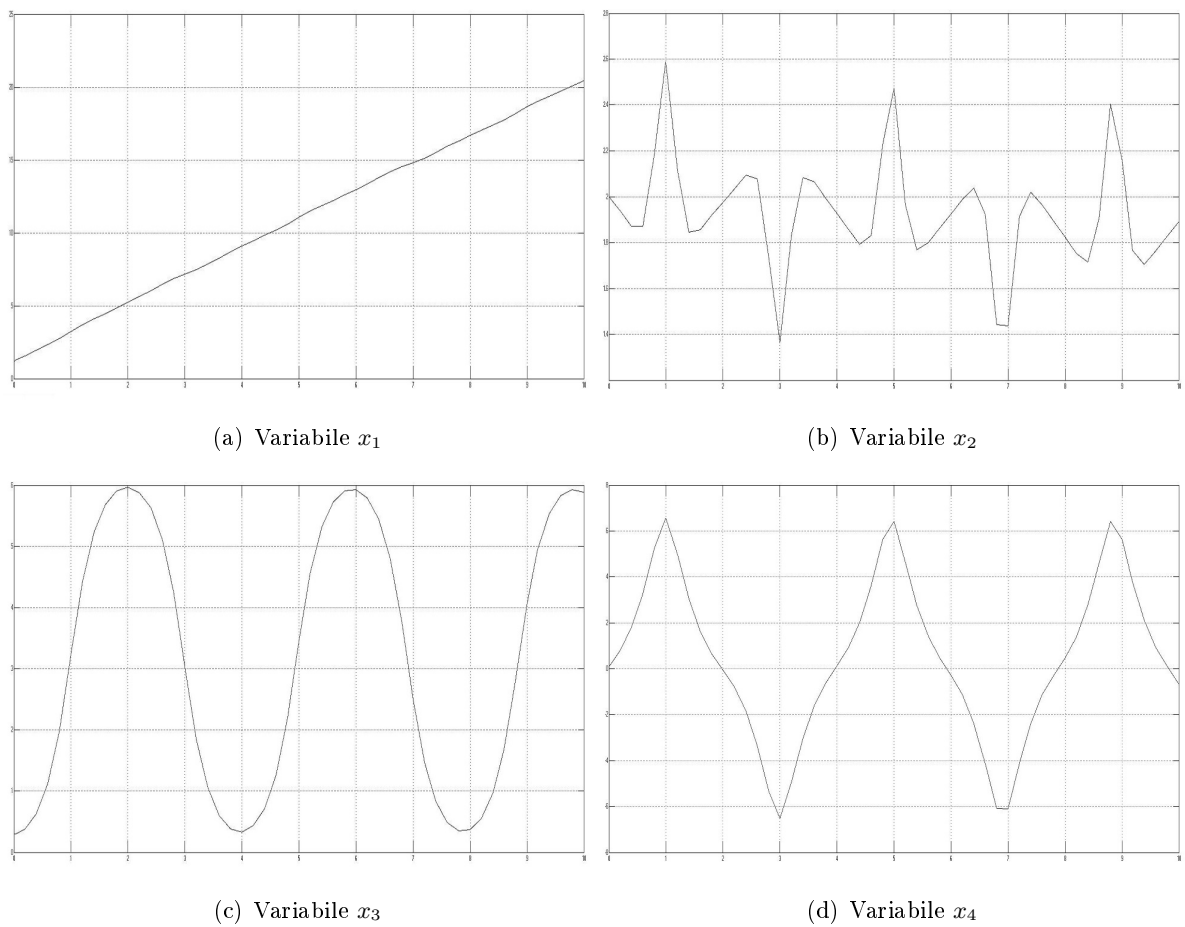
Il sistema (5.5), non lineare, è rappresentato in figura 6.5 e le sue variabili di stato



**Figura 6.5:** sistema non lineare originario

hanno gli andamenti di figura 6.6.

Attuando quindi la già citata retroazione dallo stato direttamente sul sistema non lineare, utilizzando la matrice  $K$  calcolata nel paragrafo (5.6), si ottiene il sistema di figura 6.7, le cui variabili di stato, in accordo a quanto detto nel paragrafo (4.0.2), risultano essere asintoticamente stabili (figura 6.8).



**Figura 6.6:** Variabili di stato del sistema non lineare non retroazionato

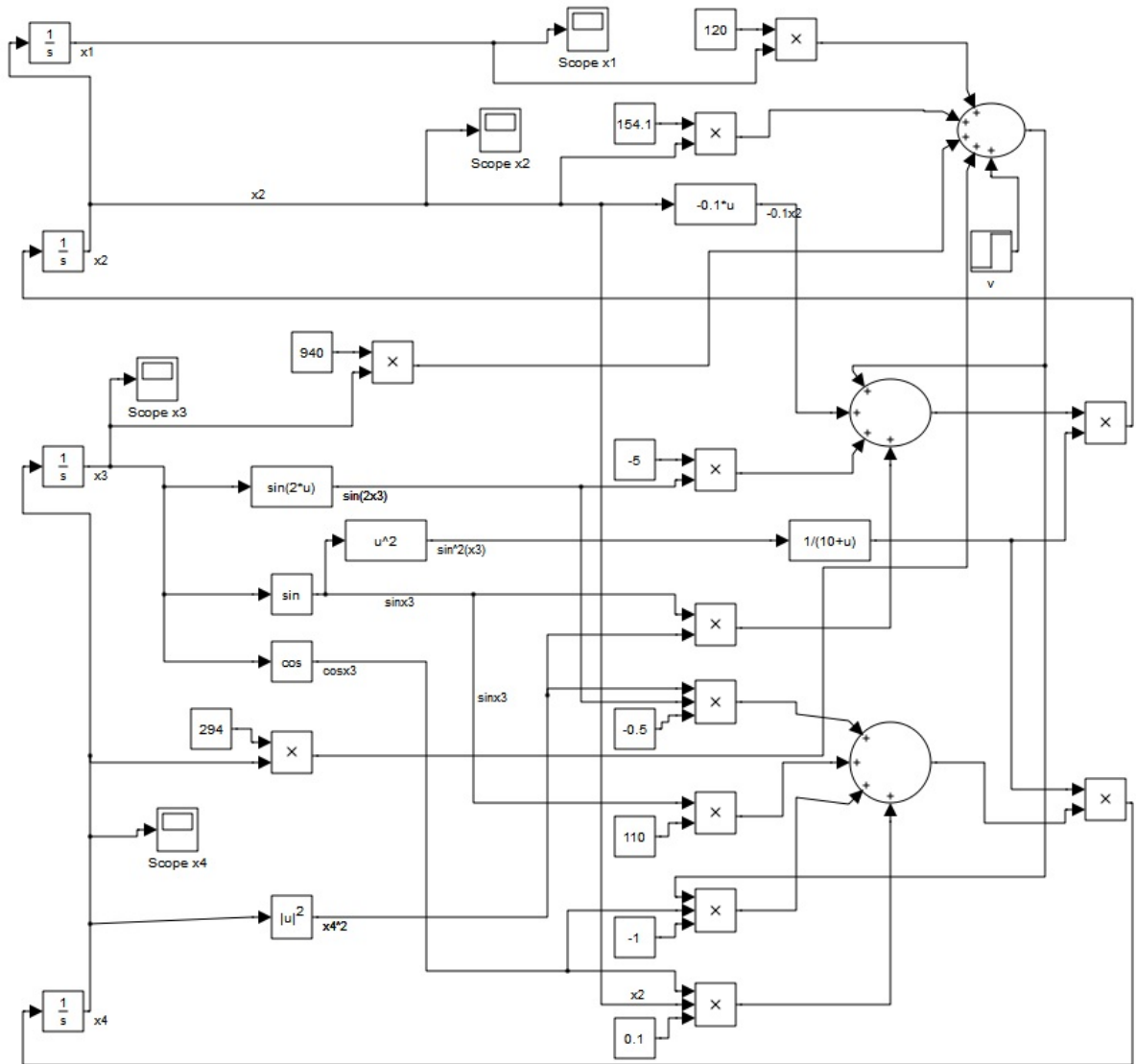
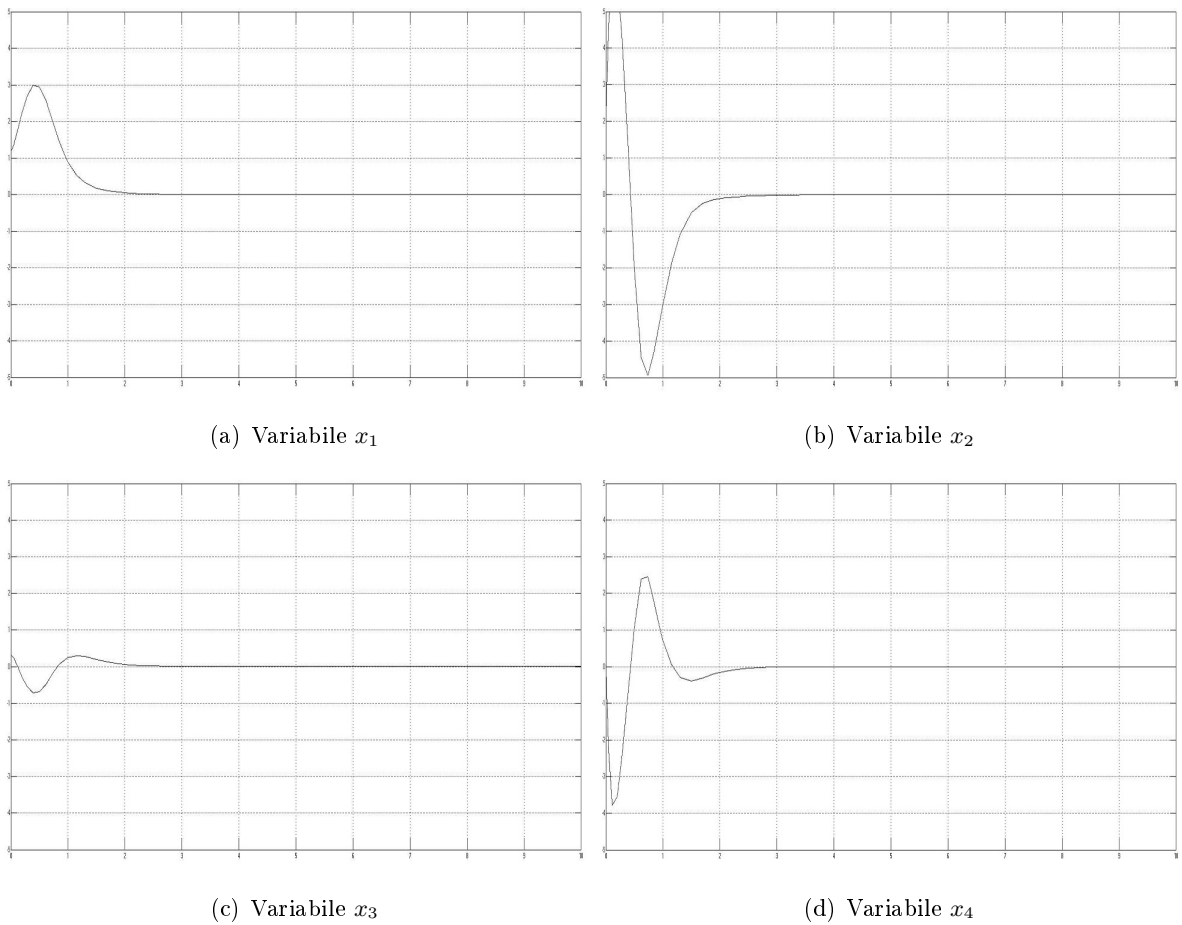


Figura 6.7: Sistema non lineare con feedback



**Figura 6.8:** Variabili di stato del sistema non lineare retroazionato

## Capitolo 7

# Analisi del sistema a tempo discreto

Siccome nei moderni sistemi computerizzati le elaborazioni numeriche sono eseguite in modo discreto, è interessante costruire un controllore digitale che possa stabilizzare il sistema fin qui analizzato in modo da poter confrontare successivamente le prestazioni delle due soluzioni considerate.

### 7.1 Discretizzazione

Il sistema ottenuto dalla discretizzazione di (5.5) è:

$$\begin{cases} x_1(n + \Delta t) = x_1(n) + \Delta t(x_2(n)) \\ x_2(n + \Delta t) = x_2(n) + \Delta t \frac{mLx_4^2(n)\text{sen}x_3(n) - mg\text{sen}x_3(n)\text{cos}x_3(n) + u(n) - cx_2(n)}{M + m\text{sen}^2x_3(n)} \\ x_3(n + \Delta t) = x_3(n) + \Delta t(x_4(n)) \\ x_4(n + \Delta t) = x_4(n) + \Delta t \frac{(M+m)g\text{sen}x_3(n) - mLx_4^2(n)\text{sen}x_3(n)\text{cos}x_3(n) - u(n)\text{cos}x_3(n) + cx_2(n)\text{cos}x_3(n)}{L(M + m\text{sen}^2x_3(n))} \end{cases}$$

che può essere riscritto, per uniformarci alla teoria, come:

$$\begin{cases} x_1(n + 1) = x_1(n) + \Delta t(x_2(n)) \\ x_2(n + 1) = x_2(n) + \Delta t \frac{mLx_4^2(n)\text{sen}x_3(n) - mg\text{sen}x_3(n)\text{cos}x_3(n) + u(n) - cx_2(n)}{M + m\text{sen}^2x_3(n)} \\ x_3(n + 1) = x_3(n) + \Delta t(x_4(n)) \\ x_4(n + 1) = x_4(n) + \Delta t \frac{(M+m)g\text{sen}x_3(n) - mLx_4^2(n)\text{sen}x_3(n)\text{cos}x_3(n) - u(n)\text{cos}x_3(n) + cx_2(n)\text{cos}x_3(n)}{L(M + m\text{sen}^2x_3(n))} \end{cases} \quad (7.1)$$

### 7.2 Linearizzazione

Il sistema (7.1), se linearizzato, diventa:

$$\begin{cases} x_1(n + 1) = x_1(n) + \Delta t x_2(n) \\ x_2(n + 1) = x_2(n) + \Delta t \left( \frac{-mg}{M} x_3(n) + \frac{1}{M} u(n) - \frac{c}{M} x_2(n) \right) \\ x_3(n + 1) = x_3(n) + \Delta t x_4(n) \\ x_4(n + 1) = x_4(n) + \Delta t \left( \frac{(M+m)g}{LM} x_3(n) - \frac{1}{LM} u(n) + \frac{c}{LM} x_2(n) \right) \end{cases} \quad (7.2)$$

e quindi si possono ricavare le matrici di stato  $F$  e  $G$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{c\Delta t}{M} & -\frac{mg\Delta t}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & \frac{c\Delta t}{LM} & \frac{(m+M)g\Delta t}{LM} & 1 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{M} \\ 0 \\ -\frac{\Delta t}{LM} \end{bmatrix}}_g u$$

In cui  $F$  ha autovalori  $1, 0.9909, -2.3171, 4.3162$  che sono radici del polinomio caratteristico:  $p(s) = s^4 - 3.99s^3 - 5.03s^2 + 17.93s - 9.91$ .

### 7.3 Raggiungibilità

Sostituendo i consueti valori numerici<sup>1</sup> si ottiene la seguente matrice di raggiungibilità:

$$\mathcal{R} = [g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g] = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.199 & 0.39701 \\ 0.1 & 0.099 & 0.19801 & 0.3950299 \\ 0 & -0.1 & -0.199 & -1.39701 \\ -0.1 & -0.099 & -1.19801 & -3.3850299 \end{bmatrix}$$

che, avendo determinante non nullo, rende il sistema completamente raggiungibile.

### 7.4 Calcolo della forma canonica di controllo

La matrice di cambiamento di base che riduce  $(F, G)$  in forma canonica di controllo  $(F_C, g_C)$  è:

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_C^{-1} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 17.93 & -5.03 & -3.99 & 1 \\ -5.03 & -3.99 & 1 & 0 \\ -3.99 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 & -0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.9 & -0.7 & -0.3 & 0.01 \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 & 0 \\ 0.09999999 & -0.3 & 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Si ha dunque:

$$F_C = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.91 & -17.93 & 5.03 & 3.99 \end{bmatrix}$$

### 7.5 Allocazione degli autovalori

Per far sì che il sistema discreto risulti stabile è possibile allocare gli autovalori in  $0.1, 0.3, -0.2, 0$ . Il polinomio  $p(s) = s(s-0.1)(s-0.3)(s+0.2) = s^4 - 0.2s^3 - 0.05s^2 +$

<sup>1</sup>come  $\Delta t$  si è utilizzato il valore 1

0.006s dovrà quindi essere il polinomio caratteristico di

$$F_C + g_C K_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_0 + 9.91 & k_1 - 17.93 & k_2 + 5.03 & k_3 + 3.99 \end{bmatrix}$$

Si trova quindi che:

$$K_C = [ -9.91 \quad 17.924 \quad -4.98 \quad -3.79 ]$$

che nella vecchia base corrisponde a:

$$K = K_C T^{-1} = [ 0.756 \quad 3.406 \quad 164.256 \quad 41.306 ]$$





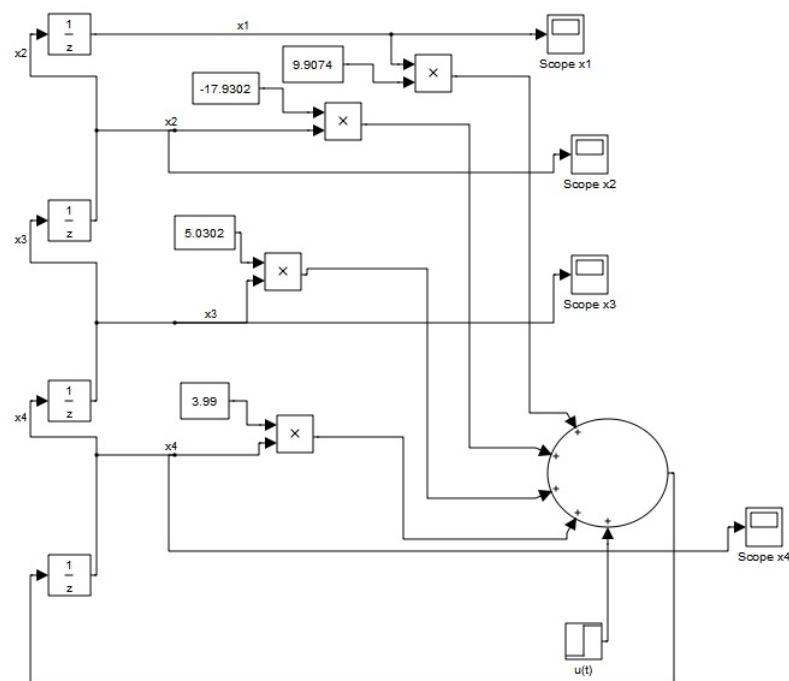
## Capitolo 8

# Simulazioni a tempo discreto

Come per le simulazioni a tempo continuo del capitolo 6, anche qui si è posto come segnale d'ingresso  $u$  o  $v$  un gradino di ampiezza nulla e come condizioni iniziali<sup>1</sup>:  $x_1(0) = 1.2$ ,  $x_2(0) = 2$ ,  $x_3(0) = 0.3$ ,  $x_4(0) = 0.1$ .

### 8.1 Sistema linearizzato

Il sistema (7.2) può essere rappresentato<sup>2</sup>, in ambiente Simulink, nel modo seguente:

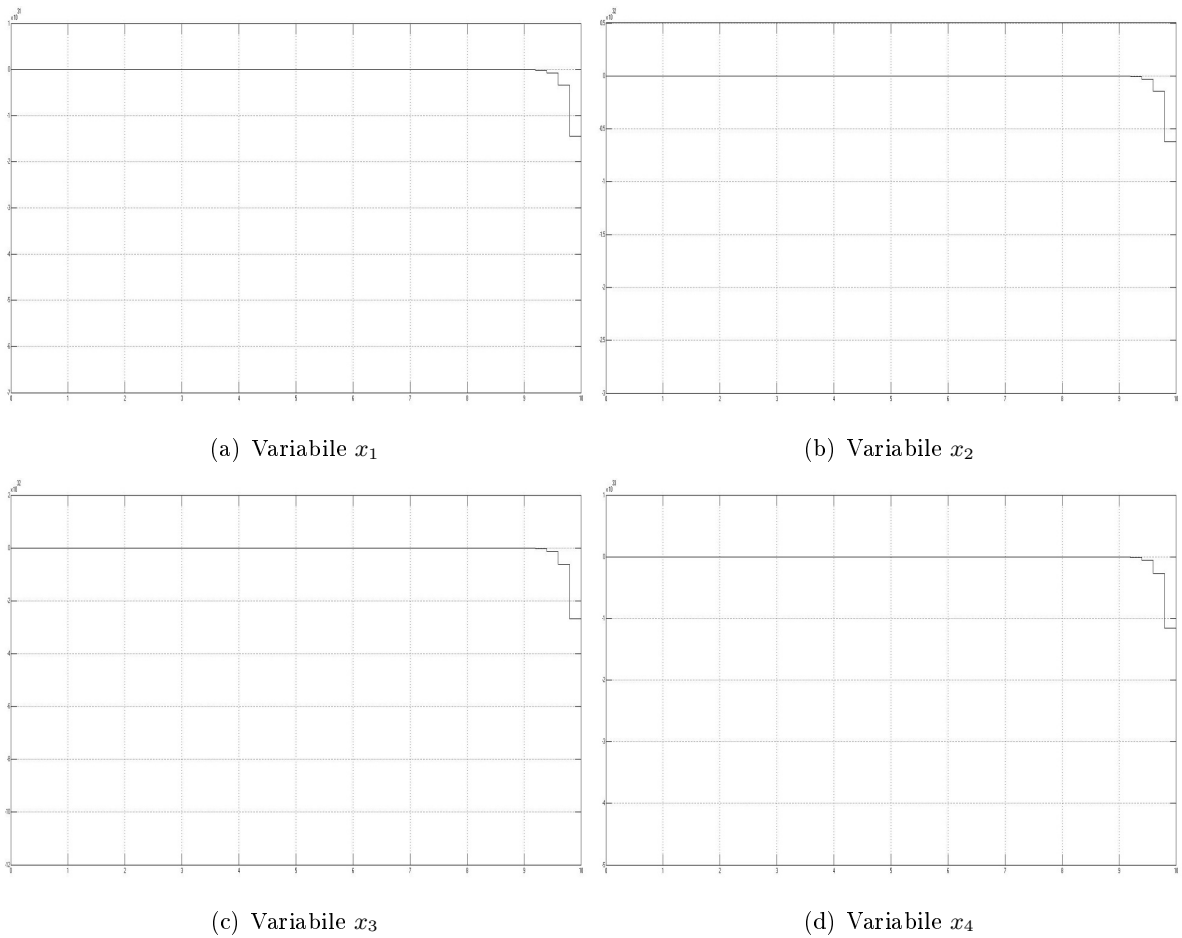


**Figura 8.1:** Sistema discreto linearizzato senza feedback

<sup>1</sup>se non diversamente indicato

<sup>2</sup>in forma canonica di controllo

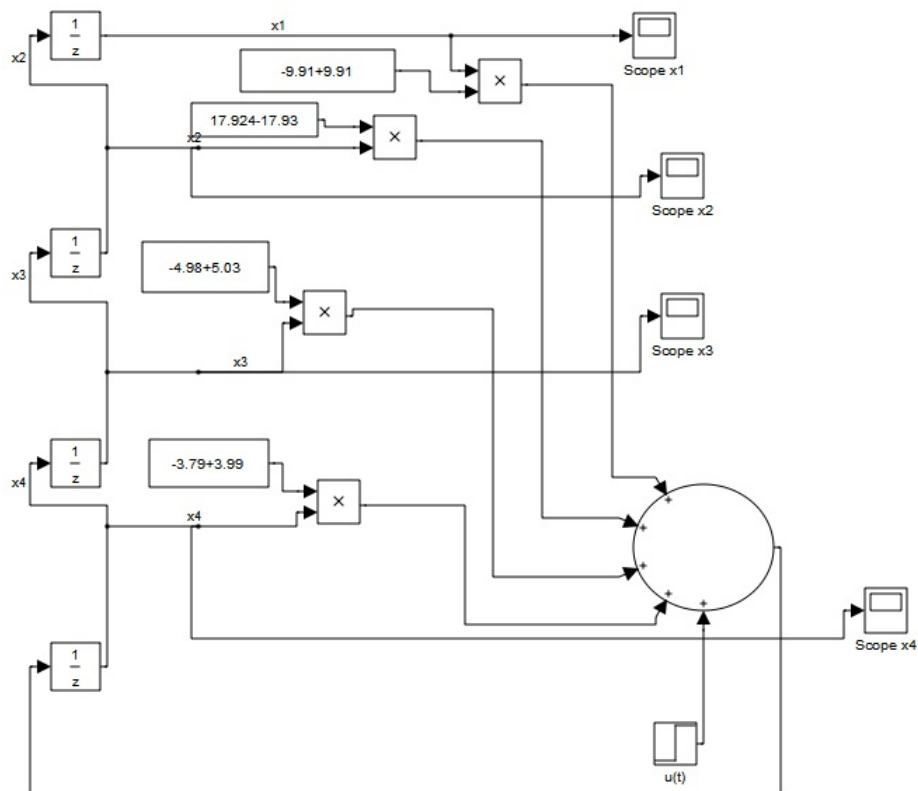
ed è evidente come le variabili di stato del sistema non siano stabili.



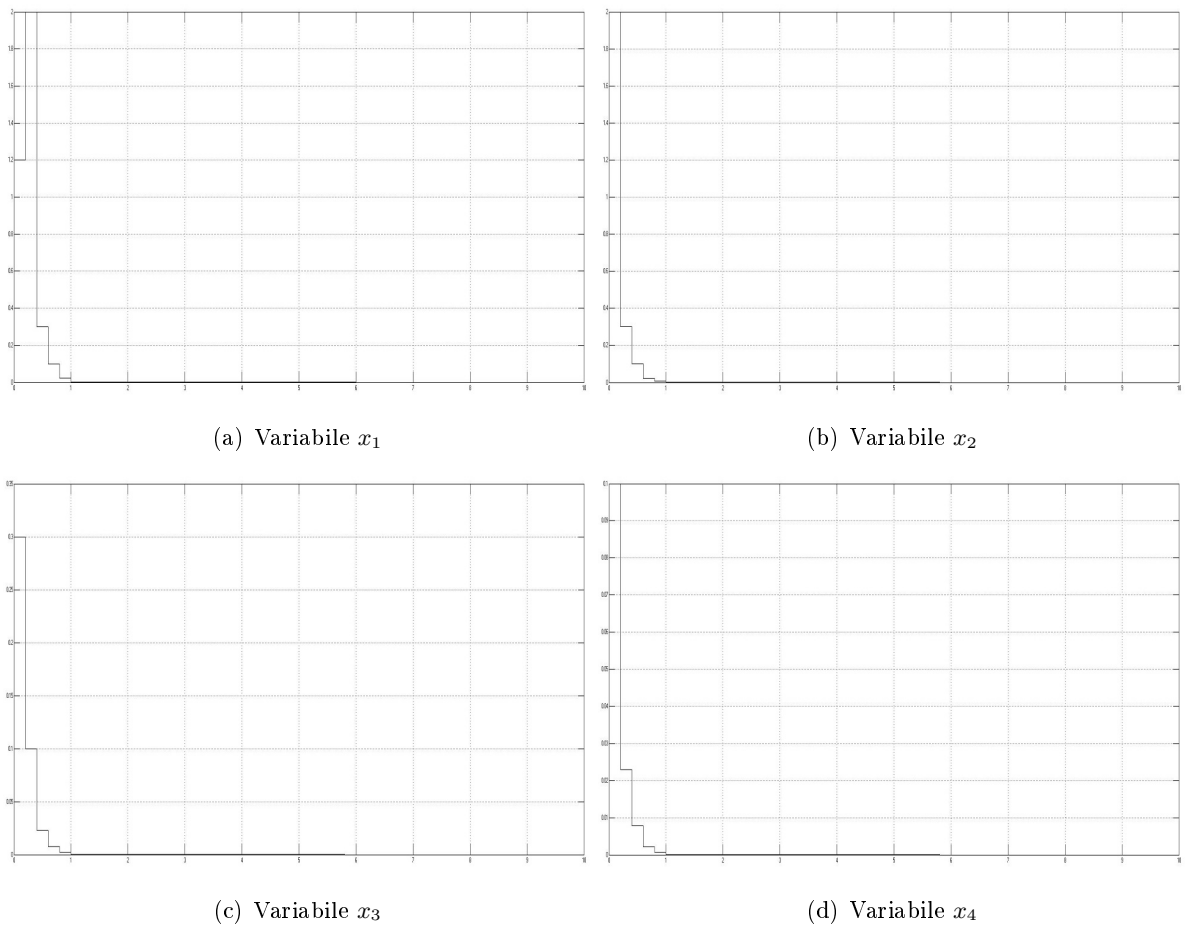
**Figura 8.2:** Variabili di stato del sistema discreto linearizzato non retroazionato

Attuando la retroazione dallo stato calcolata nel paragrafo (7.5) si ottiene lo schema di figura 8.3, in cui le variabili di stato  $x_i$  sono state moltiplicate per i coefficienti  $k_i$  della matrice  $K_C$  del suddetto paragrafo.

Grazie a ciò si ottiene il sistema asintoticamente stabile di figura 8.4.



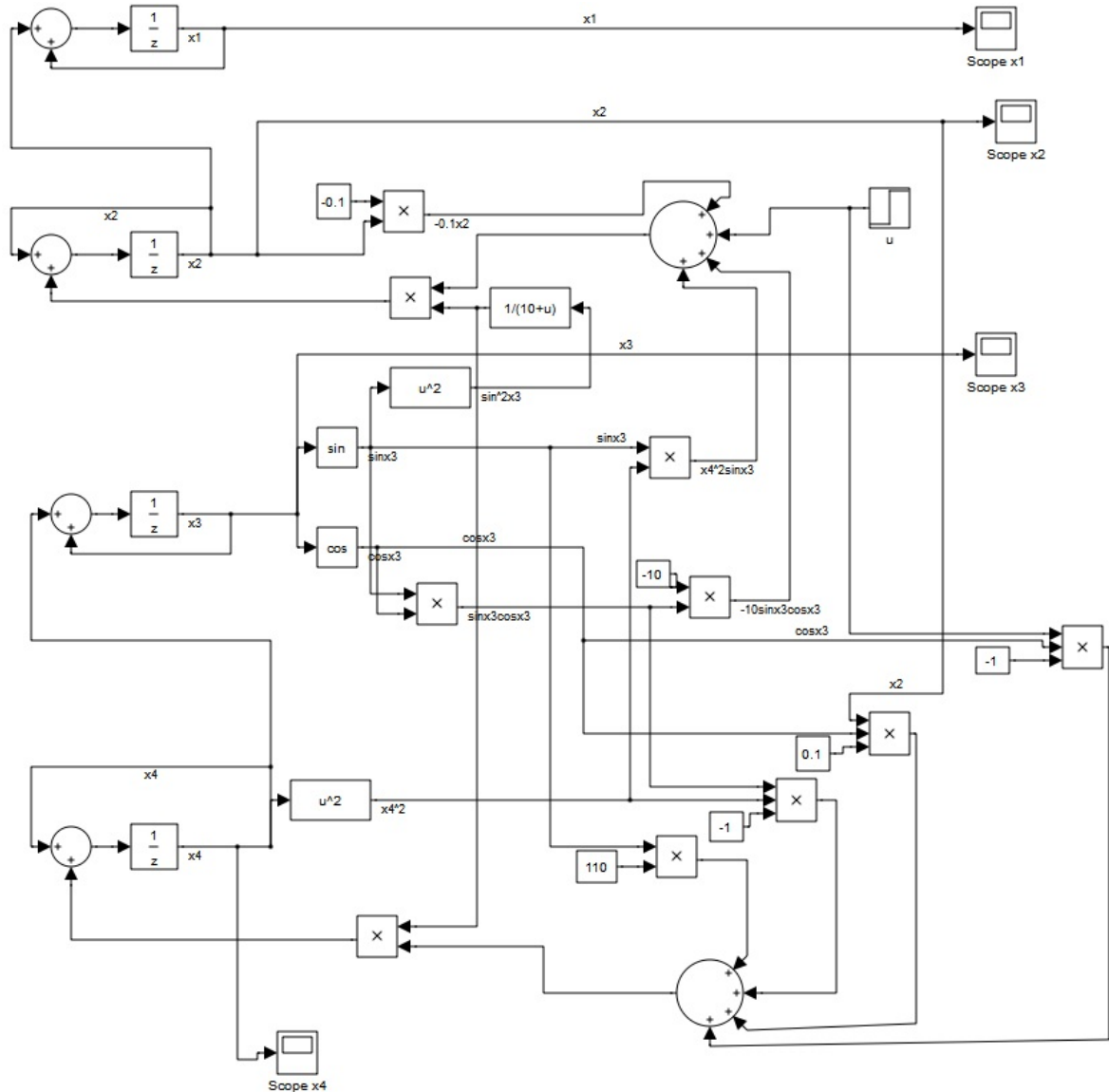
**Figura 8.3:** Sistema discreto linearizzato con feedback



**Figura 8.4:** Variabili di stato del sistema discreto linearizzato e retroazionato

## 8.2 Sistema non lineare

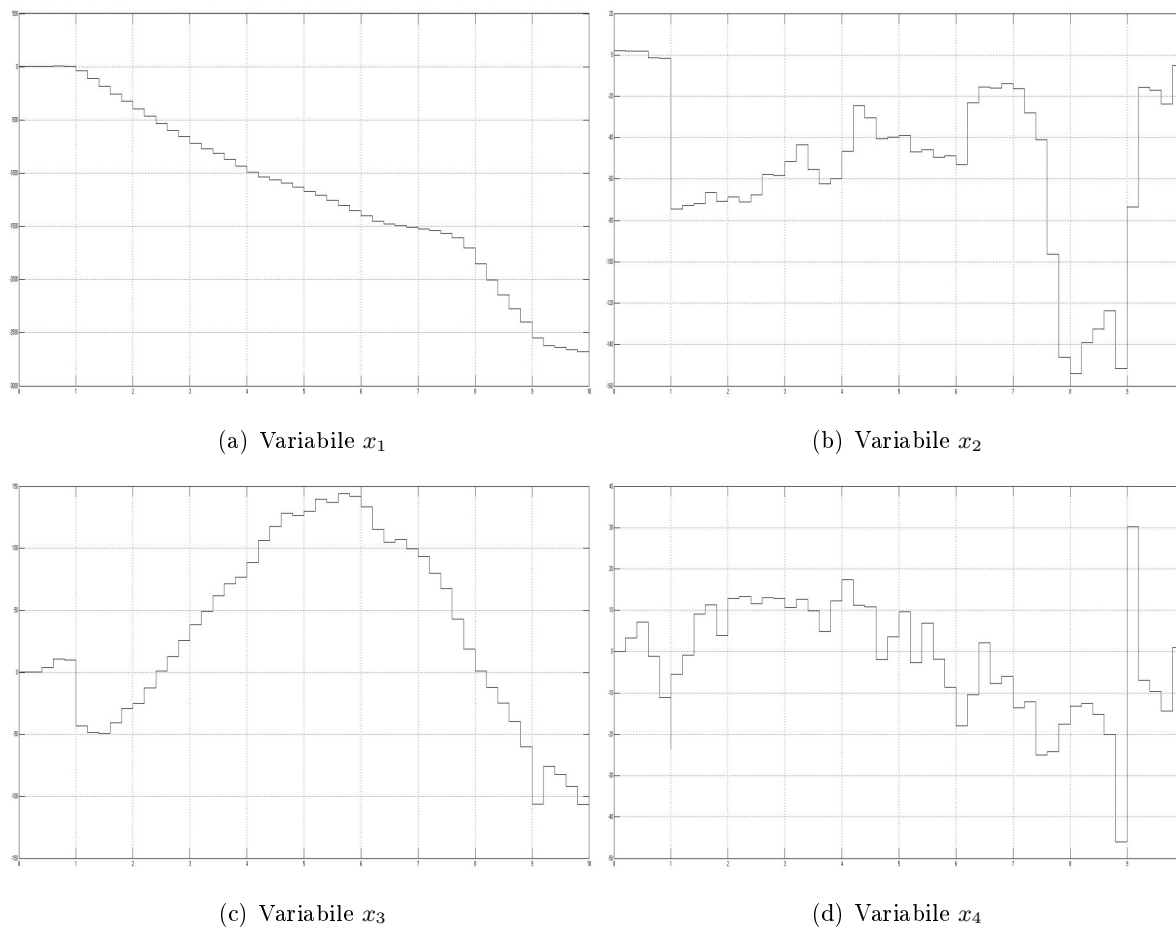
Il sistema (7.1), non lineare, è stato rappresentato nello schema di figura 8.5 ed è facile vedere come esso abbia delle variabili di stato instabili (figura 8.6).



**Figura 8.5:** Sistema discreto non lineare

Contrariamente al caso a tempo continuo, l'implementazione del feedback dallo stato sul sistema discreto non lineare ha comportato la necessità di modificare i valori iniziali delle variabili di stato: utilizzando infatti le stesse condizioni di partenza introdotte all'inizio del capitolo 6 il sistema divergeva anche in presenza di retroazione.

Sono state prese quindi, solo per questa ultima simulazione:  $x_1(0) = 0.05$ ,  $x_2(0) = 0.01$ ,  $x_3(0) = 0.05$ ,  $x_4(0) = 0.1$ . La spiegazione del fenomeno è da ricondursi alla



**Figura 8.6:** Variabili di stato del sistema discreto non lineare

sceita del valore assegnato a  $\Delta t$ : al crescere del tempo di campionamento gli intorni del punto di equilibrio (quello per il tempo continuo e quello per il tempo discreto) si diversificano e solo per  $\Delta t$  tendente a zero essi tendono a diventare uguali.

Il sistema discreto non lineare a cui è stato applicato il feedback dallo stato è il seguente:

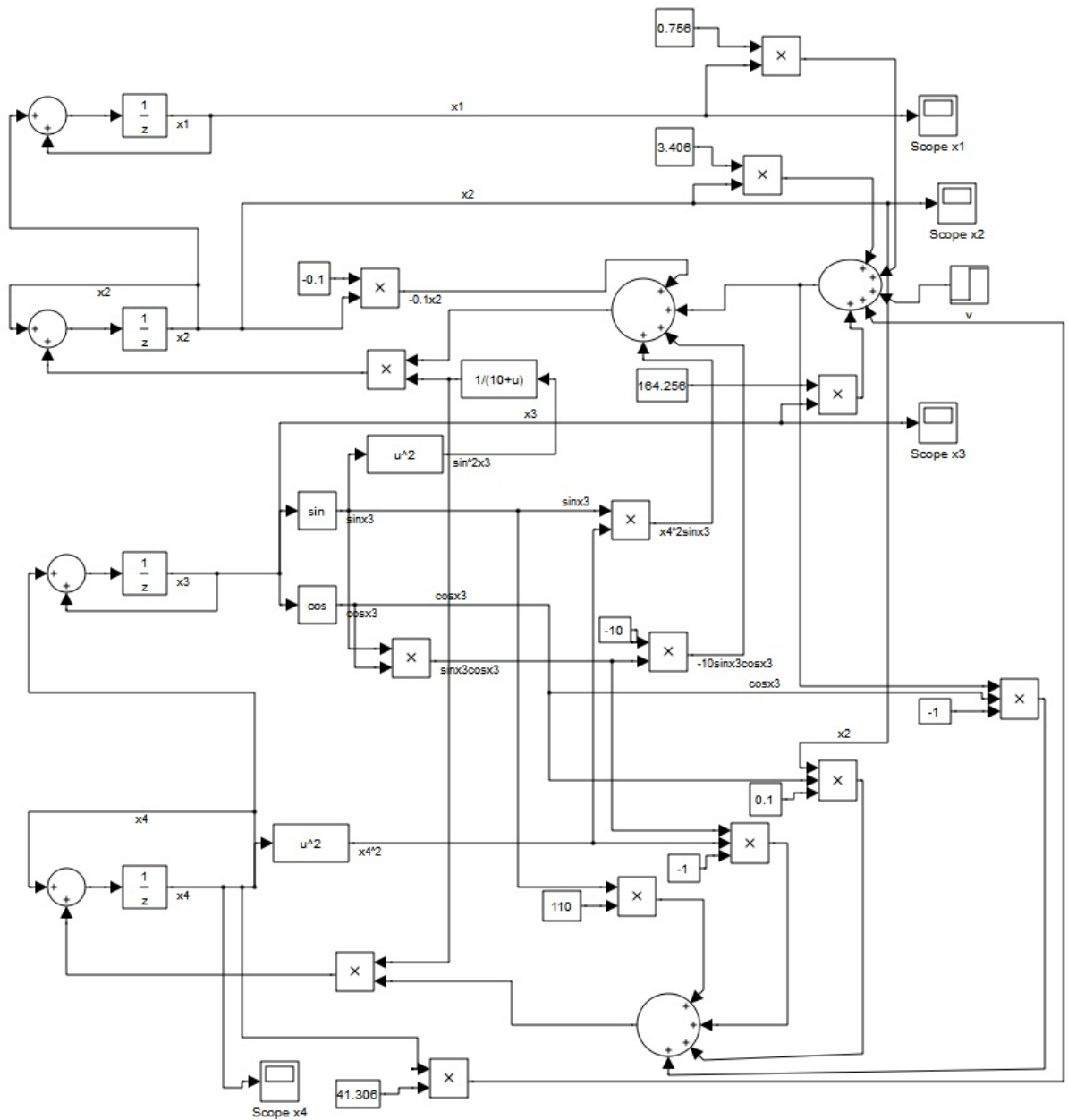
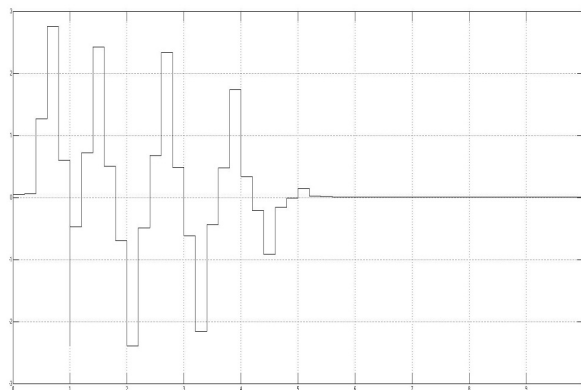
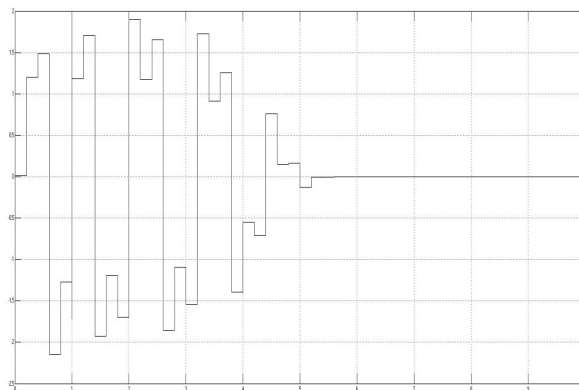


Figura 8.7: Sistema discreto non lineare con feedback

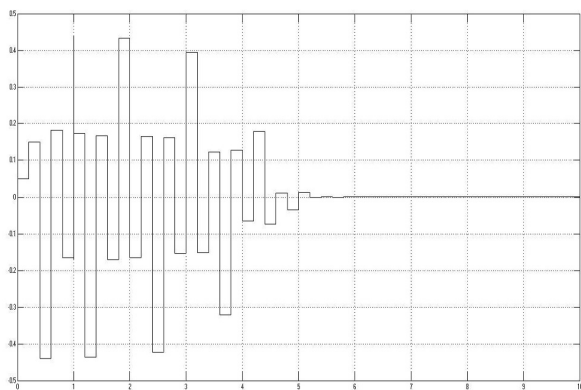
e, come si può vedere, esso è asintoticamente stabile.



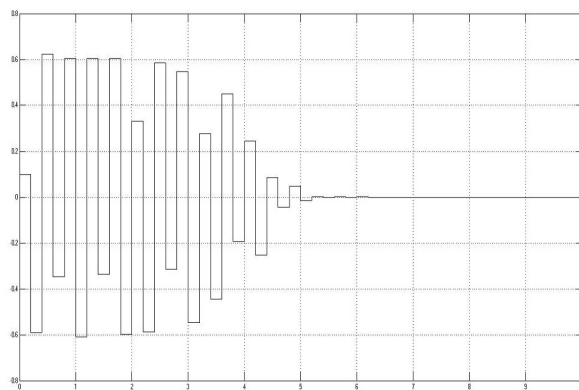
(a) Variabile  $x_1$



(b) Variabile  $x_2$



(c) Variabile  $x_3$



(d) Variabile  $x_4$

**Figura 8.8:** Variabili di stato del sistema discreto non lineare retroazionato



# Bibliografia

- [1] M. Bisiacco, S. Braghetto, *Teoria dei sistemi dinamici*, Esculapio, Bologna, pp. 71-120.
- [2] E. Fornasini, G. Marchesini, *Appunti di teoria dei sistemi*, Progetto, Padova, pp. 201-254.
- [3] R. Dorf, R. Bishop, *Modern control systems- twelfth edition*, Upper Saddle River: Prentice Hall, pp. 835-847.