

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Titolo**

Modelli quantistici per il deutone deformabile

**Relatore**

Prof. Lorenzo Fortunato

**Laureando**

Antonio Pio Italiano

Anno Accademico 2022/2023

# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>1 Il deutone</b>                                       | <b>2</b>  |
| <b>2 Il problema a due corpi per corpi non puntiformi</b> | <b>4</b>  |
| <b>3 Il potenziale di interazione</b>                     | <b>6</b>  |
| <b>4 Corpi deformabili</b>                                | <b>9</b>  |
| <b>5 Conclusioni</b>                                      | <b>13</b> |
| <b>6 Appendice</b>  | <b>14</b> |

# Introduzione

Il deutone costituisce il più semplice sistema nucleare legato, essendo costituito soltanto da un protone ed un neutrone interagenti mediante la forza forte. Data la sua semplicità, esso viene usato per sviluppare modelli utili nella comprensione della forza nucleare. Nel corso degli anni infatti, partendo da un semplice approccio di problema a due corpi con masse puntiformi e potenziale a buca quadra, fino ad arrivare a modelli che includessero un potenziale molto più sofisticato e considerazioni su momento angolare e isospin; l'accordo con le misure sperimentali è via via migliorato.

La maggior parte degli approcci teorici non ha però considerato che a ben vedere i costituenti non sono puntiformi, ma hanno una distribuzione di materia nello spazio, e che una trattazione completa non possa ignorarlo.

Lo scopo di questa tesi è quindi di raffinare le valutazioni fatte fino a questo momento, cioè di effettuare gli stessi calcoli con la “piccola” aggiunta delle masse come variabili del problema.

Si partirà da un'estensione del concetto di massa ridotta per oggetti estesi, per poi calcolare un potenziale di interazione integrando nello spazio un potenziale nucleone-nucleone opportunamente parametrizzato. I precedenti risultati andrebbero inseriti in una Hamiltoniana costruita con metodi che includono la distribuzione delle masse, da cui risolvere l'equazione di Schrödinger e calcolare quindi energie e autofunzioni.

# Capitolo 1

## Il deutone

Il sistema formato da un protone ed un neutrone, è il più semplice sistema nucleare legato e stabile. “Legato” vuol dire che la massa del sistema è inferiore alla massa dei suoi costituenti, ovvero parte dell’energia è stata trasformata in energia di legame, mentre “stabile” vuol dire che non decade spontaneamente nei suoi costituenti, sebbene sia un sistema debolmente legato, con energia di legame pari a circa 2.224 MeV. Senza voler entrare nei dettagli, si presenterà un breve richiamo al modello teorico utilizzato per studiare questo sistema, in modo da rendere chiaro il differente approccio utilizzato in questo lavoro.

Facendo riferimento alla Figura 1.1, si sceglie un sistema di coordinate in cui  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  sono le coordinate delle particelle ed  $m_1$  e  $m_2$  le loro masse. In questo sistema la risoluzione dell’Hamiltoniana risulta essere complicata, per cui si sceglie di mettersi nel riferimento del centro di massa (figura 1.2) in cui si effettuano le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} \vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \quad (1.1)$$

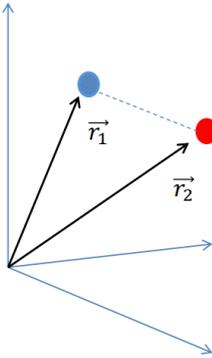


Figura 1.1: Coordinate cartesiane.

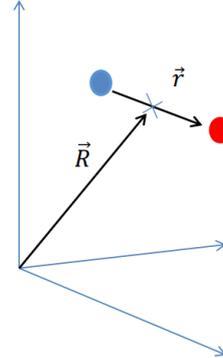


Figura 1.2: Coordinate del centro di massa.

Di conseguenza la Hamiltoniana risulta:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\hat{P}^2}{2M} + V_{12}(r) \quad (1.2)$$

Dove  $V_{12}$  è il potenziale di interazione tra le due particelle, assunto centrale, cioè dipendente soltanto dal modulo della loro distanza,  $|\vec{r}| = r$ ; mentre  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  ed  $M = m_1 + m_2$  sono rispettivamente la massa ridotta e la massa totale del sistema.

Il termine  $\frac{\hat{P}^2}{2M}$  può essere omesso perché rappresenta l’energia cinetica del centro di massa, che altro non è che una traslazione rigida di tutto il nucleo. In coordinate polari sferiche l’equazione di

Schrödinger per l'operatore  $\hat{H}$  si scrive:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

Il termine cinetico può essere a questo punto scritto come:

$$\vec{p}^2 = p_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2} \quad (1.3)$$

dove  $\hat{L}^2$  è l'operatore momento angolare.

Sfruttando la relazione 1.3 e l'ipotesi di potenziale puramente centrale è possibile fattorizzare la funzione d'onda come prodotto di una parte radiale ed una angolare:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r)\Upsilon_l^m(\theta, \phi) \quad (1.4)$$

indicando con  $\Upsilon_l^m(\theta, \phi)$  le armoniche sferiche, ottenendo per il sistema:

$$\begin{cases} \hat{L}^2\Upsilon_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 L(L+1)\Upsilon_l^m(\theta, \phi) \\ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left( V_{12}(r) + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} \right) u(r) = E u(r) \end{cases} \quad (1.5)$$

definendo  $u(r) = r\psi(r)$  “funzione d'onda radiale ridotta”.

Il presente lavoro estenderà la precedente trattazione ad oggetti non puntiformi, ridefinendo la massa ridotta del sistema, il potenziale di interazione e l'operatore hamiltoniano  $\hat{H}$  coerentemente con le ipotesi fatte.

## Capitolo 2

# Il problema a due corpi per corpi non puntiformi

### La massa ridotta

Nel caso in esame, in cui le particelle presentano una distribuzione di materia nello spazio, l'approccio standard non basta, ma c'è bisogno di ridefinire la massa ridotta del sistema.

Facendo riferimento all'immagine seguente,

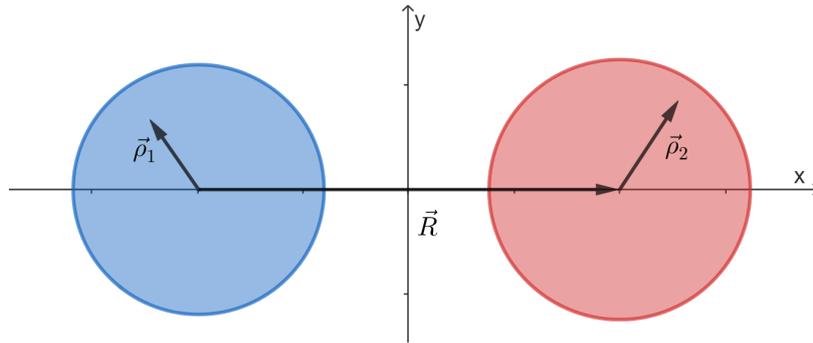


Figura 2.1: Il sistema di coordinate utilizzato per il calcolo della massa ridotta.

dove abbiamo definito con  $\vec{\rho}_i$ ,  $i=1,2$  le coordinate “interne” (ovvero interne al volume della particella  $i$ -esima) e con  $\vec{R}$  la distanza tra i centri delle due particelle, potremmo pensare di scrivere la massa ridotta del sistema calcolandola punto per punto e integrando i risultati sulle coordinate interne, ovvero:

$$\mu(\vec{R}) = \int \frac{m_1(\vec{\rho}_1 - \frac{\vec{R}}{2})m_2(\vec{\rho}_2 + \frac{\vec{R}}{2})}{m_1(\vec{\rho}_1 - \frac{\vec{R}}{2}) + m_2(\vec{\rho}_2 + \frac{\vec{R}}{2})} d\vec{\rho}_1 d\vec{\rho}_2 \quad (2.1)$$

Per i nostri scopi, abbiamo valutato la (2.1) nel caso di distribuzioni di masse gaussiane:

$$m_i(\vec{\rho}_i) = \frac{m_0}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\vec{\rho}_i^2}{\sigma_i^2}\right) \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Con  $m_0$  costante di normalizzazione tale per cui integrando su tutto lo spazio sia restituita la massa del nucleone ( $m_p \approx m_n$ ). Un esempio di distribuzione di massa è riportato nella figura 2.2.

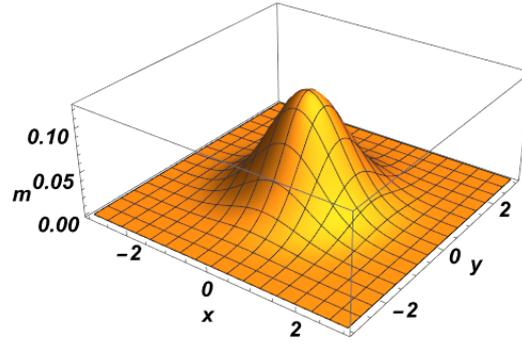


Figura 2.2: Esempio di distribuzione di massa, con  $\sigma = 0.8$ .

La (2.1) non è però facilmente risolvibile, anche con metodi numerici. Per questa ragione nel presente lavoro, che è di puro scopo speculativo, si è studiato il problema in una dimensione, ponendo inoltre  $\vec{R} = (R, 0, 0)$  per semplicità di calcolo.

Quando da tre dimensioni si passa ad una,  $\vec{\rho} \rightarrow x$  e l'equazione (2.1) diventa:

$$\mu(R) = \int \frac{m_1(x_1 - \frac{R}{2})m_2(x_2 + \frac{R}{2})}{m_1(x_1 - \frac{R}{2}) + m_2(x_2 + \frac{R}{2})} dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

Dalle (2.2) e (2.3) otteniamo per la massa ridotta

$$\mu(R) = \int \frac{\left[ \frac{m_0}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \frac{R}{2})^2}{\sigma_1^2}\right) \right] \left[ \frac{m_0}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 + \frac{R}{2})^2}{\sigma_2^2}\right) \right]}{\frac{m_0}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \frac{R}{2})^2}{\sigma_1^2}\right) + \frac{m_0}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 + \frac{R}{2})^2}{\sigma_2^2}\right)} dx_1 dx_2 \quad (2.4)$$

Integrando la (2.4) numericamente, si trova che essa dipende da  $m_0$  e da  $\sigma_i$ , ovvero che dipende dalla massa totale e da come questa è distribuita, ma contrariamente alle attese non dalla distanza tra i centri  $R$ :  $\mu(R) = \mu = \text{costante}$ .

## Capitolo 3

# Il potenziale di interazione

Una volta calcolata la massa ridotta, resta da calcolare il potenziale di interazione tra protone e neutrone. Possiamo immaginare che il potenziale totale sia dato dalla somma del potenziale nucleone-nucleone in tutto il volume delle due distribuzioni.

Nel presente lavoro utilizzeremo come potenziale:

$$V_{NN}(r) = (v_1 r^{p_1} - v_2 r^{p_2}) e^{a+br+cr^2} \quad (3.1)$$

| a       | b [fm <sup>-1</sup> ] | c [fm <sup>-2</sup> ] | v <sub>1</sub> [MeV fm <sup>-p<sub>1</sub></sup> ] | v <sub>2</sub> [MeV fm <sup>-p<sub>2</sub></sup> ] | p <sub>1</sub>            | p <sub>2</sub> |
|---------|-----------------------|-----------------------|--|--|---------------------------|----------------|
| 5.77675 | -0.309736             | -3.56617              | 7.65055  | 14.7941  | -5.95207x10 <sup>-9</sup> | 2              |

come approssimazione “soft-core” del potenziale protone-neutrone ArgonneV18 per il canale <sup>3</sup>S<sub>1</sub> con T=0, ed r tra 0.1 e 9.9 fm, dove facendo riferimento alla figura sottostante, introduciamo la coordinata distanza tra gli elementini di materia nucleare del primo e del secondo nucleone,  $r = |\vec{r}| = |\vec{R} + \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|$ .

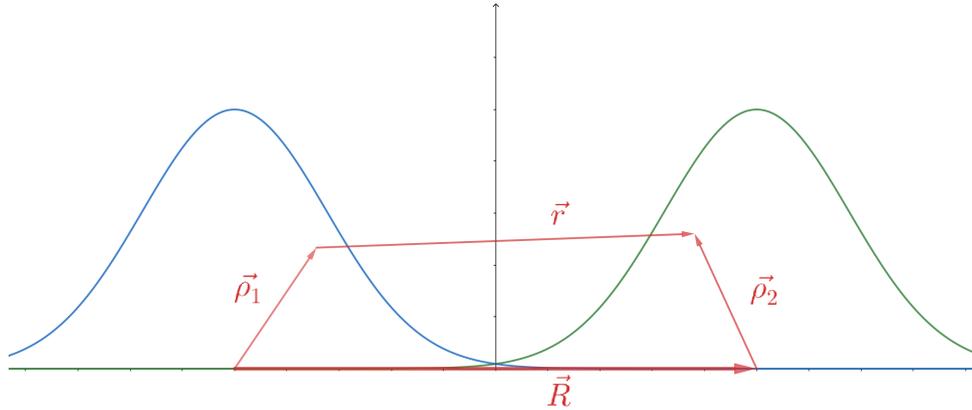


Figura 3.1: Coordinate di integrazione.

Pertanto il l'energia di interazione tra le due distribuzioni sarà:

$$V(R) = \int d\vec{\rho}_1 d\vec{\rho}_2 \left[ \frac{1}{(\sigma_1 \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|\vec{\rho}_1 - \frac{R}{2}\|^2}{\sigma_1^2}\right) \right] \left[ \frac{1}{(\sigma_2 \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|\vec{\rho}_2 + \frac{R}{2}\|^2}{\sigma_2^2}\right) \right] V_{NN}(r) \quad (3.2)$$

che in coordinate cartesiane diventa:

$$V(R) = \frac{1}{(2\sigma_1 \sigma_2 \pi)^3} \int d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \left[ \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_1 - \frac{R}{2})^2 + y_1^2 + z_1^2}{\sigma_1^2}\right) \right] \left[ \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - \frac{R}{2})^2 + y_2^2 + z_2^2}{\sigma_2^2}\right) \right] V_{NN}(r) \quad (3.3)$$

con

$$r = \sqrt{(R - x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{e} \\ \vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i).$$

Poiché l'integrazione numerica risulterebbe molto difficoltosa per  $x \in (-\infty, +\infty)$ , abbiamo preferito integrare per  $c_i \in [-10, 10]$   $c_i, c_i=x,y,z$ , dove gli ulteriori contributi all'integrale risultavano già trascurabili. Ciò discende dal prodotto delle code gaussiane che vanno a zero molto rapidamente con un potenziale che tende a zero asintoticamente.

Le  $\sigma_i$  sono state scelte in modo che il raggio quadratico medio della distribuzione fosse compatibile con quello del protone, ovvero:

$$\sigma_i = 0.8 fm \quad (3.4)$$

I risultati dell'integrazione, valutati per  $R \in [0.1, 5] fm$  a passi di  $0.05 fm$  sono mostrati in figura 3.2, mentre nella figura 3.3 è mostrato un ingrandimento per  $R \in [1.8, 3] fm$ , in cui il potenziale è negativo, ovvero attrattivo. È stato scelto di collegare i punti nel grafico per migliorarne la visualizzazione.

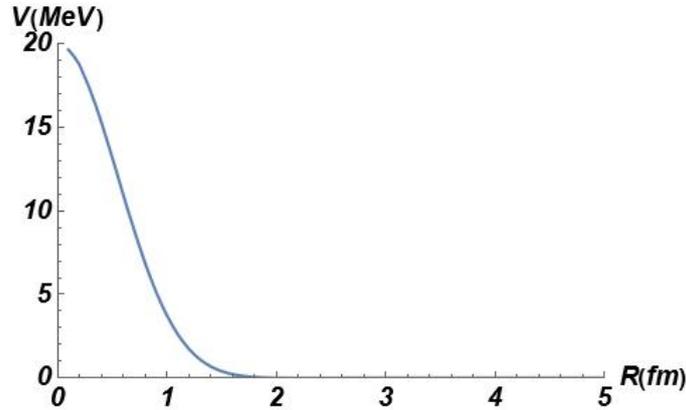


Figura 3.2: Grafico del potenziale senza deformazione.

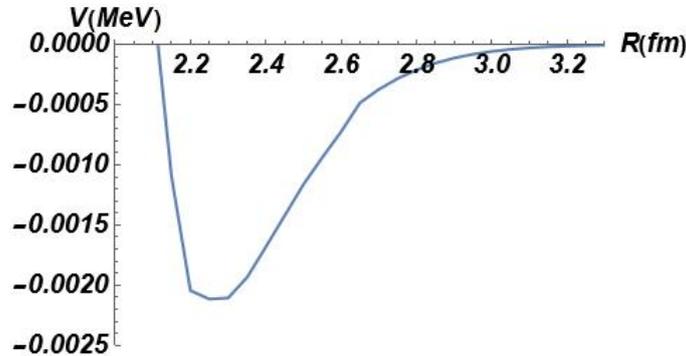


Figura 3.3: Grafico nella zona a potenziale negativo, con distribuzioni non deformate.

La figura 3.3, mostra il potenziale nella regione in cui il sistema è legato, con il minimo per  $R \approx 2.25 fm$ . L'andamento del potenziale ed in particolare la posizione del minimo, è coerente con le aspettative. Non si può dire lo stesso del suo valore, che in teoria dovrebbe essere dell'ordine del MeV. Soltanto interpolandolo e risolvendo con esso un'equazione di Schrödinger potremmo capirne meglio le cause, ma questo va oltre agli scopi di questo lavoro.

In figura 3.4 è mostrato il sistema all'equilibrio.

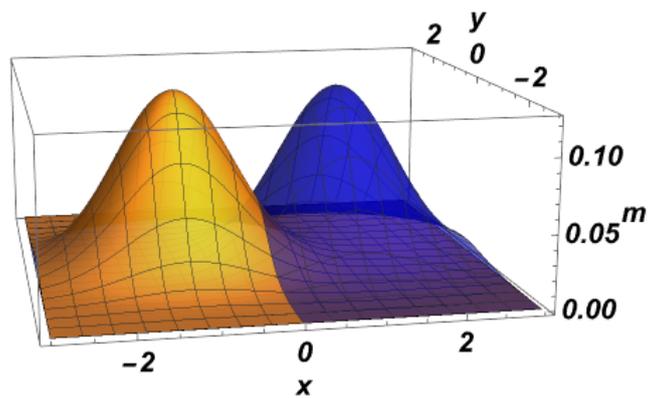


Figura 3.4: Sistema all'equilibrio.

## Capitolo 4

# Corpi deformabili

Come cambiano i risultati del precedente capitolo se le distribuzioni di massa vengono deformate?

La domanda sorge spontanea, dato che in analogia con una goccia di fluido o con i nuclei, se la forza di interazione è centrale attrattiva, ci si aspetta che punti più vicini tra loro si attraggano con maggiore intensità, e che quindi all'equilibrio vi sia una maggiore concentrazione di massa verso il centro del sistema. A tale scopo abbiamo adottato la classe di funzioni definite come "Skew normal function", ovvero funzioni proporzionali alla gaussiana moltiplicata per un termine che introduca una skew non nulla.

Nello specifico da [5]:

$$\mathcal{A}(\mu, \sigma, \alpha) = 2g(x)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\alpha(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (4.1)$$

dove:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x dx g(x) \quad (4.2)$$

$$\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (4.3)$$

con  $\operatorname{erf}(z)$  la funzione degli errori,  $\operatorname{Erfc}(z)$  la funzione degli errori complementare, e  $g(x)$  gaussiana standard.

Il massimo della funzione  $\mathcal{A}(\mu, \sigma, \alpha)$  si sposta da  $\mu \rightarrow \mu + \frac{\sqrt{2}\alpha\sigma}{\sqrt{1+\alpha^2}}$  quando si introduce una deformazione  $\alpha$  non nulla.

In figura 4.1 sono riportati esempi di  $\mathcal{A}(0, 2, \alpha)$  per diverse  $\alpha$ :

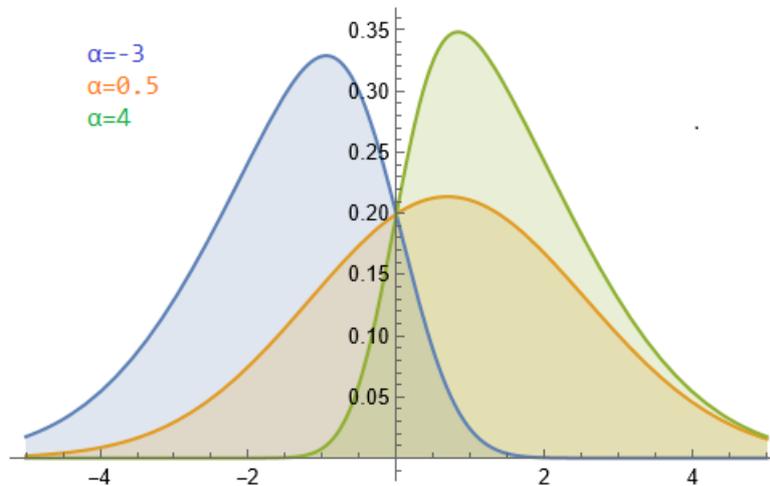


Figura 4.1: Esempi di deformazioni 1D.

Una possibile generalizzazione al caso 3D, con deformazioni solo sull'asse di separazione, nel nostro caso l'asse  $x$ , è la seguente:

$$\mathcal{G}_i(x, y, z, \alpha) = \mathcal{A}_i(\mu, \sigma, \alpha) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{y^2+z^2}{2\sigma^2}} \quad (4.4)$$

A titolo d'esempio è riportato in figura 4.2 l'insieme di livello  $z=0$  della  $\mathcal{G}$  per  $\alpha = 2, -4$ .

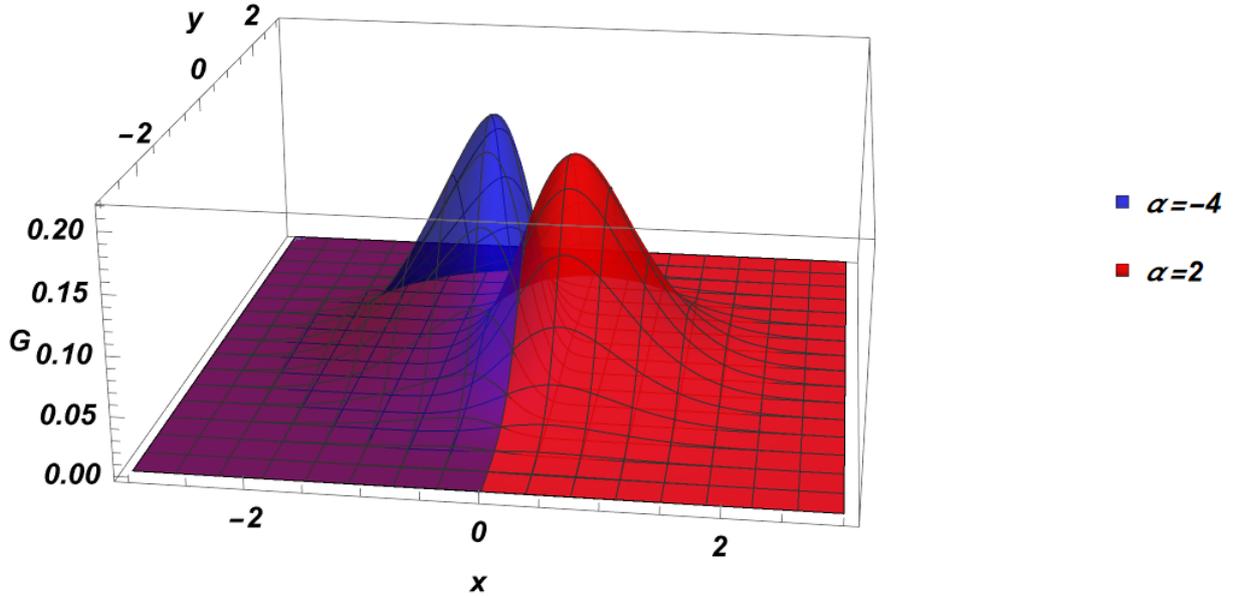


Figura 4.2: Esempio di distribuzioni deformate in 3D con  $\sigma = 0.8$ .

A questo punto, ipotizzando lievi deformazioni dei nucleoni a causa della forza attrattiva, abbiamo riefettuato i calcoli del potenziale per  $\alpha$  molto piccoli, ovvero  $\alpha$  tali per cui il massimo fosse spostato di decimi di fermi: questo perchè se ci sono deformazioni, esse devono essere piccole rispetto alle dimensioni del sistema. Nel presente lavoro sono stati scelti valori comunque non troppo piccoli per evidenziare le differenze tra le varie deformazioni.

Nelle seguenti immagini (4.3,4.4) sono riportati i risultati dell'integrazione in forma di grafico, confrontati tra i diversi  $\alpha$  compreso il caso  $\alpha = 0$ , ovvero senza alcuna deformazione. Come da ipotesi, la deformazione è  $\alpha = -|\alpha|$  per la distribuzione nel primo quadrante, e  $\alpha = |\alpha|$  per quella nel secondo quadrante, in modo da avvicinare i massimi delle distribuzioni di massa simmetricamente, nell'ulteriore ipotesi che i due nucleoni si deformino allo stesso modo.

Dalla figura 4.4 risultano evidenti tre cose: la maggiore profondità della buca, il suo restringimento e la posizione dei minimi. I risultati sono in accordo con le aspettative: è chiaro che se avviciniamo tra di loro i massimi delle due distribuzioni aumentando la concentrazione di materia nello spazio che le separa, il valore assoluto del potenziale aumenterà. Per questo motivo, possiamo avere stati legati anche a distanze maggiori che nel caso di distribuzioni non deformate, e questo sembra spiegare l'andamento della posizione dei minimi al variare di  $\alpha$ .

Una buca di potenziale più profonda equivale a dire che il sistema è maggiormente legato: possiamo interpretare questo risultato supponendo che in presenza di deformazioni il sistema evolva naturalmente verso uno stato a minore energia potenziale.

Merita maggiore attenzione un dettaglio: per quale motivo la buca è più stretta? Ci si aspetterebbe che se il potenziale aumenta in valore assoluto, il sistema sia legato in una regione più grande. Questo sarebbe vero, ma dato che la deformazione sposta i massimi, essi risultano avvicinati di due volte la

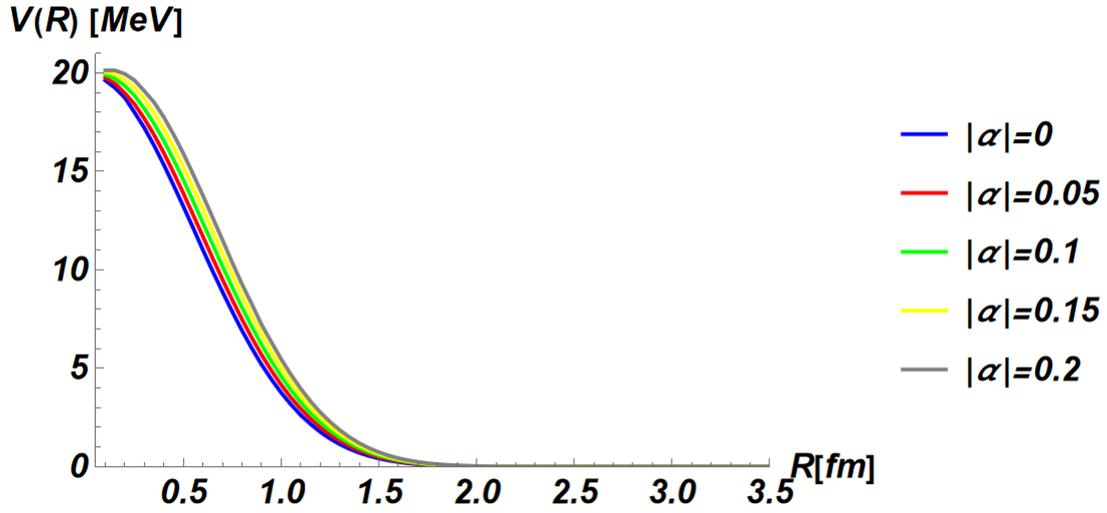


Figura 4.3: Potenziali per diversi parametri di deformazione.

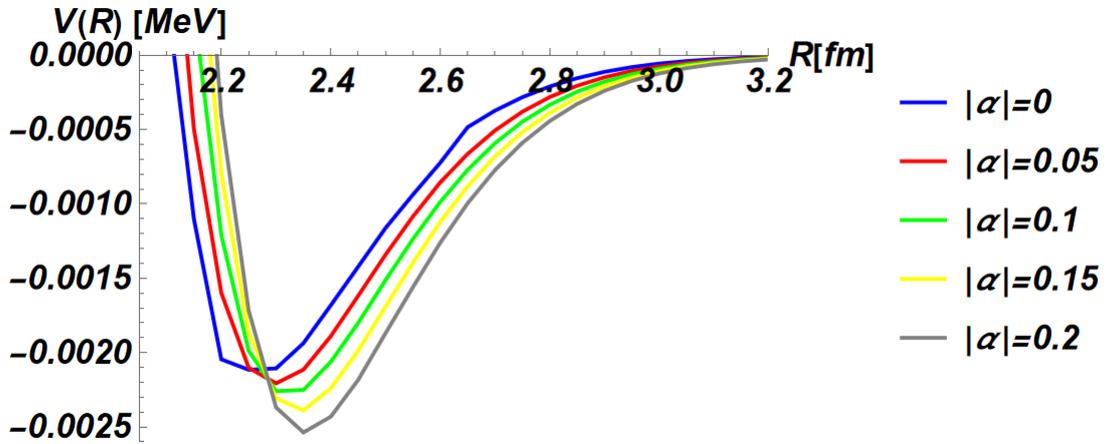


Figura 4.4: Potenziale nella zona a potenziale negativo, con distribuzioni deformate.

loro traslazione in funzione di  $\alpha$ , ovvero

$$2 \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha \sigma}{\sqrt{1 + \alpha^2}}.$$

Il raggio  $R_{min}$ , ovvero  $R$  per cui  $V(R)$  è minimo, risulta cambiato oltre che per la diversa distribuzione di materia, anche per questa ragione.

Nella seguente figura (4.5) si riporta il sistema all'equilibrio nel caso di  $|\alpha| = 0.2$  con  $R \approx 2.35 \text{ fm}$ .

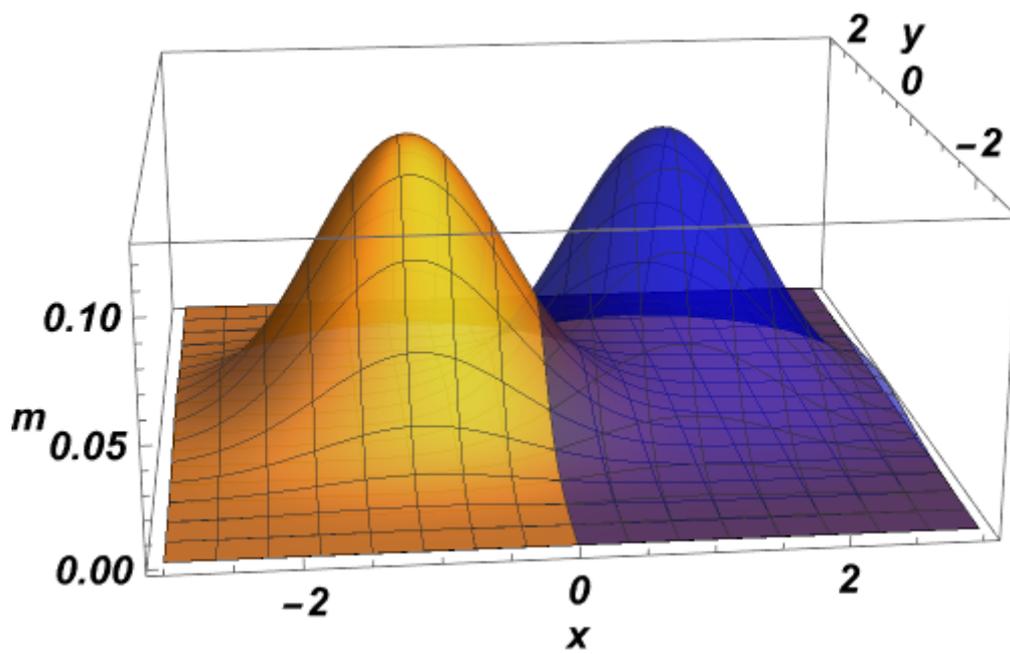


Figura 4.5: Sistema all'equilibrio per  $|\alpha| = 0.2$ .

## Capitolo 5

# Conclusioni

Dall'apparentemente innocua ipotesi che i corpi siano estesi nello spazio, non puntiformi, nel corso di questo lavoro di tesi sono emerse una serie di risultati non banali.

Per prima cosa, la massa ridotta del sistema, almeno in una dimensione, sembra non dipendere dalla distanza tra i due corpi, come con masse puntiformi.

In secondo luogo il potenziale di interazione, al di là del preciso valore numerico, segue l'andamento che ci aspetteremmo al variare del parametro di deformazione  $\alpha$ .

Una possibile estensione di questo lavoro è inserita in Appendice: il metodo di trasformazione puntuale canonico. Quest'ultimo è uno dei modi in cui si può risolvere l'equazione di Schrödinger in presenza di distribuzioni di massa estese nello spazio.

In questo lavoro è presentato solo uno dei possibili approcci alla risoluzione di questo tipo di problemi, che pur nella sua semplicità ha permesso di raggiungere dei risultati in linea con gli obiettivi prefissati.

# Capitolo 6

## Appendice

### Metodo di trasformazione puntuale canonico

La risoluzione dell'equazione di Schrödinger per una massa non puntiforme è utile per la descrizione di svariati sistemi fisici, come ad esempio semiconduttori o materiali dalla composizione chimica non uniforme. Sono presenti in letteratura molti metodi per la ridefinizione dell'operatore hamiltoniano e per la risoluzione dell'equazione di Schrödinger ad esso associata. Nel presente lavoro utilizzeremo l'approccio di [2] e [3], detto **“point canonical transformation method”** o come faremo in seguito **“pctm”**.

L'operatore hamiltoniano, si scrive [4] :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{P} \frac{1}{m(x)} \hat{P} + V(x) \quad (6.1)$$

Da cui l'equazione di Schrödinger unidimensionale:

$$\left[ -\frac{d}{dx} \left( \frac{\hbar^2}{2m(x)} \right) \frac{d}{dx} + V(x) \right] \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x) \quad (6.2)$$

dove  $E_n$  è lo spettro energetico,  $\Psi_n$  sono le autofunzioni e  $V(x)$  è il potenziale di interazione.

Si noti che nella (6.1) l'energia cinetica non è espressa come di consueto, ma la massa è tra i due operatori momento, non essendo costante.

La stessa equazione può essere riscritta come

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \left( \frac{\hbar^2}{2m(x)} \right)' \frac{d}{dx} + V(x) \right] \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x) \quad (6.3)$$

Per trovare soluzione alla (6.2), conviene trasformarla in un problema con massa costante. Per farlo si utilizza la pctm, ovvero, se  $m(x)=m_0M(x)$ , con  $m_0$  massa costante e  $M(x)$  funzione adimensionale, la trasformazione

$$u = g(x) = \int^x \sqrt{M(t)} dt \quad (6.4)$$

cosicché  $x=F(u)=g^{-1}(u)$  porti alla trasformazione dell'operatore differenziale

$$\frac{d}{dx} = \sqrt{M(F(u))} \frac{d}{du} \quad (6.5)$$

dalla quale

$$\left( \frac{1}{M(x)} \right)' \frac{d}{dx} = \frac{d \ln \left( \frac{1}{M(F(u))} \right)}{du} \frac{d}{du} \quad (6.6)$$

e

$$\left(\frac{1}{M(x)}\right)\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{du^2} + \frac{d \ln \sqrt{M(F(u))}}{du} \frac{d}{du} \quad (6.7)$$

da cui la (6.3) diventa

$$\left[\frac{d^2}{du^2} + 2W(u)\frac{d}{du} + \frac{2m_0}{\hbar^2}(V(F(u)) - E)\right]\Psi_n(F(u)) = 0 \quad (6.8)$$

dove

$$W(u) = \frac{d}{du} \ln(M(F(u)))^{-\frac{1}{4}} \quad (6.9)$$

A questo punto, applicando la trasformazione:

$$\Psi_n(F(u)) = \varphi(u) \exp\left[-\int^x W(t) dt\right] \quad (6.10)$$

Si può scrivere la (6.2) come

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\varphi_n''(u) + U(u)\varphi_n(u) = E_n\varphi_n(u) \quad (6.11)$$

dove  $U(u)$  è il “nuovo” potenziale, ovvero

$$U(u) = V(F(u)) + \frac{\hbar^2}{2m_0}(W^2(u) + W'(u)) \quad (6.12)$$

La (6.11) ha la massa costante, quindi a patto di avere un potenziale più complicato, grazie al pctm abbiamo reso il problema più facilmente risolvibile.

Le equazioni (6.2) e (6.11) hanno le stesse autoenergie, quindi il problema a massa variabile e quello a massa costante sono isospettrali. Inoltre dalla (6.10)

$$\Psi_n(x) = \varphi_n(g(x)) \exp\left[-\int^{g(x)} W(t) dt\right] \quad (6.13)$$

oppure usando (6.9) e (6.4)

$$\Psi_n(x) = \varphi(g(x))\sqrt{g'(x)} \quad (6.14)$$

Dalla quale si verifica che se le  $\varphi_n$  sono normalizzate, tali saranno le  $\Psi_n$ , infatti

$$\int |\Psi(x)|^2 = \int |\varphi(g(x))|^2 d(g(x)) = 1 \quad (6.15)$$

## Argonne V18

Il potenziale nucleone-nucleone utilizzato è una semplificazione del potenziale Argonne V18.

“Argonne” perché è stato sviluppato presso l’Argonne National Laboratory, uno dei principali centri di ricerca degli Stati Uniti d’America per quanto riguarda la fisica nucleare.

“V18” perché è il risultato [6] di un fit a 18 parametri, che è in accordo con i dati sperimentali in modo soddisfacente ( $\tilde{\chi}^2 = 1.09$ , dove la tilde indica il chi quadro ridotto). I 18 parametri includono considerazioni su:

- Dipendenza dallo Spin
- Interazioni di Spin orbita
- Componenti tensoriali che mescolano stati  $L=0$  ed  $L=2$
- Termine di rottura della simmetria di carica

Sono stati utilizzati a tale scopo 4301 dati sullo scattering per energie nel riferimento del laboratorio inferiori a 350 MeV.

# Bibliografia

- [1] Lorenzo Fortunato, “Appunti di Fisica Nucleare”, GEDI Gruppo Editoriale S.p.A., Ed.2, (2019).
- [2] J. J. Peña, J. Morales, J. García-Ravelo, L. Arcos-Díaz, “Schrödinger Equation with Position-Dependent Mass: Staggered Mass Distributions”, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Physical and Mathematical Sciences Vol:**11**, No:8, (2017).
- [3] A. R. Plastino, A. Rigo, M. Casas, F. Garcias, and A. Plastino “Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass”, PHYSICAL REVIEW A **60**, Iss. 6, 4318 (1999).
- [4] Liès Dekar, Lyazid Chetouani, Thèophile F. Hammann, “An exactly soluble Schrödinger equation with smooth position-dependent mass”, J. Math. Phys. **39**, 2551 (1998)
- [5] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 13.1, Champaign, IL (2022).  
URL: <https://reference.wolfram.com/language/ref/SkewNormalDistribution.html>
- [6] <https://www0.mi.infn.it/~colo/Didattica/Nucleare/202122/nuclphys3.pdf>