



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Fisica

tesi di laurea

Interazione tra un'onda gravitazionale ed un condensato di Bose-Einstein

Relatore: Luca Salasnich

Laureando: Alessio Perodi

Anno accademico 2023/2024

Ringraziamenti

Desidero ringraziare di cuore tutte le persone che mi hanno accompagnato in questi tre anni e che hanno reso questo percorso possibile.

Ringrazio il mio fedele compagno di laboratorio Tobia, e tutti gli altri che ho conosciuto tra i banchi, grazie ai quali ogni esame è stato meno difficile di quello che sarebbe potuto essere.

Ringrazio i miei genitori, che hanno sempre creduto in me e senza i quali nulla di tutto ciò sarebbe stato possibile.

Vorrei infine esprimere la mia più sincera e profonda gratitudine per Alessia, che da tempo costituisce il mio sistema di unità di misura, senza il quale un fisico non può di certo vivere.

Alessio Perodi

Indice

Ringraziamenti	III
1 Introduzione	1
2 Onde gravitazionali	3
2.1 Equazione di campo di Einstein nel vuoto	3
2.2 Equazione di campo di Einstein in presenza di materia	6
2.3 Equazione delle onde gravitazionali	7
2.3.1 Soluzione nel vuoto	9
2.4 Rivelazione di onde gravitazionali	11
2.5 Operatori differenziali in campo debole	14
3 Condensati di Bose-Einstein	15
3.1 Quantizzazione canonica per un campo bosonico	15
3.2 GPE in spaziotempo curvo	19
4 Interazione tra GW e BEC	21
4.1 Creazione di fononi in un superfluido per effetto di un'onda gravitazionale	21
4.2 Detectabilità	25
4.3 Confinamento armonico anisotropo	27
4.3.1 Bosoni non interagenti	27
4.3.2 Bosoni interagenti	29
4.3.3 Bosoni altamente interagenti	30
5 Conclusioni	33
Bibliografia	34
Appendice	39
A.1 Equazioni idrodinamiche in spaziotempo curvo	39

Capitolo 1

Introduzione

In questa tesi verrà indagata l'interazione tra un'onda gravitazionale (GW) ed un condensato di Bose-Einstein (BEC) dimostrando, come già fatto in [1, 2, 3], come la prima possa generare fononi, cioè quasi-particelle che rappresentano le eccitazioni quantizzate del condensato.

In particolare verrà indagata questa perturbazione in un superfluido, cioè un BEC privo di viscosità e che presenta quindi una resistenza nulla al flusso. In queste condizioni gli atomi costituenti il condensato si comportano come onde di materia coerenti osservabili anche macroscopicamente.

Sarà poi valutata l'entità dell'interazione, mostrando come l'onda gravitazionale induca una fase relativa tra il condensato imperturbato e quello che ha interagito. Quest'ultima verrà calcolata esplicitamente nella condizione di confinamento armonico anisotropo nei tre casi di bosoni non interagenti, interagenti e altamente interagenti.

Per fare ciò sarà necessario unire due framework teorici come la relatività generale e la meccanica quantistica che sono complementari, ma con ancora pochi punti di contatto. A questo fine, il campo gravitazionale verrà considerato in maniera classica quale background geometrico su cui avvengono tutti i fenomeni fisici descritti invece dalla teoria quantistica dei campi (QFT).

Il legame tra relatività generale e condensati di Bose-Einstein sta acquisendo sempre maggiore importanza, sia per la possibilità di detectare eventi quali GW, sia per indagare aspetti ancora oscuri della teoria di Einstein. È infatti di recente sviluppo una teoria, detta *emergent gravity* (EG), la cui idea fondamentale è che la gravità non sia un'interazione fondamentale e che lo spaziotempo sia un oggetto composito che si comporta approssimativamente come un superfluido. È quindi possibile, sia studiare alcuni fenomeni cosmologici in analogia con i BECs [4, 5], che eseguire simulazioni degli effetti delle GW su di essi [6].

Nella trattazione seguente verrà utilizzata la convenzione di Einstein in cui due indici ripetuti si intendono sommati. Sarà inoltre apportata la distinzione tra indici greci, che presuppongano una sommatoria che parte da zero, e quelli latini, dove invece l'inizio della sommatoria è da intendersi a 1.

Capitolo 2

Onde gravitazionali

In questo capitolo sarà dapprima ricavata l'equazione di campo di Einstein, a partire dall'azione di Einstein-Hilbert, per poi procedere nel dedurre l'equazione delle onde gravitazionali, la sua soluzione nel vuoto e riportare alcuni cenni sulla loro rivelazione. Il capitolo si concluderà poi con una sezione dedicata allo studio degli operatori differenziali in presenza di campo debole.

2.1 Equazione di campo di Einstein nel vuoto

Lo spaziotempo può essere considerato come una varietà riemanniana M , dotata perciò di un tensore $g_{\mu\nu} \in \mathcal{T}_2^0$ (dove $\mathcal{T}_2^0 M$ rappresenta il campo di tensori di tipo $(0, 2)$ definiti su M) detto tensore metrico (o metrica) il quale sarà simmetrico e definito positivo. In questo capitolo e nei seguenti considereremo la metrica di segnatura lorentziana $(-, +, +, +)$.

Su questa varietà M è definita una connessione affine ∇ , detta anche derivata covariante, la quale, senza perdere di generalità, potrà essere presa di Levi-Civita^[1]. Grazie a quest'ultima assunzione infatti, considereremo nulla la torsione della varietà M , e potremo scrivere la derivata covariante di $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ rispetto a $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ (dove $X, Y \in TM$, cioè X e Y sono vettori appartenenti allo spazio tangente di M) come

$$\nabla_X Y = X^\nu \left(\frac{\partial Y^\alpha}{\partial x^\nu} + Y^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.1)$$

dove $\Gamma_{\nu\mu}^\alpha$, per una connessione di Levi-Civita, è il *simbolo di Christoffel* definito nella seguente maniera

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\eta} (\partial_\mu g_{\eta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\eta} - \partial_\eta g_{\mu\nu}) \quad (2.2)$$

¹Tullio Levi-Civita (Padova, 29 marzo 1873 - Roma, 29 dicembre 1941) è stato un matematico e fisico italiano, si laureò presso l'Università degli Studi di Padova, allievo di Gregorio Ricci-Curbastro, con cui in seguito collaborò allo sviluppo del calcolo tensoriale [2], che sarebbe stato alla base della teoria della relatività generale einsteiniana. A lui è intitolato il dipartimento di matematica dell'università padovana.

Il tensore metrico provvede una forma di volume canonica² $\sqrt{|g|}$, dove $g = \det g_{\mu\nu}$, che può essere moltiplicata per uno scalare qualunque. Il più semplice e non banale è proprio lo *scalare di Ricci*³. Siamo quindi portati a scrivere l'*azione di Einstein-Hilbert*, ottenuta quasi indipendentemente da Albert Einstein⁴ e David Hilbert¹⁰ che a lungo ne contesero la paternità⁴

$$S_g = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_g \quad (2.3)$$

dove $d^4x = c dt dx dy dz$ e \mathcal{L}_g è la densità di lagrangiana seguente

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2\kappa} R \quad (2.4)$$

con

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^3} \quad (2.5)$$

Per ricavare l'equazione di campo di Einstein sarà perciò necessario, per il principio di minima azione, minimizzare la (2.3). Per fare ciò, ricordando che $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ dove $R_{\mu\nu}$ è il *tensore di Ricci*, possiamo scrivere

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[(\delta\sqrt{|g|}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} (\delta R^{\mu\nu}) \right] \quad (2.6)$$

Il secondo termine in (2.6) è già proporzionale a $\delta g^{\mu\nu}$, vediamo quindi come variano il primo e il terzo.

Si noterà in seguito che è più semplice eseguire i calcoli con gli indici alti, perciò è utile osservare la seguente proprietà

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \quad \Rightarrow \quad (\delta g_{\mu\nu}) g^{\nu\rho} + g_{\mu\nu} (\delta g^{\nu\rho}) = 0 \quad (2.7)$$

che mi restituisce il seguente risultato

$$\delta g^{\nu\rho} = -g^{\mu\nu} g^{\rho\eta} (\delta g_{\mu\eta}) \quad (2.8)$$

²In letteratura si trova spesso come espressa come $\sqrt{-g}$, ma ispirato da [8], si è ritenuto più opportuno utilizzare l'annotazione presentata.

³Gregorio Ricci Curbastro (Lugo, 12 gennaio 1853 - Bologna, 6 agosto 1925) è stato un matematico italiano, celebre soprattutto per il suo lavoro sul calcolo tensoriale insieme a Tullio Levi-Civita [7]. Ricoprì il ruolo di preside della facoltà di scienze dell'università patavina dal 1900 al 1908.

⁴Una ricostruzione storica [11] evidenzia che David Hilbert inviò il suo articolo il 20 novembre 1915, cinque giorni prima di quello di Einstein con le equazioni corrette. L'articolo di Hilbert uscì il 6 dicembre senza le equazioni, quello di Einstein il 2. Nella versione finale andata in stampa, David Hilbert aggiunse: "Le equazioni differenziali della gravitazione che ho ottenute mi sembrano in accordo con la magnifica teoria della relatività generale enunciata da Einstein nel suo ultimo articolo". Appare dunque evidente che Hilbert lesse l'articolo di Einstein, e aggiunse al suo il riconoscimento della priorità di Einstein.

Per trovare l'espressione di $\delta\sqrt{|g|}$ notiamo innanzitutto che una matrice A , diagonalizzabile, rispetta

$$\ln(\det A) = \text{tr}(\ln A) \quad (2.9)$$

questo è banalmente vero per matrici diagonali, ma siccome sia il determinante che la traccia sono invarianti per coniugazione, è possibile estendere questa proprietà a qualsiasi matrice diagonalizzabile.

Da questa proprietà possiamo allora scrivere

$$\delta(\ln(\det A)) = \frac{1}{\det A} \delta \det A = \delta(\text{tr}(\ln A)) = \text{tr}(A^{-1} \delta A) \quad (2.10)$$

Prendendo ora $A = g_{\mu\nu}$ e ricordando che

$$\delta\sqrt{-\det A} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-\det A}} \delta \det A \quad (2.11)$$

ottengo

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta g = \frac{1}{2} \frac{|g|}{\sqrt{|g|}} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{|g|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (2.8).

Per calcolare $\delta R_{\mu\nu}$ ricordiamo l'espressione del *tensore di curvatura*

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \partial_{\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \Gamma_{\gamma\nu}^{\mu} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\nu} \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} \quad (2.13)$$

È utile ricordare che lo spazio delle connessioni affini su una varietà M è uno spazio affine modellato su $\mathcal{T}_2^1(M)$, e perciò la differenza tra due simboli di Christoffel è un tensore di tipo $(1, 2)$.

Su una varietà riemanniana M è inoltre sempre possibile, nell'intorno di un punto $p \in M$, scegliere un sistema di coordinate tale per cui $g_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu}$ e di conseguenza $\partial_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$. Questa particolare scelta di coordinate sono dette *coordinate normali* e scegliendole possiamo scrivere

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} \delta g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\nabla_{\mu} \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_{\nu} \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_{\sigma} \delta g_{\mu\nu}) \quad (2.14)$$

dove abbiamo sostituito le derivate parziali con derivate covarianti proprio perchè $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ si azzera in $p \in M$.

Dalla (2.13), utilizzando le coordinate normali, possiamo allora scrivere

$$\delta R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} = \nabla_{\beta} \delta\Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} - \nabla_{\gamma} \delta\Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (2.15)$$

e di conseguenza, ricordando che $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \nabla_{\mu} \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda} \quad (2.16)$$

Varrà allora

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\mu X^\mu \quad (2.17)$$

con

$$X^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^\beta \quad (2.18)$$

Inserendo le equazioni (2.12) e (2.17) in (2.6) otteniamo

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu X^\mu \right] \quad (2.19)$$

ma per il teorema della divergenza quest'ultimo termine può essere ignorato, lasciandoci con l'espressione finale seguente

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.20)$$

dove si è definito il *tensore di Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

Imponendo il *principio di minima azione* ($\delta S = 0$) si trova perciò

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

che è l'equazione di campo di Einstein in assenza di materia.

Si nota immediatamente che, contraendo con $g^{\mu\nu}$, si ricava $R = 0$; in assenza di materia, perciò, una delle soluzioni dell'equazione di Einstein è la cosiddetta *Ricci flat* per cui vale $R_{\mu\nu} = 0$.

2.2 Equazione di campo di Einstein in presenza di materia

Consideriamo ora il contributo all'azione dato dalla materia:

$$S = S_g + S_M \quad (2.23)$$

con

$$S_M = \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}_M \quad (2.24)$$

dove \mathcal{L}_M è la densità di lagrangiana di materia.

Definiamo ora il *tensore energia impulso* come

$$T_{\mu\nu} = -c \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.25)$$

Minimizzando l'azione troviamo perciò

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{|g|} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{|g|} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

che se posta pari a zero restituisce

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{c} T_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

L'equazione di campo di Einstein, completa del contributo della materia, è perciò la seguente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

2.3 Equazione delle onde gravitazionali

La (2.28) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare che non presenta una formula risolutiva generale. Attraverso i calcoli che seguono mostriamo come, sotto certe ipotesi, l'equazione di campo di Einstein tiene in sé la possibilità di una perturbazione ondulatoria della metrica: un'onda gravitazionale.

Supponiamo di trovarci in condizione di campo debole, cioè

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

dove $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ è la metrica di Minkowski mentre $|h^{\mu\nu}| \ll 1$ è una piccola perturbazione del tensore metrico.

Consideriamo sempre una connessione metrica ∇ di Levi-Civita e linearizziamo al primo ordine in $h_{\mu\nu}$ partendo dai simboli di Christoffel che assumono la forma seguente

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\gamma\lambda} (\partial_{\alpha} h_{\lambda\beta} + \partial_{\beta} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.30)$$

Di conseguenza il tensore di curvatura, definito nella (2.13), è linearizzato nella maniera seguente

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{1}{2} \eta^{\delta\rho} (\partial_{\beta} \partial_{\alpha} h_{\gamma\rho} - \partial_{\beta} \partial_{\rho} h_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} \partial_{\alpha} h_{\beta\rho} + \partial_{\gamma} \partial_{\rho} h_{\beta\alpha}) \quad (2.31)$$

e il tensore di Ricci assume l'espressione

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\beta\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\beta\rho} (\partial_{\beta} \partial_{\alpha} h_{\gamma\rho} - \partial_{\beta} \partial_{\rho} h_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} \partial_{\alpha} h_{\beta\rho} + \partial_{\gamma} \partial_{\rho} h_{\beta\alpha}) + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\beta\beta} (\partial_{\beta} \partial_{\alpha} h_{\gamma\beta} - \partial_{\beta} \partial_{\beta} h_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} \partial_{\alpha} h_{\beta\beta} + \partial_{\gamma} \partial_{\beta} h_{\beta\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^{\beta} \partial_{\mu} h_{\nu\beta} - \partial^{\beta} \partial_{\beta} h_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\nu} h_{\beta}^{\beta} + \partial_{\nu} \partial^{\beta} h_{\beta\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial^{\beta} \partial_{\mu} h_{\nu\beta} + \partial^{\beta} \partial_{\nu} h_{\beta\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} h) \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove nel terzo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $\eta^{\mu\nu}$ è diagonale e abbiamo poi definito l'operatore delembertiano $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ e la traccia $h = h^\beta_\beta$.

Continuando il processo di linearizzazione calcoliamo

$$\begin{aligned} R &= R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx \frac{1}{2}(\partial^\beta \partial^\mu h_{\mu\beta} + \partial^\beta \partial^\mu h_{\beta\mu} - \square h^\mu_\mu - \partial_\mu \partial^\mu h) = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h \end{aligned} \quad (2.33)$$

Combinando la (2.32) e la (2.33) troviamo l'espressione del tensore di Einstein

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2) \\ &\approx \frac{1}{2}(\partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho \partial_\nu h_{\mu\rho} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - (\partial^\rho \partial^\gamma h_{\rho\gamma} - \square h) \eta_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

il quale soddisfa la seconda identità di Bianchi ($\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$) che è un pre-requisito della geometria differenziale e nel caso linearizzato può essere scritta semplicemente come $\partial^\mu G_{\mu\nu} = 0$.

Come per la teoria elettromagnetica, anche per quella gravitazionale è possibile apportare una scelta della gauge che può semplificare enormemente i conti. Nel prosieguo sfrutteremo la gauge suggerita in [12] che è la *Donder gauge*:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h = 0 \quad (2.35)$$

Questa scelta della gauge è sempre possibile; immaginiamo infatti che $h_{\mu\nu}$ soddisfi

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h = f_\nu \quad (2.36)$$

per una qualsiasi funzione f_ν . Eseguendo infatti una trasformazione di gauge possiamo scrivere

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h + \square \epsilon_\nu = f_\nu \quad (2.37)$$

ma è sempre possibile scegliere ϵ_ν affinché soddisfi

$$\square \epsilon_\nu = f_\nu \quad (2.38)$$

il che riporta alla Donder gauge.

Riscriviamo allora il tensore di Einstein

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \left(\partial^\rho h_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \partial_\nu h \right) + \partial_\nu \left(\partial^\rho h_{\mu\rho} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \right) - \square h_{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. - \partial^\rho \left(\partial^\gamma h_{\rho\gamma} - \frac{1}{2} \partial_\rho h \right) \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \square h \eta_{\mu\nu} + \square h \eta_{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \square h \eta_{\mu\nu} - \square h_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Unendo questo risultato alla (2.28) troviamo

$$\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\square h\eta_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.40)$$

La scelta della Donder gauge non esaurisce però la possibilità di eseguire ulteriori trasformazioni. Possiamo ora scegliere $h^{\mu\nu}$ affinché soddisfi la TT-gauge (transverse-traceless gauge) che, come suggerisce il nome, comporta $h^\alpha_\alpha = h = 0$.

Abbiamo quindi trovato l'equazione delle onde gravitazionali che è la seguente

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

La Donder gauge (2.35), a seguito dell'implementazione delle TT-gauge, può inoltre essere riscritta nella maniera seguente

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.42)$$

che è comunemente detta *gauge di Lorentz*.

2.3.1 Soluzione nel vuoto

La (2.41) non è facilmente risolvibile analiticamente soprattutto a causa dell'espressione del tensore energia impulso. Vediamo quindi di seguito la soluzione più semplice: nel vuoto.

Le equazioni di partenza sono le seguenti

$$\begin{cases} \square h^{\mu\nu} = 0 & (2.43) \\ \partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 & (2.44) \end{cases}$$

dove abbiamo messo in evidenza la gauge utilizzata, cioè quella di Lorentz.

Consideriamo ora la seguente complessificazione della perturbazione della metrica, ricordando però che la GW è un campo reale

$$h^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (2.45)$$

dove k è il vettore d'onda.

Dalla (2.43) troviamo

$$0 = \partial_\alpha \partial^\alpha A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = \partial_\alpha i k^\alpha A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = -k^\alpha k_\alpha A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (2.46)$$

e di conseguenza

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \quad (2.47)$$

cioè k è un "vettore nullo".

Dalle (2.44) invece

$$0 = \partial_\mu A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} = i k_\mu A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (2.48)$$

e perciò

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0 \quad (2.49)$$

le GW sono quindi onde trasverse.

Prendiamo ora $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ ed esplicitiamo il prodotto scalare della (2.47) all'ordine zero in h :

$$0 = k_0 k^0 + |\vec{k}|^2 = \eta_{00} k_0^2 + k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \quad (2.50)$$

che restituisce la seguente relazione di dispersione

$$\omega = kc \quad (2.51)$$

la velocità di gruppo della GW è quindi $v_g = d\omega/dk = c$.

Dobbiamo ora determinare l'espressione esplicita di $A^{\mu\nu}$ che, dovendo essere simmetrica, avrà la seguente forma

$$A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^{00} & A^{01} & A^{02} & A^{03} \\ A^{01} & A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{02} & A^{12} & A^{22} & A^{23} \\ A^{03} & A^{13} & A^{23} & A^{33} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Scegliamo ora arbitrariamente z quale direzione di propagazione dell'onda, varrà allora

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, 0, 0, k\right) = (k, 0, 0, k) \quad (2.53)$$

e dalla (2.49), con questa scelta del vettore d'onda, ne consegue che

$$A^{0\nu} = A^{3\nu} \quad (2.54)$$

La TT-gauge utilizzata in precedenza inoltre comporta le seguenti condizioni

$$A^{0\mu} = 0 \quad ; \quad A^\mu_\mu = 0 \quad (2.55)$$

Unendo quindi la (2.54) e (2.55) troviamo la seguente espressione

$$A_{(TT)}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

La GW può quindi essere considerata quale somma di due polarizzazioni (+ e \times). Definendo infatti

$$e_+^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad e_\times^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

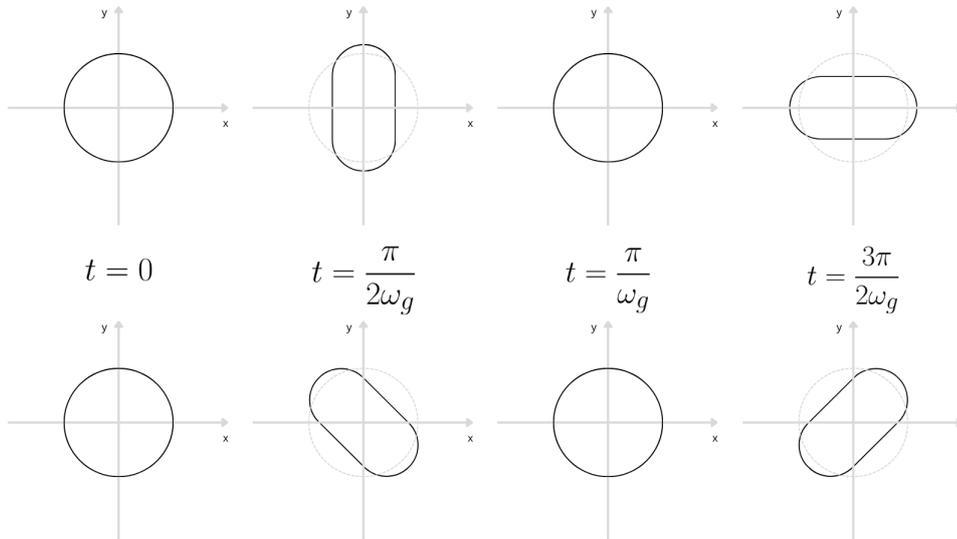


Figura 2.1: Schematizzazione del passaggio di un'onda gravitazionale propagante lungo z , di polarizzazione $+$ (in alto) e \times (in basso) e pulsazione ω_g , la quale modifica la forma di un cerchio posto nell'origine.

possiamo scrivere

$$A_{(TT)}^{\mu\nu} = a_+ e_+^{\mu\nu} + a_\times e_\times^{\mu\nu} \quad (2.58)$$

L'effetto delle due diverse polarizzazioni di un'onda gravitazionale sullo spazio è quello riportato in Fig. (2.1).

D'ora in poi considereremo solamente onde gravitazionali propaganti lungo z con polarizzazione $+$, per cui la perturbazione della metrica assume la seguente forma

$$h^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

che comporta la modificazione dell'elemento di linea infinitesimo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (1+h)dx^2 + (1-h)dy^2 + dz^2 \quad (2.60)$$

dove $h = h(z, t)$ dipende da z e t .

2.4 Rivelazione di onde gravitazionali

Un'onda gravitazionale può, in quanto perturbazione dello spaziotempo, modificare la lunghezza relativa tra due bracci di un interferometro e produrre così una figura di interferenza, il cui studio permette di ricavare molte informazioni sulle sorgenti di questo fenomeno. La coalescenza di due oggetti super massicci, come

per esempio buchi neri o stelle di neutroni, può infatti dare vita a un'onda gravitazionale la cui frequenza e ampiezza variano nelle diverse fasi (spiraleggiamento, fusione e smorzamento) permettendo agli apparati interferometrici di apprezzare lo strain, cioè la variazione relativa della lunghezza dei bracci $\Delta L/L \approx h$. Consideriamo ora un interferometro a bracci perpendicolari, di lunghezza L_x e L_y , come i due LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) o Virgo⁵ e stimiamo la differenza in fase di un fascio laser che viene ricombinato dopo aver attraversato un beam splitter e aver percorso i bracci.

Si noti che un interferometro di questo tipo non sarebbe in grado di rivelare il passaggio di una GW di polarizzazione \times poichè, da come si evince in Fig. (2.1), andrebbe a modificare allo stesso modo i due bracci.

Studiamo quindi il moto del fotone, caratterizzato da $ds^2 = 0$. Lungo x , in accordo con la (2.60), varrà perciò

$$dx = \pm \frac{cdt}{\sqrt{1+h}} \approx cdt \left(1 - \frac{h}{2}\right) \quad (2.61)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato che $h \ll 1$. Da questa equazione si ricava immediatamente che in un sistema non inerziale, come quello in esame, la velocità di un fotone non è costante ma vale la relazione seguente

$$\frac{dx}{dt} = c \left(1 - \frac{h}{2}\right) \neq c \quad (2.62)$$

Nel percorso dal beam splitter allo specchio il fotone percorre una distanza pari a L_x e vale perciò

$$L_x = \int_0^{L_x} dx = c \int_{t_0}^{t_1} \left(1 - \frac{h}{2}\right) dt \quad (2.63)$$

e stessa cosa per il percorso inverso, a parte per gli estremi di integrazione che saranno t_1 e t_2 . Sommando quindi i due contributi otteniamo

$$2L_x = c \int_{t_0}^{t_2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) dt = c(t_2 - t_0) - c \int_{t_0}^{t_2} \frac{h}{2} dt \approx c(t_2 - t_0) - c \int_{t_0}^{t_0 + 2\frac{L_x}{c}} \frac{h}{2} dt \quad (2.64)$$

dove nell'ultimo passaggio si è approssimato al primo ordine l'estremo di integrazione.

Se consideriamo ora la seguente espressione per l'onda gravitazionale

$$h = h_0 \cos(\omega_g t) \quad (2.65)$$

⁵Virgo è un interferometro a bracci perpendicolari situato nel comune di Cascina (PI) ed operato dall' European Gravitational Observatory (EGO) che fu creato nel 2000 dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) italiano e dal French Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) ai quali si aggiunse nel 2007 il Dutch National Institute for Subatomic Physics (NIKHEF). L'interferometro europeo forma insieme a LIGO e KAGRA (Kamioka Gravitational Wave Detector) il LIGO - Virgo - KAGRA (LVK) network.

dove ω_g è la pulsazione della medesima mentre h_0 la sua ampiezza, possiamo integrare trovando

$$\begin{aligned} 2L_x &= c(t_2 - t_0) - \frac{1}{2}ch_0 \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g} \Big|_{t_0}^{t_0 + 2\frac{L_x}{c}} \\ &= c(t_2 - t_0) - \frac{ch_0}{2\omega_g} \left[\sin\left(\omega_g \left(t_0 + 2\frac{L_x}{c}\right)\right) - \sin(\omega_g t_0) \right] \\ &= c(t_2 - t_0) - \frac{ch_0}{\omega_g} \sin\left(\frac{\omega_g L_x}{c}\right) \cos\left(\omega_g \left(t_0 + \frac{L_x}{c}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato che $\sin(\alpha + 2\beta) - \sin(\alpha) = 2\sin(\beta)\cos(\alpha + \beta)$.

Possiamo allora scrivere la relazione seguente

$$\Delta t_x = t_2^x - t_0 = \frac{2L_x}{c} + \frac{h_0 L_x}{c} \frac{\sin\left(\frac{\omega_g L_x}{c}\right)}{\frac{\omega_g L_x}{c}} \cos\left(\omega_g \left(t_0 + \frac{L_x}{c}\right)\right) \quad (2.67)$$

dove abbiamo specificato che $t_2^x - t_0$ è il tempo che impiega il fotone per andare avanti e indietro lungo L_x .

Allo stesso modo quindi si trova

$$\Delta t_y = t_2^y - t_0 = \frac{2L_y}{c} - \frac{h_0 L_y}{c} \frac{\sin\left(\frac{\omega_g L_y}{c}\right)}{\frac{\omega_g L_y}{c}} \cos\left(\omega_g \left(t_0 + \frac{L_y}{c}\right)\right) \quad (2.68)$$

dove il segno diverso è dovuto appunto al ds^2 definito in (2.60).

Ponendoci nella condizione di Virgo e LIGO, cioè per cui vale $L_x = L_y = L$, possiamo stimare la differenza in fase dei due fasci laser, di pulsazione ω_{luce} , che percorrono i due differenti bracci trovando

$$\Delta\phi = \omega_{luce}(\Delta t_x - \Delta t_y) = \omega_{luce} \frac{2h_0 L}{c} \frac{\sin\left(\frac{\omega_g L}{c}\right)}{\frac{\omega_g L}{c}} \cos\left(\omega_g \left(t_0 + \frac{L}{c}\right)\right) \quad (2.69)$$

Questo spettacolare fenomeno fisico, è stato osservato sperimentalmente per la prima volta il 14 settembre 2015 [13] dai due interferometri LIGO a 7 milisecondi di distanza l'uno dall'altro. Le onde gravitazionali rivelate sono state prodotte dalla coalescenza di due buchi neri di 36 e 29 masse solari avvenuta a 410 megaparsec (circa 1.3 miliardi di anni luce) dal nostro pianeta.

La sensibilità dei rivelatori odierni permette di detectare le onde gravitazionali nonostante la loro ampiezza sia dell'ordine di $h = \mathcal{O}(10^{-21})$. In figura (2.2), presente in [14] e raffigurante una semplificazione di un'immagine riportata in [15], è riportata la sensibilità di LIGO Hanford durante la O3, cioè la terza run di presa dati.

Questa estrema sensibilità è stata raggiunta grazie all'utilizzo di bracci lunghi 4 km e di cavità risonanti che, facendo rimbalzare il fascio laser diverse centinaia di volte, amplificano di parecchi ordini di grandezza la differenza in fase riportata in Eq. (2.69) permettendo di rivelare il segnale.

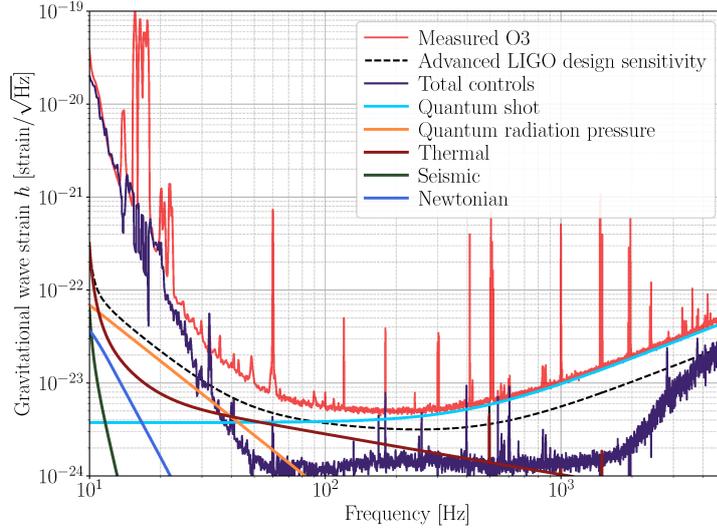


Figura 2.2: Bilancio della sensibilità dell'interferometro LIGO Hanford in O3. La curva in rosso rappresenta la sensibilità calibrata alle GWs. Qui sono state incluse solo le fonti di rumore note significative per semplicità. L'asse delle ordinate del grafico ha l'unità di misura $1/\sqrt{\text{Hz}}$ poichè rappresenta lo spettro di potenza del segnale.

2.5 Operatori differenziali in campo debole

Nel prosieguo della trattazione sarà necessario vedere come gli operatori differenziali vengono modificati in condizione di campo debole.

Ricordiamo quindi innanzitutto che il gradiente, in geometria differenziale, è definito come

$$\nabla^i = g^{ij} \partial_j \quad (2.70)$$

che in approssimazione di campo debole ($g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$) diventa

$$\nabla^i = (\eta^{ij} + h^{ij}) \partial_j = \delta_i^j \partial_j + h^{ij} \partial_j \quad (2.71)$$

Assumiamo ora di essere in presenza di un'onda gravitazionale che si propaga lungo z con polarizzazione $+$, cioè $h^{11} = -h^{22} = h \neq 0$ e tutti gli altri nulli.

Il gradiente assumerà quindi la seguente forma

$$\vec{\nabla}' = \begin{pmatrix} (1+h)\partial_x \\ (1-h)\partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \partial_x \\ -\partial_y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\nabla} + h \begin{pmatrix} \partial_x \\ -\partial_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

mentre il laplaciano $\vec{\nabla}'^2 = \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}'$, sviluppando sempre al primo ordine in h diventa

$$\vec{\nabla}'^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}^2 + h(\partial_x^2 - \partial_y^2) \quad (2.73)$$

Capitolo 3

Condensati di Bose-Einstein

In questo capitolo sarà dapprima trattata la quantizzazione canonica per un campo bosonico, la quale si concluderà con la derivazione dell'equazione di Gross-Pitaevskii, per poi procedere alla generalizzazione di quest'ultima in uno spaziotempo curvo qualunque.

3.1 Quantizzazione canonica per un campo bosonico

Nel 1927 Pascual Pascual Jordan e Oscar Klein [16] ipotizzarono che il campo quantistico di materia fosse proprio il campo di Schrodinger di singola particella $\psi(\vec{r}, t)$, il quale descrive la materia nel limite non relativistico, cioè a basse velocità rispetto a quelle della luce, "promosso" ad operatore nella maniera seguente

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, t) &\longrightarrow \hat{\psi}(\vec{r}, t) \\ \psi^*(\vec{r}, t) &\longrightarrow \hat{\psi}^+(\vec{r}, t) \\ \pi(\vec{r}, t) &\longrightarrow \hat{\pi}(\vec{r}, t) \\ \pi^*(\vec{r}, t) &\longrightarrow \hat{\pi}^+(\vec{r}, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

dove il simbolo $\hat{}$ rappresenta appunto un operatore, mentre il momento canonico $\pi(\vec{r}, t)$ è il campo complesso definito come

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)}\tag{3.2}$$

e analogamente

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)}\tag{3.3}$$

dove \mathcal{L} è la densità di lagrangiana, legata alla lagrangiana L da

$$L = \int d^3r \mathcal{L}\tag{3.4}$$

che è a sua volta legata all'azione nella maniera seguente

$$S = \int dt L = \int dt \int d^3r \mathcal{L} \quad (3.5)$$

Il formalismo descritto in (3.1) è detto di *seconda quantizzazione* poichè la funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$, di prima quantizzazione, viene reinterpretata quale operatore di campo $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ che è l'entità studiata dalla teoria quantistica dei campi.

Nella cornice teorica appena presentata, l'operatore lagrangiano del campo quantistico di materia è il seguente

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{i\hbar}{2}(\hat{\psi}^+ \partial_t \hat{\psi} - \hat{\psi} \partial_t \hat{\psi}^+) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \hat{\psi}|^2 - U |\hat{\psi}|^2 - \frac{1}{2} \int d^3r' |\hat{\psi}(\vec{r}', t)|^2 V(r, r') |\hat{\psi}(\vec{r}, t)|^2 \quad (3.6)$$

dove $U(\vec{r})$ è il potenziale esterno, mentre $V(\vec{r}, \vec{r}')$ è il potenziale di interazione tra le particelle. Nel prosieguo utilizzeremo l'ipotesi del *gas diluito* in cui le interazioni tra le particelle sono solamente binarie.

Utilizzando la (3.6) in (3.2) e (3.3) otteniamo

$$\hat{\pi} = \frac{i\hbar}{2} \hat{\psi}^+ \quad ; \quad \hat{\pi}^+ = -\frac{i\hbar}{2} \hat{\psi} \quad (3.7)$$

La sostanziale differenza tra un campo bosonico, costituito da particelle di spin intero descritte da funzioni d'onda completamente simmetriche, ed uno fermionico, costituito da particelle di spin semintero descritte da funzioni d'onda completamente antisimmetriche, sta nella scelta delle regole di commutazione a tempo fissato.

Se $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ descrive un ensemble di bosoni identici, sarà necessario scegliere la seguente

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = i\hbar \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.8)$$

che unito a (3.7) restituisce

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^+(\vec{r}', t)] = 2\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.9)$$

Quando particelle bosoniche vengono portate a temperature inferiori della temperatura critica T_c (dipendente dalla densità delle particelle), che è dell'ordine dei nK, esse perdono la propria individualità e formano un'unica entità in cui occupano tutte lo stesso stato. In questo caso si parla quindi di un condensato di Bose-Einstein che costituisce uno dei pochi fenomeni quantistici osservabili macroscopicamente.

Assumiamo ora di avere $N \gg 1$, dove N è il numero di particelle, e $T \ll T_c$, allora il campo $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ acquisisce una grande rilevanza classica.

Come suggerito in [17, 18], in questa situazione, l'operatore di campo può essere espresso, tramite approssimazione di punto sella, come

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \hat{\psi}_0(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t) \quad (3.10)$$

dove $\hat{\psi}_0(\vec{r}, t)$ descrive la frazione di particelle in soglia di condensazione, mentre l'ultimo termine è tale per cui $\langle \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle = 0$ e descrive le particelle che non si trovano in stato di condensazione.

Il vantaggio dell'utilizzo dei BECs è la possibilità di sfruttare i suoi *stati coerenti* $|\psi_{cs}\rangle$, introdotti da Roy Glauber [19] e George Sudarshan [20] negli anni '60. Applicando l'operatore di campo $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ a questo stato si ottiene

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle = \hat{\psi}_0(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle = \psi_0(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle \quad (3.11)$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata l'equazione agli autovalori seguente

$$\hat{\psi}_0(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle = \psi_0(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle \quad (3.12)$$

che consente di studiare la frazione condensata attraverso l'utilizzo del campo scalare complesso bosonico $\psi_0(\vec{r}, t)$. Quindi, nel nostro schema teorico $|\psi_{cs}\rangle$ risulta essere autostato del campo quantizzato $\hat{\psi}_0(\vec{r}, t)$ delle particelle nel condensato di Bose-Einstein.

D'ora in avanti prenderemo in considerazione solamente BEC ideali in cui perciò la frazione di particelle condensate è unitaria ($\delta\hat{\psi}(\vec{r}, t) = 0$) e vale perciò

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle = \psi_0(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle = \psi(\vec{r}, t)|\psi_{cs}\rangle \quad (3.13)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente rinominato la funzione d'onda del condensato ψ .

Così facendo possiamo aggirare il formalismo della QFT e tornare nella ben più nota cornice teorica della meccanica quantistica attraverso lo studio della funzione d'onda $\psi(\vec{r}, t)$, tenendo conto però che essa rappresenta un campo scalare complesso bosonico.

Possiamo allora riscrivere la (3.6) nella maniera seguente

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U |\psi|^2 - \frac{1}{2} \int d^3 r' |\psi(\vec{r}', t)|^2 V(r, r') |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (3.14)$$

A basse temperature possiamo inoltre approssimare il potenziale di interazione tra le particelle nella maniera seguente:

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = \gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.15)$$

dove $\delta(\vec{r})$ è la delta di Dirac, mentre γ è appunto definita operativamente come

$$\gamma = \int d^3 r V(r) \quad (3.16)$$

ma dalla teoria dell's-wave scattering sappiamo che

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} = \int d^3 r V(\vec{r}) \quad (3.17)$$

dove a_s è la *lunghezza di scattering* ed m la massa dei bosoni e di conseguenza il parametro γ risulta essere

$$\gamma = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (3.18)$$

Utilizzando la (3.15) in (3.14) si ricava la seguente lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U |\psi|^2 - \frac{\gamma}{2} |\psi|^4 \quad (3.19)$$

che, se integrata, fornisce l'azione di Gross-Pitaevskii:

$$S = \int dt \int d^3x \left[\frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U |\psi|^2 - \frac{\gamma}{2} |\psi|^4 \right] \quad (3.20)$$

Minimizzando quest'ultima si ricava la seguente equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = 0 \quad (3.21)$$

Eseguendo quindi i calcoli necessari

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi - U \psi - \gamma |\psi|^2 \psi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2} \psi \Rightarrow \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2} \partial_t \psi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \Rightarrow \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$

e utilizzando la (3.21) otteniamo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \gamma |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (3.22)$$

che è l'equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) dipendente dal tempo, ottenuta indipendentemente da Eugene Paul Gross [21, 22] e Lev Petrovič Pitaevskii [23].

Siccome tornerà utile nelle sezioni successive è utile riscrivere anche la hamiltoniana stazionaria di seconda quantizzazione relativa alla lagrangiana di Gross-Pitaevskii, la quale è funzione del campo bosonico quantizzato

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \right] \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{\gamma}{2} \left(\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \right)^2 \quad (3.23)$$

dove è esplicitato il termine quartico di interazione.

3.2 GPE in spaziotempo curvo

Consideriamo ora un campo scalare complesso $\psi(\vec{r}, t)$ minimamente accoppiato alla gravità. La procedura di accoppiamento minimale consiste nella sostituzione, nell'azione ad esso associata, di tutte le quantità non covarianti con la loro controparte covariante:

$$\eta^{\mu\nu} \longrightarrow g^{\mu\nu} \quad (3.24)$$

$$\partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu \quad (3.25)$$

$$d^4x \longrightarrow \sqrt{|g|}d^4x \quad (3.26)$$

L'azione per un campo non interagente sarà quindi la seguente

$$S_{KG} = \int d^4x \sqrt{|g|} \frac{1}{2} \left[-g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \psi^*) (\nabla_\nu \psi) - \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \beta R \right] \psi^* \psi \right] \quad (3.27)$$

dove l'accoppiamento minimale tra il campo scalare e il campo gravitazionale, rappresentato da $\beta R \psi^* \psi$ (con R scalare di Ricci), è l'unico accoppiamento locale scalare possibile con le giuste dimensioni.

La (3.27) è la diretta conseguenza dell'applicazione delle sostituzioni riportate sopra all'azione di Klein-Gordon dalla quale deriva appunto la celebre *equazione di Klein-Gordon* [24, 25].

Nel caso in cui $\psi(\vec{r}, t)$ descriva un campo bosonico scalare complesso in spaziotempo curvo è necessario aggiungere un ulteriore termine di interazione proporzionale a $|\psi|^4$, ottenendo la seguente azione

$$S_{int} = \int d^4x \sqrt{|g|} \frac{1}{2} \left[-g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \psi^*) (\nabla_\nu \psi) - \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \beta R \right] \psi^* \psi - \frac{1}{2} \alpha (\psi^* \psi)^2 \right] \quad (3.28)$$

relativa alla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \left[-g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \psi^*) (\nabla_\nu \psi) - \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \beta R \right] \psi^* \psi - \frac{1}{2} \alpha (\psi^* \psi)^2 \right] \quad (3.29)$$

Come detto nella sezione precedente, un condensato di Bose-Einstein si ottiene a temperature prossime allo zero assoluto, in cui le particelle si trovano quindi in regime non relativistico. È lecito allora semplificare la densità di lagrangiana (3.29) eseguendo il limite non relativistico che è il seguente

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \quad (3.30)$$

Trascurando inoltre, nel limite non relativistico, il termine proporzionale a $1/c^2$ otteniamo così la *densità di lagrangiana di Gross-Pitaevskii* in spaziotempo curvo

$$\mathcal{L}_{GP} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{im}{\hbar} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - |\nabla \psi|^2 - \beta R |\psi|^2 - \frac{1}{2} \alpha |\psi|^4 \right] \quad (3.31)$$

a cui corrisponde l'azione di Gross-Pitaevskii in spaziotempo curvo

$$S_{GP} = \int d^4x \sqrt{|g|} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{im}{\hbar} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - |\nabla \psi|^2 - \beta R |\psi|^2 - \frac{1}{2} \alpha |\psi|^4 \right] \quad (3.32)$$

dove è presente una dipendenza implicita dal tensore metrico negli operatori differenziali.

Applichiamo ora l'equazione di Eulero-Lagrange (3.21), trovata minimizzando l'azione, alla densità di lagrangiana (3.31)

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{1}{2} \left[\frac{im}{\hbar} \partial_t \psi - \beta R \psi - \alpha |\psi|^2 \psi \right]$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} = -\frac{1}{2} \frac{im}{\hbar} \psi \quad \Rightarrow \quad \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi^*)} = -\frac{1}{2} \frac{im}{\hbar} \partial_t \psi$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{1}{2} \nabla \psi \quad \Rightarrow \quad \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \psi^*)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi$

definendo inoltre, in analogia con la (3.22) $\hbar^2 \alpha / 2m = \gamma$, troviamo

$$i\hbar \partial_t \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + \beta R) + \gamma |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (3.33)$$

dove

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right) \quad (3.34)$$

L'Eq. (3.33) costituisce appunto l'equazione di Gross-Pitaevskii in uno spaziotempo curvo qualunque, presente in letteratura in molti lavori, tra cui [26].

Calcoliamo ora il tensore energia impulso del campo scalare bosonico sfruttando la definizione (2.25) e l'azione (3.28), la quale è in forma covariante. Scriviamo dunque

$$T_{\mu\nu} = -c \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = -c \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial (\sqrt{|g|} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} = -2c \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + c g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (3.35)$$

ed eseguendo i calcoli si trova dunque

$$T_{\mu\nu}^{BEC} = \frac{c}{2} \left[(\nabla_\mu \psi^*) (\nabla_\nu \psi) - g_{\mu\nu} \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \beta R + \frac{1}{2} \alpha \psi^* \psi \right] \psi^* \psi \right] \quad (3.36)$$

che è appunto il tensore energia impulso per il condensato di Bose-Einstein.

Sfruttando la (2.28) possiamo quindi esplicitare l'equazione di campo per il BEC che è la seguente

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^3} \left[(\nabla_\mu \psi^*) (\nabla_\nu \psi) - g_{\mu\nu} \left[\left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 + \beta R + \frac{1}{2} \alpha \psi^* \psi \right] \psi^* \psi \right] \quad (3.37)$$

Capitolo 4

Interazione tra GW e BEC

In questo capitolo si procederà a ricavare le equazioni idrodinamiche per un superfluido in presenza di un'onda gravitazionale, dimostrando come quest'ultima costituisca un termine di sorgente di fononi per il primo. Si procederà poi a valutare la detectabilità del passaggio dell'onda gravitazionale, andando a studiare in dettaglio il caso di confinamento armonico anisotropo.

4.1 Creazione di fononi in un superfluido per effetto di un'onda gravitazionale

È possibile modificare la lagrangiana (3.19) aggiungendo un termine legato al potenziale chimico, il quale fornisce una misura dell'energia libera necessaria per aggiungere una particella al sistema, nella maniera seguente

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U |\psi|^2 - \frac{\gamma}{2} |\psi|^4 - \mu |\psi|^2 \quad (4.1)$$

L'azione ad essa relativa è data dalla (3.5) e la sua minimizzazione restituisce l'equazione di Eulero-Lagrange (3.21) la quale fornisce

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + U(\vec{r}) + \gamma |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

che in letteratura è comunemente detta anch'essa GPE dipendente dal tempo.

Da questa si ricava immediatamente il caso stazionario

$$\mu \psi(\vec{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \gamma |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) \quad (4.3)$$

in cui viene messo in evidenza appunto il potenziale chimico nel ruolo di energia.

Il numero di bosoni nell'ensamble è dato da

$$N = \int d^3r |\psi(\vec{r}, t)|^2 = \int d^3r n(\vec{r}, t) \quad (4.4)$$

che fornisce una condizione di normalizzazione per il campo di materia e permette inoltre di definire la densità di particelle nella maniera seguente

$$n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (4.5)$$

È alquanto importante notare come il modulo quadro di $\psi(\vec{r}, t)$ rappresenti tipicamente una densità di probabilità, ma in questo caso, in cui essa descrive un ensemble di N bosoni, il suo modulo quadro rappresenti una densità volumetrica di particelle con conseguente significato fisico.

È lecito sottolineare che nella (4.4) sarebbe più corretto inserire nell'integrale anche $\sqrt{|\det g_{ij}|}$, ma in condizione di campo debole e in presenza di un'onda gravitazionale con polarizzazione + che si propaga lungo z (2.59) vale $g_{ij} = \text{diag}(1+h, 1-h, 1)$ e di conseguenza

$$\sqrt{|\det g_{ij}|} = \sqrt{1-h^2} = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^4) = 1 + \mathcal{O}(h^2) \quad (4.6)$$

A meno di termini non lineari in h , possiamo quindi semplicemente considerare l'elemento di volume quale d^3x .

Consideriamo ora la GPE (3.22) in presenza di un'onda gravitazionale che si propaga lungo z con polarizzazione + cioè, con riferimento a (2.45) e (2.56), tale che $h^{11} = -h^{22} = h \neq 0$ e le restanti componenti nulle. Il laplaciano viene modificato secondo la (2.73) e la GPE assume la seguente forma

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + h(\partial_x^2 - \partial_y^2)) + U(\vec{r}) + \gamma|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (4.7)$$

Eseguiamo ora la *trasformata di Madelung* che consiste nella seguente riscrittura del campo scalare bosonico

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\theta(\vec{r}, t)} \quad (4.8)$$

che unita alla seguente definizione del campo di velocità

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla}\theta(\vec{r}, t) \quad (4.9)$$

permette di ottenere la seguente coppia di equazioni, relative rispettivamente alla parte immaginaria e reale

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = h [\partial_x(nv_x) - \partial_y(nv_y)] \quad (4.10)$$

$$\hbar\partial_t\theta - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}\theta)^2 + U + \gamma n = \frac{\hbar^2}{2m} h \left[\frac{\partial_x^2\sqrt{n} - \partial_y^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - (\partial_x\theta)^2 + (\partial_y\theta)^2 \right] \quad (4.11)$$

Studiando l'Eq. (4.10) possiamo ottenere informazioni sulla variazione temporale del numero di particelle. Integrando infatti ambo i lati su tutto lo spazio otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t n d^3r + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} h [\partial_x(nv_x) - \partial_y(nv_y)] d^3r \quad (4.12)$$

e utilizzando il teorema della divergenza possiamo scrivere

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^3} n d^3r + \oint_{\partial\mathbb{R}^3} n\vec{v} d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} h [\partial_x(nv_x) - \partial_y(nv_y)] d^3r \quad (4.13)$$

dove $\partial\mathbb{R}^3$ è il bordo di \mathbb{R}^3 che può essere pensato come una sfera di raggio infinito.

Ipotizzando ora, come si verifica sperimentalmente, che il campo di velocità si annulli all'infinito, allora il secondo termine si annulla e rimane

$$\partial_t N = \int_{\mathbb{R}^3} h [\partial_x(nv_x) - \partial_y(nv_y)] d^3r \quad (4.14)$$

dove abbiamo inoltre utilizzato la definizione del numero di particelle (4.4).

Siccome il termine di destra non è risolvibile analiticamente senza che siano noti i profili di densità e velocità, possiamo eseguire una stima per ordini di grandezza nella maniera seguente

$$\int_{\mathbb{R}^3} h [\partial_x(nv_x) - \partial_y(nv_y)] d^3r \approx L^3 h \frac{nv}{L} = \frac{N}{L^3} v L^2 h = \frac{Nvh}{L} \quad (4.15)$$

dove v e L sono rispettivamente la velocità e la distanza tipiche del condensato.

Allo stesso modo possiamo esprimere il termine di sinistra della (4.14) come

$$\partial_t N \approx \frac{N}{\tau_{var}} \quad (4.16)$$

dove τ_{var} è la scala temporale tipica su cui varia il numero di particelle N , attraverso la cui stima possiamo dedurre importanti informazioni.

Unendo il tutto in (4.14) otteniamo

$$\tau_{var} = \frac{L}{vh} \quad (4.17)$$

Prendendo ora $v = 1 \text{ mm/s} = 10^{-3} \text{ m/s}$ ¹, $L = 100 \text{ } \mu\text{m} = 10^{-4} \text{ m}$ e $h = 10^{-21}$ otteniamo $\tau_{var} \approx 10^{20} \text{ s}$ che è circa mille volte l'età dell'universo.

Possiamo quindi asserire, grazie alle considerazioni semiempiriche appena eseguite, che la scala temporale di variazione del numero di particelle è molto maggiore di quella degli esperimenti sui BEC e che perciò possiamo considerare il numero di particelle quale una costante del moto.

¹La velocità tipica del condensato varia da zero al valore della velocità sonica del condensato, definita di seguito. Quello considerata è una stima per eccesso.

Torniamo ora a considerare le Eq. (4.10) e (4.11) in presenza di una GW, assumiamo che il potenziale esterno sia nullo ($U(\vec{r}) = 0$) e valutiamo il comportamento del superfluido in prossimità di una condizione di equilibrio linearizzando nella maniera seguente

$$n(\vec{r}, t) = n_0(\vec{r}) + \delta n(\vec{r}, t) \quad (4.18)$$

$$\theta(\vec{r}, t) = \theta_0(\vec{r}) + \delta\theta(\vec{r}, t) \quad (4.19)$$

dove la condizione di equilibrio è una condizione stazionaria, cioè $\partial_t n_0 = \partial_t \theta_0 = 0$ e $|\delta n(\vec{r}, t)|, |\delta\theta(\vec{r}, t)| \ll 1$ rappresentano i fononi, cioè una piccola variazione dalle condizioni di equilibrio.

La (4.19) presuppone anche, per linearità del gradiente, che la velocità venga linearizzata nella maniera seguente

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \delta\vec{v}(\vec{r}, t) \quad (4.20)$$

Ricordiamo ora che l'onda gravitazionale è una condizione di campo debole, trovata linearizzando la metrica al primo ordine in h . Affinchè non compaiano termini di ordine superiore al primo, tutti i coefficienti che moltiplicano l'ampiezza dell'onda gravitazionale h dovranno essere all'ordine zero in δn e δv .

Linearizzando le Eq. (4.10) e (4.11), ed eseguendo il limite quasi classico, che consiste nel trascurare il termine relativo alla pressione quantistica poichè proporzionale a \hbar^2 , otteniamo la seguente coppia di equazioni

$$(\partial_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)\delta n + \vec{\nabla} \cdot (n_0 \vec{v}_0) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{n_0 \hbar}{m} \vec{\nabla} \delta\theta \right) = h [\partial_x(n_0 v_{0x}) - \partial_y(n_0 v_{0y})] \quad (4.21)$$

$$\hbar(\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\delta\theta + \gamma\delta n + \frac{1}{2}m v_0^2 + \gamma n_0 = \frac{m}{2}h (v_{0y}^2 - v_{0x}^2) \quad (4.22)$$

Da quest'ultima ricaviamo

$$\delta n = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{m}{2}h (v_{0y}^2 - v_{0x}^2) - \hbar(\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\delta\theta - \frac{1}{2}m v_0^2 - \gamma n_0 \right) \quad (4.23)$$

che inserita nella prima restituisce

$$(\partial_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)(\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\delta\theta - \vec{\nabla} \cdot (c_s^2 \vec{\nabla} \delta\theta) = S_h(h, n_0, \vec{v}_0) + S_0(\vec{v}_0) \quad (4.24)$$

dove abbiamo definito la *velocità (locale) del suono del superfluido bosonico* c_s

$$c_s^2(\vec{r}) = \frac{\gamma n_0(\vec{r})}{m} \quad (4.25)$$

mentre S_h e S_0 sono due termini di sorgente definiti nella maniera seguente

$$S_h = \frac{1}{2}(\partial_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)h(v_{0y}^2 - v_{0x}^2) + h(\partial_x(n_0 v_{0x}) - \partial_y(n_0 v_{0y})) \quad (4.26)$$

$$S_0 = -\frac{\hbar}{2\gamma} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 v_0^2) \quad (4.27)$$

La stessa equazione può anche essere riscritta come

$$(\partial_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)(\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\delta\theta - \vec{\nabla} \cdot (c_s^2 \vec{\nabla} \delta\theta) = S_h(h, n_0, \vec{v}_0) \quad (4.28)$$

dove abbiamo rimosso il termine S_0 poichè, dipendendo solamente da condizioni di equilibrio controllabili sperimentalmente, può essere rimosso in fase di presa dati tramite l'utilizzo di opportuni sistemi di filtraggio e analisi.

La (4.28) è stata trovata originariamente da Ralf Schützhold in [1] e asserisce la creazione di nuovi fononi da parte dell'onda gravitazionale. Si noti che l'impatto su fononi già esistenti corrisponderebbe a termini dell'ordine $\mathcal{O}(h\delta\theta)$ che abbiamo trascurato nella nostra trattazione al primo ordine.

Nel caso in cui il condensato sia fermo in condizione d'equilibrio, cioè $\vec{v}_0 = 0$, oppure se fosse confinato simmetricamente nel piano perpendicolare al vettore d'onda della GW, il termine S_h si annullerebbe e non sarebbe quindi possibile la rivelazione del passaggio di un'onda gravitazionale attraverso lo studio del superfluido.

È lecito sottolineare come lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere a partire dalla GPE valida per qualsiasi spaziotempo curvo (Eq. (3.33)), come mostrato in sezione (A.1) in Appendice.

4.2 Detectabilità

La rivelazione di onde gravitazionali è un traguardo sperimentale non indifferente, proprio a causa della magnitudine di questo effetto $h = \mathcal{O}(10^{-21})$. Come visto in sezione (2.4), la rivelazione tramite tecniche interferometriche ha permesso di superare questo ostacolo riuscendo a guadagnare gli ordini di grandezza necessari.

L'utilizzo di apparati così grandi non è però di semplice applicabilità, e in ottica di un'implementazione dell'astronomia multimessaggera su più grande scala, si sta volgendo lo sguardo anche ad altre possibilità. Vediamo quindi di seguito perchè i BECs rappresentano un'opportunità in merito.

Dalle Eq. (3.23) e (4.7) si nota come sia possibile esprimere la hamiltoniana di seconda quantizzazione del campo scalare bosonico interagente con un'onda gravitazionale propagante lungo z con polarizzazione $+$ nella maniera seguente

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) \quad (4.29)$$

dove \hat{H}_0 è la hamiltoniana riportata in Eq. (3.23), mentre \hat{H}_{int} è definita da

$$\hat{H}_{int}(t) = \int \hat{\psi}^+(\vec{x}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} h(z, t) (\partial_x^2 - \partial_y^2) \right) \hat{\psi}(\vec{x}, t) d^3x \quad (4.30)$$

Possiamo a questo punto sfruttare una caratteristica propria dei BEC che sono i loro stati coerenti $|\psi_{cs}\rangle$ (di norma unitaria) che rispettano, come visto in

sezione (3.1), nel caso di condensati ideali, la seguente equazione agli autovalori:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t)|\psi_{cs}\rangle = \psi(\vec{x}, t)|\psi_{cs}\rangle = \sqrt{N}\psi_1(\vec{x}, t)|\psi_{cs}\rangle \quad (4.31)$$

dove $\psi(\vec{x}, t)$ rappresenta la funzione d'onda del condensato bosonico utilizzata nelle sezioni precedenti, mentre $\psi_1(\vec{x}, t)$ è la funzione d'onda di singola particella.

Possiamo ora definire l'operatore di evoluzione temporale legato all'interazione dell'onda gravitazionale

$$\hat{U}_{int}(\vec{x}, t) = \mathcal{T}e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_{int}(\vec{x}, t') dt'} \quad (4.32)$$

Definiamo ora la *fidelity* (F) che è un'indicazione di quanto lo stato rimanga invariato nel tempo:

$$F = |\langle \psi_{cs} | \hat{U}_{int}(\vec{x}, t) | \psi_{cs} \rangle|^2 \quad (4.33)$$

In linea teorica l'onda gravitazionale modificherà lo stato coerente allontanando il valore di F da 1 che è una cosa desiderabile, siccome la meccanica quantistica consente di distinguere con certezza solamente stati ortogonali.

Calcoliamo ora la radice della fidelity eseguendo un'espansione in serie di \hbar , ottenendo il risultato seguente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{cs} | \hat{U}_{int} | \psi_{cs} \rangle &= \langle \psi_{cs} | \left(\hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_{int}(\vec{x}, t') dt' + \mathcal{O}(\hbar^2) \right) | \psi_{cs} \rangle \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int d^3x \int_0^t dt' \langle \psi_{cs} | \hat{\psi}^+(\vec{x}, t') \left[-\frac{\hbar^2}{2m} h(z, t') (\partial_x^2 - \partial_y^2) \right] \hat{\psi}(\vec{x}, t') | \psi_{cs} \rangle + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= 1 - i \frac{\hbar}{2m} \int_0^t dt' \int d^3x h(z, t') e^{\frac{i}{\hbar} E_{gs} t'} \psi^*(\vec{x}) (\partial_y^2 - \partial_x^2) e^{-\frac{i}{\hbar} E_{gs} t'} \psi(\vec{x}) + \mathcal{O}(N^2 \hbar^2) \\ &= 1 - iN\xi(t) + \mathcal{O}(N^2 \hbar^2) \end{aligned} \quad (4.34)$$

dove abbiamo sfruttato l'Eq. (4.31), abbiamo definito l'energia del ground state E_{gs} che è l'autovalore relativo allo stato coerente ($H_0|\psi_{cs}\rangle = E_{gs}|\psi_{cs}\rangle$) e abbiamo definito

$$\xi(t) = \frac{\hbar}{2m} \int_0^t dt' \int d^3x h(z, t') \psi_1^*(\vec{x}) (\partial_y^2 - \partial_x^2) \psi_1(\vec{x}) \quad (4.35)$$

il quale, siccome è proporzionale ad \hbar , sarà dell'ordine $\xi = \mathcal{O}(10^{-21})$. Si noti che la correzione al primo ordine in \hbar è puramente immaginaria e consiste quindi in una fase relativa dipendente dal tempo $\xi(t)$ tra i due stati.

Il vantaggio dell'utilizzo del BEC per la rivelazione di GW sta proprio nella possibilità di sfruttare i suoi stati coerenti, i quali forniscono un'amplificazione proporzionale al numero N di particelle, che potrebbe quindi compensare la magnitudine di \hbar .

Ciò nonostante, la nostra capacità sperimentale nella creazione di condensati² non permette, ad oggi dove $N \approx 10^7$, di compensare i venti ordini di grandezza dell'onda gravitazionale (cioè $hN \approx 10^{-14}$), ma nuove strade si stanno aprendo verso l'utilizzo di un superfluido di Elio ultra freddo che è costituito da molte più particelle ($\mathcal{O}(10^{20})$), ma d'altra parte solo meno del 10% di esse si trova in soglia di condensazione.

4.3 Confinamento armonico anisotropo

In questa sezione stimiamo il valore di $\xi(t)$, definito in Eq. (4.35), per un condensato confinato attraverso potenziale armonico anisotropo in tre diverse configurazioni.

4.3.1 Bosoni non interagenti

Utilizzando la tecnica sperimentale della risonanza di Feshbach-Fano [29, 30, 31] è possibile variare la forza di interazione tra le particelle di un condensato andando a modificare la lunghezza di scattering a_s fino anche a renderla trascurabile.

In questa condizione, ottenibile sperimentalmente, è quindi possibile considerare le particelle del BEC quali non interagenti, trascurando così il termine non lineare nella GPE (3.22), proporzionale a γ definito secondo la (3.18) in funzione di a_s .

Considerando ora un potenziale di confinamento armonico anisotropo definito nella maniera seguente

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (4.36)$$

Inserendo questo nella (3.22) ed assumendo, come specificato sopra, $\gamma = 0$ otteniamo

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad (4.37)$$

Utilizzando la relazione $\psi = \sqrt{N}\psi_1$, otteniamo l'equazione di Schrödinger con potenziale armonico per la singola particella, la cui soluzione stazionaria si ottiene analiticamente e in maniera relativamente semplice.

Immaginiamo ora che la singola particella del condensato confinato armonicamente si trovi nello stato fondamentale, a cui corrisponde la seguente funzione

²La prima osservazione sperimentale di un condensato di Bose-Einstein fu riportata in [27] il 14 luglio 1995, un lavoro ad opera di Eric Cornell, Carl Wieman ed altri colleghi della JILA (Joint Institute for Laboratory Astrophysics), dell'università del Colorado Boulder, i quali ottennero per questo il premio Nobel per la fisica nel 2001. Essi raffreddarono circa 2000 atomi di Rubidio-87 sotto i 170 nK grazie ad una tecnica chiamata *sisyphus cooling* [28] che permise ai suoi scopritori di vincere il Nobel per la fisica nel 1997.

d'onda fattorizzabile nelle tre componenti spaziali:

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{(\pi^3 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)} \quad (4.38)$$

in cui abbiamo definito

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}} \quad \text{con } i = x, y, z \quad (4.39)$$

Possiamo ora inserire l'Eq. (4.38) in (4.35), ottenendo

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{\hbar}{2m} \int_0^t dt' \int_{\mathbb{R}^3} dx dy dz h(z, t') \psi_1^*(\vec{x}) (\partial_y^2 - \partial_x^2) \psi_1(\vec{x}) \\ &= \frac{\hbar}{2m} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{\pi} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dz h(z, t') e^{-\frac{z^2}{\sigma_z^2}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si noti che anche in questo caso, come trovato in sezione (4.1), se il condensato è simmetrico sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda gravitazionale, cioè $\sigma_x = \sigma_y$, l'onda gravitazionale non ha alcun effetto.

Utilizzando ora la più semplice espressione possibile per l'onda gravitazionale, che è la seguente

$$h(t, z) = h_0 \cos(k_g z - \omega_g t) \quad (4.41)$$

otteniamo

$$\xi(t) = \frac{\hbar}{2m} \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sigma_x \sigma_y} h_0 e^{-\frac{1}{4} k_g \sigma_z^2} \sin(\omega_g t) \quad (4.42)$$

che riscritta in funzione delle pulsazioni di confinamento risulta

$$\xi(t) = \frac{h_0}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m}} (\sqrt{\omega_x} - \sqrt{\omega_y}) e^{-\frac{\hbar}{4mc} \frac{\omega_g}{\omega_z}} \sin(\omega_g t) \quad (4.43)$$

che è appunto la variazione in fase, per effetto di una GW, su un BEC non interagente e confinato attraverso un potenziale armonico anisotropo. Si noti che la risposta del condensato è oscillante, come ci saremmo aspettati trattandosi di un fenomeno ondulatorio.

In Fig. (4.1) è riportato un grafico bidimensionale raffigurante l'ampiezza di $\xi(t)$ moltiplicata per il numero di particelle N , al variare delle frequenze di confinamento del piano xy . Il plot è stato ottenuto considerando un condensato di atomi di Rubidio-87 non interagenti, e mantenendo costanti i valori di $\nu_z = 150$ Hz, $h_0 = 10^{-20}$ e $N = 10^7$ e mostra come l'ampiezza della fase indotta dall'onda gravitazionale, amplificata per il numero di particelle, possa attualmente raggiungere l'ordine di $\mathcal{O}(10^{-17})$ se si scelgono opportunamente le frequenze di confinamento perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda. Quest'ordine di grandezza verifica inoltre l'approssimazione eseguita, sviluppando in serie l'operatore di evoluzione temporale.

È importante inoltre notare come l'ampiezza di $N\xi$ sia indipendente sia dalla frequenza dell'onda gravitazionale, sia di quella di confinamento lungo z , questo poichè il termine esponenziale della (4.43) è prossimo ad 1. Un eventuale effetto di smorzamento dell'ampiezza sarebbe osservabile solo per valori di $\omega_y/\omega_z = \mathcal{O}(10^{17})$.

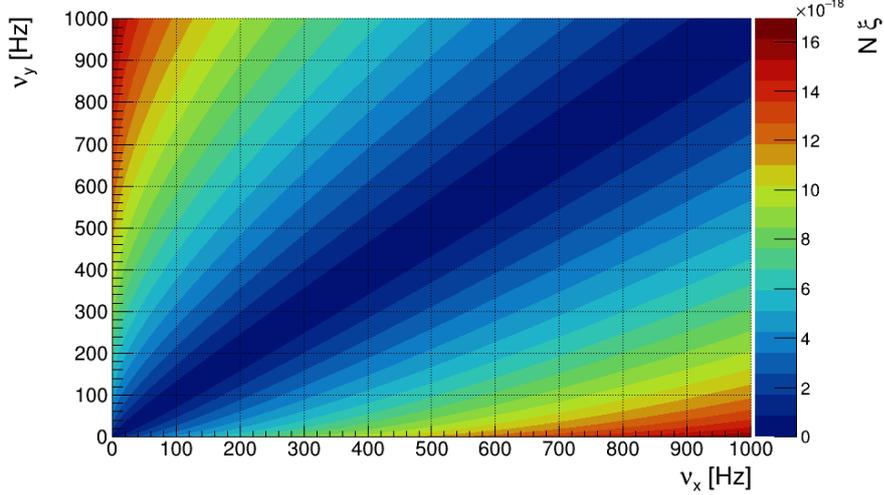


Figura 4.1: Ampiezza di $\xi(t)$ moltiplicata per il numero di particelle N in funzione delle frequenze di confinamento del piano xy , per atomi di Rubidio–87 non interagenti, mantenendo costanti i valori di $\nu_z = 150$ Hz, $h_0 = 10^{-20}$ e $N = 10^7$.

4.3.2 Bosoni interagenti

La GPE non è di facile soluzione analitica, ma ciò nonostante è possibile utilizzare metodi approssimati così da poter valutare anche il caso interagente in cui $\gamma \neq 0$.

Sfruttiamo allora i risultati ricavati in [32] in cui è stato utilizzato un approccio variazionale con una funzione di prova gaussiana della forma seguente

$$\psi_1(\vec{x}) = \frac{1}{(\pi^3 \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sigma_z^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2} + \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)} \quad (4.44)$$

i cui parametri sono le σ_i con $i = x, y, z$.

Nell'articolo citato si dimostra come i parametri σ_i^* che minimizzano l'energia del *ground state* abbiano la seguente forma:

$$\sigma_x^* = \left(\frac{\Gamma \hbar^{\frac{3}{5}} \omega_y \omega_z}{m \omega_x^4}\right)^{\frac{1}{5}} \quad \sigma_y^* = \left(\frac{\Gamma \hbar^{\frac{3}{5}} \omega_z \omega_x}{m \omega_y^4}\right)^{\frac{1}{5}} \quad \sigma_z^* = \left(\frac{\Gamma \hbar^{\frac{3}{5}} \omega_x \omega_y}{m \omega_z^4}\right)^{\frac{1}{5}} \quad (4.45)$$

dove abbiamo definito

$$\Gamma = \gamma \frac{N-1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.46)$$

con N numero di particelle.

Disponendo, come in sezione (4.3.1), di una funzione d'onda di tipo gaussiano, il procedimento per il calcolo di $\xi(t)$ porta nuovamente all'Eq. (4.42) che va ora riscritta in funzione delle σ_i^* ottenendo il risultato seguente

$$\xi(t) = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\hbar^{\frac{11}{5}}}{m^2 \sqrt{\Gamma \omega_z}} \right)^{\frac{2}{5}} e^{-\frac{\omega_g}{4c} \left(\frac{\Gamma \hbar^{\frac{3}{5}} \omega_x \omega_y}{m \omega_z^4} \right)^{\frac{2}{5}}} \left(\left(\frac{\omega_x^4}{\omega_y} \right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{\omega_y^4}{\omega_x} \right)^{\frac{1}{5}} \right) \sin(\omega_g t) \quad (4.47)$$

In Fig. (4.2) è riportata l'ampiezza di $N\xi(t)$, per un condensato di atomi di Rubidio-87 interagenti, in funzione del rapporto tra la lunghezza di scattering a_s e il raggio di Bohr r_B , per diversi valori della frequenza di confinamento lungo y . La figura mostra come, prendendo come valore per l'onda gravitazionale $h_0 = 10^{-20}$, l'ampiezza sia dell'ordine di 10^{-14} il che verifica anche in questo caso l'approssimazione eseguita, sviluppando in serie l'operatore di evoluzione temporale. Il plot mostra come l'ampiezza diverga per $a_s/r_B \rightarrow 0$, questo poiché in quel caso non è più valido il modello ad atomi interagenti, ma è necessario quello utilizzato nella sezione precedente. Per valori tipici della lunghezza di scattering del Rb-87, cioè tra $90 r_B$ e $100 r_B$, l'ampiezza è pressoché costante ed è dell'ordine di $\mathcal{O}(10^{-14})$, cioè tre ordini di grandezza superiore di quella relativa al BEC non interagente. Ciò suggerisce quindi che i condensati di atomi interagenti siano favoriti rispetto a quest'ultimi in un'ottica futura per la rivelazione delle GW.

Come verificato nella sezione precedente, l'ampiezza è praticamente indipendente dalla frequenza dell'onda gravitazionale, poiché l'esponente dell'Eq. (4.47) è dell'ordine di $\mathcal{O}(\omega_g \cdot 10^{-27})$.

4.3.3 Bosoni altamente interagenti

L'Eq. (4.3) presenta una soluzione analitica nella cosiddetta *approssimazione di Thomas-Fermi* (TF) [33, 34] in cui $Na_s/a_{oa} \gg 1$ in cui $a_{oa} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ rappresenta la lunghezza media dell'oscillatore armonico con $\omega = \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$. In questo regime, verificato per un gran numero di bosoni ($N \gg 1$) altamente interagenti ($a_s \gg 1$), è possibile trascurare il termine cinetico $\hbar \nabla^2 / 2m$ ottenendo la seguente equazione

$$\mu \psi(\vec{r}) = [U(\vec{r}) + \gamma |\psi(\vec{r})|^2] \psi(\vec{r}) \quad (4.48)$$

L'Eq. (4.48) è un'equazione algebrica che, considerando la funzione d'onda del condensato reale, ha la seguente soluzione

$$\psi(\vec{r}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - U(\vec{r})}{\gamma}} & \text{se } \mu \geq U(\vec{r}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.49)$$

dove abbiamo considerato un'interazione repulsiva tra le particelle ($\gamma > 0$).

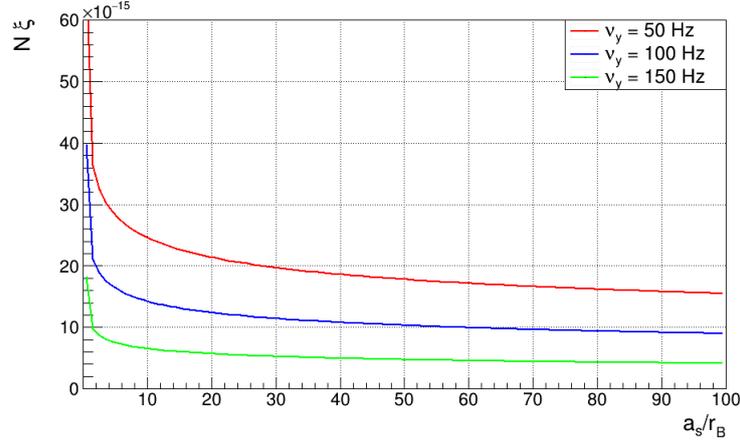


Figura 4.2: ampiezza di $N\xi(t)$, per un condensato di atomi di Rubidio–87 interagenti, in funzione del rapporto tra la lunghezza di scattering a_S e il raggio di Bohr r_B , per diversi valori della frequenza di confinamento lungo y . Sono stati mantenuti costanti i valori di $\nu_z = 150$ Hz, $h_0 = 10^{-20}$ e $N = 10^7$.

Nel caso in cui $U(\vec{r})$ sia dato dall'Eq. (4.36), cioè se è presente un confinamento armonico anisotropo, otteniamo

$$\psi(\vec{x}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)}{\gamma}} & \text{se } \vec{x} \in \mathcal{D} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.50)$$

dove il dominio è $\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mu - \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \geq 0\}$.

Procedendo con il calcolo della fase $\xi(t)$ si trova però che essa diverge portando ad un risultato che non rappresenta la fisica del problema. Ciò è dovuto al fatto che nell'approssimazione di Thomas-Fermi, trascurando il termine cinetico poichè proporzionale ad \hbar^2 , si debba di conseguenza trascurare anche il termine di interazione dell'onda gravitazionale poichè proporzionale ad $\hbar^2 h \ll \hbar^2$.

In un condensato altamente interagente, cioè dove l'interazione tra le particelle prevale sul termine cinetico, gli effetti dell'onda gravitazionale non sono osservabili.

Capitolo 5

Conclusioni

In questo lavoro è stata dapprima ricavata l'equazione delle onde gravitazionali (Cap. 2), a partire dall'azione di Einstein-Hilbert, per poi studiarne la soluzione nel vuoto e l'interazione con un rivelatore interferometrico. Si è poi proceduto a studiare un condensato di Bose-Einstein (Cap. 3), sia in uno spaziotempo piatto che curvo, ottenendo così l'equazione di Gross-Pitaevskii in entrambi i casi.

Il punto cardine della tesi (Cap. 4) è stato poi unire i due fenomeni andando a studiare l'interazione tra essi e mostrando come i BECs rappresentino un possibile veicolo di rivelazione delle GW. È stato quindi mostrato, verificando i risultati di [1], come un'onda gravitazionale induca in prima approssimazione una fase oscillante nel condensato e come questa venga amplificata grazie alle proprietà intrinseche del sistema.

Procedendo poi oltre i risultati già presenti in letteratura si è valutata l'entità dell'interazione nel caso di condensati confinati attraverso potenziale armonico anisotropo in tre diverse configurazioni: bosoni non interagenti, ottenendo l'Eq. (4.43), particelle interagenti, il che ha portato all'Eq. (4.47) ed infine un condensato di atomi altamente interagente per cui si è trovato che l'onda gravitazionale non produce alcun effetto, a causa della predominanza delle interazione interatomiche.

Si è inoltre mostrato, attraverso le Fig. (4.1) e (4.2), come l'effetto dell'onda gravitazionale sia maggiore per condensati di atomi interagenti.

Ciò apre nuove frontiere e possibilità per la rivelazione delle onde gravitazionali attraverso l'uso dei condensati di Bose-Einstein, ma ancora molto deve essere fatto per assicurarsi un veicolo accurato ed efficiente.

Bibliografia

- [1] R. Schützhold, “Interaction of a Bose-Einstein condensate with a gravitational wave,” *Physical Review D*, vol. 98, no. 10, p. 105019, 2018.
- [2] C. Sabín, D. E. Bruschi, M. Ahmadi, and I. Fuentes, “Phonon creation by gravitational waves,” *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 8, p. 085003, 2014.
- [3] M. P. Robbins, N. Afshordi, A. O. Jamison, and R. B. Mann, “Detection of gravitational waves using parametric resonance in Bose-Einstein condensates,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 39, no. 17, p. 175009, 2022.
- [4] A. Roitberg, “Einstein field equations for Bose-Einstein condensates in cosmology,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1730, p. 012017, IOP Publishing, 2021.
- [5] A. Roitberg, “Emergence of effective Lorentzian metric from a vortex defect,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2872, AIP Publishing, 2023.
- [6] S. Liberati, “Analogue gravity models of emergent gravity: lessons and pitfalls,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 880, p. 012009, IOP Publishing, 2017.
- [7] M. Ricci and T. Levi-Civita, “Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications,” *Mathematische Annalen*, vol. 54, no. 1-2, pp. 125–201, 1900.
- [8] L. Susskind and A. Cabannes, *General Relativity: the theoretical minimum*. Random House, 2023.
- [9] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 844–847, 1915.
- [10] D. Hilbert, “Die grundlagen der physik. (erste mitteilung.),” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1915, pp. 395–408, 1915.

- [11] L. Corry, J. Renn, and J. Stachel, “Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute,” *Science*, vol. 278, no. 5341, pp. 1270–1273, 1997.
- [12] D. Tong, “General relativity.” University of Cambridge Part III Mathematical Tripos, 2019.
- [13] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, *et al.*, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Physical review letters*, vol. 116, no. 6, p. 061102, 2016.
- [14] C. Cahillane and G. Mansell, “Review of the advanced LIGO gravitational wave observatories leading to observing run four,” *Galaxies*, vol. 10, no. 1, p. 36, 2022.
- [15] A. Buikema, C. Cahillane, G. Mansell, C. Blair, R. Abbott, C. Adams, R. Adhikari, A. Ananyeva, S. Appert, K. Arai, *et al.*, “Sensitivity and performance of the advanced LIGO detectors in the third observing run,” *Physical Review D*, vol. 102, no. 6, p. 062003, 2020.
- [16] J. Pascual and K. Oskar, “Zum mehrkörperproblem der quantentheorie,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 45, no. 11-12, pp. 751–765, 1927.
- [17] L. Salasnich, “Path integrals for strongly correlated systems,” 2024.
- [18] O. Gabel, “Bose-Einstein condensates in curved space-time.” Fachbereich Physik der Technischen Universität Darmstadt, 2019.
- [19] R. J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field,” *Physical Review*, vol. 131, no. 6, p. 2766, 1963.
- [20] E. Sudarshan, “Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams,” *Physical Review Letters*, vol. 10, no. 7, p. 277, 1963.
- [21] E. P. Gross, “Structure of a quantized vortex in boson systems,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 20, no. 3, pp. 454–477, 1961.
- [22] E. P. Gross, “Hydrodynamics of a superfluid condensate,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, no. 2, pp. 195–207, 1963.
- [23] L. P. Pitaevskii, “Vortex lines in an imperfect Bose gas,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 13, no. 2, pp. 451–454, 1961.
- [24] O. Klein, “Quantentheorie und féunfdimensionale relativitatstheorie II zeit,” 1926.
- [25] W. Gordon, “Der comptoneffekt der Schrödingerschen theorie,” 1926.

- [26] A. Roitberg, *Gross-Pitaevskii hydrodynamics in Riemannian manifolds and application in Black Hole cosmology*. PhD thesis, Scuola di dottorato Università degli studi di Milano-Bicocca, 2022/2023.
- [27] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor,” *science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [28] C. N. Cohen-Tannoudji and W. D. Phillips, “New mechanisms for laser cooling,” *Physics Today*, vol. 43, no. 10, pp. 33–40, 1990.
- [29] H. Feshbach, “Unified theory of nuclear reactions,” *Annals of Physics*, vol. 5, no. 4, pp. 357–390, 1958.
- [30] H. Feshbach, “A unified theory of nuclear reactions. II,” *Annals of Physics*, vol. 19, no. 2, pp. 287–313, 1962.
- [31] U. Fano, “Sullo spettro di assorbimento dei gas nobili presso il limite dello spettro d’arco,” *Il Nuovo Cimento (1924-1942)*, vol. 12, no. 3, pp. 154–161, 1935.
- [32] L. Salasnich, “Time-dependent variational approach to Bose-Einstein condensation,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 14, no. 01, pp. 1–11, 2000.
- [33] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, “Thermodynamics of a trapped Bose-condensed gas,” *Journal of Low Temperature Physics*, vol. 109, pp. 309–355, 1997.
- [34] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases,” *Reviews of modern physics*, vol. 71, no. 3, p. 463, 1999.
- [35] A. Roitberg and R. L. Ricca, “Hydrodynamic derivation of the Gross-Pitaevskii equation in general Riemannian metric,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 54, no. 31, p. 315201, 2021.

Appendice

In questo capitolo verranno ricavate le equazioni per un superfluido in uno spaziotempo curvo e sarà mostrato come l'onda gravitazionale costituisca anche in questa condizione un termine di sorgente per i fononi del superfluido.

A.1 Equazioni idrodinamiche in spaziotempo curvo

Eseguiamo ora la trasformata di Madelung (4.8) alla GPE in uno spazio curvo (3.33) ottenendo, per il termine di sinistra

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{i\hbar}{2\sqrt{n}}(\partial_t n)e^{i\theta} - \hbar\sqrt{n}e^{i\theta}(\partial_t\theta) \quad (\text{A.1})$$

mentre il laplaciano, definito secondo l'Eq. (3.34), diventa

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i \left[\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j \left(\sqrt{n}e^{i\theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i \left[\sqrt{|g|}g^{ij} \left((\partial_j\sqrt{n})e^{i\theta} + i\sqrt{n}e^{i\theta}(\partial_j\theta) \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i \left[(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\sqrt{n})e^{i\theta} + i\sqrt{n}e^{i\theta}(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\theta) \right] \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}(\partial_i\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\sqrt{n}) + \frac{1}{\sqrt{|g|}}i\sqrt{n}(\partial_i\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2\sqrt{n}}g^{ij}(\partial_j n)(\partial_i\theta) + \frac{i}{2\sqrt{n}}g^{ij}(\partial_i n)(\partial_j\theta) - \sqrt{n}g^{ij}(\partial_j\theta)(\partial_j\theta) \right] e^{i\theta} \\ &= \left[\nabla^2\sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}}(\vec{\nabla}n) \cdot (\vec{\nabla}\theta) + i\sqrt{n}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\theta - \sqrt{n}|\vec{\nabla}\theta|^2 \right] e^{i\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la definizione di laplaciano (3.34) e di prodotto scalare

$$g^{ij}\partial_i n\partial_j\theta = (\vec{\nabla}n) \cdot (\vec{\nabla}\theta) \quad (\text{A.3})$$

La GPE, a seguito della trasformata di Madelung, risulta quindi

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2\sqrt{n}}(\partial_t n)e^{i\theta} - \hbar\sqrt{n}e^{i\theta}(\partial_t \theta) = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 \sqrt{n} + \frac{i}{\sqrt{n}}(\vec{\nabla} n) \cdot (\vec{\nabla} \theta) + i\sqrt{n}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \theta + \right. \\ & \left. - \sqrt{n}|\vec{\nabla} \theta|^2 + \beta R\sqrt{n} \right] + \gamma n\sqrt{n} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Uguagliando la parte immaginaria, e ricordando la definizione di campo di velocità (4.9), troviamo

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Uguagliando invece la parte reale otteniamo

$$\frac{\hbar}{m}\partial_t \theta = \mathcal{P} + \mathcal{C} - \frac{\hbar^2}{2m^2}|\vec{\nabla} \theta|^2 - \frac{\gamma}{m}n \quad (\text{A.6})$$

dove abbiamo definito la pressione quantistica nella maniera seguente

$$\mathcal{P} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (\text{A.7})$$

e il *potenziale di curvatura*

$$\mathcal{C} = \frac{\hbar^2}{2m^2}\beta R \quad (\text{A.8})$$

Prendendo il gradiente della (A.6) otteniamo

$$\partial_t \vec{v} = \vec{\nabla}(\mathcal{P} + \mathcal{C}) - \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 - \frac{\gamma}{m}\vec{\nabla}n \quad (\text{A.9})$$

che insieme alla (A.5) può essere riscritta nella maniera seguente

$$\partial_t n + g^{ij}\partial_i(nv_j) = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\partial_t v^i = g^{ij}\partial_j \left(\mathcal{P} + \mathcal{C} - \frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma}{m}n \right) \quad (\text{A.11})$$

le quali costituiscono le equazioni idrodinamiche per un superfluido in uno spaziotempo qualunque. Queste equazioni sono state ricavate in [4, 26, 35] da Alice Roitberg e Renzo Ricca ed hanno la stessa forma delle corrispondenti equazioni in geometria euclidea (caratterizzata da $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$) ricavate in sezione (4.1), con la differenza della presenza del termine del potenziale di curvatura e della metrica nella definizione degli operatori.

Poniamoci ora in condizione di campo debole (2.29) per cui vale, come visto in sezione (2.3), l'espressione (2.33) per lo scalare di Ricci:

$$R = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h \quad (\text{A.12})$$

Se ora pensiamo ad $h^{\mu\nu}$ come l'onda gravitazionale, la gauge scelta in precedenza era quella di Donder che è la seguente

$$\partial^\nu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h \quad (\text{A.13})$$

ma se consideriamo un'ulteriore scelta di coordinate che è la TT-gauge per cui vale $h = h^\mu_\mu = 0$ varrà anche $R = 0$ e di conseguenza $\mathcal{C} = 0$.

Se eseguiamo quindi gli stessi calcoli svolti in sezione (4.1), trascurando perciò la pressione quantistica, a partire dalle Eq. (A.5) e (A.6) imponendo il limite di campo debole troveremo lo stesso risultato che è appunto l'Eq. (4.28).

Se prendiamo ora l'Eq. (A.5) e scriviamo il gradiente secondo la (2.72) otteniamo

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n\vec{v}) = h [(\partial_y(nv_y) - \partial_x(nv_x))] \quad (\text{A.14})$$

dove ora il gradiente è inteso come quello comunemente utilizzato in analisi, cioè corrispondente alla metrica $\text{diag}(1, 1, 1)$.

Linearizziamo ora attorno a una condizione di equilibrio come eseguito in sezione (4.1), quindi fermandoci al primo ordine in $\delta n, \delta\vec{v}$ e h , troviamo

$$(\partial_t + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)\delta n + \vec{\nabla} \cdot (n_0\delta\vec{v}) = h [(\partial_y(n_0v_{0y}) - \partial_x(n_0v_{0x}))] \quad (\text{A.15})$$

che è un'equazione di continuità per i fononi del condensato con un termine di sorgente proporzionale all'ampiezza dell'onda gravitazionale.

Anche partendo dalla GPE in spaziotempo curvo abbiamo così dimostrato che l'onda gravitazionale comporta creazione di fononi nel condensato.