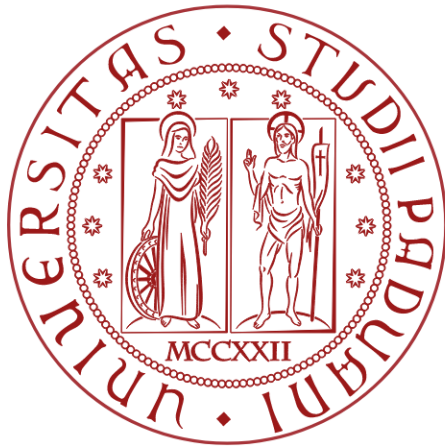




UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Corso di Laurea in Astronomia

Il buco nero di Kerr e i suoi aspetti fisici paradossali

Tesi di Laurea

Relatore:
Prof. PIERALBERTO MARCHETTI

Laureando:
Filippo Manunza
Matricola: 2076338

Anno Accademico 2025–2026

Abstract

Nella tesi si discutono le caratteristiche fisiche della soluzione del buco nero di Kerr delle equazioni di Einstein della relatività generale e si analizzano gli aspetti paradossali coinvolti che compaiono entro l'orizzonte degli eventi interno del buco nero.

This thesis discusses the physical features of the Kerr black hole solution to Einstein's equations of general relativity and analyzes the paradoxical features that arise within the inner event horizon of the black hole.

Indice

1	Introduzione	1
2	La soluzione di Kerr	2
3	Fisica e paradossi della soluzione di Kerr	8
	Bibliografia	19

Capitolo 1

Introduzione

Pochi mesi dopo la pubblicazione delle equazioni di campo di Einstein nel 1915, l'astrofisico Karl Schwarzschild derivò la prima soluzione esatta, la celebre soluzione di Schwarzschild. Essa descrive lo spaziotempo attorno ad una massa sferica, statica e priva di carica elettrica. Oltre alle sue importanti applicazioni, per esempio nel calcolo esatto della precessione del perielio di Mercurio, peraltro già trattata da Einstein anni prima, la soluzione di Schwarzschild introdusse un concetto nuovo e rivoluzionario. Se la massa che curva lo spaziotempo è abbastanza densa, ad una distanza dal suo centro nota come raggio di Schwarzschild è presente una superficie dalla quale niente può uscire una volta entrato, nota come orizzonte degli eventi. In particolare, neanche la luce sfugge a questo meccanismo, da cui il nome che fu dato all'oggetto: buco nero. L'assenza di rotazione e la perfetta simmetria sferica rappresentano tuttavia un'idealizzazione molto forte. Com'è noto, la conservazione del momento angolare implica che i corpi celesti ruotano su se stessi, e ci si aspetta che questo sia vero anche per i buchi neri. Il problema fu superato nel 1963, quando il matematico Roy Kerr derivò una soluzione esatta delle equazioni di campo, nota come soluzione di Kerr, che descrive uno spaziotempo stazionario e a simmetria assiale. Questa soluzione, molto più complicata di quella di Schwarzschild, tratta lo spaziotempo al di fuori di corpi rotanti, e prevede che esso venga trascinato nella rotazione, fenomeno noto come effetto Lense-Thirring. L'orizzonte degli eventi nel buco nero di Kerr è circondato da una regione, detta ergosfera, nella quale questo effetto è così forte che neppure la luce può evitare di essere trascinato nel verso di rotazione. L'obiettivo di questa tesi compilativa è discutere nel dettaglio la metrica di Kerr, con l'accento sui suoi aspetti fisici, sia quelli verosimili che quelli paradossali. Nel capitolo 2 si introduce la metrica di Kerr dal punto di vista matematico e se ne studiano le singolarità. Si procede poi a descrivere l'estensione analitica massimale della soluzione, mostrando come le curve temporali chiuse siano una sua conseguenza matematica diretta. Nel capitolo 3 si entra nel vivo degli aspetti fisici del buco nero, descrivendo l'ergosfera, e studiando lo spaziotempo di Kerr tramite un diagramma di Penrose-Carter. Si descrive poi il processo di Penrose e, in modo qualitativo, la radiazione di Hawking. Si discutono infine le curve temporali chiuse, sia in termini generali che nel caso specifico del buco nero di Kerr, concludendo con un breve commento sulle loro potenziali implicazioni sulla causalità.

Capitolo 2

La soluzione di Kerr

Le equazioni di campo di Einstein si possono scrivere nella forma

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (2.1)$$

avendo posto a zero la costante cosmologica, dove G è la costante di gravitazione universale per compatibilità con il limite newtoniano. D'ora in avanti useremo il sistema di unità di misura con $G = c = 1$. g_{ab} è la metrica dello spaziotempo. Il lato sinistro di (2.1) contiene essenzialmente combinazioni non lineari della metrica e le sue derivate prime e seconde. Si può vedere che (2.1) consiste di 6 equazioni indipendenti, utilizzando allo scopo la derivata covariante, che è la forma più generale di derivata per tensori su varietà differenziabili. Si definisce tramite i simboli di Christoffel $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ak}(\partial_c g_{kb} + \partial_b g_{kc} - \partial_k g_{ab})$, che fanno sì che trasformi come un tensore. Per un generico tensore $T_{ef\dots g}^{ab\dots c}$, indichiamo la componente j della derivata covariante con $_{;j}$. Quindi, si ha

$$T_{ef\dots g;j}^{ab\dots c} = \partial T_{ef\dots g}^{ab\dots c} / \partial x^j + \Gamma_{jk}^a T_{ef\dots g}^{kb\dots c} + \dots - \Gamma_{je}^k T_{kf\dots g}^{ab\dots c} - \dots, \quad (2.2)$$

dove i "..." stanno ad indicare che bisogna sommare i simboli di Christoffel di ogni indice alto e sottrarre quelli di ogni indice basso. R_{ab} è il tensore di Ricci, che si ottiene contraendo il tensore di Riemann R_{bcd}^a nel modo seguente: $R_{ab}^j = R_{ab}^j$. Il tensore di Riemann misura la non integrabilità del trasporto parallelo, che è legata alla curvatura della varietà. Contiene derivate prime e seconde della metrica, e si dimostra che il trasporto parallelo è integrabile se e solo se $R_{bcd}^a = 0$. R è lo scalare di Ricci, $R = g^{ab}R_{ab}$. Infine, T_{ab} è il tensore energia-impulso, che descrive il flusso e la densità di energia e quantità di moto nello spaziotempo. Utilizzando (2.2) per calcolare la divergenza covariante $(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab})_{;b}$ si ottiene

$$(R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab})_{;b} = \frac{\partial R^{ab}}{\partial x^b} + \Gamma_{bj}^a R^{jb} + \Gamma_{bj}^b R^{aj} - \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^b} g^{ab}, \quad (2.3)$$

che è uguale a zero. Ne segue che il tensore energia-impulso deve avere divergenza covariante nulla, condizione necessaria per soddisfare le leggi di conservazione di energia e quantità di moto. Da questo fatto e dalla simmetria di entrambi i lati di (2.1), si

conclude che le equazioni indipendenti sono soltanto 6. Questo è il numero di equazioni necessario a descrivere univocamente lo spaziotempo, infatti a quattro delle 10 componenti della metrica si può assegnare un valore arbitrario usando i gradi di libertà delle trasformazioni di coordinate. Formalmente qualsiasi metrica soddisfa le equazioni di campo, infatti una volta specificata si può definire T_{ab} come il lato destro dell'equazione (2.1). Tuttavia un tensore energia impulso così definito non ha in generale proprietà fisicamente sensate. Quando parliamo di soluzioni esatte quindi intendiamo soluzioni dove T_{ab} sia specificato a priori[1]. Vi sono quattro famiglie di soluzioni esatte note che descrivono un buco nero, definito come una regione di spaziotempo in cui il campo gravitazionale è così forte da formare un orizzonte degli eventi, ovvero una superficie da cui nulla può uscire dopo averla attraversata. Quella di Kerr è la famiglia di soluzioni esatte in grado di descrivere il campo gravitazionale assialsimmetrico e asintoticamente piatto generato da un buco nero rotante e privo di carica[2]. Essa sembra essere l'unica soluzione possibile per un buco nero reale. Si noti che lo spaziotempo al di fuori di un corpo rotante, ad esempio una stella, non è in generale quello di Kerr. Questo perché i teoremi di unicità sui buchi neri rotanti, che si possono riassumere con il fatto che ogni soluzione con un buco nero stazionaria e asintoticamente piatta è definita completamente dalla soluzione di Kerr, fanno uso esplicito dell'orizzonte degli eventi. Siccome una stella prima del collasso non ha un orizzonte degli eventi, nessun teorema la costringe a rispettare la metrica di Kerr. Ciò che si può dire è che probabilmente lontano dall'oggetto, quando i contributi di multipolo più alti diventano trascurabili, la geometria dello spaziotempo è approssimabile a quella di Kerr[3]. La metrica di Kerr si scrive nella sua forma più semplice (che non è quella scoperta originariamente da Kerr) tramite le coordinate di Boyer-Lindquist, che riducono il numero di componenti fuori diagonale ad uno:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.4)$$

dove

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

e $a = J/M$ è il parametro di spin. Si dimostra che la varietà descritta ha $R_{ab} = 0$, quindi soddisfa le equazioni di campo nel vuoto. Si noti che, reinserendo esplicitamente in (2.4) le costanti G e c , M e t verrebbero rimpiazzati rispettivamente da $\frac{GM}{c^2}$ e ct , che sono lunghezze, cosicché ds^2 avrebbe le dimensioni corrette. Da (2.4) si deducono i seguenti fatti:

- Un buco nero di Kerr è interamente definito da due parametri: la massa M e il

momento angolare J .

- La metrica è invariante per inversione simultanea di t e ϕ , ma non per inversione di t da solo, il perché è ovvio se si pensa ad un oggetto rotante. La simmetria assiale corrisponde all'indipendenza della metrica da ϕ .
- Considerando la componente g_{tt} di (2.4), si vede che per $r \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ c'è una singolarità. Calcolando lo scalare di Kretschmann $R_{abcd}R^{abcd}$ si ottiene

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (2.5)$$

che diverge per quei valori delle coordinate. Quindi la singolarità è fisica, cioè non è dovuta al particolare sistema di coordinate utilizzato.

- Se $a \rightarrow 0$ si ha $J \rightarrow 0$ e la metrica si riduce, come ci si aspetterebbe, a quella di Schwarzschild. Per $r \rightarrow +\infty$ la metrica tende a quella di Minkowski. Questo è ciò che si intende quando si dice che lo spaziotempo di Kerr è asintoticamente piatto. Per $M \rightarrow 0$ si ha

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + r^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

e ridefinendo le coordinate

$$\begin{cases} x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi \\ y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

si ottiene $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ tramite calcolo diretto.

- Fissando tempo e raggio, per $a \neq 0$, la metrica diventa

$$ds^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

quella di un ellissoide[2]. Si trova dunque che le superfici con r costante sono ellissoidi e non sfere come si potrebbe a prima vista pensare. Non si tratta comunque di ellissoidi nel senso euclideo, ad esempio si trova che per r abbastanza piccoli le superfici $r = \text{cost.}$ hanno curvatura gaussiana negativa ai poli, che è impossibile per una superficie di rivoluzione in uno spazio euclideo[4].

Torniamo adesso alla (2.4). Oltre alla singolarità già vista ce ne sono altre due, per $1 - 2M/r + a^2/r^2 = 0$, cioè $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$. A differenza del caso precedente, lo scalare di Kretschmann rimane finito per questi due valori di r , così come ogni altro invariante di curvatura. Dunque non si tratta di singolarità fisiche ma di coordinate. Per $a \rightarrow 0$ si ha $r_+ = 2M$, la coordinata dell'orizzonte nel buco nero di Schwarzschild. Questo è un primo indizio del fatto che i raggi r_+ e r_- identifichino gli orizzonti esterno e interno del buco nero di Kerr. La prova rigorosa si ottiene partendo dalla considerazione che la quadriaccelerazione di un osservatore che tenta di opporsi alla gravità del buco nero debba divergere nella regione delimitata da un orizzonte degli eventi, e mostrando che essa diverge proprio per $r = r_{\pm}$.

Si può dimostrare che la singolarità fisica è un anello. Se $a^2 > M^2$ si ha $\Delta > 0$ e (2.4) ha solo la singolarità fisica. Ora passiamo in coordinate di Kerr-Schild $(x, y, z, \bar{t})$:

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta \exp i \int (d\phi + a\Delta^{-1}dr), \quad (2.6)$$

$$z = r \cos \theta, \quad (2.7)$$

$$\bar{t} = \int (dt + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr) - r. \quad (2.8)$$

Rispetto a queste nuove coordinate, la singolarità fisica descritta in precedenza ha equazione $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ [1]. Ciò ha senso, perché nel buco nero di Schwarzschild, che ha simmetria sferica, la singolarità è un punto, mentre in questo caso è richiesta simmetria rotazionale, e l'anello è l'oggetto più semplice con tale proprietà. Per vederlo esplicitamente, consideriamo la (2.6). Abbiamo:

$$|x + iy|^2 = x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta,$$

cioè $x^2 + y^2 = a^2$ per $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$. La singolarità ad anello ha raggio a , che quindi cresce con il momento angolare J . Inoltre si trova che è repulsiva, nel senso che le particelle in caduta libera nel buco nero non la toccano, a meno che non si muovano sul piano equatoriale. Inoltre, l'anello non rappresenta solo una zona di curvatura infinita, bensì anche una discontinuità dello spaziotempo. Infatti, un osservatore vicino al centro del buco nero che volesse muoversi da sopra a sotto il piano equatoriale avrebbe due opzioni: aggirare la singolarità passando fuori dall'anello o attraversarlo. Si trova che attraversandolo raggiungerebbe una regione di spaziotempo diversa da quella che raggiungerebbe semplicemente aggirandolo. In questa regione, nota come

spazio negativo, la coordinata r cambia di segno[4]. Matematicamente, incollando questa nuova regione a quella di partenza si ottiene l'estensione analitica massimale della soluzione. Per farlo, si incolla un altro piano (x', y', z') a quello già presente, identificando il generico punto (x, y, z) al di sopra del disco $x^2 + y^2 < a^2$, $z = 0$ con il punto (x', y', z') con le prime due coordinate invariate e la terza cambiata di segno. Lo stesso si fa con i punti al di sotto del disco. (2.4) si estende in modo ovvio allo spazio (x', y', z') . Lo spazio negativo è infinito, e per $r \rightarrow -\infty$ diventa piatto, ma con massa $-M$, dunque negativa[1]. Non c'è nulla di strano nello spazio negativo profondo di per sé. La cosa particolare è il comportamento del buco nero per valori di r poco negativi. Un primo motivo è che in queste zone il buco nero è repulsivo, e non esiste alcuna orbita con r negativo attorno ad esso. In più, nello spazio negativo non esistono orizzonti, ma solamente una singolarità nuda. Inoltre, si nota il fatto seguente: per valori di r poco negativi il vettore $\partial/\partial\phi$ è di tipo tempo, quindi le world-line $(t, r, \theta) = cost.$ sono curve temporali chiuse (CTC)[4]. Per vederlo, si consideri una curva chiusa con $r, t = cost.$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Da (2.4), una curva di questo tipo è descritta dalla metrica

$$ds^2 = \left(-\frac{a^2\Delta}{r^2} + \frac{(r^2 + a^2)^2}{r^2} \right) d\phi^2 = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) d\phi^2.$$

Per $r < 0$ abbastanza piccolo (in valore assoluto), il termine tra parentesi è negativo; di conseguenza ϕ è una direzione di tipo tempo vicino alla singolarità. Ma siccome è una coordinata periodica, ϕ e $\phi + 2\pi$ sono identificati, quindi se un osservatore si muovesse nello spaziotempo lungo la curva, alla fine tornerebbe al punto di spaziotempo da cui era partito[3]. Questo meccanismo è noto come macchina del tempo di Carter: c'è una regione a forma di toro, con la singolarità come equatore interno, nella quale una particella può viaggiare indietro nel tempo[4]. Delle implicazioni fisiche di questo fatto discuteremo in seguito. Per $a^2 < M^2$ l'estensione risulta più complicata, in quanto vi sono altre due singolarità, e non la discuteremo in questa tesi.

Concludiamo questo capitolo precisando il significato delle coordinate (t, r, θ, ϕ) . Come abbiamo già notato, r non è una coordinata radiale nel senso usuale di uno spazio euclideo. La ragione è che è impossibile dare una nozione di distanza di quel tipo all'interno di un buco nero di Kerr. Nel caso di Schwarzschild è possibile, poiché grazie alla simmetria sferica la nozione di sfera euclidea è ben definita, quindi ad ogni sfera centrata sulla singolarità è associato il suo raggio che è pari alla radice del rapporto $\frac{S}{4\pi}$ dove S è la superficie. Nel caso in questione invece l'assenza di simmetria sferica rende difficoltosa la definizione di sfera, e in ogni caso sarebbe impossibile impedire a tali oggetti di ruotare e deformarsi a distanze troppo piccole dal buco nero, per una ragione che vedremo in seguito. La coordinata r , quindi, non può essere esattamente la distanza dal centro (ad esempio sul piano equatoriale per $r = 0$ si trova la singolarità ad anello), ma comunque può essere approssimata a tale distanza, soprattutto in zone molto distanti dal buco nero. In genere quindi quando si parla di distanza di un punto

dal buco nero si intende proprio il valore di r in quel punto. Una prova dell'importanza della coordinata r è, ad esempio, il fatto che gli orizzonti sono superfici con $r = \text{cost.}$, oppure che le superfici con $r = \text{cost.}$ al di fuori dell'orizzonte esterno sono ricoperte da orbite attorno al buco nero. La coordinata θ è una colatitudine, misurando dall'alto verso il basso l'angolo tra l'asse di simmetria e la retta passante per il centro del buco nero e il punto considerato. Anche qui però valgono gli argomenti esposti per r . Approssimativamente si può vedere θ come la colatitudine di un sistema di coordinate sferoidali. Le coordinate t e ϕ presentano anch'esse i loro problemi. Dovrebbero rappresentare rispettivamente il tempo e la longitudine misurati da un osservatore distante. Ora, mentre la direzione lungo cui queste due coordinate scorrono è chiara (segue il flusso dei campi di Killing), non è univoca la scelta sul modo di sincronizzare i loro valori con quelli di r e ϕ . È questo il punto sul quale differiscono le coordinate di Boyer-Lindquist da altri sistemi di coordinate. Le coordinate di Boyer-Lindquist li sincronizzano imponendo la condizione che le superfici con $t, \phi = \text{cost.}$ siano ortogonali alle superfici con $r, \theta = \text{cost.}$ Le coordinate di Boyer-Lindquist sono il modo più semplice di esprimere la metrica ma sono mal definite all'orizzonte, perché un osservatore distante non vede mai nulla attraversare l'orizzonte a causa del redshift gravitazionale. Infatti i fotoni emessi ad $r = r_+$ impiegano un tempo infinito a sfuggire alla cattura gravitazionale del buco nero per raggiungere l'osservatore, come sarà evidente nel diagramma di Penrose descritto nel prossimo capitolo. Matematicamente, il problema è la divergenza di g_{tt} , che rende impossibile l'inversione della metrica. Senza la metrica inversa, non si possono definire i simboli di Christoffel, che a loro volta determinano le equazioni del moto. In pratica, la geometria del sistema di coordinate si rompe entro l'orizzonte[4].

Capitolo 3

Fisica e paradossi della soluzione di Kerr

Nei buchi neri rotanti emerge un concetto nuovo rispetto al caso statico: la presenza dell'ergosfera. Supponiamo che un osservatore vicino al buco nero si muova in senso opposto alla sua rotazione, cercando di restare fermo rispetto alle stelle lontane, cioè provi a seguire la world-line $X(t) = (r(t), \theta(t), \phi(t), t) = (r_0, \theta_0, \phi_0, t)$. La quadrivelocità dell'osservatore è

$$T^a = \frac{dX^a(t)}{dt} = (0, 0, 0, 1). \quad (3.1)$$

Una condizione necessaria affinché un osservatore sia fisico è che la sua traiettoria sia timelike, cioè la norma della sua quadrivelocità sia negativa:

$$g(T, T) < 0. \quad (3.2)$$

Questo equivale a imporre che la sua velocità sia sempre $< c$. Da (3.1) otteniamo

$$g(T, T) = g_{ab}T^aT^b = g_{tt}, \quad (3.3)$$

cioè in coordinate di Boyer-Lindquist

$$g(T, T) = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right). \quad (3.4)$$

Si vede subito che $g(T, T) \geq 0$ quando $r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2Mr \leq 0$. Risolvendo la disequazione, troviamo che

$$r_E^\pm(M, a, \theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.5)$$

sono i due valori di r tali che $g(T, T) \geq 0$ se e solo se $r_E^-(M, a, \theta) \leq r \leq r_E^+(M, a, \theta)$. Quindi un osservatore fisico non può mantenersi statico rispetto alle stelle lontane per valori di r compresi in questo intervallo, perché dovrebbe avere una traiettoria non-timelike, cioè dovrebbe muoversi a velocità $\geq c$. Le superfici identificate da questi due

raggi sono chiamate superfici di limite statico. Ricordando che per gli orizzonti degli eventi vale

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (3.6)$$

troviamo

$$2M \geq r_E^+ \geq r_+ \geq M \geq r_- \geq r_E^- \geq 0[5]. \quad (3.7)$$

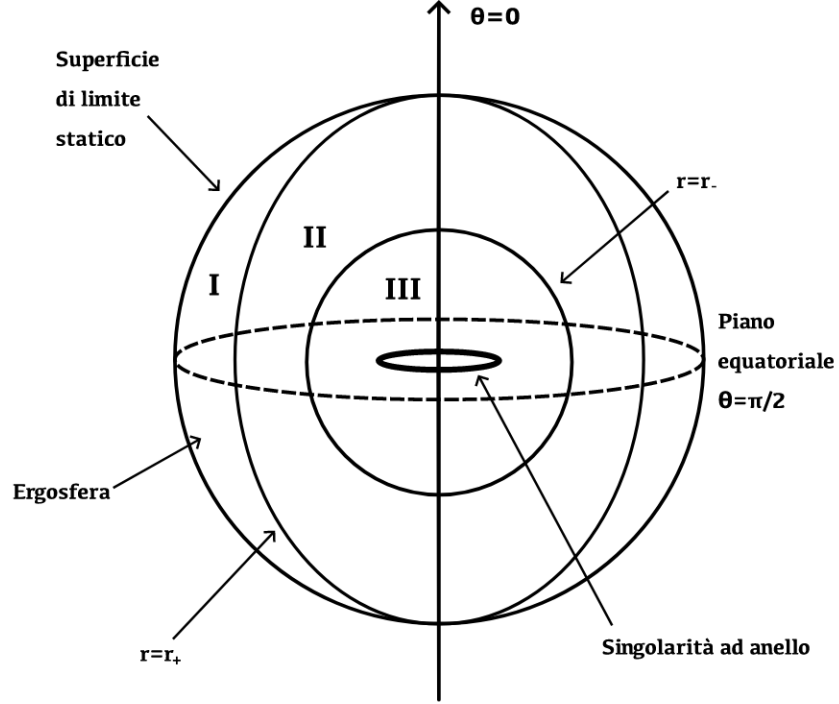


Figura 3.1: La sezione spaziale di un buco nero di Kerr si suddivide in: regione I, al di fuori dell'orizzonte esterno, uguale allo spazio euclideo per $r \rightarrow +\infty$; regione II, compresa tra l'orizzonte esterno e quello interno; regione III, dentro l'orizzonte interno[1]. Per semplificare il disegno, si è omessa la superficie di limite statico interna.

La regione compresa tra r_E^+ e r_+ è detta ergosfera. In questa regione, un osservatore massivo può ancora fuggire dal buco nero, ma non può evitare di essere trascinato dalla sua rotazione. Il trascinamento è una conseguenza dell'effetto Lense-Thirring, che consiste in un twist dello spaziotempo da parte degli oggetti massivi rotanti. I corpi in avvicinamento ad una massa in rotazione subiscono una forza che tende a muoverli nel verso di rotazione. Un giroscopio in questa situazione inizierà a precessere. Siccome il metodo standard per fissare una direzione nello spazio è tramite un giroscopio, si conclude che l'effetto di precessione è causato da una variazione della geometria spazio-temporale. Un osservatore potrebbe essere non rotante in base alle sue misurazioni, ma vedere comunque le stelle fisse ruotare alla velocità di precessione del giroscopio. Oltre il limite statico dunque l'effetto Lense-Thirring diventa talmente intenso che solamente per restare fermi rispetto ad un osservatore distante sarebbe necessario muoversi all'interno dello spazio a velocità superiori a c [4]. Si noti poi che

$r_E^+ = r_+$ e $r_E^- = r_-$ quando $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. La superficie di limite statico interna è tangente all'orizzonte interno sull'asse di rotazione ma poi se ne allontana arrivando a intersecare la singolarità per $\theta = \pi/2$. Si noti che al rallentare della rotazione ($a \rightarrow 0$), l'orizzonte e la superficie di limite statico si avvicinano fino a coincidere, e l'ergosfera sparisce. Si deve tenere a mente che, mentre è ragionevole credere che l'ergosfera e l'orizzonte esterno esistano in un buco nero reale, lo stesso non si può dire per le due superfici interne, ovvero l'orizzonte interno e la superficie di limite statico interna. Nonostante rimangano valide dal punto di vista matematico, ci sono buone ragioni fisiche per sospettare che superfici di questo tipo risulterebbero instabili in un contesto reale, tanto da non potersi formare. Per questo motivo, dal punto di vista astrofisico è ragionevole trascurare l'intera regione $r \leq r_-$ [4].

Vogliamo ora introdurre un modo particolarmente conveniente di studiare la struttura degli spaziotempi curvi. Esso consiste nella costruzione di diagrammi, noti come diagrammi di Penrose-Carter, che permettono di rappresentare l'intero spaziotempo tramite un'immagine finita, che ne rispetti la struttura causale. Per costruire i diagrammi di Penrose-Carter si utilizzano trasformazioni conformi, cioè trasformazioni che preservano gli angoli, perché gli angoli e quindi i coni luce determinano la struttura causale nell'intorno di ciascun punto. Per cominciare, concentriamoci sullo spaziotempo di Minkowski. La trasformazione che utilizziamo è la seguente:

$$t + r = \tan \frac{1}{2}(\psi + \xi), \quad (3.8)$$

$$t - r = \tan \frac{1}{2}(\psi - \xi), \quad (3.9)$$

$$-\pi \leq \psi - \xi \leq \psi + \xi \leq \pi. \quad (3.10)$$

Questa trasformazione porta i punti posti all'infinito spaziale ad una distanza finita. La metrica trasforma così:

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2, \quad (3.11)$$

$$\Omega = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\psi + \xi)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\psi - \xi)\right), \quad (3.12)$$

$$d\tilde{s}^2 = -d\psi^2 + d\xi^2 + \sin^2 \xi d\omega^2, \quad (3.13)$$

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.14)$$

I punti all'infinito nello spaziotempo di Minkowski corrispondono a $\psi + \xi = \pm\pi$, $\psi - \xi = \pm\pi$. Per questi valori la metrica ds^2 diverge, ma la metrica $d\tilde{s}^2$ conforme ad essa è regolare. $d\tilde{s}^2$ è la metrica del cilindro quadridimensionale $S^3 \times R^1$, e le disuguaglianze (3.10) delimitano la porzione corrispondente allo spaziotempo di Minkowski. Questa viene poi riportata in forma piana nel diagramma conforme di Penrose-Carter. I diagrammi di Penrose-Carter servono a rappresentare in forma compatta interi spa-

ziotempi $(\mathcal{M}, g)$, sopprimendo due delle quattro coordinate e riportando nel finito i punti all'infinito. Il tempo scorre sempre in verticale, lo spazio in orizzontale, con i raggi di luce rappresentati da linee a 45° . Un evento arbitrario E, rappresentato da un punto, può ricevere segnali da ogni punto-evento all'interno del suo cono luce passato, cioè entro le due linee che si intersecano in E formando angoli di 45° con la verticale, e può influenzare tutti i punti-eventi nel suo cono luce futuro.

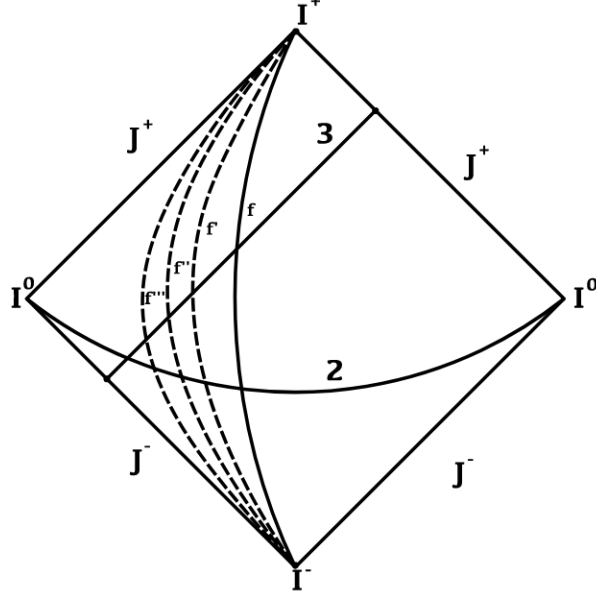


Figura 3.2: Diagramma di Penrose-Carter dello spaziotempo di Minkowski[5].

Notiamo che ogni world-line di tipo spazio deve passare per I^0 , da cui deduciamo che quel punto rappresenta l'infinito di tipo spazio, cioè il punto in cui convergono tutte le world-line di tipo spazio. Ogni world-line di tipo tempo deve passare per i punti I^-, I^+ , per cui i due punti sono rispettivamente l'infinito passato e futuro di tipo tempo. Infine, ogni world-line di tipo luce parte da J^- e finisce in J^+ , quindi J^-, J^+ sono rispettivamente l'infinito passato e futuro di tipo luce. Le curve f, f', f'', f''' sono le world-line di osservatori a distanza r da un generico punto. Come ci si aspetterebbe, al crescere di r la world-line dell'osservatore tende a coincidere con $J^- \cup J^+$. Questi due insiemi sono quindi i bordi infinitamente distanti dello spaziotempo di Minkowski. Si noti che i diagrammi di Penrose-Carter, essendo bidimensionali, rappresentano sezioni dello spaziotempo, che come sappiamo è quadridimensionale[5].

Per discutere il diagramma di Penrose-Carter della metrica di Kerr abbiamo bisogno di un'altra nozione: il buco bianco. Nella descrizione matematica del buco nero di Kerr, la stessa regione di spazio che contiene il buco nero contiene anche, ad un tempo diverso, un buco bianco, un oggetto in un certo senso opposto al primo. Infatti, un buco bianco è una regione di spaziotempo dalla quale viene espulso ciò che sta all'interno e nella quale niente può entrare. La ragione di introdurre questo concetto è la seguente: le leggi della fisica sono simmetriche rispetto a inversioni temporali. Di conseguenza, se ha fisicamente senso che un oggetto attraversi l'orizzonte e non riesca più a uscirne, deve essere possibile anche il processo opposto, che qualcosa esca e non possa più rientrarvi.

Il diagramma di Penrose-Carter della metrica di Kerr ha il seguente aspetto:

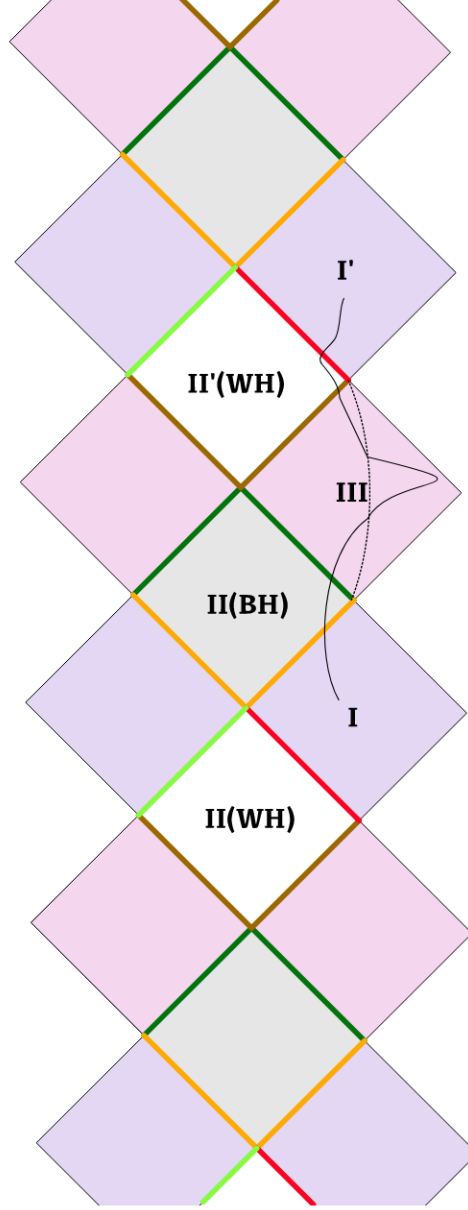


Figura 3.3: Diagramma di Penrose-Carter dello spaziotempo di Kerr[4].

Supponiamo di trovarci nella regione I. Abbiamo quindi parte della regione II (WH) (cioè la regione tra i due orizzonti di un buco bianco) nel cono luce passato, e possiamo scegliere di allontanarci verso l'infinito o attraversare l'orizzonte (linea arancione), entrando in II (BH). Il bordo destro del nostro cono luce futuro coincide con l'orizzonte nell'istante in cui lo attraversiamo. Di conseguenza, da quel momento in poi il nostro futuro è inevitabilmente quello di cadere nella regione II(BH). Un fotone la cui world-line coincidesse con la linea gialla nel diagramma rimarrebbe sull'orizzonte per un tempo infinito dal punto di vista di un osservatore in I. È dunque evidente l'effetto del redshift gravitazionale infinito, come accennato nel capitolo precedente. Dalla regione II, siamo costretti a finire in III, attraversando l'orizzonte interno (linea verde

scuro). Questa regione, la più interna, contiene la singolarità ad anello (linea curva tratteggiata). Il punto di intersezione tra II (WH) e II (BH) è il punto in cui nasce il buco nero. Una volta nella regione III, possiamo decidere di spostarci da sopra a sotto il piano equatoriale passando all'interno dell'anello, entrando così nello spazio negativo. A questo punto ci troviamo davanti ad una singolarità nuda, e possiamo esplorare lo spazio negativo profondo. Alternativamente, possiamo seguire il percorso precedente a ritroso per tornare nella parte positiva della regione III. Nel disegno è tracciata una world-line corrispondente a questa possibilità. La world-line si inclina oltre i 45° all'interno dello spazio negativo, perchè la coordinata ϕ diventa temporale, quindi non è più vero che il tempo scorre in verticale e lo spazio in orizzontale. Questo ovviamente non significa che il limite di c venga superato. Una volta usciti dallo spazio negativo, l'orizzonte interno del buco nero è nel nostro cono luce passato, quindi è fisicamente impossibile attraversarlo; l'unica possibilità (oltre ovviamente a rientrare nello spazio negativo) è muoversi verso il futuro, attraversando l'orizzonte interno del buco bianco (linea marrone), venendo di fatto spinti verso l'esterno da una forza repulsiva. Ci troviamo a questo punto in II', e possiamo attraversare l'orizzonte esterno del buco bianco (linea rossa) per entrare in I', che è un nuovo universo rispetto a quello da cui siamo partiti. Abbiamo quindi usato con successo il buco nero per spostarci in un nuovo universo. Un oggetto di questo tipo, che permetterebbe di spostarsi da un universo ad un altro, è detto wormhole. Dal nostro punto di vista, completare il viaggio da I a I' implica aggirare il vertice superiore di I, cioè il suo infinito futuro, sbucando in un nuovo universo, anch'esso eterno. In questo senso attraversare il wormhole significa percorrere l'infinito temporale. Precisiamo che la relatività generale non risponde affatto alla domanda se la regione I' sia un nuovo universo, perché non si occupa della topologia globale dello spaziotempo, aspetto che occorre conoscere per avere una risposta rigorosa. Le equazioni di campo, infatti, danno solo informazioni locali su come la distribuzione di energia e materia curva lo spaziotempo, mentre non impongono restrizioni che permettano di determinare univocamente la sua topologia globale. In altre parole, due spaziotempi con struttura globale diversa potrebbero soddisfare le stesse equazioni di campo. Bisogna anche tenere a mente che la metrica di Kerr è solo un modello matematico di uno spaziotempo vuoto, e domandarsi se due spazi matematici vuoti siano o meno lo stesso spazio non ha senso. La domanda avrebbe senso solo se avessimo la certezza che una struttura come quella della Figura 3.3 esiste realmente.

Immaginiamo ora di trovarci nella regione I e di attraversare l'orizzonte. Un osservatore all'esterno ci vedrebbe varcare l'orizzonte del buco nero in un tempo infinito. Questo perché al decrescere della distanza dall'orizzonte i fotoni impiegherebbero sempre più tempo a raggiungere i suoi occhi, e gli ultimi fotoni emessi prima di varcarlo lo farebbero solo all'infinito temporale. In questo caso si dice che la luce è redshiftata all'infinito.

Si può notare che ogni regione I e III ha una sua copia speculare nel diagramma. Ciò non dipende dalla particolare rappresentazione scelta, bensì è un fatto reale. Infatti, un osservatore che si trovi in I e che si muova in II (BH) può ricevere informazione dall'altra regione I, senza però potervi accedere, ma può eventualmente incontrarsi con un secondo osservatore che si trovava in essa ed è poi entrato nel buco nero. Se poi

i due prendessero strade diverse muovendosi uno nella regione III di sinistra e l'altro nella sua copia a destra, non sarebbero più in grado di interagire. Tuttavia non sarebbero separati per sempre, infatti spostandosi in II' (WH) si potrebbero nuovamente incontrare[4].

Osservando il diagramma, ci rendiamo conto del seguente fatto: l'estensione massimale della soluzione di Kerr (che, ricordiamo, è un'idealizzazione matematica della realtà) descrive una sequenza infinita di buchi neri e buchi bianchi. Si osservi che il concetto di buco bianco non va confuso con quello dello spazio negativo repulsivo all'interno della singolarità del buco nero; i due concetti sono completamente distinti[4]. Precisiamo infine che probabilmente i buchi bianchi non sono oggetti fisicamente possibili. I motivi sono principalmente due: il primo è che le soluzioni delle equazioni di campo che descrivono buchi neri e buchi bianchi rappresentano oggetti eterni, sempre esistenti nel passato e nel futuro. Siccome l'universo ha molto probabilmente un'età finita, la parte della soluzione diretta all'infinito passato (quella associata al buco bianco) non può esistere. Quando si trattano questi oggetti, la parte fisica relativa al buco bianco si esclude completamente, mentre si ammette senza problemi che in un certo istante un buco nero si formi a seguito del collasso di una stella. Si può ipotizzare che un buco bianco possa in realtà nascere entro un tempo finito prima del buco nero, allo stesso modo in cui un buco nero può morire entro un tempo finito dalla sua formazione. Questo rimuoverebbe il problema dell'età finita dell'universo. Il problema è che, per introdurre il concetto di buco bianco, si parte dalla considerazione che le leggi fisiche sono reversibili rispetto al tempo. Tuttavia, nei processi macroscopici, notoriamente entra in gioco la statistica, e questi processi seguono una direzione ben precisa al crescere del tempo. Ciò che è teoricamente permesso dalle leggi fondamentali della fisica diventa (quasi) impossibile per ragioni statistiche. La formazione di un buco bianco, quindi, sebbene teoricamente possibile, risulterebbe tanto improbabile da non verificarsi mai nell'intera storia dell'universo. A queste considerazioni si aggiunge il fatto che non si conosce alcun processo fisico che possa portare alla formazione di un buco bianco, mentre per la sua controparte i processi di formazione sono ben noti e accettati.

I buchi neri rotanti hanno un altro aspetto fisico degno di nota: la possibilità di estrarne energia, tramite un meccanismo detto processo di Penrose. Il processo si basa sul fatto che il campo di Killing ξ_t diventa spacelike dentro l'ergosfera. I campi di Killing sono per definizione i campi vettoriali ξ tali che il loro flusso preserva la metrica. Ad ogni simmetria della metrica quindi è associato un campo di Killing. Nella metrica di Kerr, che ha due simmetrie, quella per traslazioni temporali e quella rotazionale, si hanno quindi due campi di Killing indipendenti ξ_t, ξ_ϕ . Immaginiamo una particella massiva di quadrimomento p_a ed energia E . Il quadrimomento di oggetti dotati di massa è sempre timelike e future-directed, quindi normalmente $E = -p_a \xi^a > 0$, ma nell'ergosfera si può avere $E < 0$. La particella entra nell'ergosfera seguendo una geodetica, poi decade in due particelle. Siccome la particella di partenza segue una geodetica, vale la conservazione di energia e impulso, cioè valgono le condizioni

$$E = E_1 + E_2 \quad (3.15)$$

$$P = P_1 + P_2. \quad (3.16)$$

Tuttavia, come spiegato, nell'ergosfera si può avere $E < 0$, quindi è possibile organizzare il sistema in modo da avere $E_1 < 0$, ma allora $E_2 > E > 0$. Ora ciascuna delle due particelle segue una geodetica, e mentre la prima particella ($E_1 < 0$) è costretta a cadere verso il centro del buco nero, la seconda può ancora uscire dall'ergosfera, con energia superiore a quella che aveva la particella di partenza. In questo modo, abbiamo estratto energia dal buco nero. Estrarre energia dal buco nero significa quindi ridurre la massa. Ci si potrebbe chiedere se estraendo energia a sufficienza si possa far violare al buco nero la condizione $M \geq |a|$, che causerebbe la presenza di una singolarità nuda, che come detto non è permessa fisicamente. Si può dimostrare che questo non può accadere, in quanto ogni riduzione della massa è accompagnata da una riduzione maggiore del momento angolare. Consideriamo infatti la combinazione di campi di Killing

$$\xi = \xi_t + \Omega \xi_\phi = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (3.17)$$

anch'essa un campo di Killing per $\Omega = \text{cost.}$ C'è una particolare scelta di Ω che rende ξ spacelike ovunque all'orizzonte. La contrazione di ξ è

$$\xi^2 = \xi_a \xi^a = g_{tt} + \Omega^2 g_{\phi\phi} + 2\Omega g_{t\phi}, \quad (3.18)$$

di conseguenza $\xi^2 = 0$ per

$$\Omega = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{\phi\phi}g_{tt}}}{g_{\phi\phi}}. \quad (3.19)$$

Ora, ricordando che all'orizzonte $r = r_+$ si ha $\Delta = 0$, dall'uguaglianza generale per la metrica di Kerr $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = \Delta \sin^2\theta$ ricaviamo $g_{t\phi}^2 = g_{tt}g_{\phi\phi}$, cioè

$$\Omega = \frac{-g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (3.20)$$

Con questa scelta di Ω , ξ genera solo geodetiche nulle sull'orizzonte. Il frame-dragging comporta il trascinamento delle geodetiche nel moto rotatorio lungo la coordinata ϕ , quindi Ω si interpreta come la velocità di rotazione del buco nero. Ora, ricordando che la contrazione di due quadrivettori timelike e future-pointing è sempre negativa, si può scrivere

$$\xi_a p^a = -E + \Omega j < 0, \quad (3.21)$$

con $j = L_a p^a$ il momento angolare della particella. Applicando questa relazione alla particella 1, quella con energia negativa, troviamo

$$E_1 > \Omega j_1, \quad (3.22)$$

dove si vede che il momento angolare della particella che cade dev'essere sempre più negativo di E_1 . Quindi allo stesso modo il momento angolare della particella che esce dev'essere più grande della sua energia, da cui si conclude che tramite questo processo si sottrae sempre più momento angolare che energia al buco nero. Il fatto che grazie a questa condizione non sia possibile far violare al buco nero la relazione $M \geq |a|$ si vede considerando la seguente quantità:

$$A = 8\pi GM \left[GM + \sqrt{G^2 M^2 - a^2} \right]. \quad (3.23)$$

Se il buco nero perde sia massa δM che momento angolare δJ , la quantità A varia come

$$\frac{\delta A}{16\pi} = G^2 M \delta M + \frac{G^3 M^3 \delta M - \frac{1}{2} G J \delta J}{\sqrt{G^2 M^4 - J^2}} = \frac{G J}{2\sqrt{G^2 M^4 - J^2}} \left[\frac{\delta M}{\Omega} - \delta J \right]. \quad (3.24)$$

La particella 1, che cade nel buco nero, causa una riduzione di massa $\delta M = E_1$ e una riduzione di momento angolare $\delta J = j_1$, quindi da (3.24) si trova $\delta A > 0$. In altre parole, A deve sempre crescere durante il processo di Penrose, il che ci assicura che non sia possibile trasformare un buco nero sub estemale in un buco nero estemale, cioè un buco nero con $|a| > M$, che consisterebbe in una singolarità nuda[3]. La quantità A che abbiamo definito è l'area dell'orizzonte degli eventi del buco nero:

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{g_{\theta\theta} g_{\phi\phi}} \Big|_{r=r_+} = 4\pi (r_+^2 + a^2) = 8\pi \left[G^2 M^2 + G \sqrt{G^2 M^4 - J^2} \right]. \quad (3.25)$$

La dimostrazione del fatto che A non possa mai decrescere durante il processo di Penrose è quindi un caso particolare di un teorema più generale, dovuto ad Hawking, che afferma che A tende ad aumentare durante qualsiasi processo fisico. Questo perché A è interpretabile come misura dell'entropia S del buco nero, mediante la formula

$$S = \frac{c^3 A}{4G\hbar}. \quad (3.26)$$

In questo contesto, l'aumento generale di A è conseguenza del secondo principio della termodinamica. Il teorema dell'area di Hawking è corretto solo dal punto di vista classico, perché non tiene conto degli effetti quantistici. Il valore di (3.26) può in realtà

decretere nel tempo (anche se in maniera estremamente lenta) a causa di tali effetti, a seguito di una riduzione di A che può portare all'evaporazione del buco nero. Questo perché il buco nero assorbe continuamente energia negativa che ne riduce la massa e quindi la superficie. Il secondo principio della termodinamica non è comunque violato, perché grazie alla radiazione di Hawking l'entropia totale, somma delle entropie del buco nero e dell'ambiente esterno, cresce nel tempo. La radiazione di Hawking è dovuta al fatto che lo spazio apparentemente vuoto attorno al buco nero non è mai davvero vuoto, poiché è occupato dai campi. I campi, per via del principio di indeterminazione di Heisenberg, presentano fluttuazioni quantistiche, ovvero piccole variazioni casuali dei loro valori nel tempo. Tali fluttuazioni si spiegano nel seguente modo: due particelle virtuali si creano spontaneamente in un punto, percorrono un po' di strada e si annichilano in un altro punto. Ora, particelle di questo tipo sono chiamate particelle virtuali, perché non è possibile osservarle direttamente, ma solo misurarne gli effetti. Le due particelle, per la conservazione dell'energia, devono avere valori di energia uguali ed opposti. Siccome dentro il buco nero, come spiegato in precedenza, anche le particelle reali possono avere energia negativa, se la particella virtuale con energia negativa cade nel buco nero può diventare reale. In tal caso non avrebbe più bisogno di annichilarsi con la sua controparte, e potrebbe semplicemente continuare a cadere nel buco nero. La particella con energia positiva, d'altra parte, può sia cadere anch'essa entro l'orizzonte sia fuggire all'infinito, in modo che dal punto di vista dell'osservatore esterno risulti un' emissione di radiazione da parte del buco nero. Ora, il meccanismo così descritto causa un flusso netto di energia negativa all'interno del buco nero, quindi una riduzione della sua massa, area ed entropia. Tuttavia tale riduzione è più che compensata dalla radiazione di energia positiva emessa all'esterno, nota come radiazione di Hawking. In tal modo, il secondo principio della termodinamica è preservato, anche mentre S decresce[6].

Discutiamo infine la questione delle curve temporali chiuse, accennata in precedenza, per la loro comparsa nello spazio negativo del buco nero di Kerr. La possibilità di avere spaziotempi con topologie non banali è uno degli aspetti più interessanti della Relatività Generale. In particolare, comporta che anche la struttura causale di quegli spaziotempi sia non banale. In generale, ogni soluzione delle equazioni di campo contenente un wormhole permette la presenza di curve temporali chiuse. Il wormhole più semplice possibile si costruisce nello spazio euclideo tridimensionale rimuovendo due sfere S_a, S_b dallo spazio e identificando le loro superfici, che costituiscono gli ingressi del wormhole. Un wormhole di questo tipo ha il problema che il tensore energia-impulso diverge nei due ingressi, perché lì la curvatura si inverte bruscamente quindi le derivate seconde della metrica divergono. La questione si risolve collegando i due ingressi con un corridoio, che permetta alla curvatura di invertirsi in modo graduale. I wormhole con questa struttura richiedono però la presenza di massa negativa, che ne impedirebbe il collasso. Infatti si dimostra che in presenza di massa ordinaria la convergenza dei raggi di luce non può mai invertirsi, cosa che accade se attraversano un wormhole. Un wormhole è utilizzabile come macchina del tempo solo se i tempi propri degli ingressi

sono disallineati, ad esempio se partendo da una condizione di allineamento uno dei due compie un viaggio di andata e ritorno a velocità relativistica. Per questo motivo il wormhole che abbiamo descritto nella sezione del diagramma di Penrose non può essere utilizzato così com'è per viaggiare nel tempo. Infatti un osservatore che abbia compiuto un viaggio da I a I' avrà la regione I nel suo infinito passato, cioè non potrà in alcun modo scambiare informazioni con essa. Il buco nero di Kerr ha invece una macchina del tempo naturale all'interno della regione III , dove per valori di r poco negativi ϕ diventa una coordinata periodica di tipo tempo. A causa di questa periodicità, se ci trovassimo nella regione descritta, ad esempio sul piano della singolarità, non potremmo fare a meno di viaggiare indietro nel tempo.

Concludiamo con un breve commento sul comportamento delle leggi della fisica classica in presenza di CTC. Il problema cruciale è quello della causalità. Sembra ovvio pensare che ammettere la possibilità di compiere viaggi nel passato porti a dei paradossi logici, come il famoso paradosso del nonno. Un'idea proposta per uscire da questo problema è quella del principio di autoconsistenza di Novikov, secondo cui le soluzioni permesse delle equazioni fisiche sarebbero solo quelle autoconsistenti, cioè quelle che porterebbero a sequenze di eventi tra loro coerenti. Un esempio di applicazione del principio è nel problema della palla da biliardo. Una palla da biliardo perfettamente elastica si muove in prossimità degli ingressi A e B di un wormhole. La palla entra nell'ingresso B , emerge da A nel passato e continua nel suo moto, fino ad urtare con la sua versione "giovane" che sta per entrare in B . Il sistema è organizzato in modo che l'urto impedisca alla palla "giovane" di entrare in B . Il paradosso è evidente: se la palla entra in B , non può entrare in B ; ma se non entra in B , allora non urta con se stessa e quindi dovrebbe entrarvi. Ciò che genera l'inconsistenza è il non prendere in considerazione fin da subito l'impatto della palla "vecchia" con quella "giovane". Sembra dunque che il problema alla base sia non ammettere che in presenza di una CTC la storia della palla debba necessariamente ripetersi uguale a se stessa. Ponendoci per un momento su un piano filosofico, questo vorrebbe dire accettare l'esistenza di fortissimi limiti al nostro libero arbitrio. In realtà però, la fisica pone già dei limiti al nostro agire, quotidianamente. Quindi, confutare il principio sulla base di questo potrebbe non essere corretto.

Bibliografia

- [1] Stephen W. Hawking, George F. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge University Press (1973)
- [2] Marco Bernagozzi, *A mathematical introduction to Kerr black holes*, Università di Bologna, Tesi di Laurea in Matematica (2014), <https://amslaurea.unibo.it/id/eprint/6898/>
- [3] David Tong, *General Relativity*, <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr/grhtml/S6.html>
- [4] David Madore, *Kerr black holes images and videos*, <http://www.madore.org/david/math/kerr.html>
- [5] Valeri P. Frolov, Igor D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers (1998)
- [6] Stephen W. Hawking, *A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes*, Bantam Books (1988)