

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

**L'effetto del softening nella teoria  
peridinamica: analisi di strategie per la sua  
mitigazione in prossimità del bordo di una  
cricca**

Relatore:

Chia.mo prof. **Mirco Zaccariotto**

Correlatore:

Chia.mo prof. **Ugo Galvanetto**

Candidato:

**Francesco Tripaldi**

Matricola:

**2018736**

---

ANNO ACCADEMICO 2022/2023



# Sommario

La capacità di prevedere l'eventuale insorgenza di cricche nelle strutture, così come gli eventuali percorsi di propagazione di cricche già presenti, è essenziale in diversi campi dell'ingegneria, tra i quali quello aerospaziale. La teoria peridinamica è un valido strumento per la trattazione di questi problemi dato che riesce a trattare in modo naturale anche fenomeni legati a discontinuità; tuttavia presenta una certa difficoltà nella descrizione delle zone poste nelle vicinanze dei bordi del corpo. In corrispondenza dei bordi, infatti, nei modelli peridinamici si osserva una diminuzione della rigidità della struttura (*softening*) fonte di imprecisione durante le analisi. Nel corso degli anni sono state sviluppate diverse tecniche di gestione di questo fenomeno; finora però non è presente in letteratura una specifica strategia di riduzione del fenomeno applicabile in prossimità dei bordi di una cricca e in corrispondenza del suo apice. Il metodo che più si presta alla formulazione di una strategia per la mitigazione degli effetti di bordo anche in prossimità del bordo di una cricca è il metodo dei nodi fittizi, poiché non prevede di modificare in alcun modo le equazioni della peridinamica. L'obiettivo di questo lavoro è la messa a punto di un algoritmo che permetta, per problemi bidimensionali, l'implementazione di tale metodo anche in queste zone. In una prima fase del lavoro sono creati e validati, attraverso una serie di *patch test*, dei modelli ibridi FEM-peridinamici in ambiente MATLAB. Successivamente, è stato implementato su questi ultimi un algoritmo che permetta l'introduzione di un *layer* di nodi fittizi in corrispondenza di una cricca iniziale. Sul modello MATLAB sono state effettuate analisi lineari statiche e analisi non lineari. I risultati, laddove possibile, sono stati confrontati con quanto previsto dal software commerciale MSC Patran-Nastran, a conferma della validità della strategia adottata. L'algoritmo messo a punto permette di mitigare il *surface effect* sia ai bordi che all'apice della cricca, qualunque sia la forma della cricca inizialmente introdotta (se presente) e consente la gestione dei nodi fittizi anche durante la propagazione del danno, a patto che siano sempre ben definite le regioni del corpo al di sopra e al di sotto della cricca. Tale strategia, dunque, rappresenta un valido strumento per lo studio del comportamento di una struttura discretizzata con una griglia poco raffinata, in quanto permette di catturare in maniera ottimale il comportamento della struttura pur con un leggero incremento dei tempi di calcolo richiesti. Viceversa, nel caso di una griglia rifinita, l'implementazione del metodo descritto non apporta sostanziali migliorie ai risultati ottenuti a fronte però di un notevole aumento delle risorse richieste. Sebbene rappresenti un primo studio per questo tipo di problematiche, l'algoritmo sviluppato è migliorabile e rappresenta un punto di partenza per ulteriori studi.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>1 Bond-based peridynamics</b>	<b>17</b>
1.1 Equazioni del moto . . . . .	18
1.1.1 Elasticità . . . . .	19
1.2 Linearizzazione . . . . .	20
1.3 Analogie con la teoria classica . . . . .	21
1.3.1 Densità di forza areale . . . . .	21
1.3.2 Configurazioni <i>unstressed</i> . . . . .	22
1.4 Modello costitutivo . . . . .	24
1.4.1 Coefficiente di Poisson . . . . .	24
1.4.2 <i>Prototype microelastic brittle material</i> . . . . .	25
1.5 Effetti di bordo . . . . .	29
1.5.1 Il <i>volume method</i> . . . . .	30
1.5.2 Il <i>force density method</i> . . . . .	31
1.5.3 L' <i>energy method</i> . . . . .	33
1.5.4 Il <i>variable horizon method</i> . . . . .	35
1.5.5 Il <i>fictitious nodes method</i> . . . . .	35
1.6 Condizioni di vincolo e di carico . . . . .	37
1.7 Obiettivo del lavoro . . . . .	38
<b>2 Implementazione numerica</b>	<b>39</b>
2.1 Discretizzazione . . . . .	39
2.1.1 Il coefficiente di correzione del volume . . . . .	41
2.1.2 Tipologie di convergenza . . . . .	42
2.1.3 Rigidezza equivalente del <i>bond</i> . . . . .	44
2.2 Accoppiamento FEM-PD . . . . .	45
2.3 Descrizione del modello analizzato . . . . .	46
2.3.1 Modello MATLAB . . . . .	46
2.3.2 Modello Patran-Nastran . . . . .	47
2.4 Validazione del modello MATLAB . . . . .	49
2.4.1 Trazione monoassiale . . . . .	50
2.4.2 Taglio . . . . .	52
<b>3 Il metodo dei nodi fittizi</b>	<b>55</b>
3.1 Stato dell'arte . . . . .	55
3.2 Algoritmo di implementazione . . . . .	58

---

3.3	Esempi numerici . . . . .	61
3.3.1	Campo spostamenti . . . . .	62
3.3.2	Stato di tensione . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Crack propagation</b>	<b>77</b>
4.1	Approccio Analisi lineare in sequenza . . . . .	77
4.2	Work-flow dello schema utilizzato . . . . .	78
4.2.1	Creazione dei <i>bond</i> fittizi . . . . .	79
4.2.2	Interazione tra nodi fittizi . . . . .	79
4.3	Risultati . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>91</b>
	<b>Appendice A</b>	<b>93</b>
	<b>Appendice B</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>106</b>

# Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione di un generico corpo (immagine tratta da [2]) . . . . .	17
1.2	Calcolo della densità di forza areale.(Immagine tratta da [1]) . . . . .	22
1.3	Cambio di coordinate. (Immagine tratta da [1]) . . . . .	23
1.4	Andamento nella forza in un <i>bond</i> come funzione di $s$ (immagine tratta da [2]). . . . .	26
1.5	Calcolo di $s_0$ , (immagine tratta da [2]). . . . .	29
1.6	Orizzonti dei punti peridinamici interni al corpo o nelle vicinanze di una superficie, (immagine tratta da [20]). . . . .	29
1.7	Volumi di integrazione $\Omega^+, \Omega^-$ , (immagine tratta da [20]). . . . .	31
1.8	Costruzione dell'ellissoide per i <i>correction factors</i> (immagine tratta da [26]). . . . .	32
1.9	Schema della struttura e condizioni di carico utilizzate in [20] (Immagine tratta da [20]). . . . .	33
1.10	Differenze relative in termini di spostamento tra l' <i>force density method</i> e la soluzione peridinamica classica: <b>a)</b> risultati relativi alla componente $u$ <b>b)</b> risultati relativi alla componente $v$ . Imponendo le condizioni di carico ad un <i>layer</i> di spessore $\delta$ : <b>c)</b> risultati relativi alla componente $u$ <b>d)</b> risultati relativi alla componente $v$ (Immagine tratta da [20]). . . . .	34
1.11	Differenze relative in termini di spostamento tra l' <i>energy method</i> e la soluzione peridinamica classica: <b>a)</b> risultati relativi alla componente $u$ <b>b)</b> risultati relativi alla componente $v$ . Imponendo le condizioni di carico ad un <i>layer</i> di spessore $\delta$ : <b>c)</b> risultati relativi alla componente $u$ <b>d)</b> risultati relativi alla componente $v$ (Immagine tratta da [20]). . . . .	34
1.12	Esempio di una coppia di punti con orizzonte variabile, (immagine tratta da [34]). . . . .	35
2.1	Esempio di <i>bond</i> di un nodo peridinamico . . . . .	40
2.2	Diagramma di flusso per il calcolo di $\beta$ nel caso 2D. . . . .	43
2.3	Modello base di una piastra 2D . . . . .	47
2.4	Zoom della <i>mesh</i> dopo l'introduzione della cricca. . . . .	48
2.5	Modello FEM realizzato con il pacchetto <i>MSC Patran-Nastran</i> . . . . .	49
2.6	Deformazione della piastra a seguito di test di trazione monoassiale, I risultati sono amplificati di 600 volte. . . . .	50
2.7	<b>a)</b> andamento degli spostamenti ad $x$ costante per la prova di trazione monoassiale; <b>b)</b> andamento degli spostamenti ad $y$ costante per la prova di trazione monoassiale. . . . .	51

2.8	<b>a)</b> errori relativi per componente di spostamento $u$ in seguito alla prova di trazione monoassiale; <b>b)</b> errori relativi per componente di spostamento $v$ in seguito alla prova di trazione monoassiale. . . . .	52
2.9	Configurazione della piastra a seguito di test di taglio. . . . .	53
2.10	<b>a)</b> errori relativi per componente di spostamento $u$ in seguito alla prova di taglio; <b>b)</b> errori relativi per componente di spostamento $v$ in seguito alla prova di taglio. . . . .	54
3.1	Esempio di bordo non rettilineo che separa nodi reali (in blu) da nodi fittizi (in rosso) [20]. . . . .	56
3.2	Esempio di nodi reali (nella regione grigio scuro sulla sinistra) e nodi fittizi (nella regione più chiara a destra) nell'intorno del nodo $(x_i, y_i)$ [21]. . . . .	57
3.3	<i>Bond</i> creati tra i nodi fittizi posti al di sopra della cricca (in rosso) e i nodi reali posti al di sotto. . . . .	59
3.4	<i>Bond</i> creati tra i nodi fittizi posti al di sotto della cricca (in verde chiaro) e i nodi reali posti al di sopra. . . . .	59
3.5	Esempio di rappresentazione di tutti <i>bond</i> connessi ad un nodo perid dinamico da entrambi i lati della cricca. . . . .	60
3.6	<i>Bond</i> creati tra i nodi fittizi posti dallo stesso lato della cricca. . . . .	61
3.7	<b>a)</b> andamento della componente $u$ dello spostamento per $x$ costante; <b>b)</b> zoom sulla zona in prossimità della cricca. . . . .	64
3.8	<b>a)</b> andamento della componente $u$ dello spostamento per $y$ costante; <b>b)</b> zoom sulla zona in prossimità della cricca. . . . .	65
3.9	<b>a)</b> andamento della componente $v$ dello spostamento per $x$ costante; <b>b)</b> zoom sulla zona in prossimità della cricca. . . . .	66
3.10	<b>a)</b> andamento della componente $v$ dello spostamento per $y$ costante; <b>b)</b> zoom sulla zona in prossimità della cricca. . . . .	67
3.11	Andamento delle differenze relative per la componente orizzontale dello spostamento: <b>a)</b> risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione perid dinamica classica; <b>b)</b> risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione perid dinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi (FNM). . . . .	68
3.12	Andamento delle differenze relative per la componente verticale dello spostamento: <b>a)</b> risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione perid dinamica classica; <b>b)</b> risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione perid dinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi (FNM). . . . .	69
3.13	Andamento delle differenze relative per la componente orizzontale di spostamento: <b>a)</b> ad $x$ costante; <b>b)</b> ad $y$ costante. . . . .	70
3.14	Andamento delle differenze relative per la componente verticale di spostamento: <b>a)</b> ad $x$ costante; <b>b)</b> ad $y$ costante. . . . .	71
3.15	Andamento delle differenze relative per il confronto tra la soluzione perid dinamica classica e la soluzione perid dinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi: <b>a)</b> risultati relativi alla componente orizzontale dello spostamento; <b>b)</b> risultati relativi alla componente verticale dello spostamento. . . . .	72



3.16	Confronto tra i risultati del modello peridinamico classico e del modello peridinamico con applicazione del metodo dei nodi fittizi: andamento delle differenze relative per la componente orizzontale di spostamento: <b>a)</b> ad $x$ costante; <b>b)</b> ad $y$ costante. . . . .	73
3.17	Confronto tra i risultati del modello peridinamico classico e del modello peridinamico con applicazione del metodo dei nodi fittizi: andamento delle differenze relative per la componente verticale di spostamento: <b>a)</b> ad $x$ costante; <b>b)</b> ad $y$ costante. . . . .	74
3.18	Stato di tensione in direzione $x$ previsto: <b>a)</b> dal modello peridinamico classico; <b>b)</b> dal modello peridinamico in presenza di nodi fittizi; <b>c)</b> dal modello FEM creato con <i>MSC Patran-Nastran</i> . . . . .	75
3.19	Stato di tensione in direzione $y$ previsto: <b>a)</b> dal modello peridinamico classico; <b>b)</b> dal modello peridinamico in presenza di nodi fittizi; <b>c)</b> dal modello FEM creato con <i>MSC Patran-Nastran</i> . . . . .	76
4.1	Rappresentazione delle condizioni di vincolo e di carico imposte per analisi non lineari. . . . .	78
4.2	Diagramma di flusso per l'applicazione del metodo dei nodi fittizi per problemi di <i>crack propagation</i> . . . . .	80
4.3	Diagramma di flusso per l'aggiornamento dei nodi fittizi coinvolti nel problema. . . . .	82
4.4	Deformata ottenuta a seguito di analisi non lineare. . . . .	84
4.5	<b>a)</b> diagramma forza-spostamento ottenuto con una griglia con $\Delta x_1 = 0.5 \text{ mm}$ ; <b>b)</b> zoom sulla zona di scollinamento; <b>c)</b> zoom sul tratto lineare. . . . .	85
4.6	<b>a)</b> diagramma forza-spostamento ottenuto con una griglia con $\Delta x_1 = 0.25 \text{ mm}$ ; <b>b)</b> zoom sulla zona di scollinamento; <b>c)</b> zoom sul tratto lineare. . . . .	86
4.7	<b>a)</b> involuppo dei dati a valle di analisi non lineare per <i>mesh</i> con $\Delta x_1 = 0.5 \text{ mm}$ ; <b>b)</b> zoom sulla zona di scollinamento. . . . .	87
4.8	<b>a)</b> involuppo dei dati a valle di analisi non lineare per <i>mesh</i> con $\Delta x_1 = 0.25 \text{ mm}$ ; <b>b)</b> zoom sulla zona di scollinamento. . . . .	88
4.9	Rappresentazione dei <i>bond</i> fittizi creati nel corso dell'analisi non lineare. . . . .	89
4.10	Rappresentazione dei <i>bond</i> tra nodi fittizi creati nel corso dell'analisi non lineare. . . . .	89



# Elenco delle tabelle

1.1	Parametri di un PMB <i>material</i> in casi particolari. . . . .	28
2.1	Parametri utilizzati per il modello 2D di partenza. . . . .	46



# Introduzione

La capacità di prevedere l'insorgenza di cricche nelle strutture, così come gli eventuali percorsi di propagazione di cricche già presenti, è essenziale per garantire il successo di una missione. Ciò è specialmente vero per il settore aerospaziale, in cui i margini di sicurezza sono solitamente più stringenti di quelli utilizzati in altri campi dell'ingegneria sia per la possibilità di avere equipaggi o passeggeri a bordi di veicoli in ambienti estremamente ostili, sia per la necessità di ottimizzare la massa delle strutture, legata a criteri di fattibilità delle missioni stesse. La teoria peridinamica, proposta da Silling all'inizio del nuovo millennio [1], si è dimostrata un valido strumento dato che riesce ad includere, nella sua descrizione del continuo, anche fenomeni legati a discontinuità. D'altra parte, la teoria classica riesce a descrivere accuratamente il comportamento delle strutture sottoposte a carichi di qualsiasi tipologia, ed è largamente utilizzata in fase di progettazione ma non è capace di fornire con facilità una soluzione accurata in presenza di zone del corpo in cui non sia possibile calcolare le derivate parziali. Per superare tale limite, nel corso degli anni sono state proposte diverse strategie, più o meno complesse, quali ad esempio il metodo basato sugli elementi coesivi (CZM) ed il metodo XFEM ([16],[15]). Questi approcci però sono limitati in vario modo: si può avere il bisogno di conoscere a priori la direzione o la velocità di propagazione di una cricca, oppure essere in grado di implementare, a completamento delle equazioni del moto, delle relazioni che gestiscano le eventuali biforcazioni delle cricche.

L'approccio della *peridynamics* è vincente proprio perchè riesce a gestire in modo "naturale" la nucleazione e la propagazione di cricche. Le equazioni integrali sulle quali la teoria poggia, infatti, fanno sì che sia possibile applicare le stesse relazioni sia nelle parti integre del corpo, sia nelle parti danneggiate. In analogia con l'approccio adottato da altre teorie non-locali, come la dinamica molecolare, la peridinamica prevede che, all'interno di un continuo, ciascuna particella interagisca con tutte quelle poste ad una determinata distanza  $\delta$  da essa. Proprio questo aspetto rappresenta al tempo stesso uno dei punti di forza ma anche una delle debolezze della teoria, in quanto la gestione di tutte le interazioni di ciascun punto del corpo

complica notevolmente l'analisi, che si rivela onerosa dal punto di vista dei tempi di calcolo. In quest'ottica vengono del tutto giustificati i tentativi effettuati negli anni passati di accoppiamento tra la teoria classica e la teoria di Silling ([14],[17]) proprio al fine di alleggerire il costo dell'analisi andando ad utilizzare una griglia peridinamica solo laddove è più probabile si possano generare o propagare dei danneggiamenti. Gli ottimi risultati ottenuti dalle ricerche effettuate giustificano quindi l'utilizzo di queste tecniche, anche nel presente lavoro. Il loro utilizzo risolve anche un secondo limite della teoria peridinamica, ovvero la difficoltà di applicazione delle condizioni di vincolo e di carico a causa del *softening* dovuto agli effetti di bordo. Sono state sviluppate però, nel corso degli anni, diverse tecniche di gestione di questo fenomeno anche per le griglie costituite interamente da nodi peridinamici, classificabili in due categorie distinte: i *constitutive modification methods* (*volume method*, *force density method*, *energy method*) a partire da diverse supposizioni, più o meno efficaci a seconda dei casi, variano le equazioni del moto al fine di aumentare la rigidità equivalente del *bond* peridinamico di un fattore che permetta di simulare il completamento dell'orizzonte di ogni punto ([20],[26]): tali metodi però si mostrano efficaci solo per problemi e geometrie semplici, mostrando invece i limiti delle assunzioni di base in problemi lievemente più complessi; gli *Influence domain filling* invece cercano di intervenire variando la geometria del modello cercando di rendere l'orizzonte di tutti i punti completo ([21]): il *variable horizon method*, ad esempio, cerca di ottenere questo risultato andando a variare la dimensione dell'orizzonte all'interno del corpo. Tale operazione però porta all'insorgenza di *ghost forces* interne al corpo che possono alterare la validità dei risultati ottenuti. Nella seconda categoria rientra il metodo dei nodi fittizi (*fictitious nodes method*), già oggetto di studio presso l'Università di Padova negli ultimi anni ([27]), ed è proprio sulla scia dei promettenti risultati di queste ricerche che il presente lavoro si inserisce. L'obiettivo di questa trattazione è infatti quello di utilizzare il metodo dei nodi fittizi per andare a gestire il problema del *softening* in prossimità del bordo di una cricca, al fine di verificarne la validità e l'eventuale impatto in termini di costo computazionale dell'analisi.

Utilizzando dunque il software MATLAB si sono creati autonomamente i codici utilizzati, avendo cura di validare le griglie utilizzate attraverso una serie di test standard. Successivamente, è stato implementato su questi ultimi un algoritmo che permetta l'introduzione di un layer di nodi fittizi in corrispondenza di una cricca iniziale. I diversi modelli sono stati dunque sottoposti ad analisi lineari e a sollecitazioni di Modo I con propagazione della cricca. I risultati ottenuti sui modelli MATLAB sono stati confrontati, quando possibile, con quanto previsto dal software

commerciale MSC Patran-Nastran. L'algoritmo sviluppato si è dimostrato un valido strumento per lo studio della propagazione della cricca in griglia poco raffinate, permettendo di descrivere meglio il comportamento della struttura man mano che la cricca avanza; viceversa esso risulta in un sostanziale allungamento dei tempi di calcolo richiesti per l'analisi da effettuare qualora si vada ad infittire la *mesh*: la mitigazione degli effetti di bordo per tali griglie ha infatti un'impatto sempre più contenuto, man mano che viene diminuita la dimensione dell'orizzonte  $\delta$ . Si è anche verificata la versatilità del metodo che, in studi futuri potrà essere adattato anche per la propagazione non rettilinea di cricche. Il metodo dunque risponde in maniera positiva alle richieste e pone le basi per ulteriori studi.





# Capitolo 1

## Bond-based peridynamics

Di seguito verranno esposte le basi teoriche della teoria peridinamica come proposte da Silling [1] nella prima formulazione presentata (*bond-based peridynamics*).

Come descritto in precedenza, l'idea sulla quale la *peridynamics* poggia è che un punto in un continuo interagisca con tutti gli altri punti posti ad una distanza  $\delta$ , detta orizzonte, da esso. L'interazione tra due punti prevede lo scambio di una forza (per unità di volume al quadrato) detta *pairwise force function* ed indicata con  $\mathbf{f}$ . Tale scambio è possibile solo grazie ad un "collegamento", detto *bond* tra i due punti in esame. Il concetto di *bond* rappresenta la principale differenza tra la teoria peridinamica e quella classica, dato che supera il concetto di forze di contatto. In questa formulazione di base, in particolare, si suppone che il *bond* e le sue caratteristiche siano funzione delle sole coordinate dei due punti  $x$  ed  $x'$  coinvolti nell'interazione.

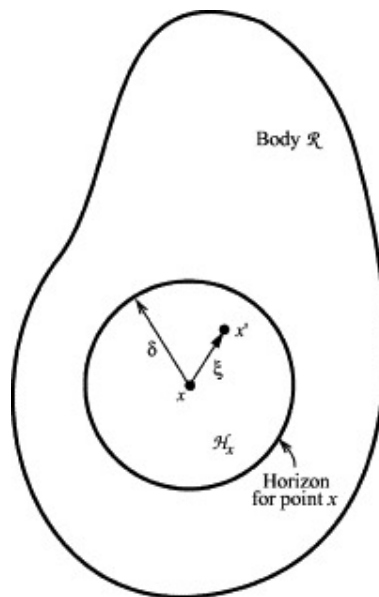


Figura 1.1: Rappresentazione di un generico corpo (immagine tratta da [2])

Per proseguire nella trattazione si farà riferimento ad un corpo di forma generica come quello riportato in Figura 1.1 , che esemplifica anche il concetto di orizzonte di un punto.

## 1.1 Equazioni del moto

Si supponga dunque di avere a che fare con un corpo avente una certa configurazione iniziale in una regione  $R$  dello spazio.

L'accelerazione di un generico punto  $\mathbf{x}$  al tempo  $t$  è data da:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

nella quale:

- $\mathbf{f}$  rappresenta la *pairwise force function* che il punto  $x'$  esercita su  $x$ ;
- $H_x$  è il volume della regione del corpo racchiusa dall'orizzonte;
- $dV_{\mathbf{x}'}$  è il volume infinitesimo associato al punto  $\mathbf{x}'$ ;
- $\mathbf{u}$  è il vettore del campo spostamenti;
- $\mathbf{b}$  è il vettore delle forze di volume;
- $\rho$  è la densità del materiale;

Definiti dunque i vettori posizione relativa  $\boldsymbol{\xi}$  e spostamento relativo  $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

è conveniente assumere che

$$|\boldsymbol{\xi}| > \delta \implies \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}$$

ovvero che punti materiali posti ad una distanza maggiore di  $\delta > 0$  non interagiscono in alcun modo.

Affinché  $\mathbf{f}$  rispetti i principi di conservazione del momento angolare e della quantità di moto, essa deve rispettare le seguenti condizioni

1.  $\mathbf{f}(-\boldsymbol{\eta}, -\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$

$$2. (\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}$$

La seconda condizione in particolare, assicura che il vettore forza sia parallelo al vettore posizione relativa, ovvero che l'espressione di  $\mathbf{f}$  sia del tipo

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = F(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}). \quad (1.4)$$

nella quale  $F$  è una funzione scalare differenziabile con continuità.

### 1.1.1 Elasticità

Un materiale peridinamico è detto microelastico se, lungo una qualsiasi curva chiusa  $\Gamma$  vale:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad (1.5)$$

L'Equazione 1.5 indica dunque che il lavoro compiuto dalla particella  $x$  dovuto all'interazione con una particella  $x'$  è nullo fintantoché  $x'$  si muove lungo una curva chiusa. Sotto opportune ipotesi di differenziabilità di  $\mathbf{f}$ , si può applicare il teorema di Stokes e concludere che una condizione necessaria e sufficiente affinché l'Equazione 1.5 sia soddisfatta è che

$$\nabla_{\boldsymbol{\eta}} \times \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$$

ovvero che esista una funzione scalare, detta *pairwise potential function* e indicata con  $w$ , tale che

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}). \quad (1.6)$$

Applicando dunque la condizione di irrotazionalità all'Equazione 1.4 otteniamo che tale relazione è verificata se e solo se è possibile definire una funzione scalare  $A$  tale che

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}} = A(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}).$$

Dall'integrazione di quest'ultima relazione, si ricava, dunque, che per un materiale microelastico

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = H(p, \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}), \quad p = |\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.7)$$

Ricordando che  $\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$  rappresenta la posizione relativa tra  $x$  ed  $x'$  a seguito della deformazione e che dunque  $p$  non è altro che la distanza tra i due punti, l'Equazione 1.7 può essere interpretata come l'equazione della forza trasmessa da una molla.

## 1.2 Linearizzazione

Si assuma ora che  $|\boldsymbol{\eta}| \ll 1$ . Facendo ricorso all'espansione in serie di Taylor, sotto opportune ipotesi di esistenza delle derivate richieste, è possibile scrivere  $\mathbf{f}$  come:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(0, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \quad (1.8)$$

nella quale  $\mathbf{C}$  è un tensore del secondo ordine, detto micromodulo, la cui espressione è la seguente:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})\mathbf{1}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.9)$$

dove " $\otimes$ " indica il prodotto tensore tra  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}$  (per una trattazione dettagliata di questa operazione si rimanda all'Appendice A).

L'ultima uguaglianza è ottenuta derivando l'Equazione 1.4 rispetto ad  $\boldsymbol{\eta}$ .

Nell'ipotesi di materiale lineare microelastico, il micromodulo  $\mathbf{C}$  così definito dunque:

1. eredita le proprietà soddisfatte da  $\mathbf{f}$ , che si traducono nella condizione:

$$\mathbf{C}(-\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}$$

2. gode della proprietà di simmetria, ovvero

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{C}^T(\boldsymbol{\xi}).$$

La condizione necessaria e sufficiente, esposta al paragrafo precedente per l'esistenza di  $w$ , se applicata alla Equazione 1.9, implica l'uguaglianza delle derivate miste, ovvero la simmetria del tensore  $\mathbf{C}$ .

Condizione necessaria e sufficiente per garantire la simmetria di  $\mathbf{C}$  è che esista una funzione scalare  $\lambda(\boldsymbol{\xi})$  tale che:

$$\boldsymbol{\xi} \otimes \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} \quad (1.10)$$

o, in altre parole, che  $\partial \mathbf{f} / \partial \boldsymbol{\eta}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi})$  sia parallelo a  $\boldsymbol{\xi}$ .

Ne segue, dunque, che il micromodulo simmetrico ha una forma del tipo

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} + F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (1.11)$$

dove  $\lambda(\boldsymbol{\xi})$  è data da:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}). \quad (1.12)$$

Utilizzando l'Equazione 1.7, l'espressione precedente può essere riscritta come segue:

$$\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial H}{\partial p}(|\boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi}). \quad (1.13)$$

il che porta all'espressione della *pairwise force function* linearizzata

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \left[ \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \frac{\partial H}{\partial p}(|\boldsymbol{\xi}|, \boldsymbol{\xi}) + H(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \right] (\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\eta} + \mathbf{f}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}) \quad (1.14)$$

### 1.3 Analogie con la teoria classica

Al fine di confrontare i risultati ottenuti da modelli peridinamici e modelli classici, è necessario introdurre il concetto di *densità di forza areale*.

#### 1.3.1 Densità di forza areale

Si immagini un corpo omogeneo, microelastico che è stato sottoposto ad una deformazione omogenea. Si consideri ora un piano  $P$  che divide il corpo in due sotto-regioni,  $R^+$ ,  $R^-$ .  $R^+$  esercita dunque una forza su  $R^-$ , applicata non solo sulla superficie di  $R^-$ , ma anche sulle particelle al di sotto di essa. Se tale forza è dunque divisa per l'area di  $P \cap R$ , otteniamo la nozione di forza per unità di area.

Al fine di definire l'*areal force density*  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  in un punto  $\mathbf{x} \in R$  nella direzione del vettore  $\mathbf{n}$ , facendo riferimento allo schema in Figura 1.2, definiamo

$$\begin{aligned} R^+ &= \{\mathbf{x} \in R : (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \geq 0\} \\ R^- &= \{\mathbf{x} \in R : (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \leq 0\} \end{aligned}$$

e l'insieme di punti collineari  $L$ :

$$L = \{\hat{\mathbf{x}} \in R^- : \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - s\mathbf{n}, 0 \leq s \leq \infty\}$$

Dunque si definisce

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \int_L \int_{R^+} \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{x}' - \hat{\mathbf{x}}) dV_{\mathbf{x}'} d\hat{l} \quad (1.15)$$

dove  $d\hat{l}$  rappresenta il cammino infinitesimo lungo  $L$ .  $\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  è quanto di più

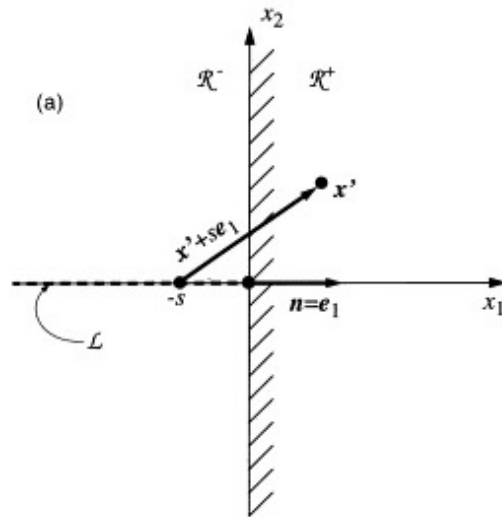


Figura 1.2: Calcolo della densità di forza areale. (Immagine tratta da [1])

vicino al concetto convenzionale di tensione, la quale ha un ruolo fondamentale nella teoria classica. La densità di forza areale risulta particolarmente utile nel caso di deformazione omogenea, poichè, in questo caso è possibile ripetere l'esperienza di Cauchy e far ricorso ad un tensore  $\sigma$  tale che

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}.$$

È possibile dimostrare [1], nel caso di deformazione omogenea, che  $\sigma$  appena definito è identico al tensore delle tensioni della teoria classica, dato che anche la teoria peridinamica prevede la possibilità di accumulare energia nella forma di deformazione e che essa sia recuperabile eliminando tale deformazione.

### 1.3.2 Configurazioni *unstressed*

Una configurazione si dice in assenza di carico se

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in R \quad \forall \mathbf{n}. \quad (1.16)$$

Se si considera un corpo  $R$  isotropo e microelastico e si definisce una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , una configurazione in assenza di carico soddisfa la seguente equazione:

$$0 = \tau_1(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1) = \int_0^\infty \int_{R^+} F(\mathbf{0}, \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1)(\mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1) dV_{\mathbf{x}'} ds \quad (1.17)$$

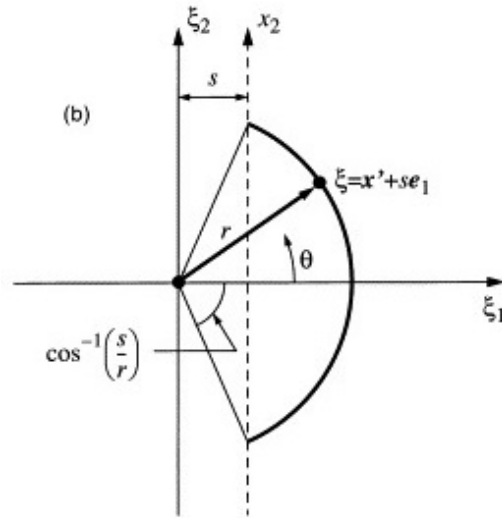


Figura 1.3: Cambio di coordinate. (Immagine tratta da [1])

Ponendo  $\xi = \mathbf{x}' + s\mathbf{e}_1$  e ricorrendo alle variabili sferiche (Figura 1.3), con

$$\xi_1 = r \cos \theta \quad \xi_2 = r \sin \theta \cos \phi \quad \xi_3 = r \sin \theta \sin \phi$$

l'Equazione 1.17 diventa:

$$\int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\arccos \frac{s}{r}} \int_0^{2\pi} F_0(r) (r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr = \Psi \quad (1.18)$$

dove

$$\Psi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty F_0(r) r^4 dr. \quad (1.19)$$

con  $F_0 = F(\mathbf{0}, \xi)$ . Dunque per una configurazione in assenza di carico abbiamo che  $\Psi = 0$ . Ciò indica che all'interno del corpo  $R$  la distribuzione delle forze scambiate tra i diversi punti, se non nulla, è repulsiva per alcuni valori della distanza tra particelle e attrattiva per altri.

## 1.4 Modello costitutivo

Ipotizzando di lavorare con un materiale peridinamico isotropo e microelastico, è possibile trovare una corrispondenza tra grandezze peridinamiche e quantità comunemente usate nella teoria classica dell'elasticità. Prima di procedere alla descrizione del modello costitutivo che è stato utilizzato nel corso delle simulazioni numeriche che verranno esposte nei capitoli successivi, è opportuno descrivere come esse possono essere ricavate sia nel caso 3D sia in quello 2D.

### 1.4.1 Coefficiente di Poisson

Si assuma che il materiale peridinamico sia in una configurazione *unstressed*. Il tensore  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})$  è dato dall'Equazione 1.11. Considerando allora una base orotonormale come quella definita al paragrafo precedente, si supponga che il corpo  $R$  sia soggetto ad una deformazione omogenea data da

$$u_1 = \epsilon_{11}x_1 \quad u_2 \equiv u_3 \equiv 0$$

dove  $\epsilon_{11}$  è una costante,  $|\epsilon_{11}| \ll 1$ . Dunque

$$\eta_1 = \epsilon_{11}\xi_1 \quad \eta_2 \equiv \eta_3 \equiv 0$$

Per l'Equazione 1.11 abbiamo:

$$\begin{aligned} f_1 &= \epsilon_{11}[\lambda(r)\xi_1^3 + F_0(r)\xi_1] \\ f_2 &= \epsilon_{11}\lambda(r)\xi_1^2\xi_2 \\ f_3 &= \epsilon_{11}\lambda(r)\xi_1^2\xi_3 \end{aligned}$$

nella quale si è fatto ricorso alla notazione  $r = |\boldsymbol{\xi}|$ .

Si proceda ora al calcolo della prima componente del tensore delle tensioni  $\sigma_{11} = \tau_1(\mathbf{e}_1)$ . Utilizzando le coordinate sferiche già descritte in precedenza, troviamo:

$$\begin{aligned} \tau_1(\mathbf{e}_1) &= \epsilon_{11} \int_0^\infty \int_0^r \int_0^{\cos^{-1} \frac{s}{r}} \int_0^{2\pi} [\lambda(r)(r \cos \theta)^3 + F_0(r)(r \cos \theta)] \\ &\quad r^2 \sin \theta d\phi d\theta ds dr = (\Lambda + \Psi)\epsilon_{11}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

dove

$$\Lambda = \frac{2\pi}{5} \int_0^\infty \lambda(r)r^6 dr$$



Ricordando che per una configurazione *unstressed*  $\Psi = 0$  e effettuando i calcoli analoghi per le altre componenti, troviamo che

$$[\sigma] = \epsilon_{11} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda/3 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda/3 \end{bmatrix} = \epsilon_{11} \begin{bmatrix} l + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

dove  $l$  è il modulo di Lamè,  $\mu$  è il modulo di taglio. Utilizzando infine le relazioni della teoria classica, secondo le quali

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - \nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ricaviamo che

$$\mu = \frac{\Lambda}{3}, \quad \nu = \frac{1}{4}, \quad E = \frac{5\Lambda}{6}. \quad (1.22)$$

Ciò dimostra che, nel caso 3D, un materiale peridinamico sottoposto a deformazione omogenea, all'interno del campo di piccoli spostamenti, è caratterizzato da un modulo di Poisson pari ad  $1/4$ . Analogamente per i casi 2D di stato di tensione piana e stato di deformazione piana si può ricavare che rispettivamente  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $\nu = \frac{1}{4}$ . Questi risultati sono particolarmente significativi nell'applicare la teoria peridinamica a materiali reali perchè si riesce a correlare una funzione non direttamente misurabile ( $\lambda$ ) a quantità facilmente misurabili ( $\nu, E$ ) basate su dati sperimentali.

### 1.4.2 *Prototype microelastic brittle material*

Descritte le principali proprietà di un materiale microelastico isotropo, è necessario, per gli scopi prefissati, inserire nel modello del materiale una qualche nozione di *failure*. Per semplicità si assumerà che la *bond force*  $f$  dipende solo dall'allungamento del *bond* stesso, definito da:

$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{|\xi|} = \frac{y - |\xi|}{|\xi|} \quad (1.23)$$

Il modo più semplice di introdurre il fallimento è permettere ai legami di rompersi quando vengono allungati oltre un valore limite. Dopo il fallimento non vi è più scambio di forze tra i due punti che il *bond* connetteva e non vi è possibilità di ripristino dello stesso.

Consideriamo il *prototype microelastic brittle* (PMB) *material* definito da

$$f(y(t), \xi) = g(s(t, \xi))\mu(t, \xi) \quad (1.24)$$

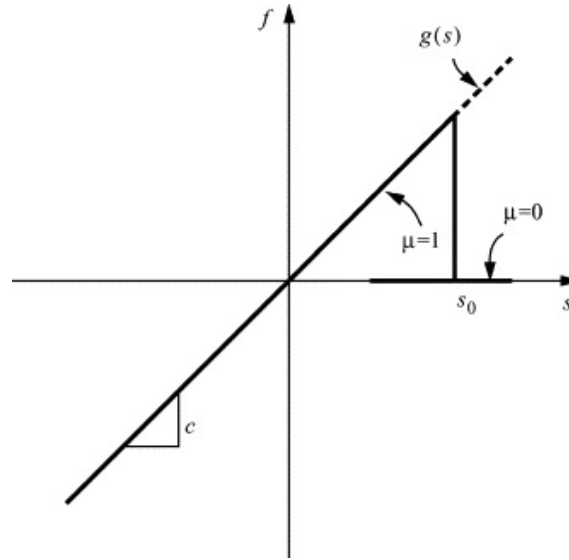


Figura 1.4: Andamento nella forza in un *bond* come funzione di  $s$  (immagine tratta da [2]).

dove  $g$  è la funzione scalare:

$$g(s) = cs \quad \forall s. \quad (1.25)$$

$c \in \mathbb{R}$  è una costante e  $\mu$  è una funzione scalare tempo-variante definita come

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } s(t', \xi) < s_0; \text{ per ogni } 0 < t' < t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.26)$$

$s_0$  è l'allungamento critico per il quale il legame fallisce e per il momento verrà considerato costante. In Figura 1.4 è riportato quindi un'esemplificazione della  $f(s)$  utilizzata nelle simulazioni.

Nonostante il materiale PMB in origine sia isotropo, la rottura dei legami in particolari direzioni porterà ad un certo grado di anisotropia nella risposta del corpo in esame alla sollecitazione applicata. Il vantaggio dell'introduzione del fallimento a livello di legame è che consente di definire una relazione che descrive il livello di danneggiamento in un punto. Nello specifico si definisce

$$\phi(x, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(x, t, \xi) dV_\xi}{\int_{H_x} dV_\xi} \quad (1.27)$$

dove  $x$  è una funzione della posizione del corpo.

Il valore di  $\phi$  varia tra 0, che rappresenta il materiale senza alcun danno, e 1, che indica la rottura di tutti i legami inizialmente associati ad un punto. Poiché i legami danneggiati non sono più in grado di sostenere alcun carico, la loro rottura comporta una riduzione della resistenza residua del componente. Ciò può causare

un'evoluzione del danno che può anche degenerare in una frattura completa del corpo.

Ci sono solo due parametri che caratterizzano il materiale PMB: la costante  $c$  e l'allungamento limite  $s_0$ .

Il valore di  $c$  corrisponde alla rigidezza di una molla associata al *bond* in esame. Il suo valore è ottenuto da considerazioni energetiche. In particolare, si consideri un corpo omogeneo tridimensionale infinito sottoposto ad una deformazione uniforme, i.e.  $s$  costante per tutti gli  $\xi$  e  $\eta = s\xi$ .

Definendo

$$\xi = |\boldsymbol{\xi}| \quad \eta = |\boldsymbol{\eta}|$$

abbiamo che

$$\eta = s\xi.$$

Dal momento che, dunque,  $f = cs = c\eta/\xi$ , segue che l'espressione del micropotenziale, dall'Equazione 1.6, assume la seguente forma

$$w = c \frac{\eta^2}{2\xi} = cs^2 \frac{\xi}{2} \quad (1.28)$$

Andando dunque a calcolare l'energia per unità di volume del corpo otteniamo

$$W = \frac{1}{2} \int_{H_x} w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} cs^2 \frac{\xi}{2} (4\pi\xi^2) d\xi = \frac{\pi cs^2 \delta^4}{4} \quad (1.29)$$

Tale quantità deve eguagliare la densità di energia di deformazione elastica ottenuta applicando la teoria classica per lo stesso materiale e la stessa deformazione

$$W = 9 \frac{ks^2}{2}.$$

Confrontando le due espressioni dunque ricaviamo che la costante della molla  $c$  è pari a

$$c = \frac{18k}{\pi\delta^4} \quad (1.30)$$

La dimostrazione precedente vale nel caso in cui le proprietà del materiale rimangano costanti nell'orizzonte, condizione che verrà considerata per tutto il prosieguo del lavoro. Tuttavia non vi è alcuna limitazione teorica alla forma che il micromodulo può assumere.

Anche il valore dell'allungamento critico  $s_0$  può essere ricavato da considerazioni energetiche. In particolare, per separare in due metà un corpo omogeneo infinito è necessario rompere tutti i legami che connettono punti appartenenti alle due metà

che vengono a formarsi. Se definiamo dunque il lavoro richiesto per spezzare un singolo legame (ricordando che  $d\eta = \xi ds$ )

$$w_0(\xi) = \int_0^{s_0} g(s)\xi ds \quad (1.31)$$

per un PMB *material* risulta, in accordo con l'Equazione 1.25,

$$w_0 = \frac{cs_0^2\xi}{2}.$$

Il lavoro richiesto per rompere tutti i legami per unità di superficie, con riferimento alla Figura 1.5, è ottenuto tramite integrazione di quest'ultima espressione, ovvero:

$$G_0 = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}(z/\xi)} \frac{cs_0^2\xi}{2} \xi^2 \sin\phi d\phi d\xi d\theta dz \quad (1.32)$$

Risulta dunque

$$G_0 = \frac{\pi cs_0^2\delta^5}{10} \quad (1.33)$$

la quale, dato che  $G_0$  è una quantità nota e misurabile per i materiali fragili, permette tramite inversione di ricavare il valore dell'allungamento limite

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_0}{\pi c\delta^5}} = \sqrt{\frac{5G_0}{9k\delta}} \quad (1.34)$$

Quanto fatto in precedenza può essere ripetuto per altri casi notevoli, ottenendo i valori delle costanti riportati nella Tabella 1.1, nella quale  $h$  è lo spessore del corpo in esame.

Casi notevoli		
1D	$c = \frac{12E}{\pi\delta^4}$	$s_0 = \sqrt{\frac{6G_0}{E\delta}}$
2D <i>plane stress</i>	$c = \frac{9E}{\pi h\delta^3}$	$s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}}$
2D <i>plane strain</i>	$c = \frac{48E}{5\pi h\delta^3}$	$s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_0}{12E\delta}}$

Tabella 1.1: Parametri di un PMB *material* in casi particolari.

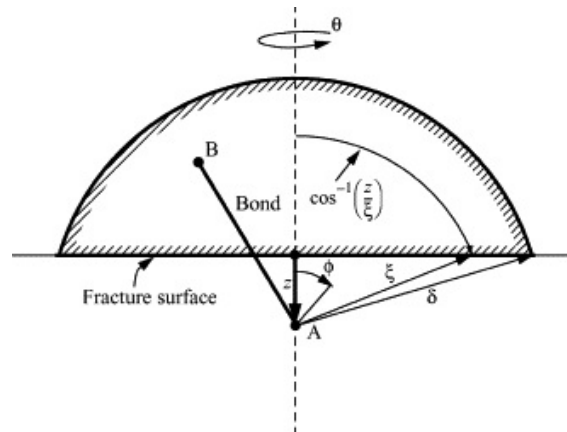


Figura 1.5: Calcolo di  $s_0$ , (immagine tratta da [2]).

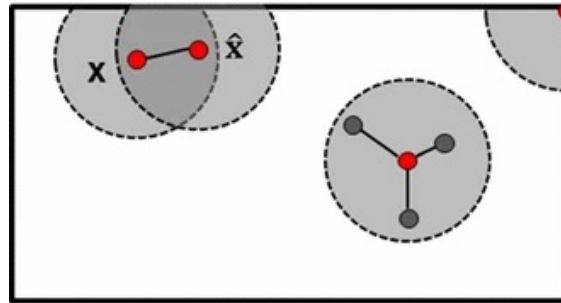


Figura 1.6: Orizzonti dei punti peridinamici interni al corpo o nelle vicinanze di una superficie, (immagine tratta da [20]).

## 1.5 Effetti di bordo

I parametri che caratterizzano il comportamento del materiale peridinamico fragile sono stati calcolati, nel paragrafo precedente, nell'ipotesi che il corpo fosse infinito e che ogni regione di integrazione fosse interamente contenuta nello stesso. Ciò è vero per la maggior parte dei punti che compongono un corpo, anche di dimensioni finite, ma non per tutti: i punti posti ad una distanza inferiore di  $\delta$  dal bordo del corpo o dal bordo di una cricca, così come da zone vuote, e più in generale in corrispondenza dei bordi (Figura 1.6), non soddisfano più tale assunzione. Di conseguenza il comportamento del materiale in queste zone è leggermente diverso da quello nel resto del corpo, a causa del minor numero di *bond* presenti. Questo fenomeno, detto *softening*, è stato riscontrato da diversi autori nel corso degli anni e la sua analisi ha, nel corso del tempo, fatto sì che venissero sviluppate diverse tecniche per la sua mitigazione ([4],[20],[21],[39]). È possibile raggruppare questi metodi in due grandi categorie:

1. **constitutive modification**: vi appartengono quei metodi (*volume method*, *force density method*, *energy method*) che prevedono modifiche al modello co-

stitutivo del materiale peridynamico per forzare il comportamento voluto dei punti posti in prossimità di superfici e attenuare gli effetti di bordo;

2. *influence domain filling*: vi appartengono i metodi (*fictitious nodes method*, *variable horizon method*) che prevedono il completamento dell'orizzonte dei punti in prossimità dei bordi del corpo, di modo che il loro comportamento sia uguale a quello di punti posti all'interno del corpo.

Di seguito vengono esposte le principali caratteristiche dei metodi appartenenti alle due categorie appena esposte, utilizzabili per la formulazione *bond-based* della teoria peridynamica.

### 1.5.1 Il *volume method*

Una delle strategie più intuitive per irrigidire quelle parti della struttura affette da *softening* è quello di aumentare di un certo fattore il micromodulo di questi punti del corpo, in modo che esso risulti uguale a quello di punti in zone con orizzonte completo.

Consideriamo infatti due punti nelle vicinanze di una superficie  $\mathbf{x}$  ed  $\hat{\mathbf{x}}$ , come quelli in Figura 1.6. Per entrambi i punti le regioni di integrazione (volumi nel caso 3D, aree del caso 2D)  $V(\mathbf{x})$ ,  $V(\hat{\mathbf{x}})$  sono più piccole del volume o dell'area di integrazione corrispondente di raggio  $\delta$ ,  $V_0$ . Dunque il loro *bond* deve essere irrigidito. In [25] viene suggerita una possibile espressione del fattore correttivo  $\lambda$

$$\lambda = \frac{2V_0}{V(\mathbf{x}) + V(\hat{\mathbf{x}})} \quad (1.35)$$

Per definizione  $\lambda \geq 1$ . L'espressione corretta del micromodulo è dunque

$$c_{\text{corretto}} = \lambda c \quad (1.36)$$

Una correzione di questo tipo permette solamente la mitigazione degli effetti del *softening* poichè si basa sull'assunzione che, per una deformazione omogenea, l'*energy density* in un punto sia proporzionale al volume della regione di integrazione nell'intorno del punto stesso. Tale premessa non è valida in generale, ma solamente nel caso di condizioni di carico idrostatiche (in cui tutti i *bond* sono sottoposti allo stesso allungamento  $s$ ) e nell'ipotesi che  $c$  sia inversamente proporzionale a  $|\boldsymbol{\xi}|$ .

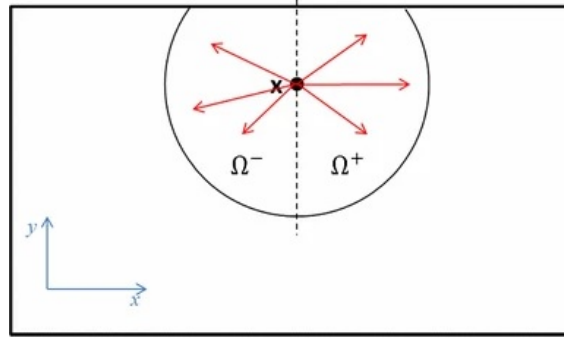


Figura 1.7: Volumi di integrazione  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ , (immagine tratta da [20]).

### 1.5.2 Il *force density method*

In maniera simile al metodo precedente, anche questo metodo prevede di utilizzare un fattore moltiplicativo per amplificare la rigidezza di un legame tra punti. Il fattore correttivo viene però ricavato imponendo una tensione monoassiale lungo le 3 direzioni  $x, y, z$  e valutando la conseguente *force density* per ciascuno dei tre casi. Ad esempio, imponendo al contorno un carico monoassiale in direzione  $x$ , in accordo con quanto riportato in [26], otteniamo

$$g_x(\mathbf{x}) = \int_{\Omega^+} f_x(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) dV_{\hat{\mathbf{x}}} - \int_{\Omega^-} f_x(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) dV_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (1.37)$$

nella quale le regioni di integrazione sono raffigurate in Figura 1.7. Analoga operazione può essere ripetuta imponendo trazione monoassiale lungo le direzioni  $y, z$  per procedere al calcolo delle  $g_y(\mathbf{x}), g_z(\mathbf{x})$ .

Risulta allora definito il vettore

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g_x(\mathbf{x}) \\ g_y(\mathbf{x}) \\ g_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

il quale chiaramente dipende dalla forma della regione di integrazione. Per punti con orizzonte completo, per simmetria, risulta

$$g_x(\mathbf{x}) = g_y(\mathbf{x}) = g_z(\mathbf{x}) = g_\infty$$

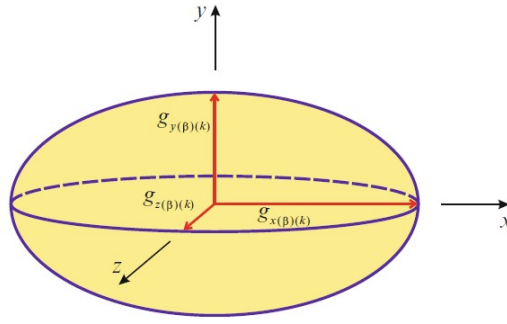


Figura 1.8: Costruzione dell'ellissoide per i *correction factors* (immagine tratta da [26]).

quindi, per ottenere la stessa *force density* anche in punti con orizzonte incompleto, il fattore correttivo è definito come

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{g_\infty}{g_x(\mathbf{x})} \\ \frac{g_\infty}{g_y(\mathbf{x})} \\ \frac{g_\infty}{g_z(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Poichè  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  dipende dal punto in cui viene calcolato, per il singolo *bond* il fattore moltiplicativo è definito da:

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})}{2} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

In [26] viene definita, ipotizzando una variazione con la direzione  $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]$  di tipo ellissoidale per  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  (Figura 1.8), una "costante moltiplicativa":

$$k_{ave} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_x}{k_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{k_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{k_z}\right)^2}} \quad (1.41)$$

da utilizzare per incrementare il micromodulo di ogni *bond*.

Anche questo metodo tuttavia si rivela non esatto, riuscendo solamente a mitigare gli effetti del *softening*.



### 1.5.3 L'energy method

Una variazione a quanto esposto per il metodo precedente consiste nel ricorrere al calcolo della densità di energia di deformazione in un punto

$$w = \frac{1}{4} \int_{H_{\mathbf{x}}} c(\boldsymbol{\xi}) s^2 |\boldsymbol{\xi}| dV_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (1.42)$$

per procedere al calcolo di una costante correttiva.

Imponendo infatti uno spostamento nelle 3 direzioni  $x, y, z$ , si può procedere analogamente a quanto fatto in precedenza a definire i vettori

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w_x(\mathbf{x}) \\ w_y(\mathbf{x}) \\ w_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{w_\infty}{w_x(\mathbf{x})} \\ \frac{w_\infty}{w_y(\mathbf{x})} \\ \frac{w_\infty}{w_z(\mathbf{x})} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

dove  $w_\infty$  è la densità di energia di deformazione per un punto con orizzonte completo.

Si procede dunque al calcolo di  $k_{ave}$  come descritto in precedenza.

Il confronto tra la Figura 1.10 e la Figura 1.11 mostra come, per la *bond-based peridynamics*, questo metodo di correzione porti a risultati meno accurati rispetto al *force density method* ([20]). Questo risultato è vero tanto andando ad imporre le condizioni di carico (Figura 1.9) direttamente sui bordi esterni della struttura (*worst case* in cui gli effetti di bordi sono più evidenti), quanto andando ad imporre le stesse su un *layer* di spessore  $\delta$  in corrispondenza degli stessi.

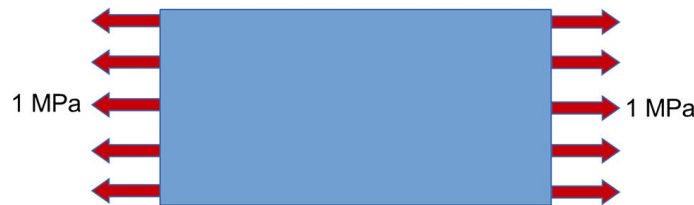


Figura 1.9: Schema della struttura e condizioni di carico utilizzate in [20] (Immagine tratta da [20]).

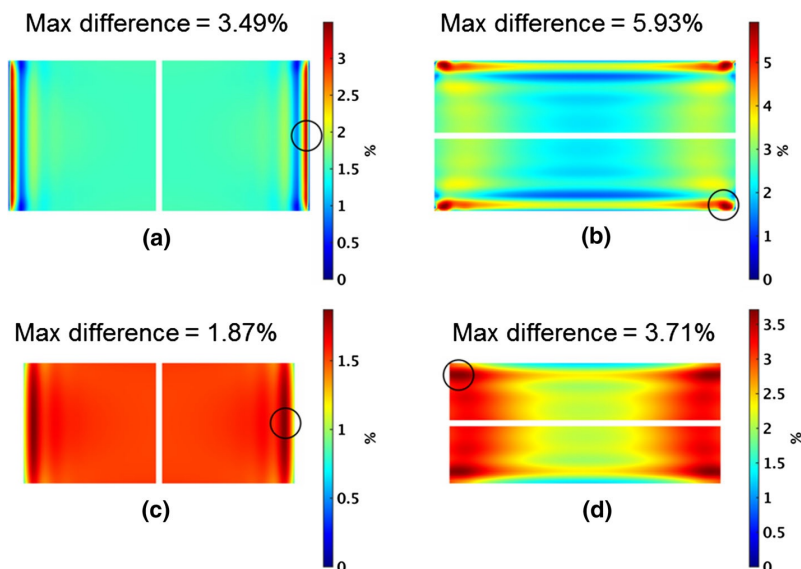


Figura 1.10: Differenze relative in termini di spostamento tra l'*force density method* e la soluzione peridinamica classica: **a**) risultati relativi alla componente  $u$  **b**) risultati relativi alla componente  $v$ . Imponendo le condizioni di carico ad un *layer* di spessore  $\delta$ : **c**) risultati relativi alla componente  $u$  **d**) risultati relativi alla componente  $v$  (Immagine tratta da [20]).

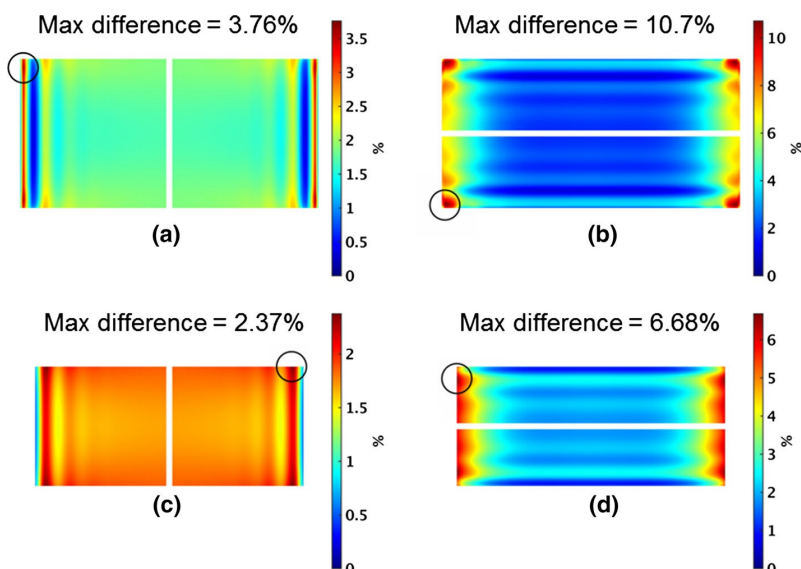


Figura 1.11: Differenze relative in termini di spostamento tra l'*energy method* e la soluzione peridinamica classica: **a**) risultati relativi alla componente  $u$  **b**) risultati relativi alla componente  $v$ . Imponendo le condizioni di carico ad un *layer* di spessore  $\delta$ : **c**) risultati relativi alla componente  $u$  **d**) risultati relativi alla componente  $v$  (Immagine tratta da [20]).

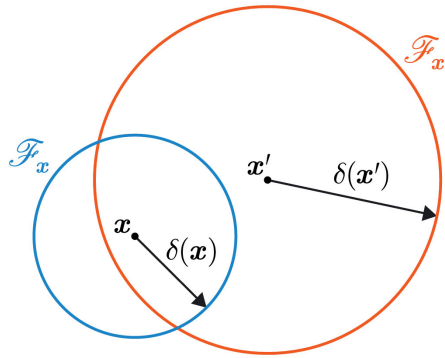


Figura 1.12: Esempio di una coppia di punti con orizzonte variabile, (immagine tratta da [34]).

#### 1.5.4 Il *variable horizon method*

Un altro metodo per la mitigazione degli effetti del *softening* prevede di andare a variare l'orizzonte in base alla posizione del punto in considerazione.

Questa operazione però altera il comportamento del materiale e le sue proprietà, poichè le equazioni del moto derivate all'inizio del capitolo sono valide nell'ipotesi che  $\delta$  sia costante in tutto il corpo. La sua applicazione quindi non avviene senza alcuna conseguenza: sono state infatti osservate, a cavallo di regioni del corpo in cui l'orizzonte varia, delle riflessioni spurie delle onde elastiche; nondimeno, venendo meno l'ipotesi che, se un punto  $\mathbf{x}$  interagisce con un punto  $\mathbf{x}'$ , allora anche  $\mathbf{x}'$  interagisce con  $\mathbf{x}$  (come è possibile evincere dalla Figura 1.12), si osserva l'insorgenza di cosiddette forze "fantasma".

Sebbene negli anni questi fenomeni siano stati studiati e analizzati nel dettaglio ([10],[34]), l'applicazione di questo metodo per mitigare gli effetti di bordo permette di raggiungere risultati ottimali solamente con variazioni di  $\delta$  gradualmente fino a raggiungere, in prossimità delle superfici, valori molto piccoli, idealmente tendenti a zero.

#### 1.5.5 Il *fictitious nodes method*

Tutti i metodi finora descritti si basano o sulla modifica della rigidità del *bond*, o sulla modifica di altre grandezze per raggiungere un risultato analogo, oppure sulla modifica delle equazioni del moto e di quelle di equilibrio. Il metodo dei nodi fittizi, invece, cerca di risolvere il problema degli effetti di bordo aggiungendo uno strato di nodi "fittizi" intorno alla superficie del corpo in esame. Così facendo tutti i nodi che realmente appartengono al corpo, godono di un orizzonte completo. Questo strato di nodi aggiuntivi deve essere di spessore almeno pari a  $\delta$ , di modo che anche i punti collocati in corrispondenza della superficie possano completare la regione di

integrazione.

Un grande vantaggio di questo metodo risiede nel fatto che non richiede alcuna variazione delle equazioni del moto ed è dunque applicabile a qualsiasi tipologia di modello perid dinamico, sia per la formulazione *bond-based*, sia per la *state-based*. Questo *layer* di nodi è utile anche per l'applicazione di vincoli o carichi di tipo spostamento sulle superfici del corpo come si vedrà dalla trattazione del paragrafo successivo.

Nonostante la sua natura in un certo qual modo intuitiva, anche l'applicazione di questo metodo presenta numerose difficoltà, specie in presenza di geometrie complesse o di spigoli. Proprio l'imposizione di "condizioni al contorno" è stata la principale applicazione di questo metodo: una trattazione più specifica dello stato dell'arte e delle applicazioni finora sviluppate si trova nel Capitolo 3 di questo elaborato.

## 1.6 Condizioni di vincolo e di carico

A causa delle differenze tra Peridynamics e la teoria dell'elasticità convenzionale è necessario ricordare alcune considerazioni riguardanti l'applicazione di carichi alla struttura in analisi. Le condizioni al contorno rivestono un ruolo fondamentale nella risoluzione delle equazioni differenziali proprie della teoria classica poiché sono necessarie per giungere a una soluzione specifica che risolva il problema di equilibrio in esame. Poiché le equazioni differenziali rappresentano l'equilibrio tra forze agenti su particelle a contatto tra di loro, nei contorni della struttura, dove non vi è la presenza di particelle vicine, le condizioni al contorno si rendono necessarie per poter effettuare una descrizione completa della struttura.

Un discorso del tutto diverso si applica alla teoria peridinamica. Nella derivazione delle equazioni infatti non emerge alcuna necessità di condizioni al contorno; inoltre, sebbene sia stato definito in modo artificiale un concetto analogo a quello di tensione nella Sezione 1.3.1, non è definito in modo "naturale" alcun tipo di corrispettivo che giochi un ruolo all'interno della meccanica del problema. Una condizione al contorno di questo tipo, naturale nella teoria convenzionale, non si applica in maniera semplice in un modello peridinamico. Piuttosto le forze esterne devono essere applicate tramite il vettore delle forze esterne di volume  $\mathbf{b}$ , che può essere distribuito solitamente ad una distanza  $\delta$  dai bordi della struttura, qualora si voglia simulare un carico applicato alla superficie.

Al contrario è possibile trovare, per la teoria peridinamica, un analogo alle condizioni al contorno di tipo spostamento della teoria classica. Considerando  $R$  la regione nella quale le equazioni del moto sono valide, immaginiamo che esista un insieme di punti  $R^*$  nel complementare di  $R$  che contenga del materiale nel quale vengono specificati gli spostamenti. Indichiamo con  $\mathbf{u}^*$  il campo spostamenti imposto in  $R^*$ . In presenza di condizioni di carico di tipo spostamento, definiamo il *displacement load* come segue:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \int_R \mathbf{f}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}'} + \int_{R^*} \mathbf{f}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}^*} \quad (1.45)$$

Poiché i punti in  $R$  interagiscono con quelli in  $R^*$  attraverso la *pairwise force function*  $\mathbf{f}$ , il carico di tipo spostamento agisce come una condizione al contorno nella teoria classica. Affinchè il il carico di tipo spostamento abbia un effetto,  $R^*$  deve avere un volume non nullo, altrimenti l'integrale sarebbe nullo. Questo dimostra che, per la teoria peridinamica, non è sufficiente imporre degli spostamenti solo sul bordo del corpo in esame.

Una interessante caratteristica che però emerge da quest'analisi è che per la *peridy-*

*namics* non bisogna più parlare di campo spostamenti che soddisfa le condizioni di equilibrio e le condizioni al contorno, dal momento che esse sono incorporate nelle equazioni di equilibrio e del moto e non devono essere aggiunte separatamente ([1]).

## 1.7 Obiettivo del lavoro

Questo lavoro prende il via dai risultati ottenuti dall'applicazione dei nodi fittizi per l'imposizione di condizioni di vincolo e di carico per problemi peridinamici 2D e 3D, già oggetto di ricerca da parte del Dipartimento di Ingegneria Industriale dell'Università di Padova. In particolare l'obiettivo di questa trattazione è andare a studiare come e se l'introduzione di un *layer* di nodi fittizi in corrispondenza del bordo di una cricca possa influenzare la soluzione di problemi bidimensionali.

Poichè l'interesse è rivolto solamente alle vicinanze del bordo della cricca, si farà uso delle tecniche di accoppiamento FEM-peridinamica già descritte in precedenti lavori ([14],[17],[18]) al fine di facilitare l'applicazione di carichi e vincoli, di eliminare gli effetti di bordo dalle superfici esterne di applicazione di questi ultimi ed infine di alleggerire il costo computazionale dell'analisi.

Data la scarsità di software commerciali che implementino anche la teoria peridinamica, le analisi effettuate sono state portate avanti utilizzando degli script MATLAB originali. Dopo una prima fase di definizione del modello 2D studiato, si procederà in primo luogo alla sua validazione attraverso dei test standard ed in seguito sarà descritto un algoritmo che permetterà di:

1. studiare gli effetti dell'irrigidimento dei nodi in prossimità di una cricca per analisi lineari statiche;
2. valutare gli effetti dell'irrigidimento dei nodi in prossimità di una cricca per problemi di *crack propagation*, facendo ricorso alle tecniche descritte in [5], opportunamente modificate.

Si cercherà inoltre di valutare se l'allungamento intrinseco dei tempi di calcolo richiesti, dovuto ad una maggior complessità dell'analisi, sia giustificato dall'eventuale migioria nell'accuratezza della soluzione ottenuta. Infine, verranno valutate i margini per futuri sviluppi a partire dai risultati raggiunti.

# Capitolo 2

## Implementazione numerica

In questo capitolo verranno esposte le principali tecniche e i più diffusi accorgimenti utilizzati nell'implementazione numerica e nella risoluzione di problemi peridinamici. Poiché, inoltre, nella definizione del problema verrà fatto uso delle tecniche di accoppiamento tra elementi finiti e nodi peridinamici, si procederà anche ad una loro descrizione.

Infine, si concluderà con la descrizione e validazione del modello base utilizzato per le analisi.

### 2.1 Discretizzazione

Per risolvere numericamente le equazioni del moto della *bond-based peridynamics* Silling [2] propose un metodo "mesh-free" in cui il corpo è rappresentato in forma discretizzata con una griglia di nodi. A ognuno di questi nodi è associato un volume noto nella configurazione di riferimento, determinato dalle dimensioni del passo di griglia ( $\Delta x$ ) nelle tre direzioni  $x, y, z$  (Figura 2.1).

Immaginiamo di focalizzare l'attenzione su di un nodo  $A$  della griglia. Come accennato in precedenza, esso interagisce con tutti gli altri nodi posti ad una distanza  $d \leq \delta = m \cdot dx$ , dove  $m \geq 0$  e spesso è un valore costante ed intero. In questo caso, il nodo  $A$  viene detto **nodo sorgente**, mentre tutti i nodi con cui esso interagisce sono detti **nodi famiglia**. Nell'ipotesi che  $\delta$  sia costante in tutta la griglia, è possibile dedurre che ogni nodo riveste sempre entrambi i ruoli.

Nel caso discretizzato dunque l'Equazione 1.1 viene riscritta come:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p + \mathbf{b}_i^n \quad (2.1)$$

nella quale

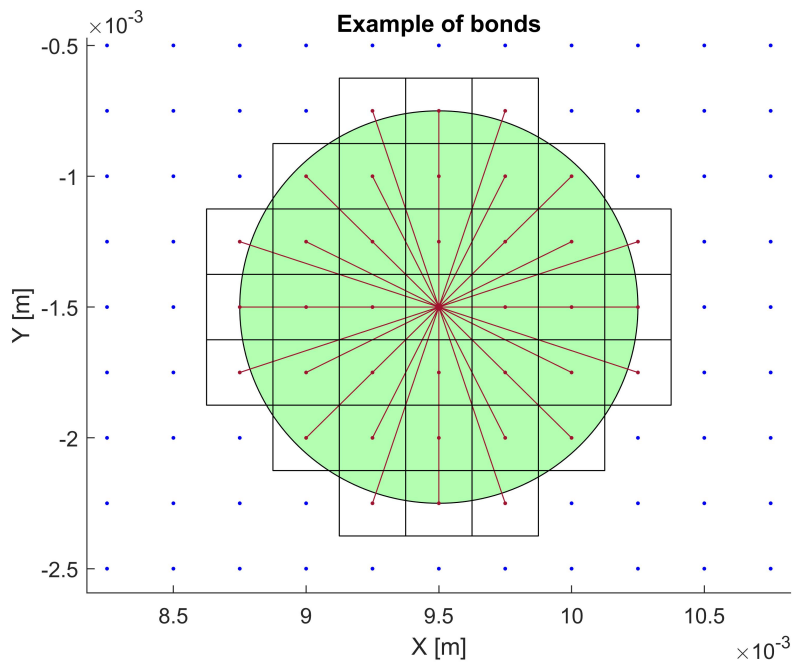


Figura 2.1: Esempio di *bond* di un nodo peridinamico

- $p$  indica l'insieme dei nodi famiglia associati al nodo  $i$ -esimo della griglia;
- $V_p$  è il volume assegnato al nodo famiglia in esame (nel seguito si supporrà che  $V_p = h \cdot \Delta x^2$ , dove  $h$  è lo spessore del corpo).

Nel caso linearizzato otteniamo invece:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{C}(\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i)(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n) V_p + \mathbf{b}_i^n \quad (2.2)$$

con  $\mathbf{C}$  il micromodulo definito in precedenza.

Questo tipo di discretizzazione è detto *mesh-free* poichè, per analisi dinamiche di propagazione del danno si è fatto spesso ricorso ([2]) ad un algoritmo esplicito alle differenze centrali per il calcolo delle accelerazioni, ovvero si è posto, fissato un intervallo di tempo  $\Delta t$ , che

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^n = \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - 2\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_i^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.3)$$

Questo approccio non richiede la creazione di elementi geometrici che connettano il nodo sorgente con tutti i nodi famiglia che con esso interagiscono per la risoluzione del problema, quindi evita la creazione di una *mesh*, da cui appunto il nome.

È tuttavia molto agevole, ai fini dell'implementazione numerica, non solo in software *homemade* ma anche in applicazioni commerciali, andare a modellare il *bond* come



un elemento di tipo asta così come proposto dallo stesso Silling [4].

Andando infatti a moltiplicare entrambi i membri dell'Equazione 2.1 per il volume associato al nodo sorgente  $i$ -esimo, otteniamo:

$$V_i \rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p V_i + \mathbf{b}_i^n V_i \quad (2.4)$$

che ha la stessa forma della più nota equazione per gli elementi finiti

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_e \quad (2.5)$$

dove è possibile identificare:

- con  $\mathbf{M}$  la matrice di massa *lumped*, tale per cui gli elementi diagonali sono i fattori  $\rho V_i$ ;
- con  $\mathbf{F}_i = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) V_p V_i$  il vettore delle forze interne;
- con  $\mathbf{F}_e = \mathbf{b}_i^n V_i$  il vettore delle forze esterne agenti sul corpo.

In questo modo, implementare un problema peridinamico all'interno di un codice agli elementi finiti si trasforma in un'operazione di *preprocessing* atta a definire una *mesh* composta di elementi asta con una proprietà di rigidità consistente con quanto previsto dalla teoria peridinamica.

L'assemblaggio della matrice di rigidità di struttura e la sua inversione rappresentano il punto di arrivo di tale processo, con conseguente soluzione del problema in termini di spostamento, in piena analogia con quanto normalmente fatto con problemi FEM.

### 2.1.1 Il coefficiente di correzione del volume

Prima di procedere al calcolo della rigidità equivalente del *bond*, è necessario effettuare alcune correzioni a quanto descritto in precedenza, come riportato in [24], così da ottenere risultati più affidabili.

Dall'analisi, infatti, della Figura 2.1, è del tutto evidente come vi siano delle correzioni da apportare alla Equazione 2.1 al fine di calcolare l'esatto volume da assegnare a ciascun nodo famiglia interagente con un nodo sorgente. L'operazione è banale per le celle che entrano completamente all'interno dell'orizzonte del nodo sorgente; tuttavia essa richiede un'attenzione particolare per le celle che intersecano l'orizzonte, dove il valore non è più corrispondente all'intero volume della cella.

Per valutare correttamente i volumi da inserire all'interno dell'Equazione 2.1 si

utilizza un coefficiente correttivo del volume  $\beta$  definito come segue in [24]:

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - |\boldsymbol{\xi}|}{\Delta x} & \text{se } \delta - 0.5\Delta x \leq |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{se } |\boldsymbol{\xi}| \geq \delta + 0.5\Delta x \end{cases} \quad (2.6)$$

L'Equazione 2.1 assume quindi la forma:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_p \mathbf{f}(\mathbf{u}_p^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) \beta V_p + \mathbf{b}_i^n \quad (2.7)$$

Tuttavia, anche l'utilizzo del coefficiente di correzione del volume non elimina l'errore commesso nell'analisi. L'approssimazione effettuata diviene trascurabile andando a diminuire il passo griglia. L'implementazione numerica però riesce a superare questo limite poichè è possibile far ricorso ad opportune funzioni che calcolino direttamente il volume compreso all'interno dell'orizzonte di un nodo sorgente per ciascun nodo famiglia. Nella pratica, e anche nel prosieguo di questo elaborato, si farà ricorso ad un'espressione di  $\beta$  come segue:

$$\beta = \begin{cases} \frac{Area_{intersezione}}{\Delta x^2} & \text{se } \delta - 0.5\Delta x \leq |\boldsymbol{\xi}| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{se } |\boldsymbol{\xi}| \geq \delta + 0.5\Delta x \end{cases} \quad (2.8)$$

In Figura 2.2 è presentato il *work-flow* per il calcolo di  $\beta$  implementato nel corso delle analisi effettuate.

### 2.1.2 Tipologie di convergenza

I parametri che caratterizzano la griglia peridinamica sono il valore dell'orizzonte  $\delta$  e il valore del coefficiente  $m = \delta/\Delta x$ . Al fine di studiare l'influenza di tali parametri sulla soluzione e valutare la capacità della stessa di convergere sui risultati della meccanica classica, si individuano due diversi modelli di convergenza [7]:

- $\delta$ -convergenza:  $\delta \rightarrow 0$ ,  $m$  può rimanere costante o aumentare, ma in modo da far aumentare il rapporto  $m/\delta$ . In questo modo la soluzione numerica data dalla Peridynamics converge alla soluzione della meccanica classica. Più alto è il valore di  $m$  migliore è l'approssimazione raggiunta;
- $m$ -convergenza:  $m \rightarrow \infty$ ,  $\delta$  fisso. La soluzione numerica converge alla soluzione esatta non-locale prevista dalla Peridynamics per il dato  $\delta$ ;

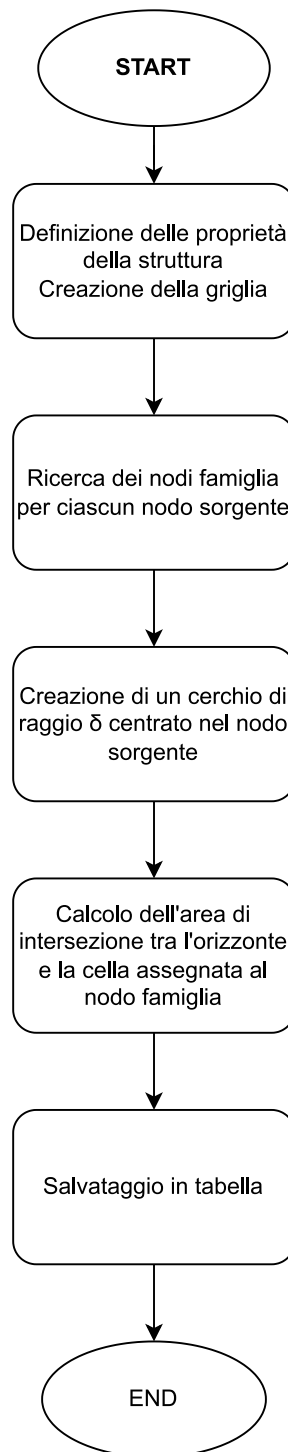


Figura 2.2: Diagramma di flusso per il calcolo di  $\beta$  nel caso 2D.

Solitamente i valori scelti per le simulazioni numeriche sono un compromesso tra la qualità della soluzione e le risorse computazionali a disposizione.  $m$  solitamente è compreso tra 3 e 4; valori più piccoli comportano l'apparire di effetti di griglia indesiderati (ad esempio linee di frattura che seguono righe o colonne della griglia) mentre valori più alti aumentano esponenzialmente i tempi di calcolo.

### 2.1.3 Rigidezza equivalente del *bond*

Definiti i parametri della griglia peridinamica, è possibile ora andare a definire la matrice di rigidezza associata a ciascun *bond* a partire, come si è accenato in precedenza, dalla ben nota matrice di rigidezza per un elemento di tipo asta:

$$[\mathbf{K}]_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

dove  $E$  è il modulo di Young,  $A$  è la sezione dell'asta,  $L$  è la sua lunghezza. Per ulteriori dettagli sull'assemblaggio delle matrici di rigidezza dei vari elementi FEM utilizzati si rimanda all'Appendice B.

L'equazione lega gli spostamenti dei nodi dell'elemento alle forze applicate secondo

$$F_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2) = K \frac{u_1 - u_2}{L}.$$

Osservando l'Equazione 2.4, si nota che entrambi i membri hanno la dimensione di una forza e che, guardando un singolo *bond* essa può essere riscritta come

$$V_i \rho \ddot{u}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i) \beta V_p V_i + \mathbf{b}_i V_i \quad (2.10)$$

con  $\mathbf{f}$ , per un *bond* non danneggiato, data da

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = cs \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} \quad (2.11)$$

Trascurando le forze di volume, si ottiene che (in modulo)

$$F = cs \beta V_p V_i$$

Tenuto dunque conto che l'allungamento  $s$  riveste per la teoria peridinamica pressappoco lo stesso ruolo che nella teoria classica è rivestito dalla deformazione

$$\epsilon = \frac{u_1 - u_2}{L}$$

dal confronto delle equazioni si ottiene che

$$[\mathbf{K}]_{PD} = \frac{c\beta V_p V_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

## 2.2 Accoppiamento FEM-PD

L'utilizzo delle griglie ibride FEM-peridinamica, come anticipato in precedenza, ha una duplice funzione:

1. diminuire il costo computazionale delle operazioni, permettendo di utilizzare le griglie peridinamiche laddove è più probabile che una cricca si sviluppi o si propaghi;
2. semplificare l'applicazione di condizioni di vincolo e di carico alla struttura in esame.

Proprio per questo, la gestione di tale tipologia di griglie e in particolare della zona di interazione tra nodi peridinamici ed elementi FEM è stata oggetto di ricerca negli ultimi anni, anche presso l'Università di Padova. In particolare, nel seguito di questo lavoro, si farà ricorso alla strategia proposta in [18], poichè essa si è dimostrata molto accurata e di facile implementazione, specie per problemi 2D come quelli che verranno analizzati in seguito.

L'idea alla base di questo approccio è quella di evitare di utilizzare, all'interno della griglia, delle zone di transizione in cui si accavallano elementi FEM e nodi peridinamici, andando piuttosto a modificare i collegamenti dei nodi sorgente a seconda della natura dei nodi famiglia ad esso collegati.

Tale procedimento viene quindi realizzato andando a suddividere i nodi della griglia secondo le due tipologie possibili (FEM o peridinamici). L'assunto di partenza è che i bond peridinamici agiscano solo su nodi peridinamici, gli elementi FEM solo su elementi FEM: per rispettare questo assunto vengono modificate le matrici di rigidità, inserendo una linea di zeri in corrispondenza dei nodi nel quale l'elemento in esame non deve applicare alcuna forza.

La tipologia di *coupling* si è dimostrata essere un significativo miglioramento rispetto alle tecniche tradizionali non solo perchè raggiunge gli obiettivi prefissati, ma anche perchè:

- non esiste la necessità di trasferire o interpolare i valori di forza o di spostamento tra le due porzioni del modello;
- non è necessario definire a priori funzioni di accoppiamento;

- è in grado di ottenere risultati consistenti, senza la presenza di errori localizzati nelle aree di transizione;
- è molto versatile e permette di inserire griglie peridinamiche anche all'interno di *mesh* più complicate, ad esempio a dimensione variabile, come sarà nel caso delle analisi che verranno descritte nel seguito.

## 2.3 Descrizione del modello analizzato

### 2.3.1 Modello MATLAB

Il primo passo effettuato al fine di analizzare il comportamento di una piastra con cricca laterale sollecitata di modo I è stato creare un modello in ambiente MATLAB che fosse consistente con i risultati ottenuti in precedenti lavori.

Si è dunque modellata una piastra caratterizzata dai parametri ripostati in Tabella 2.1.

Parametri geometrici		Parametri meccanici	
Lunghezza $l$	0.1 m	Modulo di elasticità $E$	70 GPa
Altezza $h$	0.08 m	Coefficiente di Poisson $\nu$	0.25
Spessore $t$	1 m	<i>Energy release rate</i> $G_0$	9.8 J/m <sup>2</sup>

Tabella 2.1: Parametri utilizzati per il modello 2D di partenza.

La struttura è stata discretizzata con una *mesh* ibrida FEM-peridinamica, adottando la strategia descritta al paragrafo precedente. In particolare, fissato un valore di  $\Delta x_1$  per la griglia peridinamica centrale e fissato  $m = 3$ , si è fatto ricorso ad una *mesh* FEM a geometria variabile costituita da elementi a 4 nodi di tipo "QUAD" divisa in 3 zone concentriche con spaziatura incrementale. La transizione tra zone con spaziatura diversa è stata gestita con l'utilizzo di elementi triangolari a 3 nodi. Poichè si era interessati a confrontare non solo il campo spostamenti, ma anche lo stato di tensione predetto dal modello in prossimità dell'apice della cricca con quanto previsto da un modello analogo realizzato con software commerciali agli elementi finiti e allo stesso tempo per diminuire il costo computazionale del processo, nel corso delle analisi si è mantenuta costante, per quanto possibile, la parte FEM della *mesh*, andando ad infittire invece la griglia peridinamica. Per lo stesso motivo si è cercato con particolare attenzione di mantenere la distorsione degli elementi pressochè nulla in ogni zona, di modo da non avere ripercussioni sui risultati ottenuti in termini di tensione. In Figura 2.3 è mostrato un esempio del modello utilizzato con  $\Delta x_1 = 0.25 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_2 = 4\Delta x_1$ ,  $\Delta x_3 = 8\Delta x_1$ ,  $\Delta x_4 = 16\Delta x_1$ .

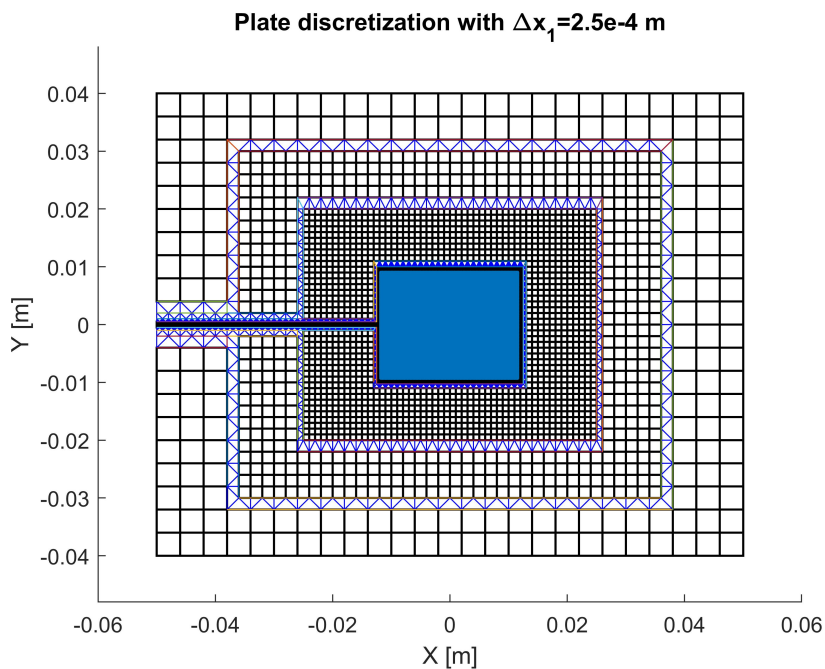


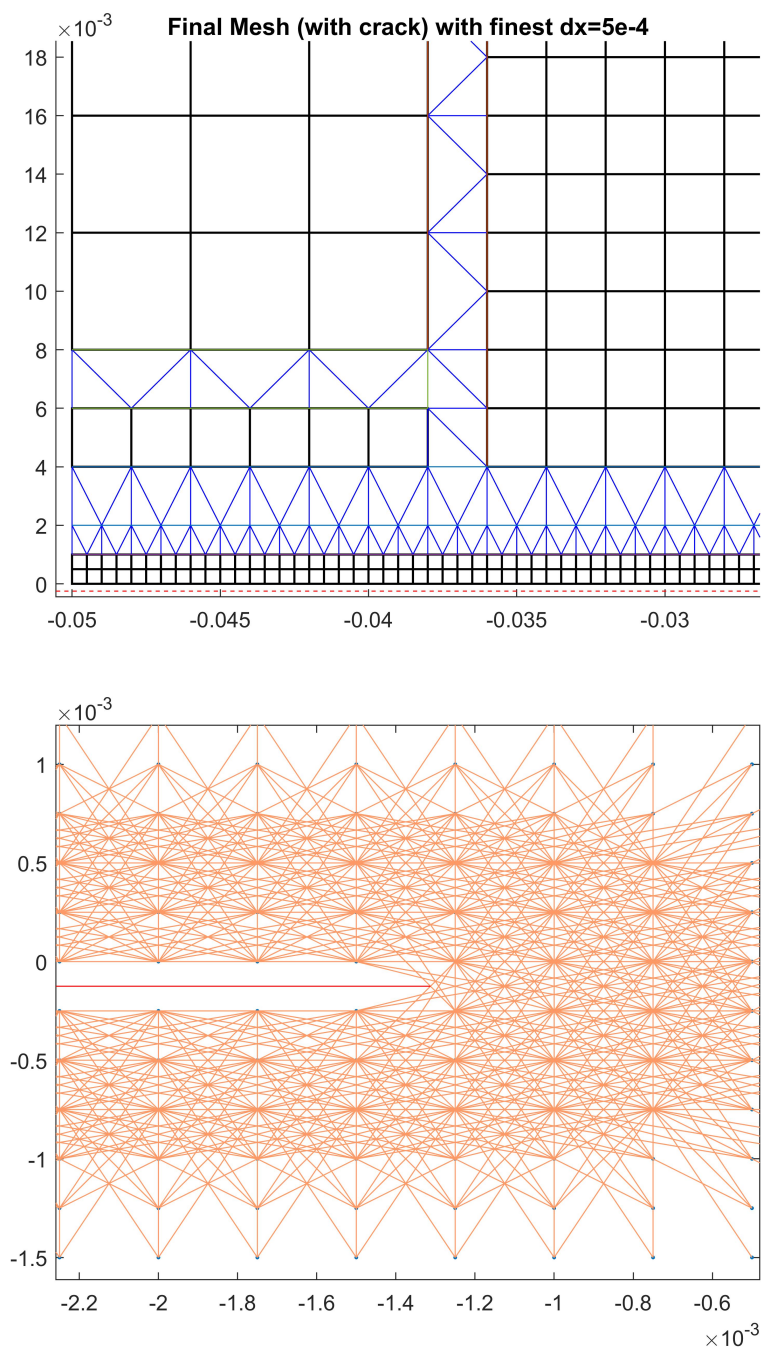
Figura 2.3: Modello base di una piastra 2D

L'introduzione della cricca iniziale, ovvero di un danno all'interno della struttura che non ne varia la massa, è stata effettuata andando ad eliminare gli elementi FEM o i *bond* peridinamici attraversati dalla stessa: tale scelta ha reso quindi necessaria la costruzione di una *mesh* particolarmente raffinata nel tratto percorso dal danno, di modo da andare a rappresentare il problema iniziale nel modo più fedele possibile. Si precisa inoltre che l'operazione effettuata non varia la massa della struttura in quanto essa è egualmente distribuita tra i nodi che compongono ciascun elemento. In Figura 2.4 è riportato uno zoom che mostra la gestione della griglia in corrispondenza della zona attraversata dalla cricca. La figura superiore mostra un ingrandimento della *mesh* FEM in prossimità della cricca; la figura inferiore mostra i *bond* peridinamici nelle vicinanze del danno fino all'apice della cricca.

Alla fine di questo capitolo verranno mostrati i risultati ottenuti al termine di *patch test* per la validazione.

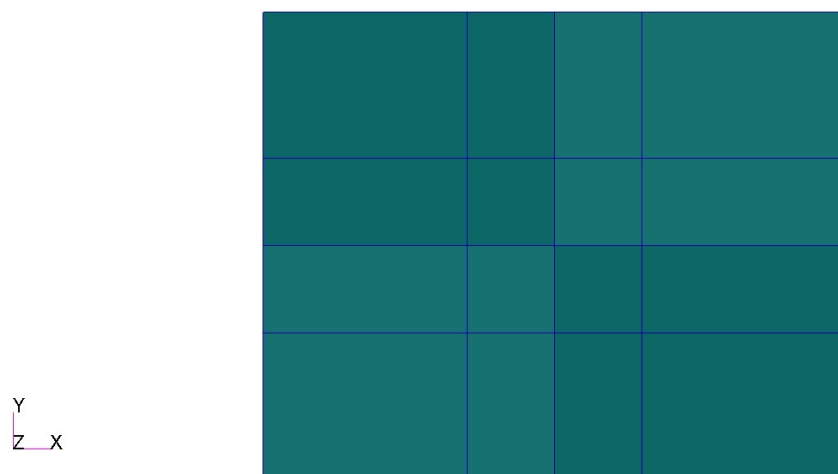
### 2.3.2 Modello Patran-Nastran

Per confrontare i risultati ottenuti dal modello creato su MATLAB, si è utilizzato un modello analogo della piastra realizzato con il pacchetto *MSC Patran-Nastran*. Si è utilizzata una discretizzazione differente da quella descritta in precedenza per consentire la creazione automatica di una *mesh* composta di soli elementi di tipo *QUAD* in formulazione *plane strain*.

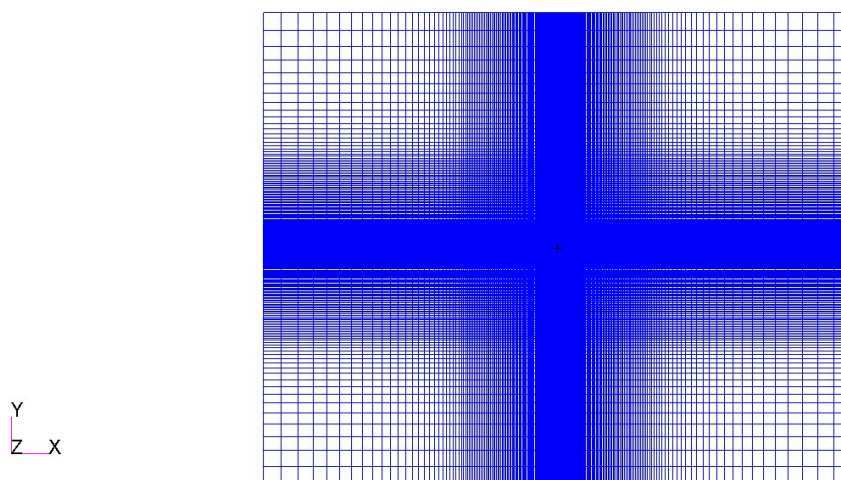
Figura 2.4: Zoom della *mesh* dopo l'introduzione della cricca.



In Figura 2.5-a è possibile osservare la geometria utilizzata per la discretizzazione, unione di 16 superfici, e la *mesh* (Figura 2.5-b) ottenuta andando ad imporre un passo variabile lungo le direzioni  $x, y$  della struttura (pannello inferiore). Così facendo si sono ottenuti elementi quadrati in prossimità dell'apice della cricca, così da non avere problemi di distorsione per quanto riguarda le stime dell'andamento della tensione in questa zona.



(a)



(b)

Figura 2.5: Modello FEM realizzato con il pacchetto *MSC Patran-Nastran*.

## 2.4 Validazione del modello MATLAB

Il modello MATLAB descritto in precedenza è stato validato tramite una serie di *patch test* i cui risultati vengono mostrati in seguito.

### 2.4.1 Trazione monoassiale

La piastra descritta in precedenza è stata deformata imponendo sul lato destro una tensione in direzione  $x$  di intensità  $\sigma = 10 \text{ MPa}$ . Il bordo verticale sinistro è vincolato con blocco delle traslazioni lungo  $x$ , mentre il vertice in basso a sinistra è incernierato. In Figura 2.6 è riportato un confronto tra la configurazione iniziale, in blu, e la deformata ottenuta con un fattore di amplificazione degli spostamenti pari a 600.

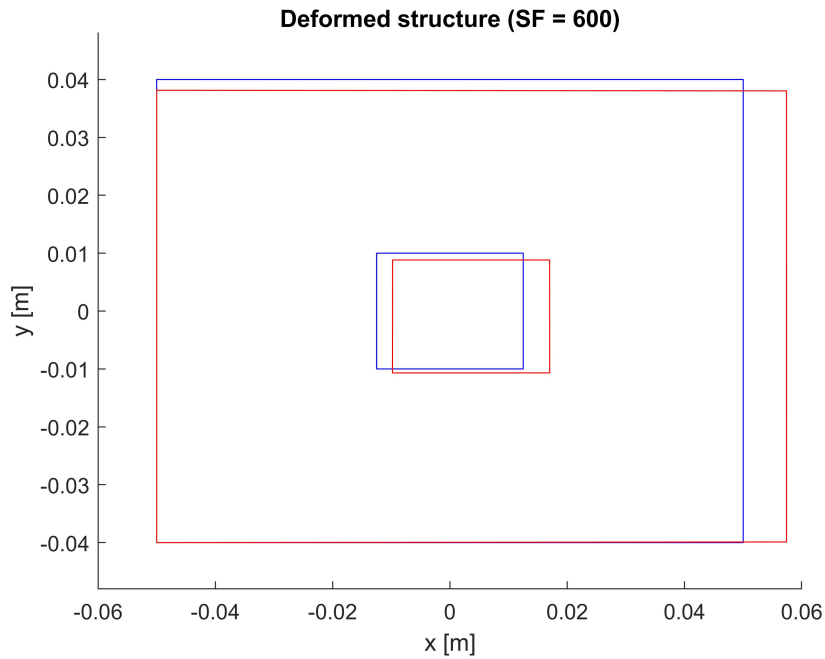


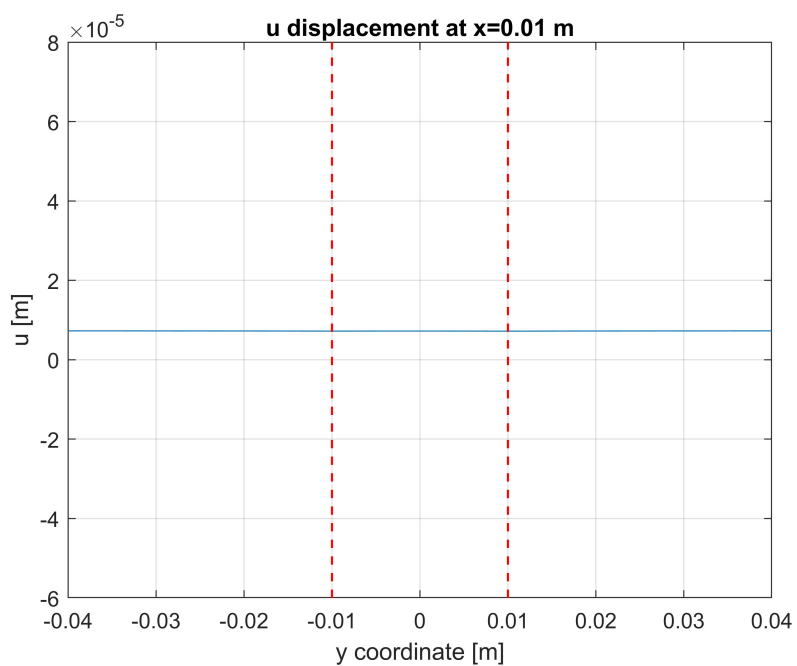
Figura 2.6: Deformazione della piastra a seguito di test di trazione monoassiale, I risultati sono amplificati di 600 volte.

I grafici in Figura 2.7 mostrano l'andamento atteso dello spostamento per  $x$  (Figura 2.7 a) ed  $y$  (Figura 2.7 b) costanti. Le linee rosse tratteggiate delimitano la zona occupata dalla griglia peridinamica.

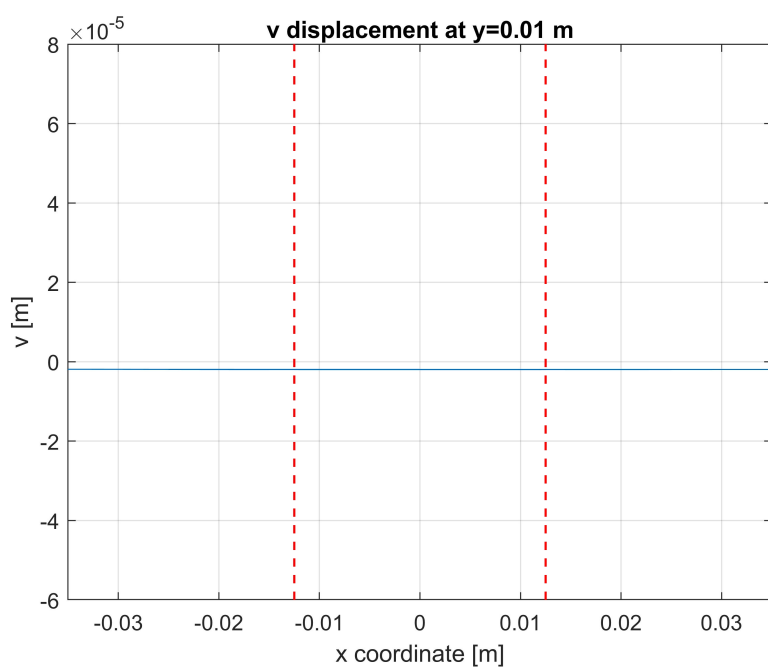
Gli errori relativi, calcolati come

$$\epsilon_{u_{rel}} = \frac{u - u_{th}}{u_{th}}, \quad \epsilon_{v_{rel}} = \frac{v - v_{th}}{v_{th}}. \quad (2.13)$$

dove  $u, v$  sono le componenti dello spostamento predette dal modello e  $u_{th}, v_{th}$  sono le componenti di spostamento previste dalla teoria classica, confermano quanto evidenziato dall'analisi degli spostamenti effettuata in precedenza. Difatti, l'errore commesso è paragonabile alla precisione di macchina.

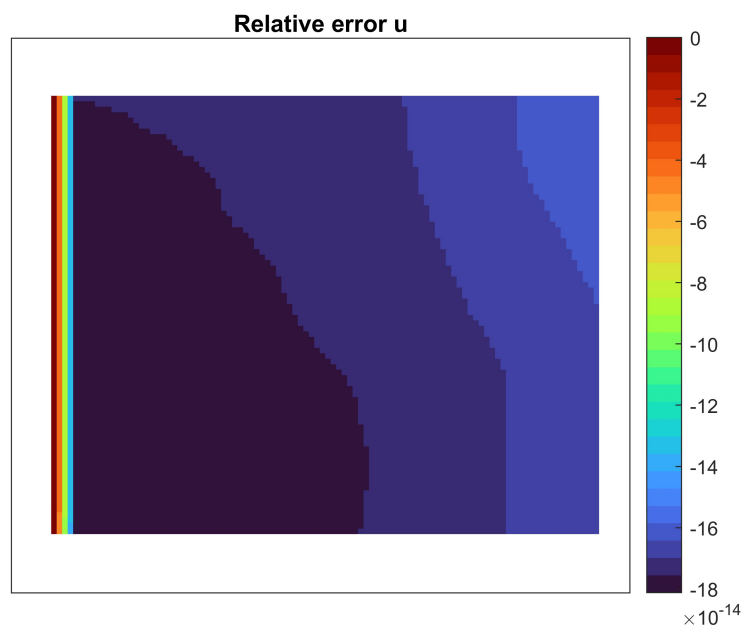


(a)

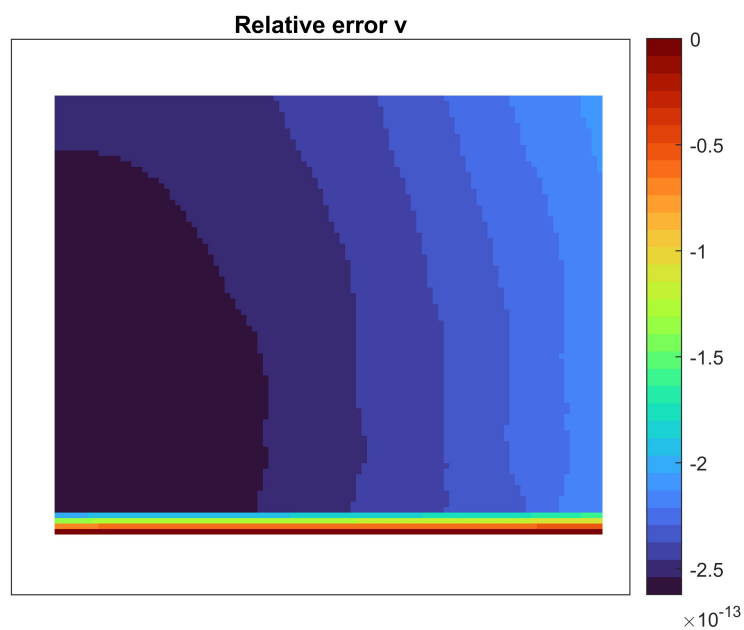


(b)

Figura 2.7: **a)** andamento degli spostamenti ad  $x$  costante per la prova di trazione monoassiale; **b)** andamento degli spostamenti ad  $y$  costante per la prova di trazione monoassiale.



(a)



(b)

Figura 2.8: **a)** errori relativi per componente di spostamento  $u$  in seguito alla prova di trazione monoassiale; **b)** errori relativi per componente di spostamento  $v$  in seguito alla prova di trazione monoassiale.

### 2.4.2 Taglio

Successivamente si è sottoposta la piastra ad uno spostamento del tipo

$$u = \beta y, \quad v = \beta x \quad (2.14)$$

con  $\beta = 0.25$ . Gli spostamenti sono stati applicati solamente ai nodi posti ai bordi della struttura, mentre tutti gli altri sono stati valutati numericamente, ottenendo la deformata in Figura 2.9. Nella stessa figura, i rettangoli interni blu e rosso indicano la zona peridinamica rispettivamente prima e dopo la deformazione.

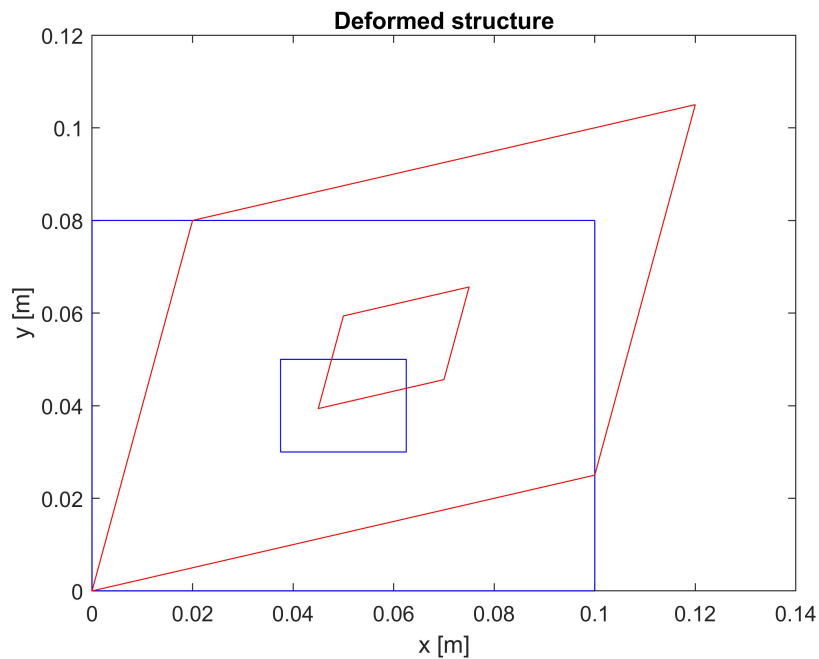
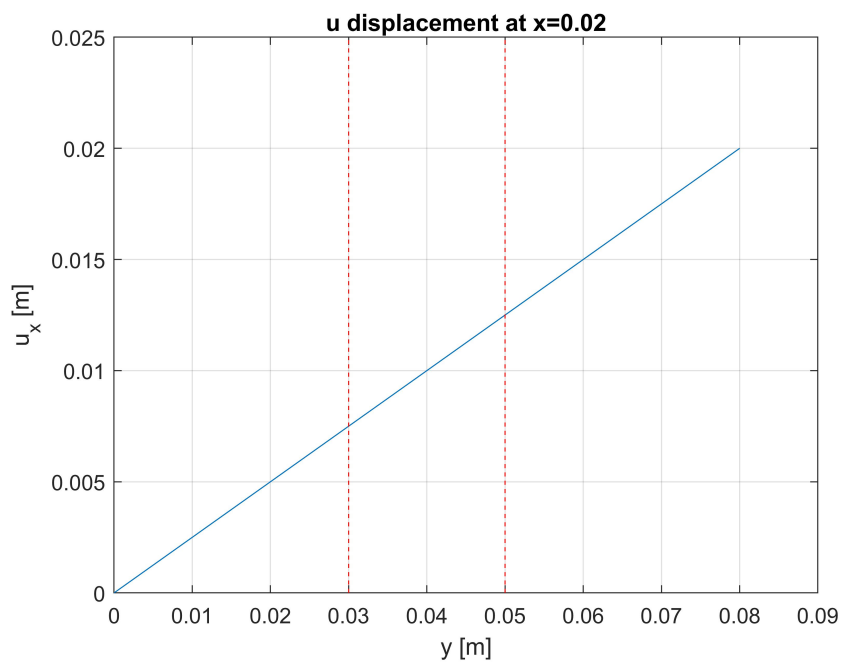


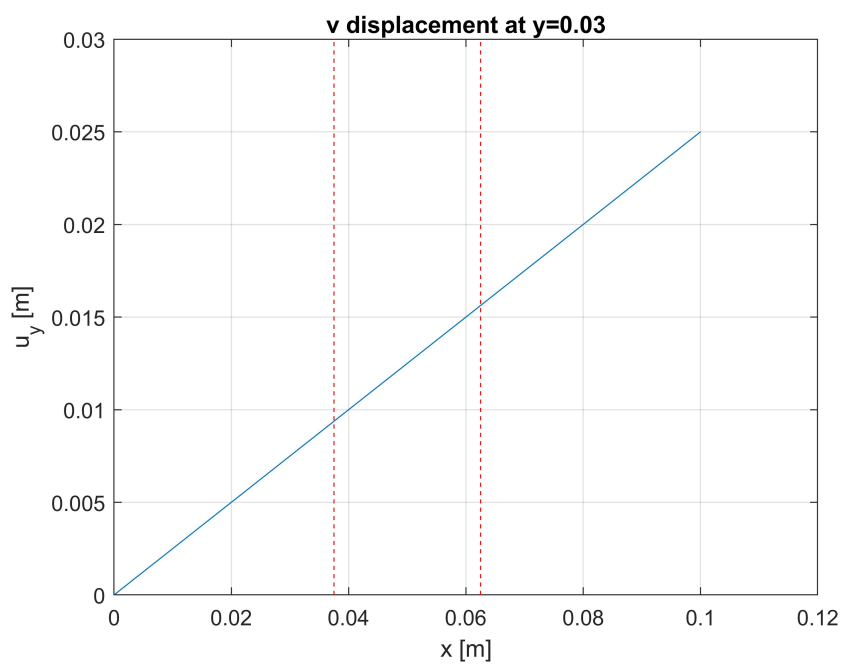
Figura 2.9: Configurazione della piastra a seguito di test di taglio.

In Figura 2.10 è riportato l'andamento degli spostamenti in sezioni effettuate ad  $x$  (Figura 2.10 a) ed  $y$  (Figura 2.10 b) costante. Le linee rosse tratteggiate delimitano la zona occupata dalla griglia peridinamica.

I risultati ottenuti ricalcano fedelmente l'andamento lineare imposto al contorno, comprovando la validità del modello creato.



(a)



(b)

Figura 2.10: **a)** errori relativi per componente di spostamento  $u$  in seguito alla prova di taglio; **b)** errori relativi per componente di spostamento  $v$  in seguito alla prova di taglio.

# Capitolo 3

## Il metodo dei nodi fittizi

Tra tutti i metodi descritti nella sezione 1.5, il più promettente per la mitigazione del *surface effect* in prossimità del bordo di una cricca è il metodo dei nodi fittizi, dato che non prevede di modificare in alcun modo le equazioni della peridinamica. In questo capitolo e nel successivo, dunque, verrà presentato un metodo di implementazione di tale strategia: dapprima si effettuerà un'analisi dello stato dell'arte per quanto riguarda l'applicazione del metodo dei nodi fittizi, in seguito verrà descritto l'algoritmo di implementazione sviluppato per la risoluzione di problemi lineari elastici.

Verranno quindi presentati i risultati ottenuti a valle dell'analisi del modello descritto nel capitolo precedente sottoposto a sollecitazione di modo I. Degli stessi verrà anche fornito un confronto con quanto previsto dal software commerciale *MSC Patran-Nastran*.

### 3.1 Stato dell'arte

Il metodo dei nodi fittizi (*fictitious* o *ghost nodes*) è stato introdotto originariamente per risolvere il problema del *surface effect* nella formulazione *bond-based* della peridinamica in prossimità dei bordi del corpo in esame ([12]). Come accennato nella sezione 1.5, esso si compone sostanzialmente di due step:

1. introdurre in tali zone uno strato di nodi peridinamici di spessore almeno pari a  $\delta$  di modo che venga completato l'orizzonte di tutti i punti del corpo. Tali punti nella realtà non esistono e il loro contributo in termini di massa del sistema viene ignorato, andando a considerare i risultati ottenuti solamente per i nodi realmente appartenenti alla struttura;

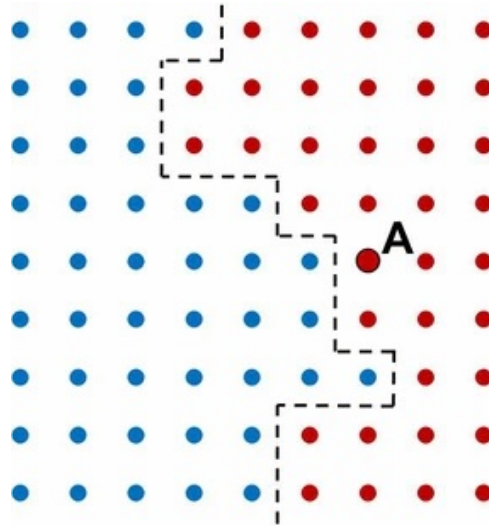


Figura 3.1: Esempio di bordo non rettilineo che separa nodi reali (in blu) da nodi fittizi (in rosso) [20].

2. imporre una particolare forma al campo spostamenti dei nodi fittizi appena creati che permetta di soddisfare le condizioni al contorno desiderate.

Sebbene il metodo sia stato utilizzato con successo anche in problemi con formulazione *state-based* della teoria ([29]), esso è stato principalmente utilizzato per migliorare l'accuratezza delle analisi che utilizzano la formulazione *bond-based* della peridinamica. In particolare, per imporre condizioni di vincolo o di carico al bordo del corpo, viene imposta una specifica forma al campo spostamenti del *layer* di nodi fittizi: Sleson ([30]) ha proposto di scegliere un particolare campo spostamenti da imporre ai nodi fittizi a seconda del caso in esame; Le e Bobaru ([20]) suggeriscono di utilizzare delle funzioni dispari per derivare la forma del campo spostamenti dei nodi fittizi, cercando di rifarsi alle formule della meccanica classica per la sua determinazione. Sono stati finora studiati alcuni schemi iterativi che utilizzano funzioni di tipo seno e polinomiali per l'imposizione delle condizioni di vincolo desiderate.

Più di recente è stato proposto anche il cosiddetto *Taylor-based fictitious node method* il quale, per ogni nodo reale nelle vicinanze del bordo del corpo, trova il corrispondente nodo fittizio lungo la normale locale e ne valuta quindi lo spostamento tramite estrapolazione lineare con sviluppo in serie di Taylor del primo ordine centrata nel nodo reale.

L'utilizzo di questo metodo però presenta sostanzialmente due difficoltà:

- la ricerca del nodo fittizio interagente con ciascuno nodo reale al bordo del corpo è difficile per geometrie più complesse a causa della difficoltà che comporta la definizione della normale locale (Figura 3.1);



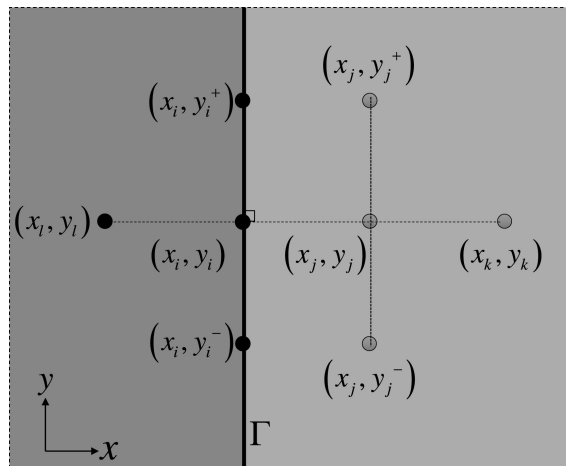


Figura 3.2: Esempio di nodi reali (nella regione grigio scuro sulla sinistra) e nodi fittizi (nella regione più chiara a destra) nell'intorno del nodo  $(x_i, y_i)$  [21].

- lo spostamento imposto al singolo nodo fittizio non è unico poiché dipende dal nodo reale in cui si centra l'espansione in serie.

Scabbia [27] ha recentemente proposto una generalizzazione di questo approccio, valida tanto per la formulazione *state-based* che per la *bond-based peridynamics*, che risolve le problematiche appena descritte andando ad estrapolare gli spostamenti dei nodi fittizi tramite espansione in serie di Taylor di ordine  $n$  centrata nel più vicino nodo reale (*nearest node strategy*). Si ha quindi a disposizione un metodo che non solo garantisce l'unicità degli spostamenti dei nodi fittizi, ma anche facilità e versatilità nell'implementazione per geometrie di qualsiasi tipologia.

Ancora, Liu [21] ha proposto un'estensione del metodo dei nodi fittizi che esula dalla definizione di funzioni di interpolazione per la derivazione degli spostamenti da imporre a tali nodi. Con riferimento alla Figura 3.2 l'idea è, infatti, quella di andare a derivare gli spostamenti di ciascun nodo fittizio  $(x_j, y_j)$  non solo in funzione di quelli del nodo reale più vicino  $(x_i, y_i)$ , ma anche delle componenti di spostamento dei nodi fittizi che circondano il nodo  $(x_j, y_j)$ . Questo approccio, per quanto efficace nell'applicazione di condizioni di carico ai bordi della struttura, rimane però utilizzabile solo per geometrie semplici e può addirittura mostrarsi controproducente per problemi più complessi.

## 3.2 Algoritmo di implementazione

Come anticipato alla fine del Capitolo 1, lo scopo di questo lavoro è andare a testare l'impatto della sola introduzione di un layer di nodi fittizi in prossimità del bordo di una cricca. Per analisi lineari statiche, una volta introdotta la cricca iniziale, si è proceduto ad individuare tutti i nodi reali con orizzonte incompleto. In corrispondenza degli stessi sono stati creati i rispettivi nodi fittizi, suddivisi in due gruppi differenti:

- il primo è situato al di sopra della cricca ed è responsabile del completamento dell'orizzonte dei nodi reali posti al di sotto della cricca iniziale;
- il secondo, viceversa, è situato al di sotto della cricca ed è responsabile del completamento dell'orizzonte dei nodi reali posti al di sopra di essa.

Il *bond* tra nodo reale e nodo fittizio corrispondente viene creato in modo automatico seguendo gli step di seguito:

1. nota la posizione del nodo reale, vengono ricercati tutti i nodi fittizi con cui esso può interagire ad una distanza massima di  $\delta$ . Viene assemblata una matrice che contiene nella prima colonna di ciascuna riga l'indice del nodo reale in esame, in tutte le altre gli indici dei nodi fittizi trovati. Lo stesso processo viene effettuato al contrario per i nodi fittizi, assemblando la matrice che contiene nella prima colonna di ciascuna riga l'indice del nodo fittizio in esame, in tutte le altre gli indici dei nodi reali trovati;
2. viene tracciata la linea, rappresentativa del *bond*, che collega il nodo reale a ciascun nodo fittizio (e viceversa) identificato al passo precedente;
3. si verifica se ciascun *bond* interseca la linea rappresentativa della cricca iniziale (posizionata ad  $y_{cut}$ ): se vi è intersezione gli indici dei nodi alle estremità del *bond* vengono salvati, viceversa il collegamento viene eliminato annullando la colonna corrispondente in ciascuna delle matrici descritte in precedenza.

A valle di questo processo si ottengono i *bond* riportati in Figura 3.3 e Figura 3.4 . Si nota inoltre come questo processo sia capace di gestire anche il completamento dell'orizzonte dei punti in corrispondenza dell'apice della cricca, a patto di estendere i due gruppi di nodi fittizi al di là dell'apice di una quantità  $\delta$ . In Figura 3.5 è riportato una rappresentazione di tutti i *bond* connessi ad un nodo peridynamico posto al di sopra e al di sotto della cricca. In giallo sono riportati i *bond* con nodi reali, in rosso e in verde i *bond* con i nodi fittizi corrispondenti.

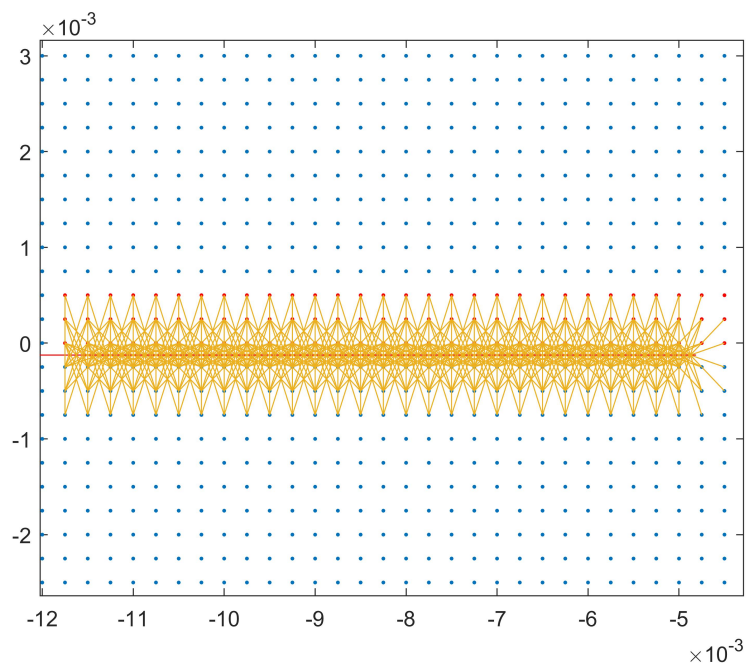


Figura 3.3: *Bond* creati tra i nodi fittizi posti al di sopra della cricca (in rosso) e i nodi reali posti al di sotto.

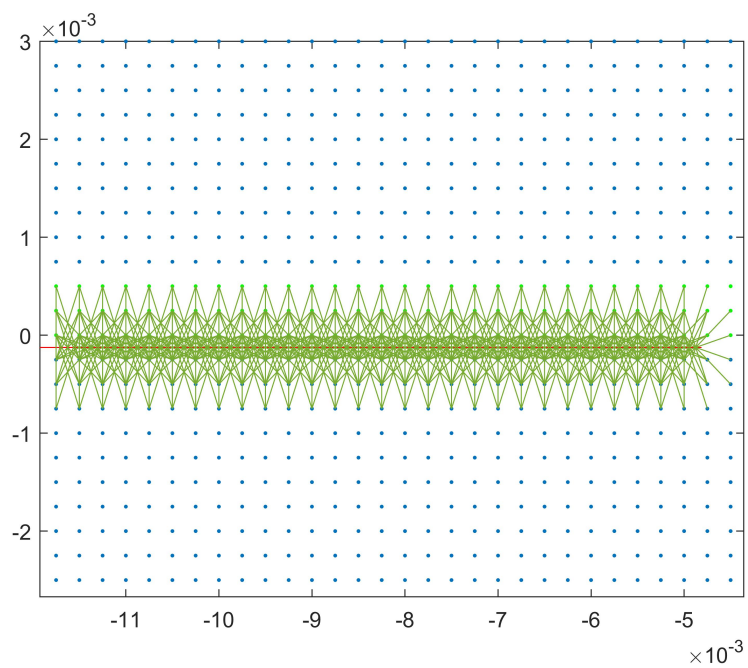


Figura 3.4: *Bond* creati tra i nodi fittizi posti al di sotto della cricca (in verde chiaro) e i nodi reali posti al di sopra.

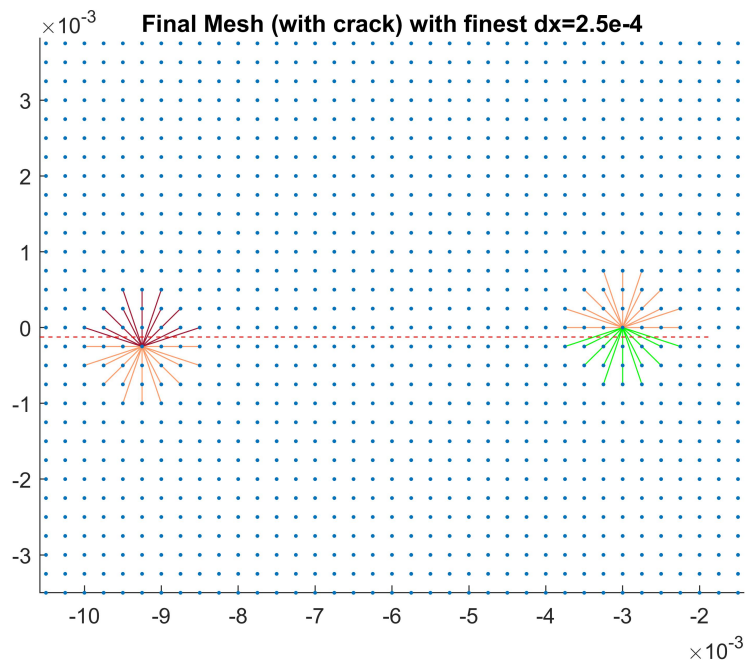


Figura 3.5: Esempio di rappresentazione di tutti *bond* connessi ad un nodo peridamico da entrambi i lati della cricca.

La creazione di due gruppi separati di nodi fittizi è necessaria anche per gestire correttamente l'interazione tra gli stessi: si devono infatti far interagire i nodi fittizi solamente con quelli appartenenti allo stesso gruppo, ovvero posizionati dallo stesso lato della cricca iniziale, di modo che sia possibile, in fase di soluzione, permettere la loro sovrapposizione (un esempio è riportato in Figura 3.6).

Una volta create, dunque, le matrici che gestiscono l'interazione tra nodi fittizi nel modo corretto, è possibile procedere all'assemblaggio della matrice di rigidità globale e quindi alla soluzione del problema con carico assegnato.

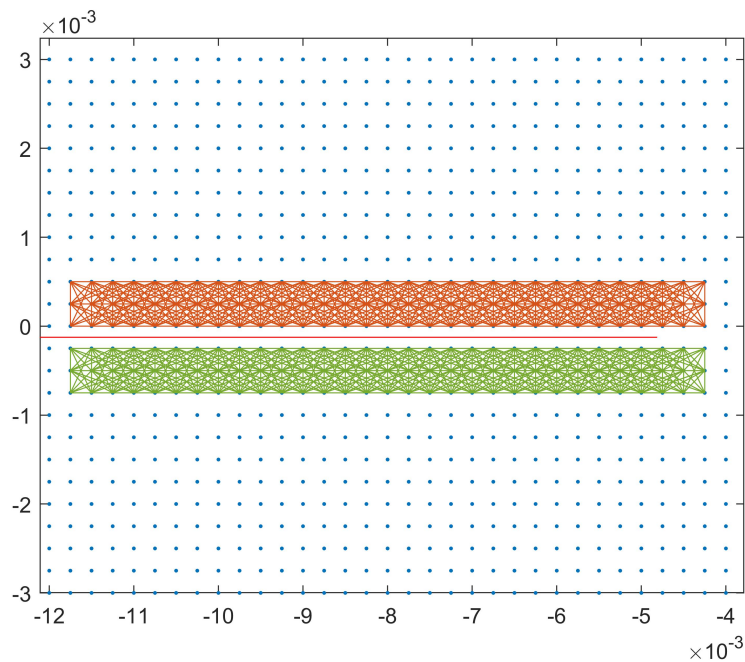


Figura 3.6: *Bond* creati tra i nodi fittizi posti dallo stesso lato della cricca.

### 3.3 Esempi numerici

Per verificare la validità dell'algoritmo implementato, sono stati creati tre modelli differenti a partire da quello descritto nel Capitolo 2:

**Modello A** realizzato con una *mesh* costituita da soli elementi finiti;

**Modello B** realizzato con una *mesh* ibrida FEM-peridinamica, con i nodi peridinamici posti nella parte centrale della piastra;

**Modello C** realizzato con una *mesh* ibrida FEM-peridinamica, con i nodi peridinamici posti nella parte centrale della piastra. In tale modello è stato implementato il metodo dei nodi fittizi lungo il bordo della cricca come descritto nella sezione precedente.

Si sono dunque imposte le condizioni di vincolo e di carico, in particolare:

- sul lato inferiore e superiore della piastra si è imposto un carico simmetrico pari a  $\sigma = 1 \text{ MPa}$ ;
- sui nodi posti sul lato destro della piastra sono stati incernierati i nodi posti ad  $y = \pm \Delta x_1 / 2$ .

Si sono infine confrontati i risultati ottenuti per i vari modelli, caratterizzati da  $\Delta x_1 = 0.05 \text{ mm}$ , in termini di spostamento e di tensione in prossimità dell'apice della cricca.

### 3.3.1 Campo spostamenti

Prendendo la soluzione ottenuta con il Modello A come riferimento, l'analisi delle Figure 3.7,3.8, Figura 3.9, Figura 3.10 mostra come l'implementazione dei nodi fittizi permetta di raggiungere risultati più in accordo con la soluzione FEM, in particolare in prossimità dell'apice della cricca. È altresì evidente che, poiché si va ad irrigidire la struttura in una regione abbastanza contenuta, questa differenza sia via via meno evidente man mano che si diminuisce la dimensione dell'orizzonte.

Le Figure 3.11,3.12 mostrano invece le differenze relative ottenute come

$$\epsilon_{i_{rel}} = \frac{u_{i_{FEM-PD}} - u_{i_{FEM}}}{u_{i_{FEM}}} \quad (3.1)$$

nella quale  $u_i$  è la  $i$ -esima componente dello spostamento. Anche l'analisi delle Figure 3.13, 3.14 conferma quindi i risultati discussi in precedenza. Si nota però come l'effetto dei nodi fittizi si avverta di più lungo la componenti  $x$  che lungo la componente  $y$  dello spostamento.

Le Figure 3.15, 3.16, 3.17 mostrano un confronto diretto tra i risultati ottenuti con il modello peridinamico classico e il modello peridinamico al quale è stato applicato il metodo dei nodi fittizi, avendo preso i risultati del Modello C come riferimento. La loro analisi conferma la validità dell'algorithm utilizzato, poichè viene evidenziato come esso riesca ad irrigidire correttamente la struttura in prossimità dei bordi della cricca iniziale e in corrispondenza del suo apice.

### 3.3.2 Stato di tensione

Il confronto tra gli stati di tensione predetti nei dintorni dell'apice della cricca nel riferimento globale di struttura è stato possibile facendo ricorso all'Algoritmo 1, come proposto in [22]. Nelle Figure 3.18-3.19 sono presentati gli stati tensionali

```

 $\sigma_i = 0$  (Inizializzazione tensore di tensione al nodo  $x_i$ )
for all  $x_j \in H_{x_i}$  ( $H_{x_i}$  è l'insieme dei nodi famiglia di  $x_i$ ) do
   $\xi = x_j - x_i$ 
   $\eta = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$ 
   $s = \frac{\|\eta + \xi\| - \|\xi\|}{\|\xi\|}$ 
   $\mathbf{f} = \frac{\eta + \xi}{\|\eta + \xi\| - \|\xi\|} csV_j$ 
   $\sigma_i = \sigma_i + \frac{1}{2} \mathbf{f} \otimes \xi$ 
end

```

**Algoritmo 1:** Calcolo del tensore delle tensioni per problemi peridinamici *bond-based* 2D al nodo  $x_i$  ([22]).

predetti dai modelli peridinamici: se confrontati con quanto previsto dal modello *MSC Patran-Nastran*, si nota come la presenza dei nodi fittizi abbia un contributo contenuto sull'accuratezza dei risultati. Quanto ottenuto è tuttavia in accordo con quanto previsto in [33].

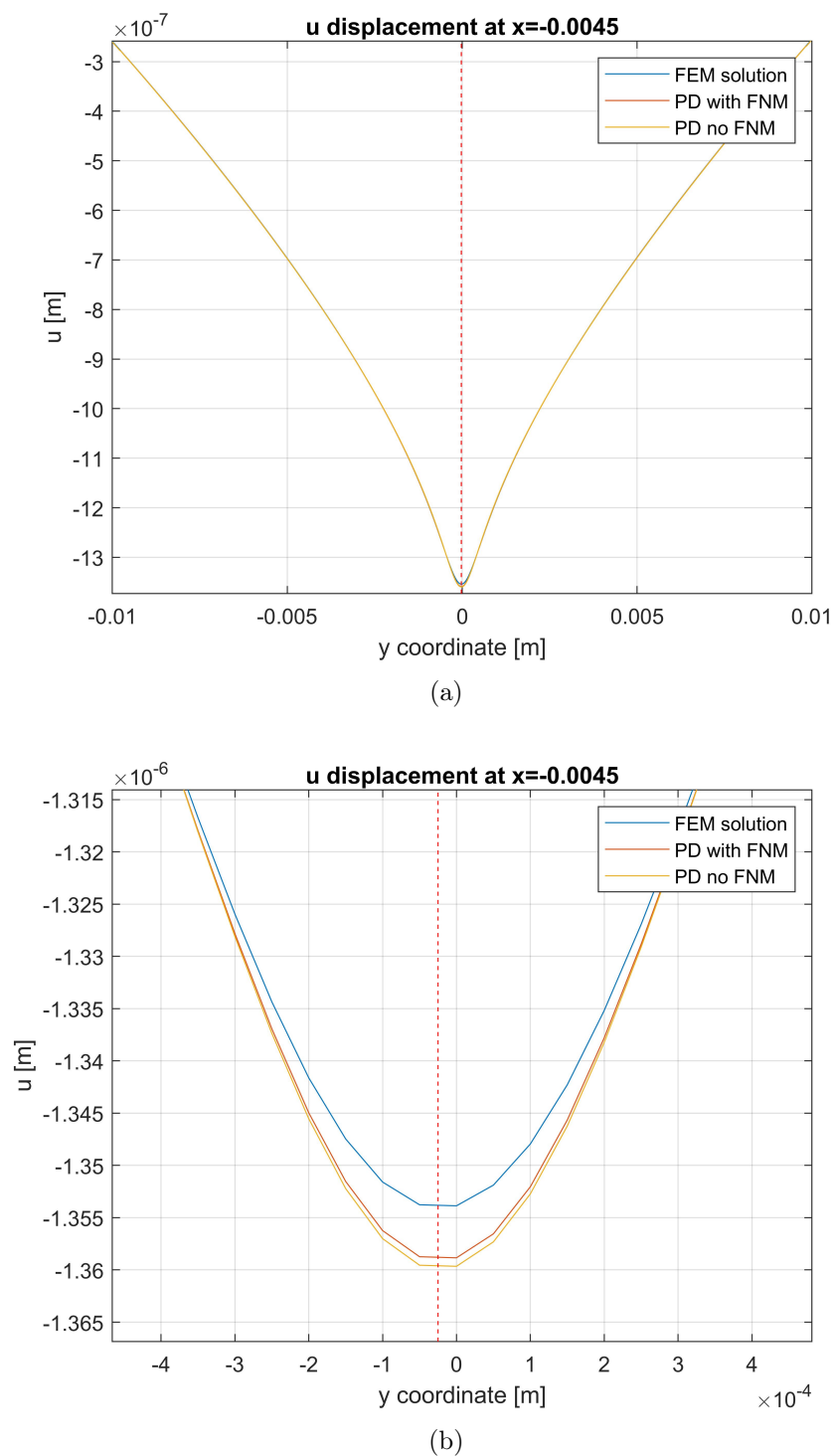


Figura 3.7: **a)** andamento della componente  $u$  dello spostamento per  $x$  costante; **b)** zoom sulla zona in prossimità della cricca.



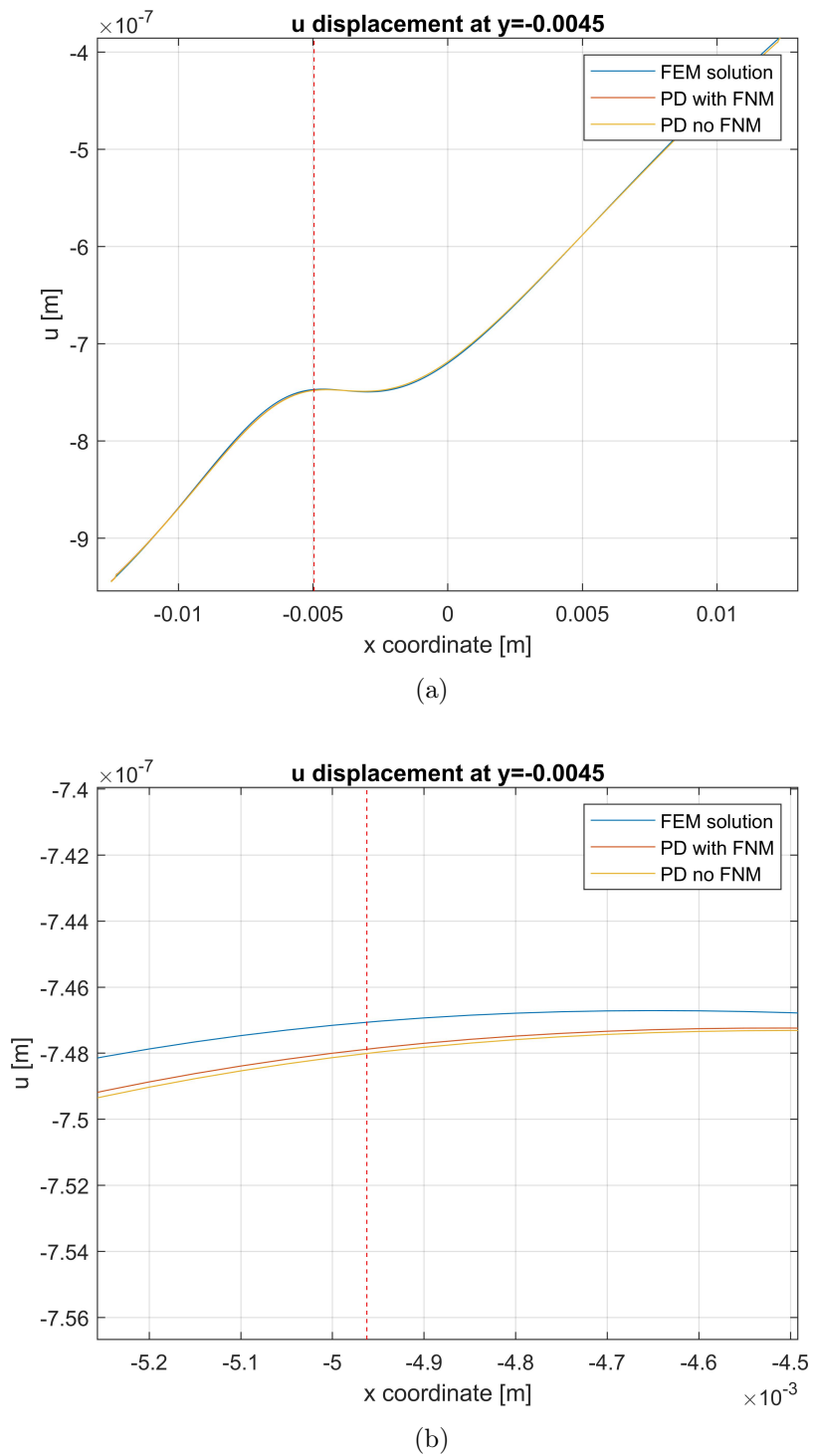
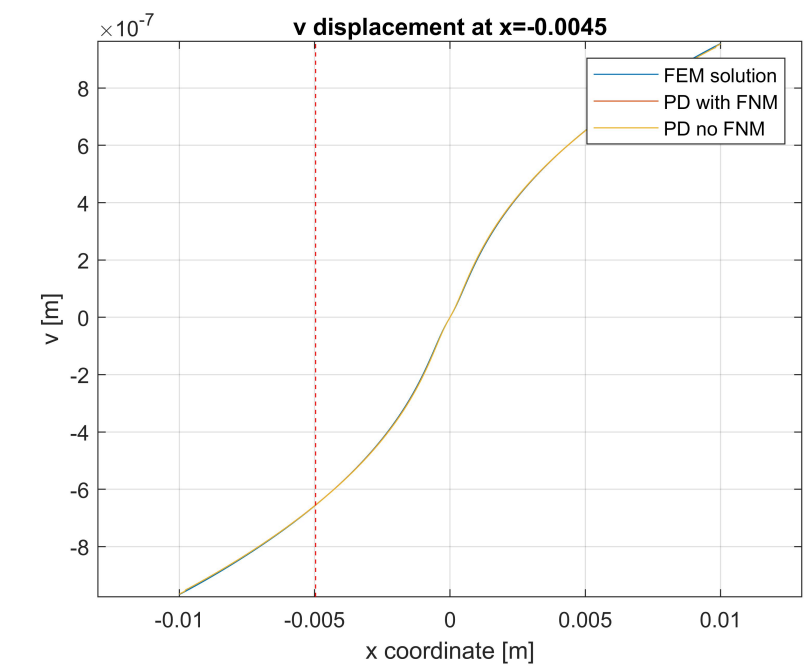
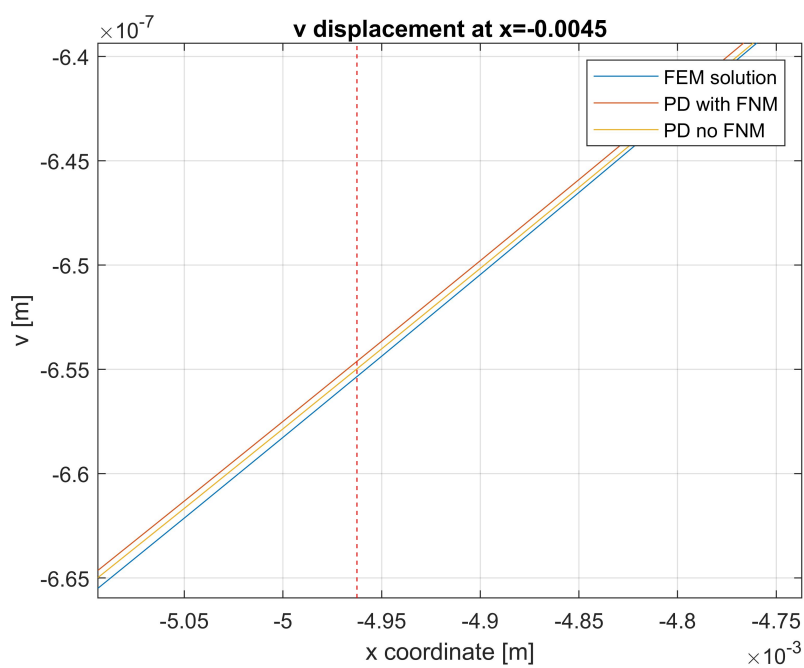


Figura 3.8: **a)** andamento della componente  $u$  dello spostamento per  $y$  costante; **b)** zoom sulla zona in prossimità della cricca.

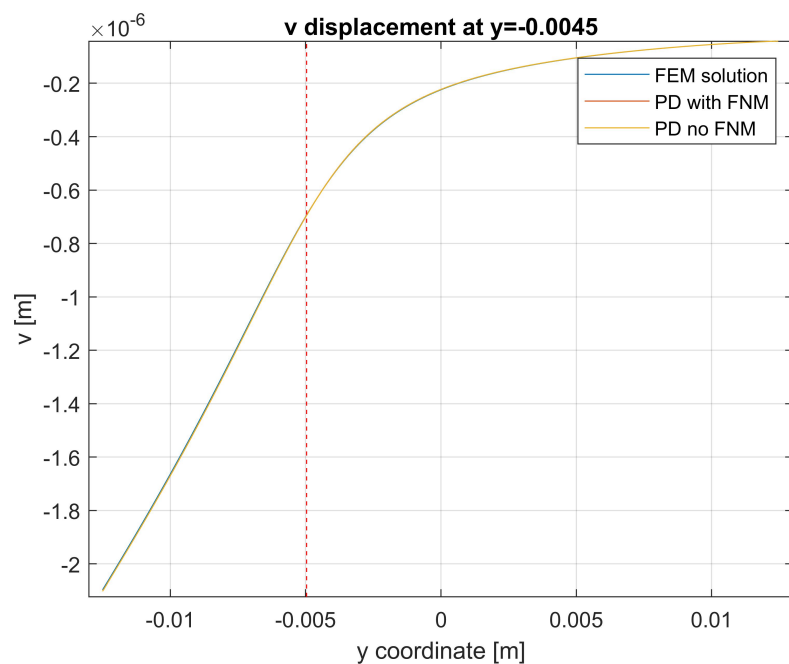


(a)

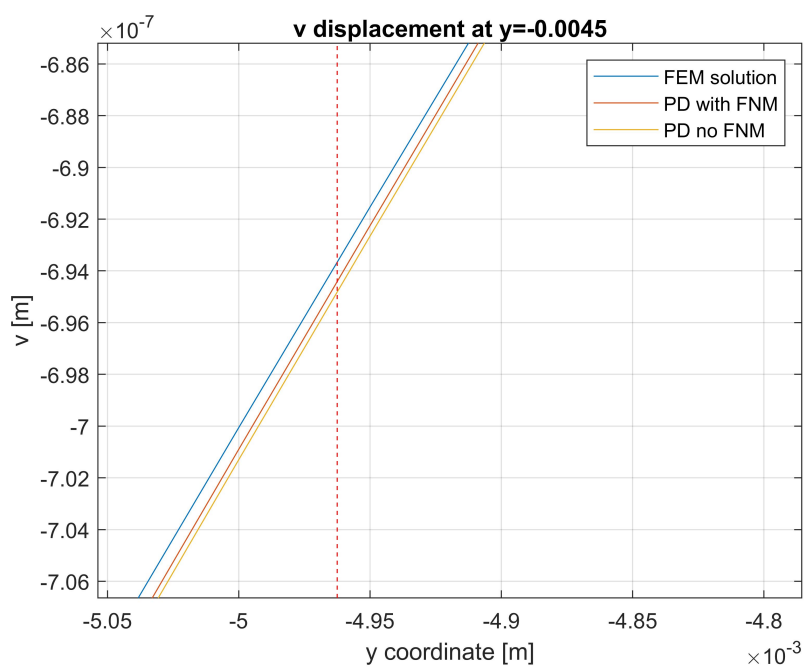


(b)

Figura 3.9: **a)** andamento della componente  $v$  dello spostamento per  $x$  costante; **b)** zoom sulla zona in prossimità della cricca.

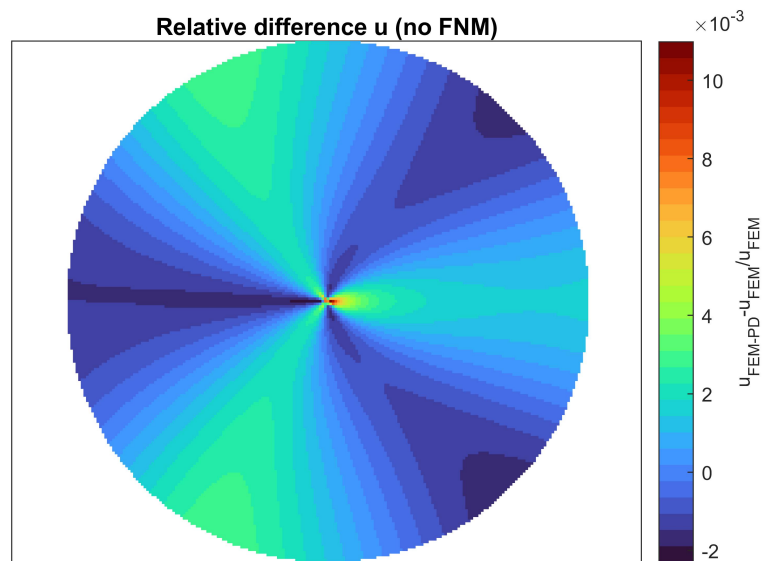


(a)

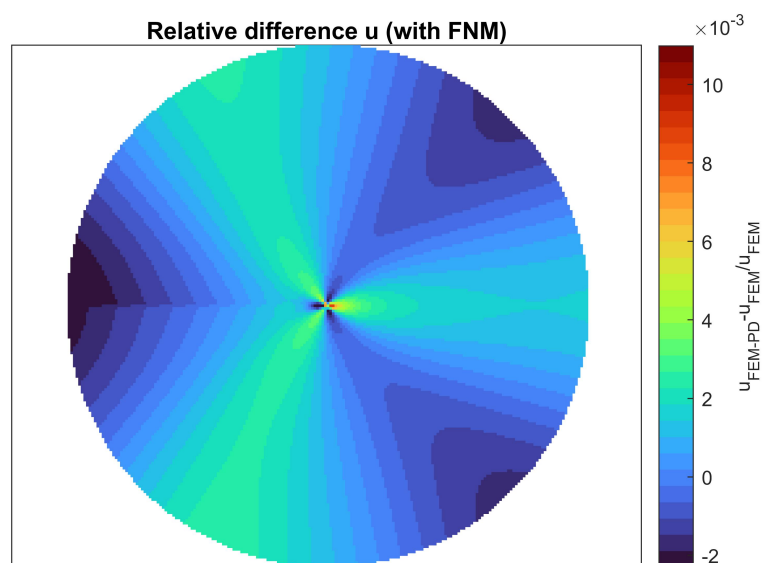


(b)

Figura 3.10: a) andamento della componente  $v$  dello spostamento per  $y$  costante; b) zoom sulla zona in prossimità della cricca.

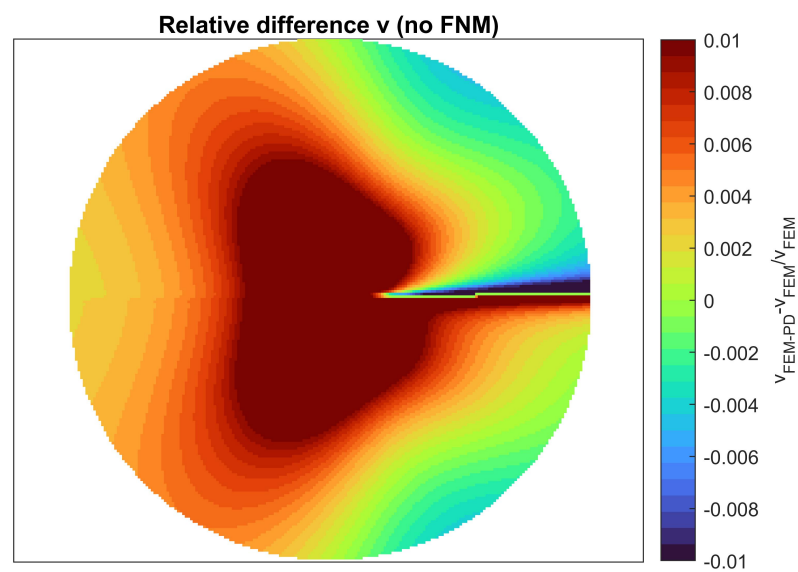


(a)

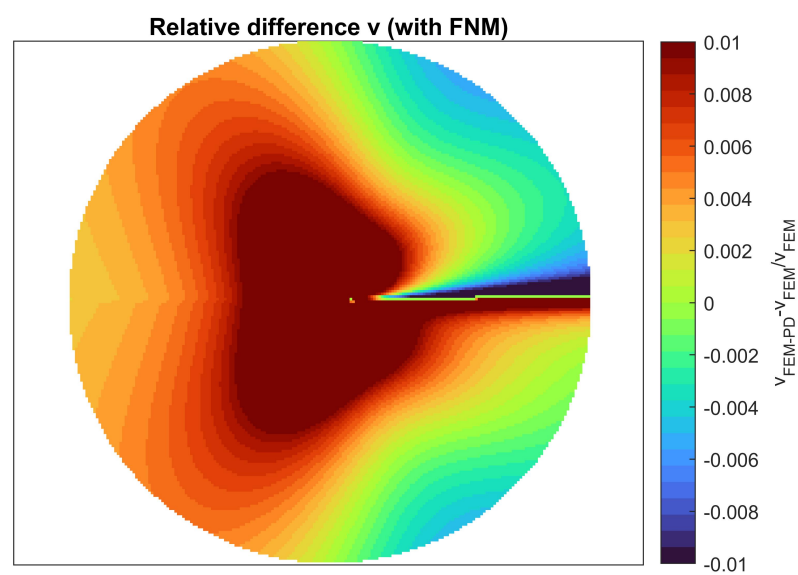


(b)

Figura 3.11: Andamento delle differenze relative per la componente orizzontale dello spostamento: **a)** risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione peridinamica classica; **b)** risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione peridinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi (FNM).

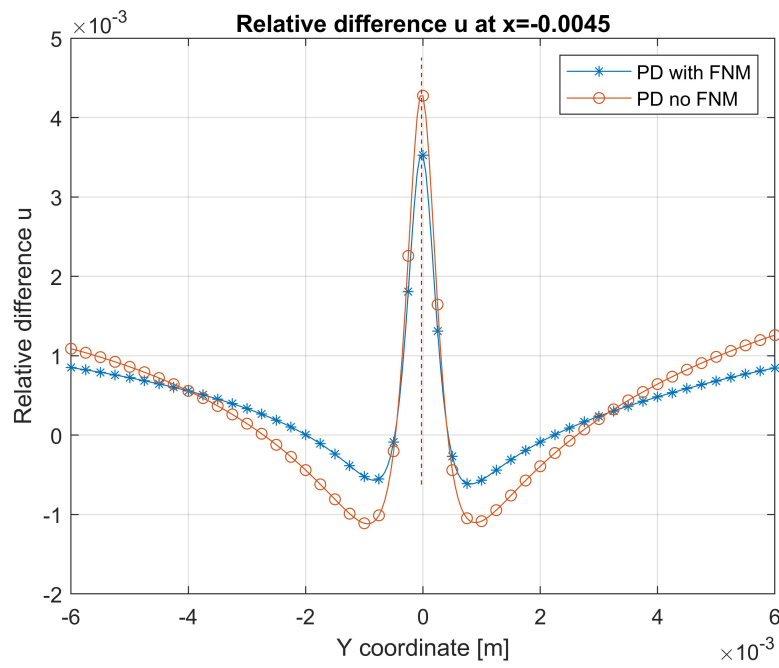


(a)

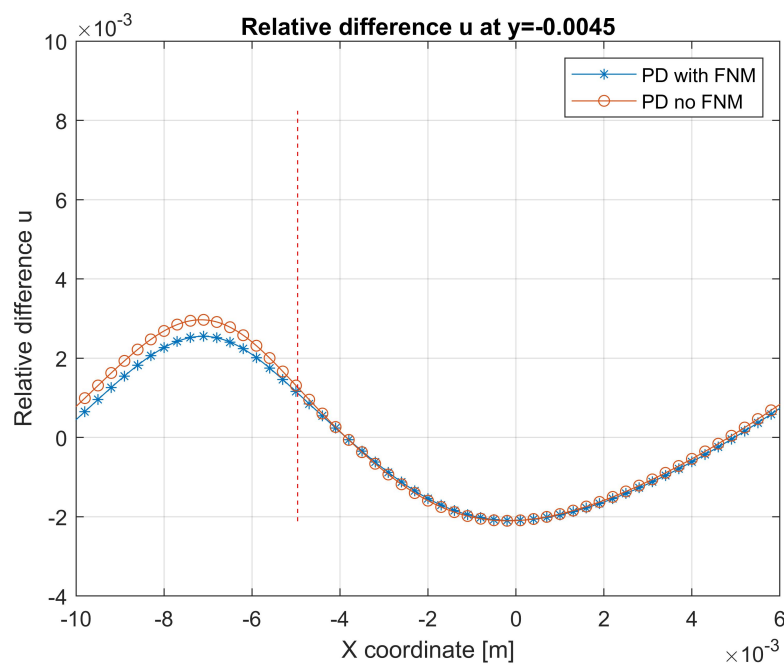


(b)

Figura 3.12: Andamento delle differenze relative per la componente verticale dello spostamento: **a)** risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione peridinamica classica; **b)** risultati relativi al confronto tra la soluzione FEM e la soluzione peridinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi (FNM).

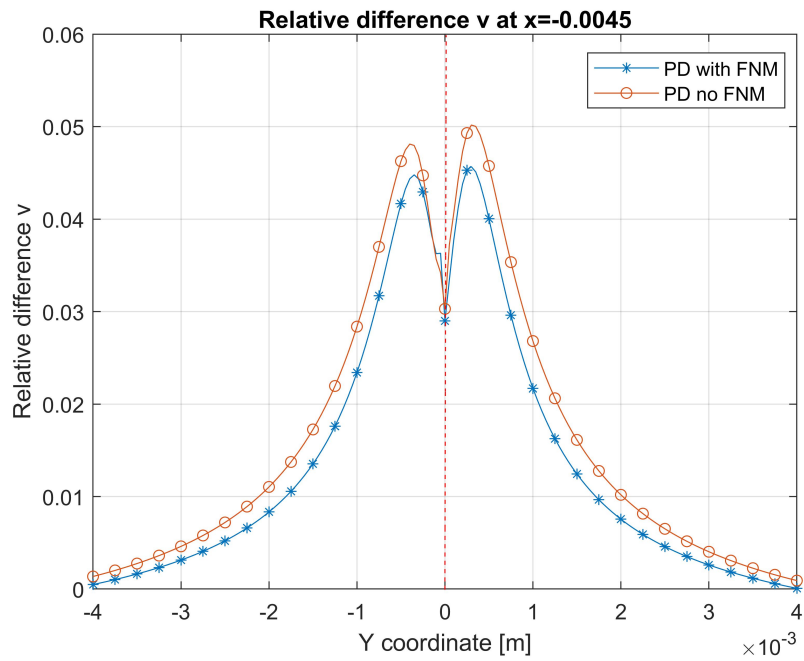


(a)

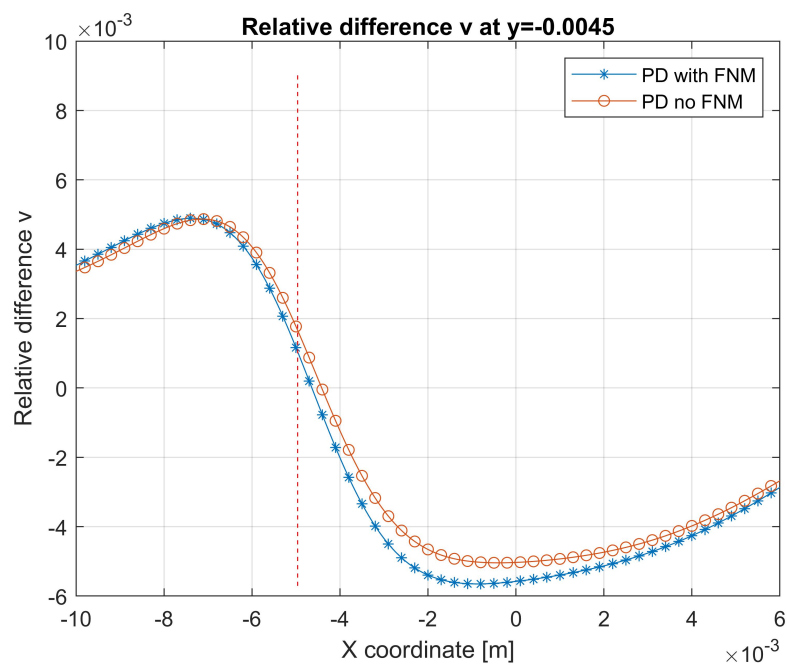


(b)

Figura 3.13: Andamento delle differenze relative per la componente orizzontale di spostamento: **a)** ad  $x$  costante; **b)** ad  $y$  costante.

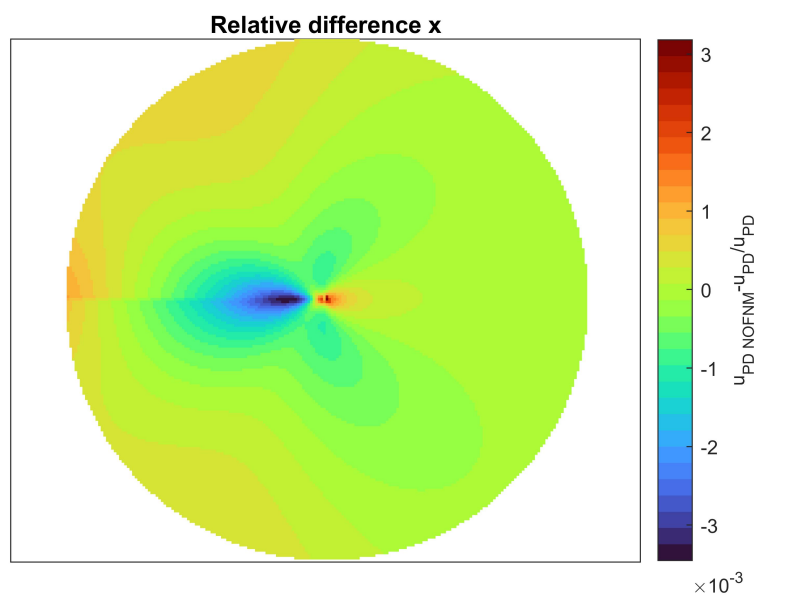


(a)

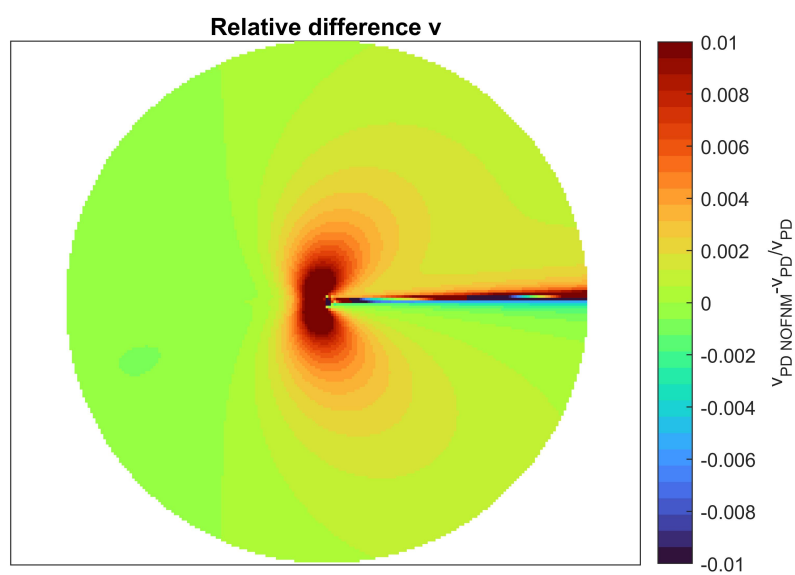


(b)

Figura 3.14: Andamento delle differenze relative per la componente verticale di spostamento: **a)** ad  $x$  costante; **b)** ad  $y$  costante.



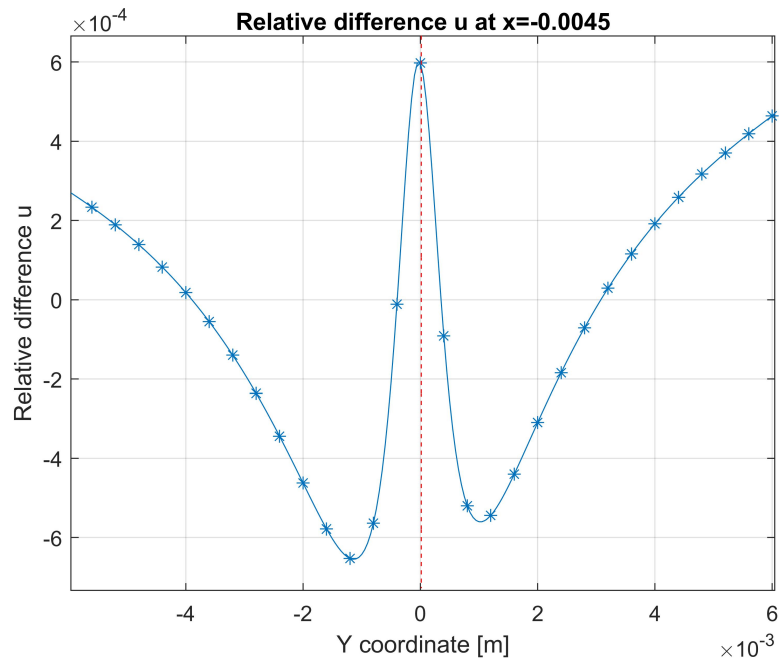
(a)



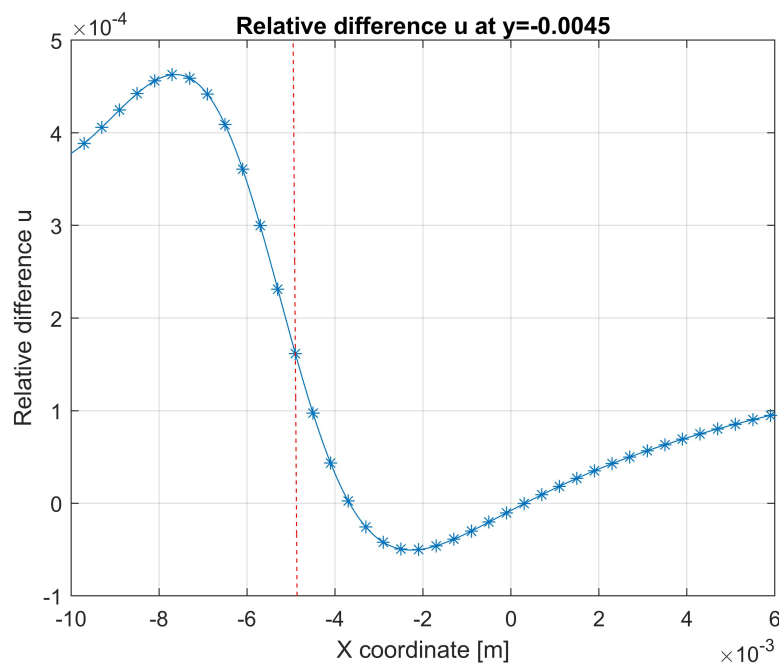
(b)

Figura 3.15: Andamento delle differenze relative per il confronto tra la soluzione peridinamica classica e la soluzione peridinamica con applicazione del metodo dei nodi fittizi: **a)** risultati relativi alla componente orizzontale dello spostamento; **b)** risultati relativi alla componente verticale dello spostamento.



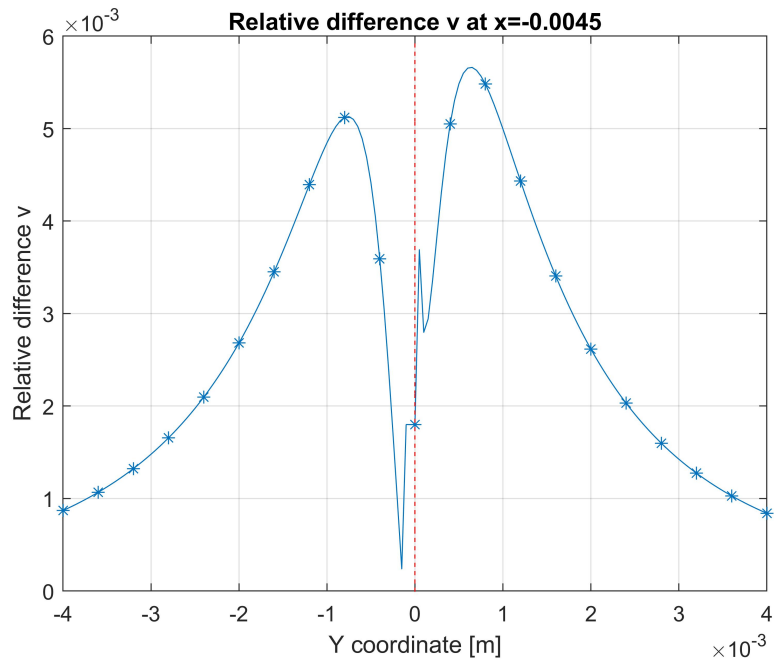


(a)

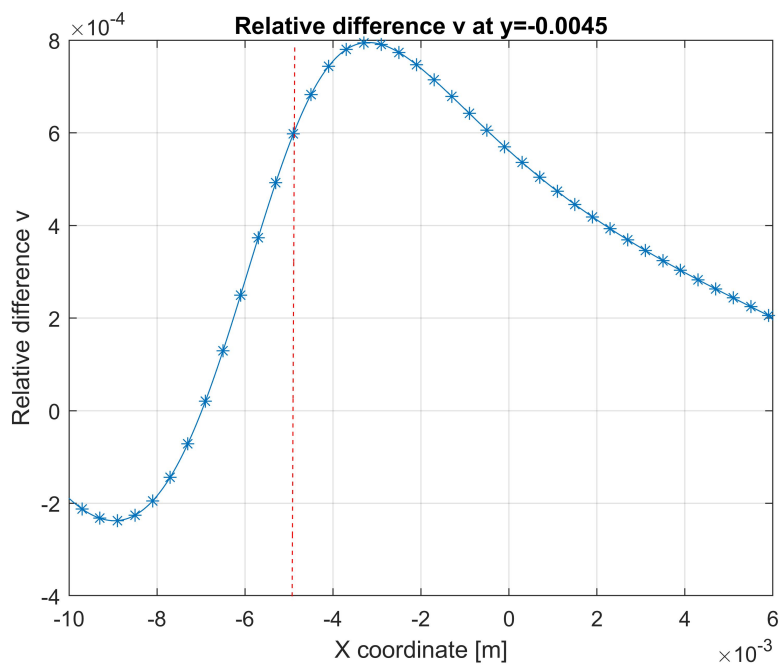


(b)

Figura 3.16: Confronto tra i risultati del modello peridynamico classico e del modello peridynamico con applicazione del metodo dei nodi fittizi: andamento delle differenze relative per la componente orizzontale di spostamento: **a)** ad  $x$  costante; **b)** ad  $y$  costante.

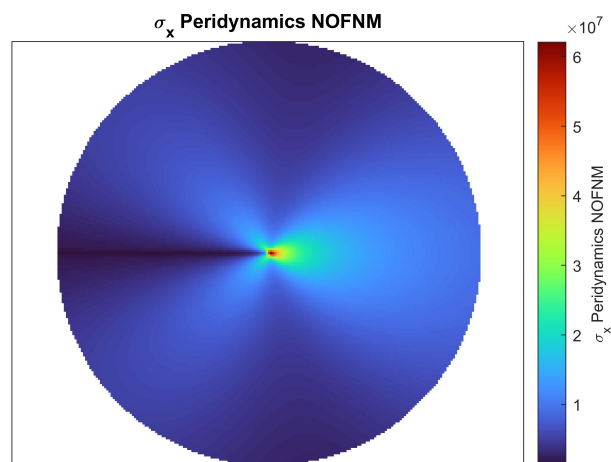


(a)

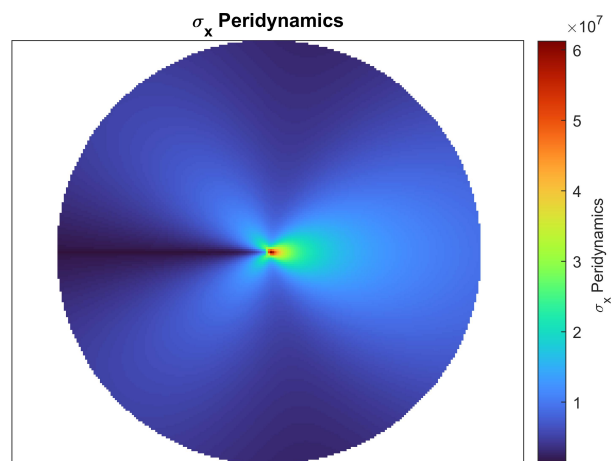


(b)

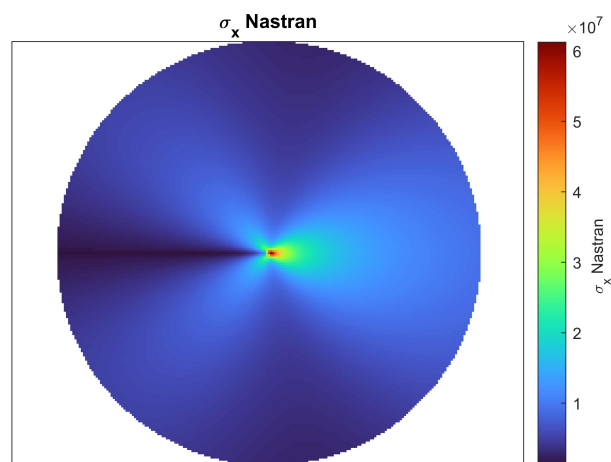
Figura 3.17: Confronto tra i risultati del modello peridynamico classico e del modello peridynamico con applicazione del metodo dei nodi fittizi: andamento delle differenze relative per la componente verticale di spostamento: **a)** ad  $x$  costante; **b)** ad  $y$  costante.



(a)

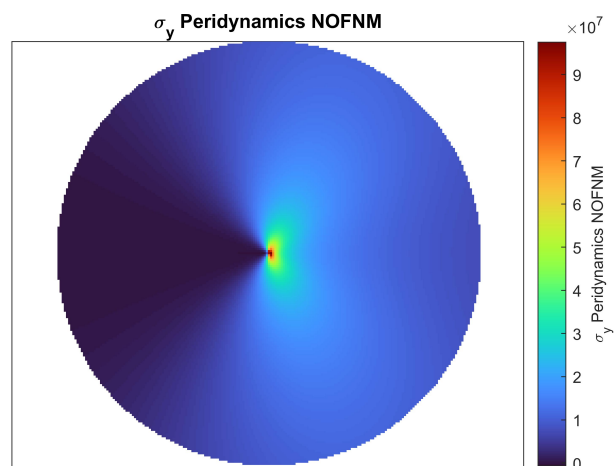


(b)

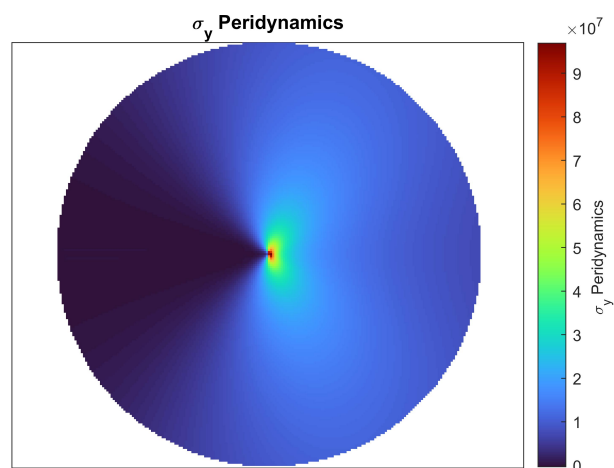


(c)

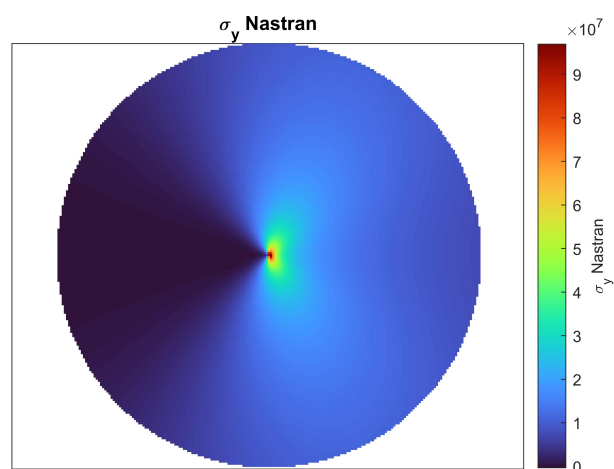
Figura 3.18: Stato di tensione in direzione  $x$  previsto: **a)** dal modello peridinamico classico; **b)** dal modello peridinamico in presenza di nodi fittizi; **c)** dal modello FEM creato con *MSC Patran-Nastran*.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.19: Stato di tensione in direzione  $y$  previsto: **a**) dal modello peridinamico classico; **b**) dal modello peridinamico in presenza di nodi fittizi; **c**) dal modello FEM creato con *MSC Patran-Nastran*.

# Capitolo 4

## Crack propagation

### 4.1 Approccio Analisi lineare in sequenza

La capacità della peridinamica di prevedere il percorso di propagazione di una cricca in modo naturale per strutture sottoposte a carichi che superino il limite del comportamento lineare del materiale è una delle forze di questo approccio.

Si è dunque voluto andare ad indagare se l'introduzione di un *layer* di nodi fittizi che segua la cricca nella sua propagazione possa impattare i risultati delle analisi non lineari. Per far questo si è fatto riferimento al metodo descritto da Tao in [5], definito *sequentially linear analysis* (SLA), il quale prevede di aggiornare la matrice di rigidezza in maniera da rimuovere singolarmente ogni *bond* che arriva a rottura. Dato infatti il comportamento lineare-fragile dei legami creati, la struttura modellata si comporta linearmente finchè non viene raggiunto il carico per cui si rompe il primo *bond*. È necessario a quel punto eliminare il contributo del legame rotto dalla matrice di rigidezza globale, procedendo ad un suo aggiornamento. La struttura è modificata e si comporta linearmente fino alla rottura del *bond* successivo.

La SLA permette di aggiornare la matrice di rigidezza globale partendo dalla considerazione che la porzione della matrice di rigidezza da modificare è esclusivamente quella generata dalla griglia peridinamica, mentre quella dalla *mesh* FEM non cambia.

Di seguito si elencano i passaggi di tale metodo:

1. risoluzione del problema lineare sotto le volute condizioni di carico;
2. ricerca del *bond* con allungamento massimo: se  $s_{max} < s_0$  sono soddisfatte le equazioni di equilibrio per il dato carico, viceversa se  $s_{max} > s_0$  il carico va moltiplicato per il rapporto  $s_0/s_{max}$  per forzare la rottura del singolo *bond* trovato;

3. si procede dunque alla rimozione del suo contributo dalla matrice di rigidità globale;
4. si ripetono i passi 1-3 andando a rimuovere i singoli bond che nel corso dell'analisi arrivano a rottura.

Il metodo è il più dispendioso in termini tempi di calcolo, tuttavia è il più preciso tra quelli proposti in [5]. Nondimeno, data la sua capacità di identificare con facilità il singolo *bond* da eliminare, si è rivelato il più adatto a gestire l'introduzione di nodi fittizi. Nel seguito dunque verranno illustrate le modifiche apportate a quanto appena descritto per permettere l'implementazione del metodo dei nodi fittizi anche per problemi di propagazione della cricca.

## 4.2 Work-flow dello schema utilizzato

Per lo studio della propagazione della cricca nella struttura descritta nella sezione 2.3, alla quale inizialmente sono state apportate le modifiche descritte nella sezione 3.2 per la gestione della cricca iniziale, si è imposto uno spostamento pari a  $v = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , suddiviso in 150 incrementi, sui vertici del lato sinistro in maniera simmetrica (Figura 4.1).

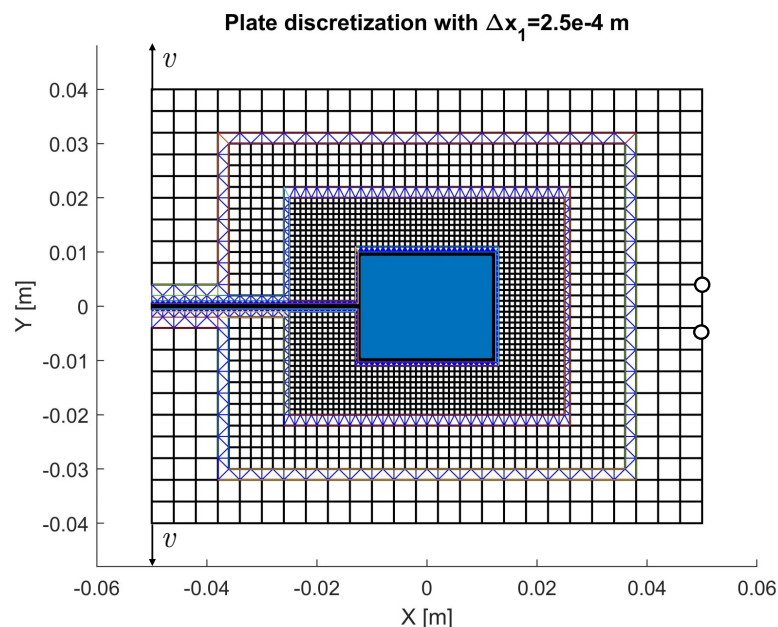


Figura 4.1: Rappresentazione delle condizioni di vincolo e di carico imposte per analisi non lineari.

Per la fase di identificazione e rottura del *bond* maggiormente allungato, si è fatto ricorso alla SLA così come descritta da Tao.

La necessità però di sostituire il *bond* tra nodi reali appena rotto con i rispettivi *bond* tra nodi reali e nodi fittizi ha comportato la modifica dello schema proposto da Tao nel modo riportato in Figura 4.2.

### 4.2.1 Creazione dei *bond* fittizi

Poiché il problema non presenta alcun elemento che comporti la deviazione della cricca dalla sua direzione originale, una volta identificato il *bond* da eliminare, l'algoritmo implementato procede nell'ordine a:

1. identificare i nodi fittizi posti nella stessa posizione dei nodi reali il cui legame è stato spezzato;
2. determinare la posizione rispetto alla cricca iniziale dei nodi fittizi identificati al passo precedente. Sono possibili due casi:

**Caso 1** I nodi fittizi si trovano da parti opposte della cricca.

**Caso 2** I nodi fittizi si trovano dallo stesso lato della cricca.

3. viene identificato, per ciascun nodo reale il nodo fittizio che si trova al capo opposto del *bond* reale rotto e si procede alla creazione del *bond* corrispondente in maniera del tutto analoga a quanto descritto nella sezione 3.2.

### 4.2.2 Interazione tra nodi fittizi

L'operazione più critica è però andare a gestire correttamente l'interazione tra nodi fittizi, facendo interagire solamente i nodi coinvolti nell'interazione con un nodo reale che si trovano dallo stesso lato della cricca, anche mentre questa avanza. Poiché però è particolarmente ostico andare a definire la posizione del fronte della cricca, la strategia utilizzata è stata la seguente:

1. si verifica la casistica in cui ricade ciascun nodo fittizio in esame: se i nodi si trovano in parti opposte della cricca, non devono interagire tra loro; viceversa se sono dallo stesso lato, la loro interazione va permessa;
2. nota la casistica in cui ricadono i nodi fittizi in esame dalle operazioni precedenti, si procede a verificare se ciascuno interagisce già con i nodi fittizi posti dallo stesso lato della cricca;

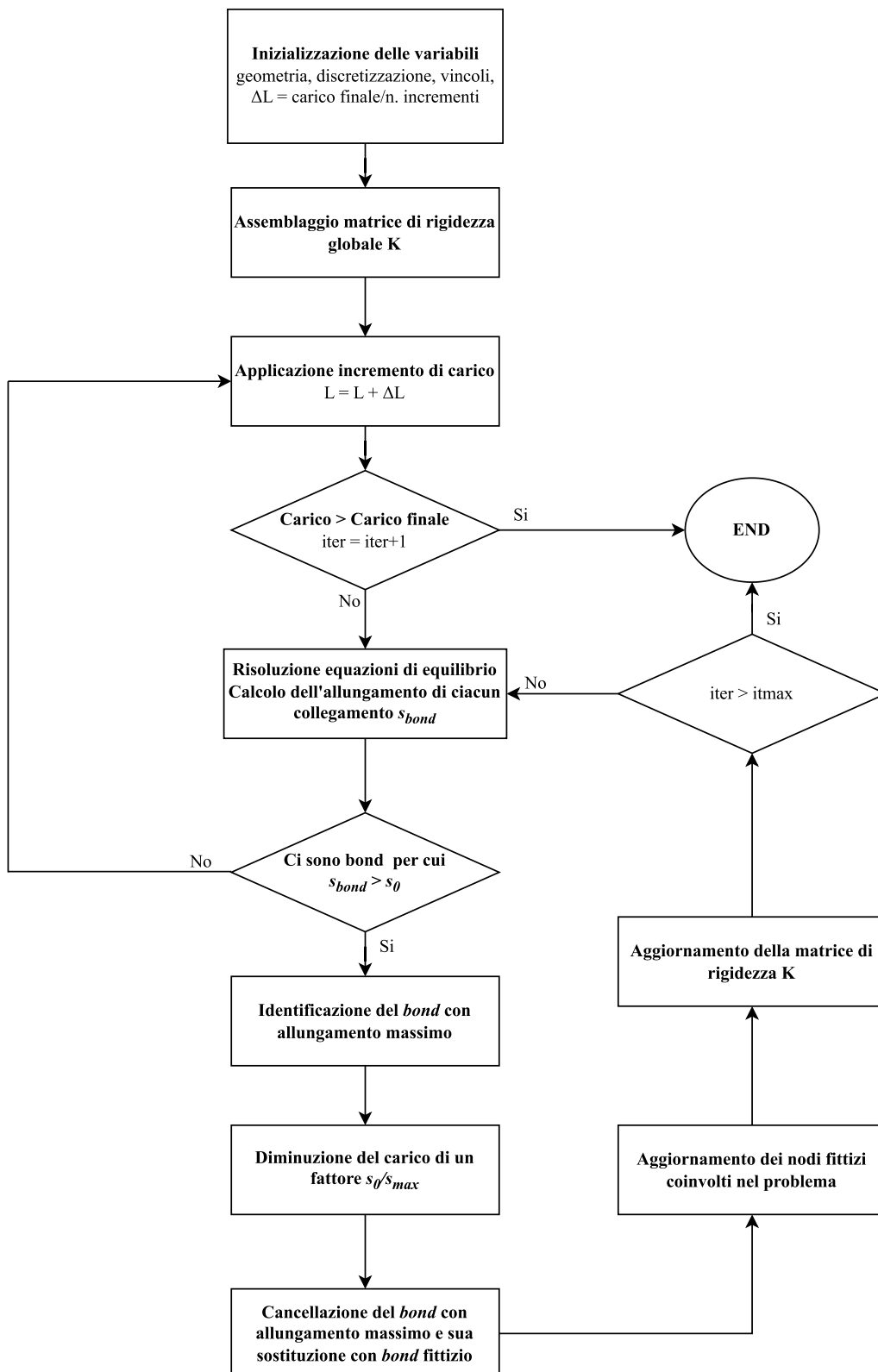


Figura 4.2: Diagramma di flusso per l'applicazione del metodo dei nodi fittizi per problemi di *crack propagation*.



- (a) se il nodo è già stato incluso in step precedenti dell'analisi nell'interazione tra nodi fittizi posti dallo stesso lato della cricca, si deve procedere solamente a controllare che lo stesso nodo non sia stato incluso precedentemente anche nell'interazione tra nodi fittizi posti dal lato opposto della cricca;
- (b) se il nodo non è già stato incluso in step precedenti dell'analisi nell'interazione tra nodi fittizi posti dallo stesso lato della cricca, si procede all'aggiornamento dei collegamenti di quel lato della cricca. Infine si controlla che lo stesso nodo non sia stato incluso precedentemente anche nell'interazione tra nodi fittizi posti dal lato opposto della cricca.

Si sottolinea ancora come la cattiva gestione di queste interazioni può completamente alterare il comportamento della struttura fino ad impedire la rottura dei *bond*. In Figura 4.3 è descritto schematicamente il comportamento dell'algoritmo di fronte alla rottura di un *bond* generico al fine di procedere all'aggiornamento della matrice di rigidità globale.

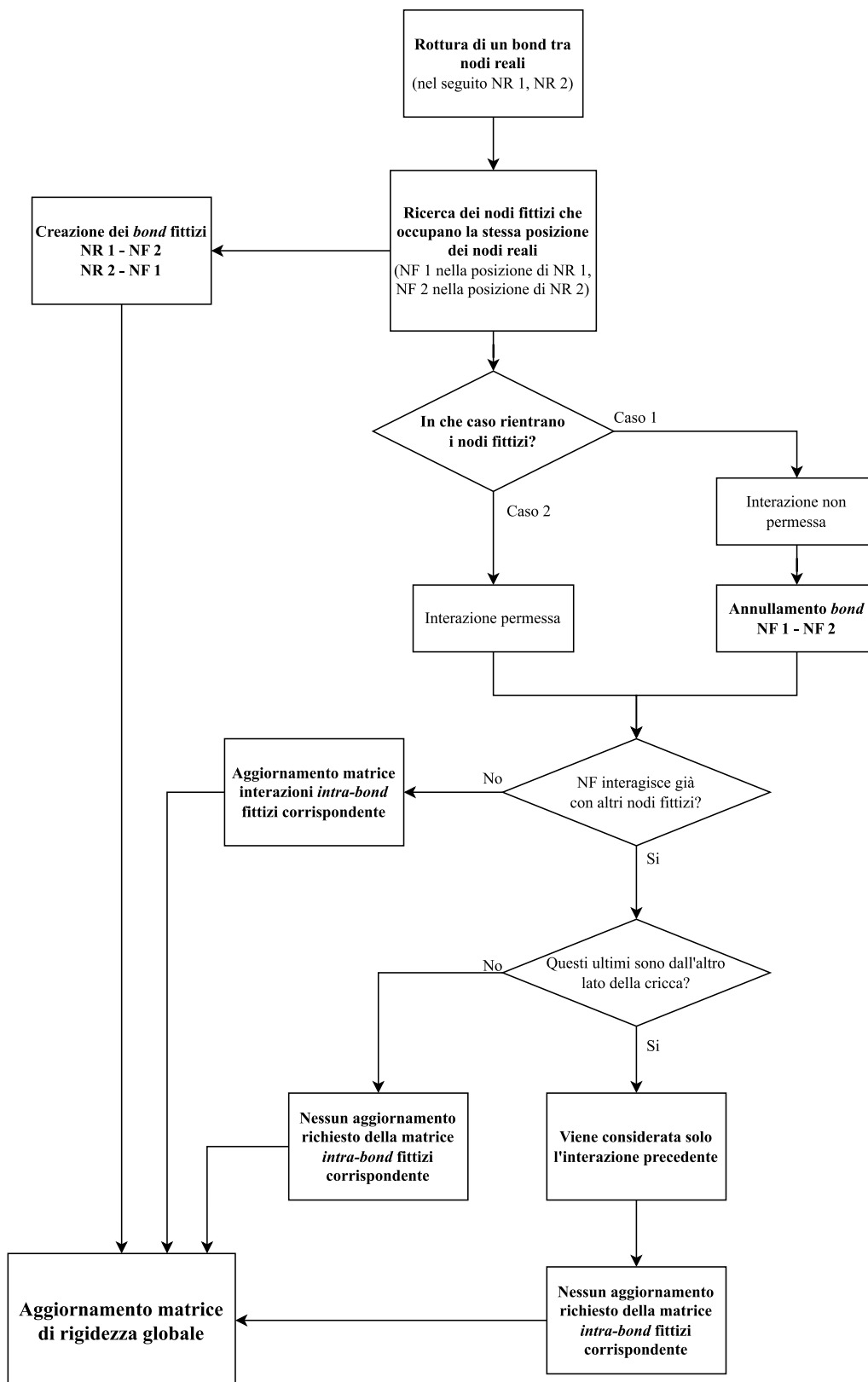


Figura 4.3: Diagramma di flusso per l'aggiornamento dei nodi fittizi coinvolti nel problema.

## 4.3 Risultati

L'analisi dei risultati ottenuti al termine di analisi lineari statiche evidenzia come la presenza di uno strato di nodi fittizi in prossimità del bordo della cricca e in corrispondenza del suo apice non riesca ad eliminare del tutto gli effetti di bordo, pur contribuendo alla loro attenuazione in maniera molto lieve.

La strategia di creazione dei *bond* fittizi adottata è però molto versatile e permette la gestione di geometrie qualsiasi per quanto riguarda la forma della cricca iniziale. L'analisi non lineare descritta al paragrafo precedente è stata ripetuta per diverse discretizzazioni. A partire dai risultati ottenuti in termini di spostamento sono stati tracciati i diagrammi forza-spostamento prendendo come riferimento il vertice sinistro della struttura posto sulla metà superiore della piastra. In Figura 4.5 è riportato il confronto tra il comportamento della struttura previsto dal modello in assenza di nodi fittizi (in blu) e nel caso di applicazione del metodo (in rosso). Dall'analisi della Figura 4.5-c si evince come la presenza dei nodi fittizi nei dintorni della cricca irrigidisca lievemente la struttura iniziale, così come auspicato. Nella zona non lineare invece, di cui nella Figura 4.5-b è riportato uno zoom, si nota come la forza massima raggiunta sia in buon accordo tra i due modelli. È inoltre evidente che la struttura risulta irrigidita dall'applicazione dei nodi fittizi anche durante la propagazione della cricca: per un dato spostamento, infatti, i punti relativi al modello con nodi fittizi applicati si trovano sempre ad un pendenza lievemente maggiore rispetto al corrispondente andamento dei punti in blu.

La principale differenza data dall'algoritmo implementato sta nel riuscire a catturare meglio il comportamento non lineare della struttura: difatti la presenza dei nodi fittizi fa registrare una variazione dell'ordine di rottura dei *bond*, soprattutto all'inizio della zona non lineare del diagramma, il che permette una migliore stima della forza massima sopportata dalla struttura prima della rottura di un nuovo legame. Questa differenza è via via meno marcata, a parità di discretizzazione, se si va ad aumentare il numero di incrementi di carico, diminuendone il valore. È pur vero però che tale effetto è meno evidente anche andando a diminuire la dimensione dell'orizzonte, come si evince dall'analisi della Figura 4.6, contenente gli analoghi diagrammi forza-spostamento per una griglia con  $\Delta x_1 = 0.25 \text{ mm}$ . Nelle Figure 4.7, 4.8 sono riportate le curve di involuppo dei valori massimi di forza raggiunti prima della rottura di un *bond*: la loro analisi mostra anche l'atteso fenomeno di apparente aumento della rigidità della struttura all'aumentare della risoluzione della griglia ([37]), il quale però esula dalle capacità di gestione del programma utilizzato. L'analisi della deformata ottenuta al termine dell'analisi, riportata in Figura 4.4, non evidenzia comportamenti anomali nella propagazione del danno, mentre la Figura 4.9

e la Figura 4.10 mostrano come la strategia proposta riesca a gestire correttamente l'introduzione di nodi fittizi analisi-durante.

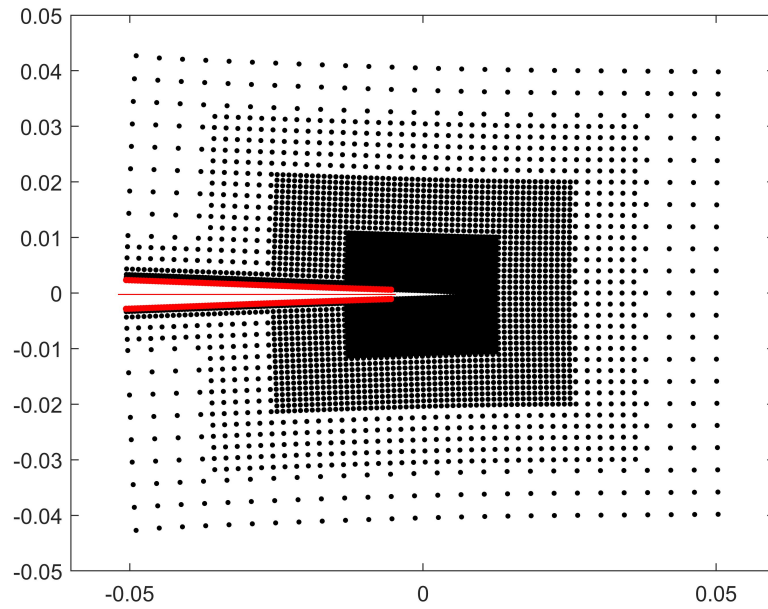
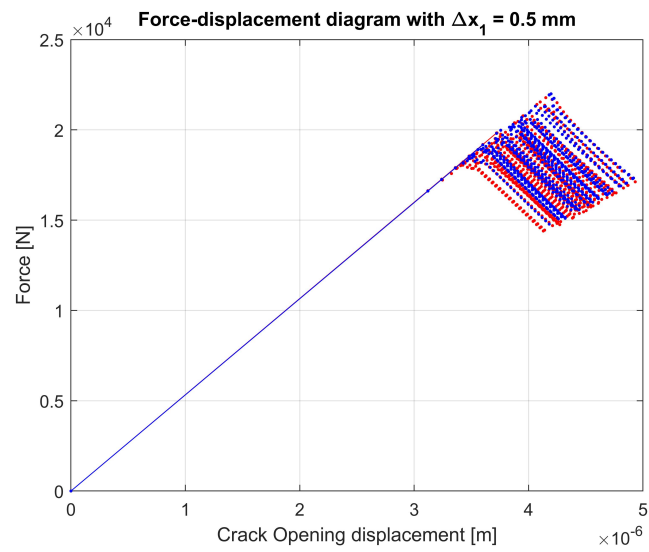
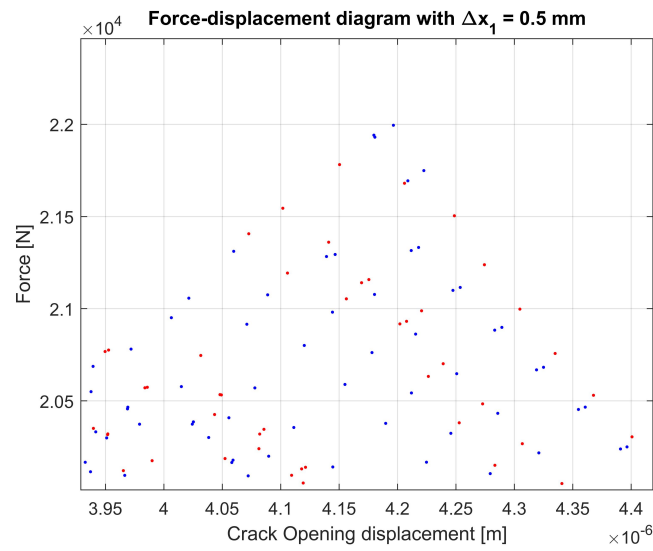


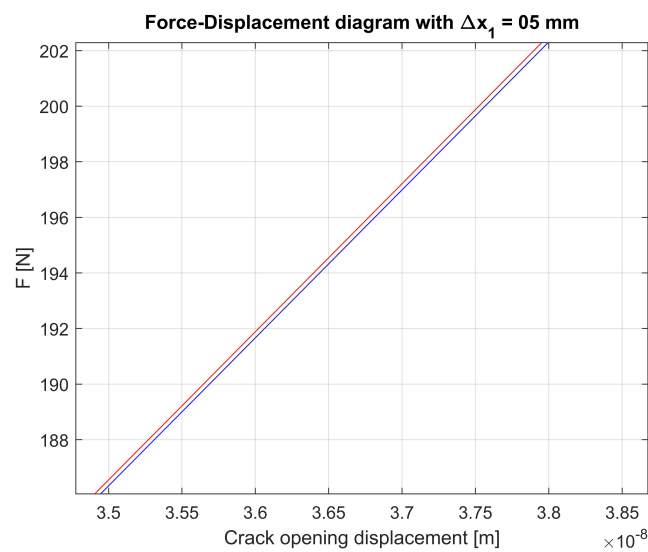
Figura 4.4: Deformata ottenuta a seguito di analisi non lineare.



(a)

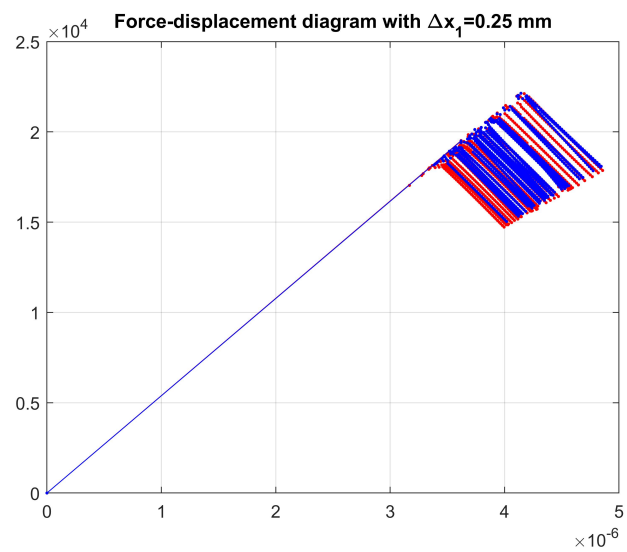


(b)

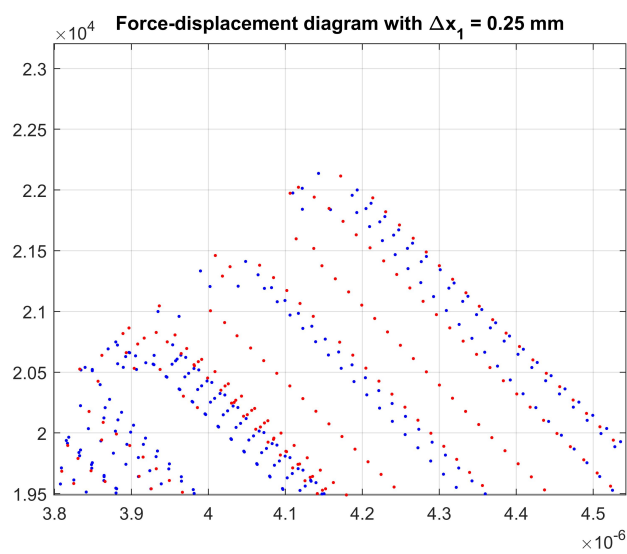


(c)

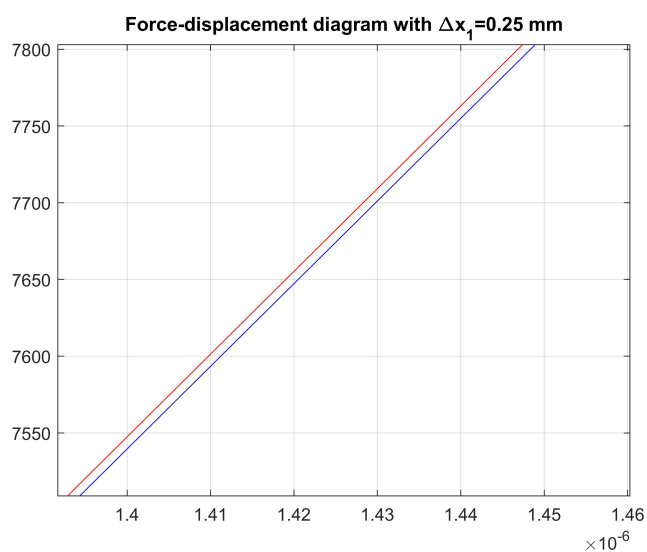
Figura 4.5: **a)** diagramma forza-spostamento ottenuto con una griglia con  $\Delta x_1 = 0.5$  mm; **b)** zoom sulla zona di scollinamento; **c)** zoom sul tratto lineare.



(a)

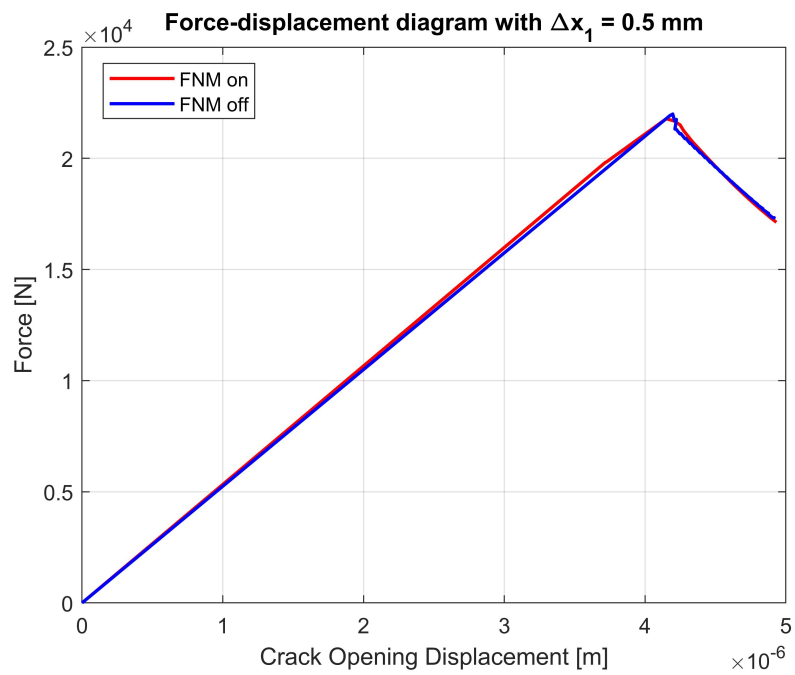


(b)

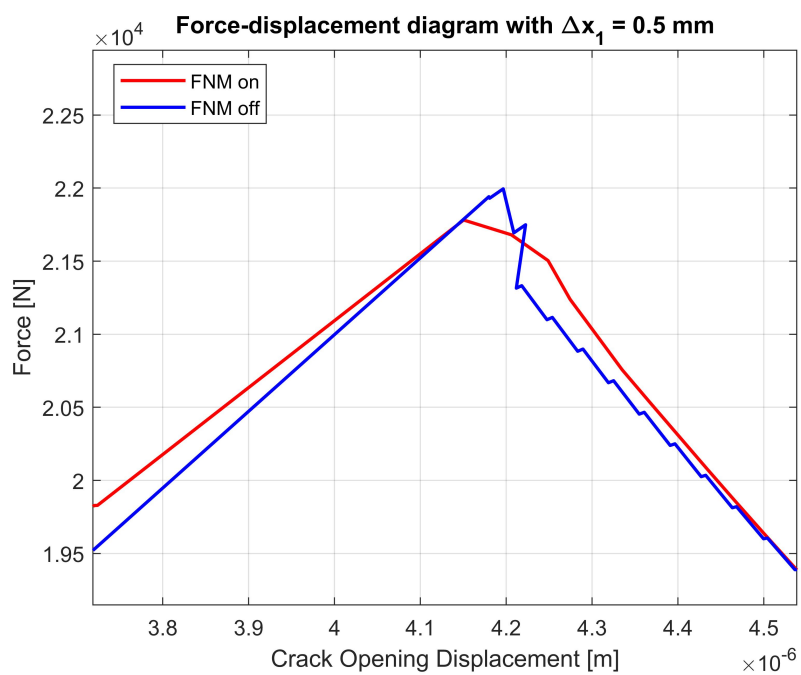


(c)

Figura 4.6: **a)** diagramma forza-spostamento ottenuto con una griglia con  $\Delta x_1 = 0.25$  mm; **b)** zoom sulla zona di scollinamento; **c)** zoom sul tratto lineare.

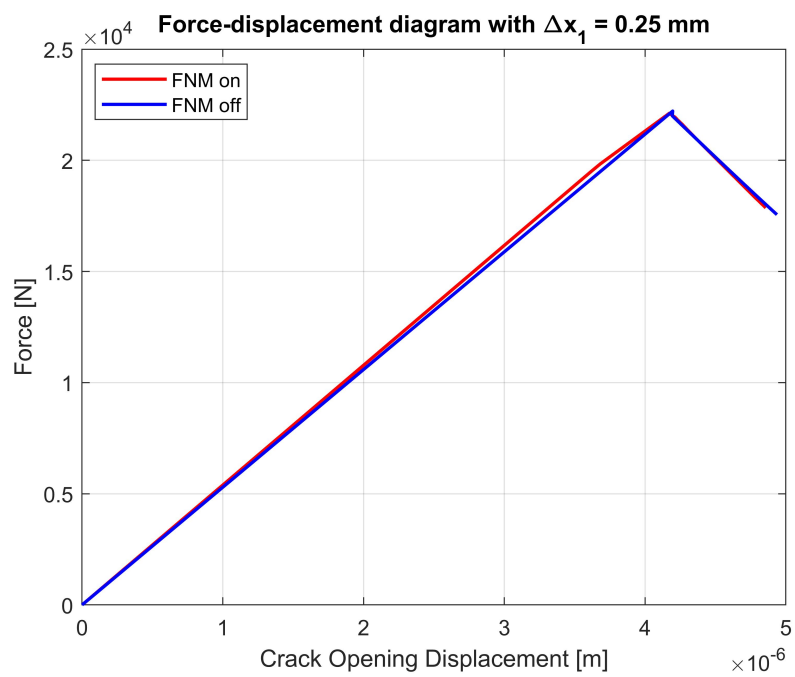


(a)

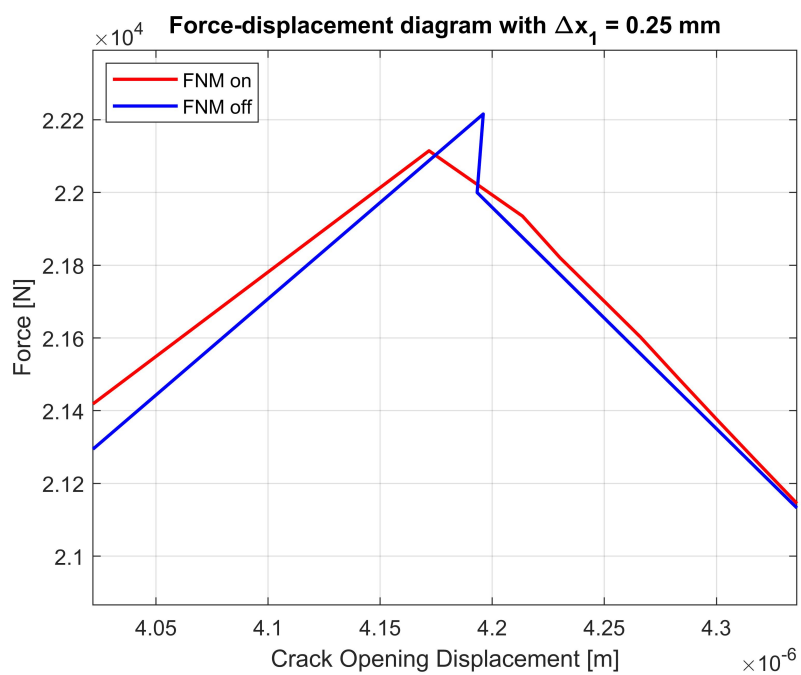


(b)

Figura 4.7: **a)** involuppo dei dati a valle di analisi non lineare per *mesh* con  $\Delta x_1 = 0.5$  mm; **b)** zoom sulla zona di scollinamento.



(a)



(b)

Figura 4.8: **a)** involucro dei dati a valle di analisi non lineare per *mesh* con  $\Delta x_1 = 0.25$  mm; **b)** zoom sulla zona di scollinamento.



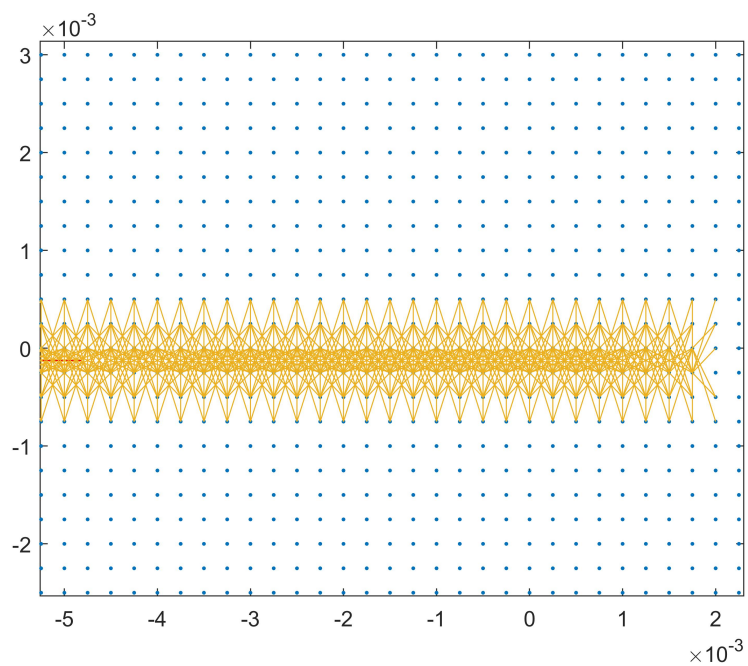


Figura 4.9: Rappresentazione dei *bond* fittizi creati nel corso dell'analisi non lineare.

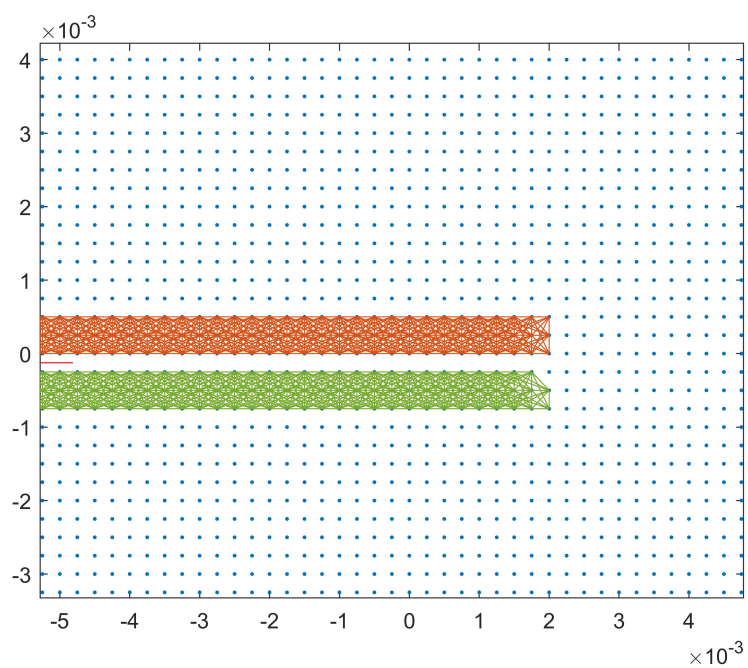


Figura 4.10: Rappresentazione dei *bond* tra nodi fittizi creati nel corso dell'analisi non lineare.



# Capitolo 5

## Conclusioni

Lo studio degli effetti del *softening* e la formulazione di strategie per la sua attenuazione rappresentano un passaggio obbligato al fine di rendere la teoria peridinamica appetibile per applicazioni sempre più complesse. Tuttavia finora gli sforzi compiuti nell'ambito della ricerca si sono concentrati sulle zone poste in prossimità dei bordi esterni dei corpi. Il presente studio si inserisce nel filone di ricerche effettuate per applicare il metodo dei nodi fittizi in corrispondenza di tali zone del corpo. Il metodo, infatti, si è dimostrato valido per la gestione degli effetti di bordo in corrispondenza dei bordi esterni di un corpo, per lo meno per geometrie semplici; tuttavia finora non è presente in letteratura un'applicazione di tale approccio in prossimità dei bordi di una cricca e in corrispondenza del suo apice. Date queste premesse, si è studiato come l'introduzione di un *layer* di nodi fittizi in tale zona possa influenzare l'accuratezza della soluzione prevista per analisi lineari statiche e non lineari statiche di strutture bidimensionali.

In una prima fase del lavoro sono creati e validati, attraverso una serie di *patch* test, dei modelli accoppiati FEM-PD in ambiente MATLAB. Successivamente, è stato implementato su questi ultimi un algoritmo che permetta l'introduzione del *layer* di nodi fittizi in corrispondenza di una cricca iniziale. I risultati ottenuti da analisi lineari statiche effettuate sui modelli MATLAB sono stati confrontati, a conferma della loro validità, con quanto previsto dal software commerciale *MSC Patran-Nastran*.

Verificato quindi un irrigidimento della struttura dato dal corretto completamento dell'orizzonte dei nodi posti nelle vicinanze della cricca iniziale, lo step successivo è stata la creazione di un secondo algoritmo che permettesse la mitigazione degli effetti di bordo anche in problemi di *crack propagation*.

L'algoritmo messo a punto presenta diversi vantaggi:

- permette una lieve mitigazione degli effetti di bordo sia ai bordi che all'apice

---

della cricca per analisi lineari statiche, posto che si parta dall'introduzione di una cricca descrivibile da una spezzata;

- consente la gestione dei nodi fittizi anche durante la propagazione della cricca purchè siano ben definite le regioni del corpo al di sopra e al di sotto della cricca.

Tale strategia rappresenta un valido strumento per lo studio del comportamento di una struttura discretizzata con una griglia poco raffinata, in quanto permette di catturare in maniera ottimale il comportamento della struttura pur con un modesto allungamento dei tempi di calcolo richiesti. Viceversa, nel caso di una griglia rifinita, l'implementazione del metodo descritto non apporta sostanziali migliorie ai risultati ottenuti a fronte però di un notevole aumento delle risorse computazionali richieste. Sebbene rappresenti un primo studio per questo tipo di problematiche, l'algoritmo è migliorabile e rappresenta un punto di partenza per ulteriori implementazioni. Infatti, in seguito all'aggiunta del layer, si potrebbero definire delle metodologie di imposizione di specifici spostamenti ai nodi fittizi introdotti. In alternativa si potrebbe modificare l'algoritmo presentato di modo che possa gestire anche la propagazione non rettilinea della cricca. Infine, per ridurre i tempi richiesti dall'analisi (uno degli aspetti che rende la peridinamica, ad oggi, poco applicata in ambito industriale), si può implementare l'algoritmo dell'analisi lineare in sequenza considerando la possibilità che si possa rompere più di un bond per ogni iterazione.

# Appendice A

Il prodotto tensoriale  $T = V \otimes W$  di due spazi vettoriali su uno stesso campo  $K$  è lo spazio che ha per base le coppie di vettori delle basi di  $V$  e  $W$ ,  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , per le quali si usa una notazione  $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j$ . Se

$$\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{w} = \sum_j \beta_j \mathbf{w}_j$$

il prodotto tensoriale di  $\mathbf{v}$  per  $\mathbf{w}$  è

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j).$$

un elemento di  $T$  è una somma di elementi di questo tipo. Si vede facilmente che il prodotto così definito è bilineare. Se  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  sono matrici di due trasformazioni lineari di  $V$  e  $W$  rispettivamente, si definisce il prodotto tensoriale o di Kronecker, l'applicazione lineare su  $V \otimes W$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j) = \mathbf{A}\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{B}\mathbf{w}_j.$$

Se le dimensioni di  $V$  e  $W$  sono finite, rispettivamente  $n$  ed  $m$ , scegliendo l'ordinamento secondo il primo indice dei vettori della base di  $V \otimes W$  ( $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{v}_n \otimes \mathbf{w}_m$ ) la matrice  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  ha nel posto  $(i, j)$  l'intera matrice  $\mathbf{B}$  moltiplicata per  $a_{ij}$ , ovvero

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  sono quadrate, si ha che  $m = n$  e allora anche  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  è quadrata.

## Prodotto tensoriale tra vettori

Sia  $U$  uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. In corrispondenza di una coppia di vettori  $\mathbf{v} \in U$  e  $\mathbf{u} \in U$  risulta definito il tensore, detto prodotto tensoriale tra  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : U \rightarrow U$$

tale che

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{w} \in U$$

Sia ad esempio  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una base ortonormale di  $U$ . Ponendo  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ , risulta

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{u} = v_1\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{u} = v_2\mathbf{u}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\mathbf{e}_3 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{u} = v_3\mathbf{u}$$

Ne segue dunque che il tensore risultante dal prodotto  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$  è tale che la colonna  $j$ -ma è costituita dalle componenti del vettore  $\mathbf{u}$  moltiplicate per  $v_j$ , l'elemento sulla riga  $i$  e la colonna  $j$  risultando  $v_j u_i$ . In particolare, rifacendosi all'esempio precedente, risulta:

$$\begin{bmatrix} v_1 u_1 & v_2 u_1 & v_3 u_1 \\ v_1 u_2 & v_2 u_2 & v_3 u_2 \\ v_1 u_3 & v_2 u_3 & v_3 u_3 \end{bmatrix}$$

È possibile inoltre dimostrare che

1.  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ ;
2. i prodotti  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  costruiti con i vettori di una base di  $U$  costituiscono una base dello spazio dei tensori. Qualsiasi tensore è dunque esprimibile come loro combinazione lineare.

# Appendice B

Si richiamano in questa sede alcuni concetti fondamentali utilizzati nella creazione del software di calcolo. Per un approfondimento delle nozioni espresse si fa riferimento a [38].

Strutture complesse vengono discretizzate con elementi finiti ai quali viene applicata una forma linearizzata delle equazioni della meccanica strutturale. I nodi di ciascun elemento possiedono un numero variabile di gradi di libertà di spostamento, le forze vengono discretizzate a loro volta e considerate concentrate sui nodi della *mesh*. Gli spostamenti  $\{\mathbf{u}\}_e$  e le forze  $\{\mathbf{f}\}_e$  applicate sui nodi dell'elemento sono legati dall'equazione:

$$[\mathbf{K}]_e \{\mathbf{u}\}_e = \{\mathbf{f}\}_e$$

dove  $[\mathbf{K}]_e$  costituisce la matrice di rigidità dell'elemento, le cui dimensioni dipendono dal numero di gradi di libertà associato all'elemento.

Il metodo di calcolo tiene conto solo degli spostamenti che avvengono nei nodi, gli spostamenti degli altri punti sono a essi collegati tramite la definizione di apposite funzioni di forma.

Per ogni punto dell'elemento gli spostamenti sono interpolati tramite l'equazione:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, xz) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}(x, y, z)] \{\mathbf{u}\}_e$$

con  $[\mathbf{N}(x, y, z)]$  matrice delle funzioni di forma dell'elemento in esame e rappresenta la sostanziale differenza tra le varie tipologie di elementi. un'importante caratteristica delle funzioni di forma, valida per ogni tipo di elemento è che esse devono essere garantite che lo spostamento in un nodo sia coincidente con lo spostamento già calcolato in quel nodo e che questo non dipenda dagli spostamenti su altri nodi.

Ricordando che il tensore delle deformazioni è definito come:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \partial[\mathbf{N}]\{\mathbf{u}\}_e = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\}_e$$

si può usare tale espressione nell'equazione della legge di Hooke generalizzata:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\epsilon\}$$

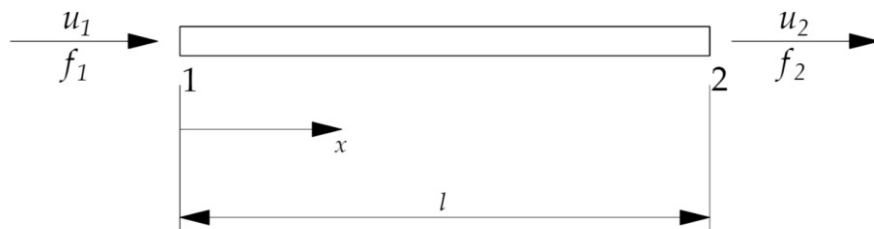
dove  $[\mathbf{D}]$  è la matrice che rappresenta il legame costitutivo del materiale. Facendo ricorso al teorema dei lavori virtuali, dimostrare che:

$$[\mathbf{K}]_e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV$$

Lo *step* successivo, per ottenere la matrice di rigidezza globale (o di struttura), è andare ad assemblare nel modo corretto le matrici di tutti gli elementi. Tale procedura verrà illustrata alla fine di questa appendice.

## Elemento asta

L'elemento asta nella figura seguente possiede due nodi a ognuno dei quali è assegnato un grado di libertà di spostamento nella direzione dell'asse dell'asta, per un totale di 2 gradi di libertà reali.



Per un elemento di questo tipo l'equazione del moto assume la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}_e$$



La legge di Hooke in questo caso assume l'espressione

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = E\{\boldsymbol{\epsilon}\}$$

dove  $E$  è il modulo di elasticità lineare del materiale.

Si definisce la matrice delle funzioni di forma

$$[\mathbf{N}] = \left[ \frac{L-x}{L}, \frac{x}{L} \right]$$

e se ne calcola la matrice derivata  $[\mathbf{B}]$

$$[\mathbf{B}] = \left[ -\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right]$$

Si ottiene dunque, nell'ipotesi che la sezione dell'elemento sia costante pari ad  $A$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]_e &= \int_L [\mathbf{B}]^T E [\mathbf{B}] A dl = EA \int_L \left[ \frac{1}{l}, \frac{1}{l} \right]^T \left[ \frac{1}{l}, \frac{1}{l} \right] dl = \\ &= EA \int_L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dl = \\ &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In generale Strutture complesse possono essere discretizzate con elementi di tipo asta con orientazione diversa. Al fine di assemblare correttamente la matrice di rigidezza globale è necessario calcolare le matrici di rigidezza di ogni elemento nel sistema di riferimento globale scelto per descrivere la struttura.

L'operazione viene risolto con facilità facendo ricordo ad una matrice di rotazione nel modo descritto di seguito.

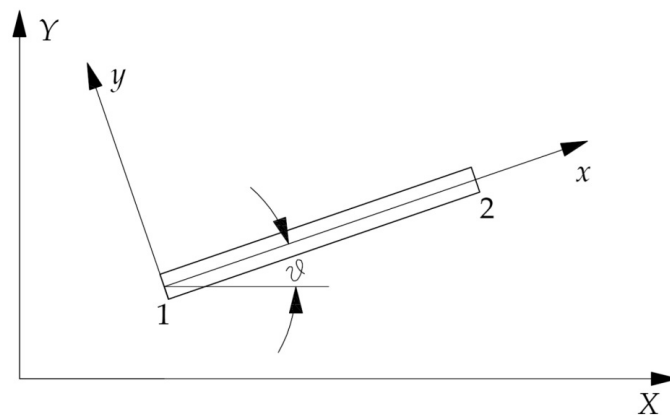
Con riferimento alla figura seguente, è possibile definire la matrice di rotazione  $[\mathbf{R}']$  dal sistema di riferimento globale  $X, Y$  a quello di elemento  $x, y$  come

$$[\mathbf{R}'] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

tale che

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}$$

dove  $\theta$  rappresenta l'angolo di cui è ruotato il sistema di riferimento locale rispetto



al sistema di riferimento struttura.

Tenuto conto quindi che il cambio di direzione permette che le componenti verticali degli spostamenti siano non nulle per i due nodi dell'elemento nel sistema di riferimento di struttura, si procede all'aggiunta dei corrispettivi gradi di libertà e si ripete il procedimento effettuato in precedenza utilizzando la matrice di rotazione

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Risulta dunque

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}]_e [\mathbf{R}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

## Elementi bidimensionali

Contrariamente a quanto accade per gli elementi monodimensionali di tipo asta, per elementi bidimensionali, in base al comportamento della struttura si deve variare opportunamente la legge costitutiva.

In particolare, nel caso di stato piano di tensione (*plane stress*), la legge di Hooke assume la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

mentre per uno stato piano di deformazione (*plane strain*):

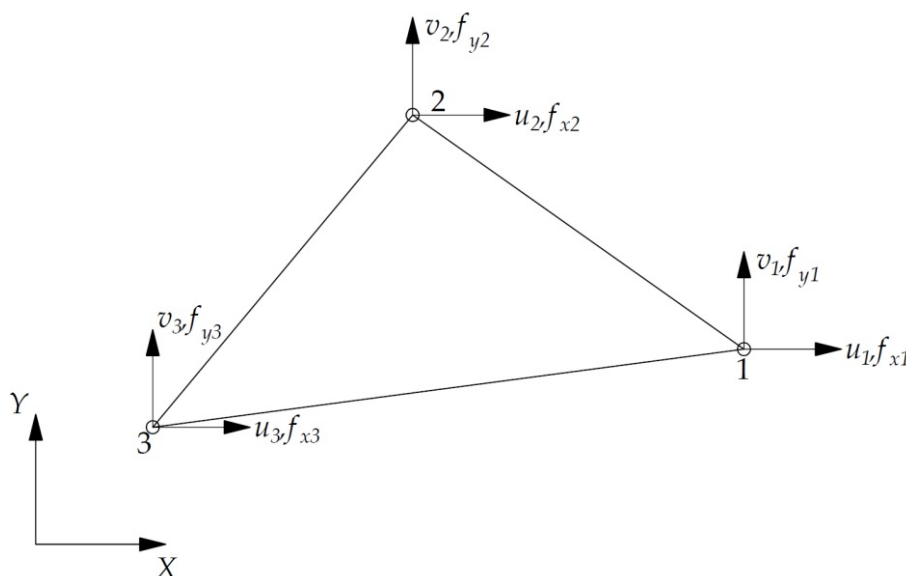
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Determinata la casistica di riferimento per il problema che si vuole analizzare, il calcolo della matrice di rigidezza per questo tipo di elementi segue gli stessi passaggi descritti inizialmente.

Nel seguito verranno ricavate le espressioni delle matrici di rigidezza di elemento nel caso di *plane strain*, lo stesso utilizzato nel corso delle analisi descritte nei Capitoli 3-4 del presente lavoro.

## Elemento triangolare a 3 nodi

L'elemento triangolare (figura seguente) è costituito da 3 nodi, ognuno con due gradi di libertà di spostamento nelle direzioni x e y. Il numero totale di gradi di libertà è perciò pari a 6. Il calcolo della matrice di rigidezza è stato effettuato tenendo conto delle direzioni indicate in figura, già aderenti al sistema di riferimento della struttura.



Le funzioni di forma sono del tipo:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{2A}(\alpha_1 + \beta_1 x + \zeta_1 y) \\ N_2 = \frac{1}{2A}(\alpha_2 + \beta_2 x + \zeta_2 y) \\ N_3 = \frac{1}{2A}(\alpha_3 + \beta_3 x + \zeta_3 y) \end{cases}$$

con

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3; & \beta_1 = y_2 - y_3; & \zeta_1 = x_3 - x_2; \\ \alpha_2 = x_1 y_3 - y_1 x_3; & \beta_2 = y_3 - y_1; & \zeta_2 = x_1 - x_3; \\ \alpha_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2; & \beta_3 = y_1 - y_2; & \zeta_3 = x_2 - x_1; \end{array}$$

e con

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

area del triangolo.

Le funzioni appena introdotte sono tali che

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Da  $[\mathbf{N}]$  si deriva la matrice  $[\mathbf{B}]$

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & \beta_1 & \zeta_2 & \beta_2 & \zeta_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

che permette di scrivere le deformazioni come

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & \zeta_2 & 0 & \zeta_3 \\ \zeta_1 & \beta_1 & \zeta_2 & \beta_2 & \zeta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Come conseguenza della natura lineare delle funzioni di forma, dall'equazione precedente si nota come, tutte le componenti del tensore di deformazione sono costanti. (*Constant Strain Triangle*).

Se si suppone che lo spessore dell'elemento sia costante e pari ad  $h$ , la matrice di rigidità dell'elemento risulta infine:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]_e &= \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \int_A [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] h dx dy = \\ &= hA [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \end{aligned}$$

Si giunge quindi banalmente al calcolo della matrice di rigidità dell'elemento, di dimensioni  $6 \times 6$ :

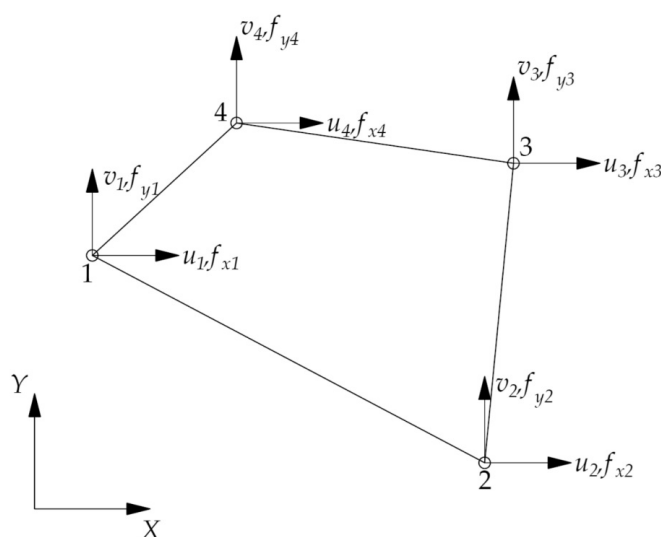
$$[\mathbf{K}]_e = \frac{h}{2A} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Le espressioni dei coefficienti per la parte triangolare superiore della matrice sono riportate di seguito.

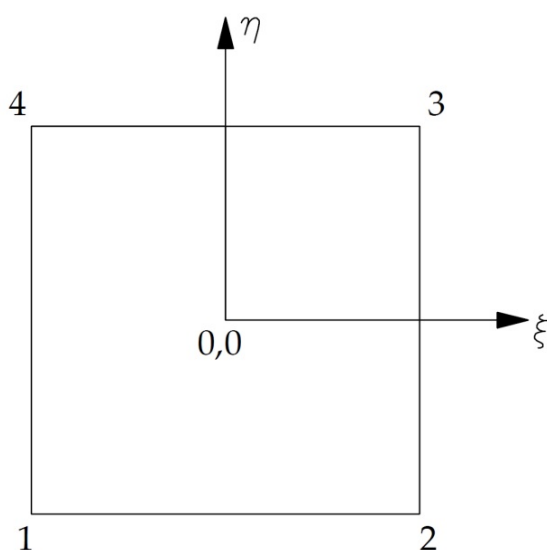
$$\begin{aligned} k_{11} &= C_{11}\beta_1^2 + C_{33}\zeta_1^2 & k_{23} &= C_{21}\zeta_1\beta_2 + C_{33}\zeta_2\beta_1 & k_{36} &= C_{12}\beta_2\zeta_3 + C_{33}\zeta_2\beta_3 \\ k_{12} &= (C_{12} + C_{33})\zeta_1\beta_1 & k_{24} &= C_{22}\zeta_1\zeta_2 + C_{33}\beta_1\beta_2 & k_{44} &= C_{22}\zeta_2^2 + C_{33}\beta_2^2 \\ k_{13} &= C_{11}\beta_1\beta_2 + C_{33}\zeta_1\zeta_2 & k_{25} &= C_{21}\zeta_1\beta_3 + C_{33}\beta_1\zeta_3 & k_{45} &= C_{21}\zeta_2\beta_3 + C_{33}\zeta_3\beta_2 \\ k_{14} &= C_{12}\beta_1\zeta_2 + C_{33}\zeta_1\beta_2 & k_{26} &= C_{22}\zeta_1\zeta_3 + C_{33}\beta_1\beta_3 & k_{46} &= C_{22}\zeta_2\zeta_3 + C_{33}\beta_3\beta_2 \\ k_{15} &= C_{11}\beta_1\beta_3 + C_{33}\zeta_1\zeta_3 & k_{33} &= C_{11}\beta_2^2\beta_2 + C_{33}\zeta_2^2 & k_{55} &= C_{11}\beta_3^2 + C_{33}\zeta_3^2 \\ k_{16} &= C_{12}\beta_1\zeta_3 + C_{33}\zeta_1\beta_3 & k_{34} &= (C_{12} + C_{33})\zeta_1\beta_2 & k_{56} &= (C_{12} + C_{33})\zeta_3\beta_3 \\ k_{22} &= C_{22}\zeta_2^2 + C_{33}\beta_1^2 & k_{35} &= C_{11}\beta_1\beta_3 + C_{33}\zeta_1\zeta_3 & k_{66} &= C_{22}\zeta_3^2 + C_{33}\beta_3^2 \end{aligned}$$

## Elemento quadrilatero a 4 nodi

L'elemento è costituito da 4 nodi, ognuno con due gradi di libertà di spostamento nelle direzioni x e y. Il numero totale di gradi di libertà è perciò pari a 8 e valgono le considerazioni sul sistema di riferimento valide per gli elementi triangolari. Il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento presenta delle complicazioni rispetto a quanto fatto in precedenza a causa delle difficoltà di integrazione dovute all'espressione bilineare delle funzioni di forma. Data l'arbitrarietà della forma che l'elemento può assumere (figura seguente), si rivela necessario applicare un cambio di coordinate alle variabili  $\xi, \eta$  che permetta la sua descrizione tramite geometria quadrata.



La rappresentazione nel nuovo sistema di riferimento dell'elemento è dunque la seguente:



Vengono definite le funzioni di forma bilineari

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases}$$

tali che

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}.$$

Poichè, per le scelte effettuate, le funzioni che mappano il cambio di variabile sono analoghe alle funzioni di forma, il passaggio da un sistema di riferimento all'altro viene mediato dalla Jacobiana [ $\mathbf{J}$ ]:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

le cui componenti sono le seguenti:

$$\begin{cases} J_{11} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 \\ J_{12} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 \\ J_{21} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 \\ J_{22} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 \end{cases}$$



Definendo la matrice  $[\mathbf{G}]$ , che definisce il cambio di variabili inverso

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

risulta immediato ricavare l'espressione di  $[\mathbf{B}]$  per il calcolo della matrice di rigidezza dell'elemento:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} G_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & G_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ G_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} & G_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + G_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza viene ancora una volta calcolata come

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}]_e &= \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \int_{A_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] h dx dy \\ &= h \int_{A_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \end{aligned}$$

L'integrale non può questa volta essere risolto in maniera immediata, come nei casi precedenti, perchè la matrice  $[\mathbf{B}]$  varia da punto a punto. L'integrale può però essere risolto con facilità tramite il metodo di Gauss con un punto di integrazione al centro dell'elemento. Al termine del procedimento si ottiene una matrice  $8 \times 8$ , così come atteso.



# Bibliografia

- [1] S.A. Silling. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48:175–209, 2000.
- [2] S.A. Silling and E. Askari. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Computers and Structures*, 83:1526–1535, 2005.
- [3] S.A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, and E. Askari. Peridynamic states and constitutive modeling. *Journal of Elasticity and Fracture*, 88:151–184, 2007.
- [4] R.W. Macek and S.A. Silling. Peridynamics via finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43:1169–1178, 2007.
- [5] Tao Ni, Mirco Zaccariotto, Qi-Zhi Zhu, and Ugo Galvanetto. Static solution of crack propagation problems in peridynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 346:126–151, 2018.
- [6] Minh-Quy Le. Mode-I stress intensity factor by peridynamic stresses. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 123:103721, 2023.
- [7] Youn Doh Ha and Florin Bobaru. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 162:229–244, 03 2010.
- [8] Javad Mehrmashhadi, Longzhen Wang, and Florin Bobaru. Uncovering the dynamic fracture behavior of PMMA with peridynamics: The importance of softening at the crack tip. *Engineering Fracture Mechanics*, 219:106617, 2019.
- [9] Tao Ni, Mirco Zaccariotto, Xuanmei Fan, Qizhi Zhu, Bernhard A. Schrefler, and Ugo Galvanetto. A peridynamic differential operator-based scheme for the extended bond-based peridynamics and its application to fracture problems of brittle solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 97:104853, 2023.

- [10] Daniele Dipasquale, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. Crack propagation with adaptive grid refinement in 2D peridynamics. *International Journal of Fracture*, 190:1–22, 2014.
- [11] Mirco Zaccariotto, F. Luongo, Giulia Sarego, and Ugo Galvanetto. Examples of applications of the peridynamic theory to the solution of static equilibrium problems. *The Aeronautical Journal*, 119:1–24, 2015.
- [12] B. Kilic, A. Agwai, and E. Madenci. Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates. *Composite Structures*, 90(2):141–151, 2009.
- [13] R. Cavuoto, A. Cutolo, K. Dayal, L. Deseri, and M. Fraldi. Distal and non-symmetrical crack nucleation in delamination of plates via dimensionally-reduced peridynamics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 172:105189, 2023.
- [14] Ugo Galvanetto, Teo Mudric, Arman Shojaei, and Mirco Zaccariotto. An effective way to couple FEM meshes and Peridynamics grids for the solution of static equilibrium problems. *Mechanics Research Communications*, 76:41–47, 2016.
- [15] J.J. Muñoz, U. Galvanetto, and P. Robinson. On the numerical simulation of fatigue driven delamination with interface elements. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1136–1146, 2006. The Third International Conference on Fatigue of Composites.
- [16] Nicolas Moës and Ted Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833, 2002.
- [17] Mirco Zaccariotto, Teo Mudric, Davide Tomasi, Arman Shojaei, and Ugo Galvanetto. Coupling of FEM meshes with Peridynamic grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 330:471–497, 2018.
- [18] Mirco Zaccariotto, Davide Tomasi, and Ugo Galvanetto. An enhanced coupling of PD grids to FE meshes. *Mechanics Research Communications*, 84:125–135, 2017.
- [19] Daniele Dipasquale, Giulia Sarego, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. Dependence of crack paths on the orientation of regular 2d peridynamic grids. *Engineering Fracture Mechanics*, 160:248–263, 2016.

- [20] Quang Van Le and Florin Bobaru. Surface corrections for peridynamic models in elasticity and fracture. *Computational Mechanics*, 61:499–518, 2018.
- [21] Yuan Liu, Fei Han, and Ling Zhang. An extended fictitious node method for surface effect correction of bond-based peridynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 143:78–94, 2022.
- [22] Wenbo Dong, Hengjie Liu, Juan Du, Xu Zhang, Minsheng Huang, Zhenhuan Li, Ziguang Chen, and Florin Bobaru. A peridynamic approach to solving general discrete dislocation dynamics problems in plasticity and fracture: Part I. Model description and verification. *International Journal of Plasticity*, 157:103401, 2022.
- [23] Wenbo Dong, Hengjie Liu, Juan Du, Xu Zhang, Minsheng Huang, Zhenhuan Li, Ziguang Chen, and Florin Bobaru. A peridynamic approach to solving general discrete dislocation dynamics problems in plasticity and fracture: Part II. Applications. *International Journal of Plasticity*, 159:103462, 2022.
- [24] K. Yu. *Enhanced Integration Methods for the Peridynamic Theory*. Kansas State University, 2011.
- [25] Florin Bobaru, John T. Foster, Philippe H. Geubelle, and Stewart A. Silling. *Handbook of Peridynamic Modeling*. CRC Press, January 2016. Publisher Copyright: © 2017 by Taylor and Francis Group, LLC.
- [26] Erdogan Madenci and Erkan Oterkus. *Peridynamic Theory and Its Applications*. 06 2013.
- [27] Francesco Scabbia, Mirco Zaccariotto, and Ugo Galvanetto. A novel and effective way to impose boundary conditions and to mitigate the surface effect in state-based peridynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122, 06 2021.
- [28] Patrick Diehl, Robert Lipton, Thomas Wick, and Mayank Tyagi. A comparative review of peridynamics and phase-field models for engineering fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 69:1259–1293, 02 2022.
- [29] Giulia Sarego, Quang Le, Florin Bobaru, Mirco Zaccariotto, and U. Galvanetto. Linearized state-based peridynamics for 2d problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 108, 03 2016.

- [30] Pablo Seleson, Max Gunzburger, and Michael L. Parks. Interface problems in nonlocal diffusion and sharp transitions between local and nonlocal domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266:185–204, 2013.
- [31] Vito Diana and Siro Casolo. A bond-based micropolar peridynamic model with shear deformability: Elasticity, failure properties and initial yield domains. *International Journal of Solids and Structures*, 160:201–231, 2019.
- [32] Vito Diana and Roberto Ballarini. Crack kinking in isotropic and orthotropic micropolar peridynamic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 196-197:76–98, 2020.
- [33] Roberto Ballarini, Vito Diana, Luigi Biolzi, and Siro Casolo. Bond-based peridynamic modelling of singular and nonsingular crack-tip fields. *Meccanica*, 53, 08 2018.
- [34] Jaber Nikpayam and Mohammad Ali Kouchakzadeh. On the validity of peridynamic equation of motion in variable horizon domains. *International Journal of Mechanical Sciences*, 195:106245, 2021.
- [35] B. Kilic and E. Madenci. An adaptive dynamic relaxation method for quasi-static simulations using the peridynamic theory. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 53(3):194–204, 2010.
- [36] John Bartlett and Duane Storti. A generalized fictitious node approach for surface effect correction in peridynamic simulation. *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 3, 09 2021.
- [37] Ross Stewart and ByoungSeon Jeon. Decoupling strength and grid resolution in peridynamic theory. *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 1, 10 2019.
- [38] R.D. Cook, D.S.Malkus, and M.E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. JOHN WILEY AND SONS, 1974.
- [39] Jonas Ritter, Shucheta Sheguftha, Paul Steinmann, and Michael Zaiser. An energetically consistent surface correction method for bond-based peridynamics. *Forces in Mechanics*, 9:100132, 2022.