



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI  
"M.FANNO"**

**CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA**

**PROVA FINALE**

**"EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE DEL PRIMO ORDINE E MODELLI  
DINAMICI DISCRETI IN ECONOMIA"**

**RELATORE:**

**CH.MO PROF. Bruno Viscolani**

**LAUREANDO/A: Francesco De Alberti**

**MATRICOLA N. 1190318**

**ANNO ACCADEMICO 2020 – 2021**



## Sommario

<b>Introduzione</b> .....	3
<b>Capitolo 1 Lo strumento: le equazioni alle differenze</b> .....	5
<b>1.1 Il tempo continuo: un'introduzione alle equazioni differenziali</b> .....	5
<b>1.2 Il tempo discreto: le equazioni alle differenze lineari</b> .....	7
<b>1.2.1 Risoluzione delle equazioni alle differenze del primo ordine</b> .....	9
<b>1.2.2 Stabilità dell'equilibrio: convergenza e oscillazione</b> .....	16
<b>1.2.3 Risoluzione di equazioni alle differenze non lineari: il Metodo Grafico</b> .....	21
<b>Capitolo 2 Modelli Dinamici Discreti in Economia</b> .....	27
<b>2.1 Il Modello della Ragnatela</b> .....	27
<b>2.1.1 Il Modello della Ragnatela Senza Magazzino</b> .....	27
<b>2.1.2 Il Modello della Ragnatela con Magazzino</b> .....	34
<b>2.1.3 Un Mercato con Calmiere sui Prezzi</b> .....	36
<b>2.2 La Dinamica Evolutiva del Rapporto Debito/Pil</b> .....	38
<b>Conclusione</b> .....	43
<b>Appendice</b> .....	45
<b>Appendice A - Il teorema del valor medio di Lagrange</b> .....	45
<b>Bibliografia</b> .....	47



# Introduzione

Citando Fritz Machlup, “come potrebbe affermare un estremista, essendo l’Economia concepita per descrivere il *cambiamento*, non può esistere una ‘*Statica economica*’ – e tutta l’Economia dovrebbe essere di conseguenza dinamica” (Machlup 1959, p.91). Per quanto parziale, come evidenziato dallo stesso Machlup (1959), questa affermazione nasconde una dicotomia fondamentale in economia, quella fra statico e dinamico, che è stata per molto tempo al centro del dibattito economico.

Da un punto di vista economico, come sostenuto da Schenk-Hoppé (2000), le radici della modellazione statica sono da ricercarsi nell’approccio Newtoniano alla meccanica, che ha successivamente influenzato Walras, Pareto, Marshall, Jevons e Edgeworth nel produrre una “rigida formulazione della meccanica dell’utilità” (Schenk-Hoppé 2000, p.1). Solamente a partire dagli anni ’20 del XX secolo, gli economisti hanno cominciato ad impiegare equazioni differenziali ed equazioni alle differenze per la modellazione economica (Schenk-Hoppé 2000, p.1). Da qui il suggerimento di Frisch di definire come *dinamico* un modello che contenesse almeno una relazione strutturale di natura dinamica (Schenk-Hoppé 2000, p.1).

Oggi, la Dinamica in senso economico si riferisce al tipo di analisi in cui gli obiettivi sono seguire e studiare l’evoluzione di variabili e determinare se, dopo un dato periodo di tempo, queste variabili tenderanno alla convergenza verso un equilibrio (Chiang, Wainwright 2004, p.444).

Una caratteristica fondamentale dell’analisi dinamica è quella della *datazione* delle variabili, introducendo dunque l’esplicita considerazione del tempo (Chiang, Wainwright 2004, p.444). Questo può essere fatto in due modi: *continuo* o *discreto*. Nel primo caso, gli elementi presi in considerazione possono variare in ogni momento e tale caratteristica si esplicita in una variabile tempo appartenente all’insieme dei numeri reali. Gli strumenti matematici rilevanti per l’analisi di questo tipo di modelli saranno il calcolo integrale e le equazioni differenziali. Nel secondo caso, gli elementi modellati variano una sola volta durante un *periodo*<sup>1</sup>. In questo secondo scenario, lo strumento matematico rilevante saranno le equazioni alle differenze.

Per quanto apparentemente banale, la necessità di prendere in considerazione un qualche tipo di eterogeneità temporale rimane una delle principali difficoltà in economia empirica e teorica (Boucekkine, Licandro, Paul 1997, p.348). Naturalmente, una trattazione realistica di un

---

<sup>1</sup> Si veda 1.2

fenomeno economico non può prescindere dalla presenza di un elemento di eterogeneità, dato che la maggior parte dei sistemi che compongono il mondo economico sono caratterizzati da tale eterogeneità (Boucekkine, Licandro, Paul 1997, p.348). Si pensi per esempio al deficit di bilancio di uno stato e la sua evoluzione nel tempo, al modello di Solow, al modello di Barro-Gordon o alla massimizzazione dell'utilità intertemporale di un consumatore. Tutti questi modelli hanno in comune la descrizione dell'evoluzione di una o più variabili nel tempo e devono necessariamente prendere in considerazione l'elemento temporale.

In questo elaborato, ci si concentrerà sulla modellazione di *sistemi dinamici discreti* e sullo strumento matematico utilizzato per descriverli, ovvero le *equazioni alle differenze*. In particolare, verrà fornita una breve trattazione di equazioni alle differenze del primo ordine, incentrata prima sulla formalizzazione di tale strumento e poi sulla discussione di un metodo risolutivo. Per quanto probabilmente meno utilizzata della controparte continua, questo tipo di modello offre spunti decisamente interessanti. Si pensi per esempio ad un individuo che debba decidere quanto denaro prelevare dal proprio conto corrente. Tale processo non avviene in un sistema continuo, in quanto il prelievo verrà effettuato con una certa cadenza (uno per periodo) e il saldo del conto corrente stesso verrà aggiornato una volta al giorno. Questo scenario richiederebbe dunque una formulazione discreta.

Nel secondo capitolo di questo elaborato verranno presentati due modelli dinamici discreti e le relative rappresentazioni grafiche. Il primo, il Modello della Ragnatela, si propone di descrivere la dinamica dell'evoluzione del prezzo in un mercato per un solo bene e permette di fare alcune osservazioni riguardo la volatilità dei prezzi ed eventuali misure per il contenimento di tale volatilità. Infine, si tratterà di un semplice modello per interpretare l'evoluzione del rapporto debito/PIL graficamente e saranno presentate alcune considerazioni sulla situazione italiana.

# Capitolo 1

## Lo strumento: le equazioni alle differenze

### 1.1 Il tempo continuo: un'introduzione alle equazioni differenziali

Nonostante al centro di questa trattazione vi sia un'esplorazione del tempo discreto, è comunque utile, per questioni legate alla completezza e contestualizzazione della terminologia, introdurre qualche concetto fondamentale dell'analisi in tempo continuo. Per quanto concerne la discussione di dinamiche evolutive di sistemi la cui progressione nel tempo avviene in un intervallo di numeri reali (tempo continuo), lo strumento matematico di riferimento sono le *equazioni differenziali*.

**Definizione 1.1:** Un'*equazione differenziale* è definita come un'equazione che contiene almeno una derivata di una funzione incognita (Binmore, Davies 2002).

Tre esempi sono forniti dalle formule (1.1), (1.2) e (1.3)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x + x^2 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\ln(x) - 1 \quad (1.3)$$

In base alle caratteristiche dell'equazione, possiamo distinguere tra *equazioni differenziali ordinarie* nel caso in cui compaia una sola variabile indipendente, come negli esempi (1.1) e (1.2). Chiameremo invece *alle derivate parziali* le equazioni differenziali in cui siano presenti più di una variabile indipendente, come invece illustrato in (1.3) (Binmore, Davies 2002).

Chiameremo *ordine* dell'equazione l'ordine di derivazione massimo che compare nell'equazione (Binmore, Davies 2002). Negli esempi apportati, l'equazione (1.1) risulta essere del primo ordine, mentre invece (1.2) e (1.3) risultano essere del secondo ordine. In questa discussione ci si concentrerà unicamente sul primo ordine.

Un'ulteriore definizione utile è quella di *equazione differenziale lineare* (di primo ordine).

**Definizione 1.2:** Si definisce *lineare* un'equazione differenziale (del primo ordine) nella forma

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)y = Q(x) \quad (1.4)$$

Per essere lineare quindi, un'equazione deve contenere termini di grado uno in  $\partial x/\partial y$  e in  $y$  (Binmore, Davies 2002).

Un'altra distinzione può essere fatta relativamente all'*omogeneità* dell'equazione differenziale.

**Definizione 1.3:** Si definisce *omogenea* di grado  $n$  un'equazione differenziale nella forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

dove le funzioni  $M$  ed  $N$  siano entrambe *funzioni omogenee* di grado  $n$  (Binmore, Davies 2002).

Con  $f: A \rightarrow R$  con  $A \subseteq R^n$  "cono", la funzione è omogenea di grado  $m \geq 0$  se (Acemoglu 2009, p.43)

$$f(\lambda x) = \lambda^m f(x), \lambda > 0, x \in A \quad (1.6)$$

Un'ultima distinzione utile per questa discussione è quella di *equazione differenziale lineare a coefficienti costanti*.

**Definizione 1.4:** Indicando con  $f^{(k)}(x)$  la derivata  $k$ -esima della funzione  $f$  ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq 0$ ), un'equazione differenziale di ordine  $n$  nella forma:

$$f^{(k)}(x) + a_1 f^{(k-1)}(x) + \dots + a_n f(x) = b(x) \quad (1.7)$$

con  $a_1, a_2, \dots, a_n$  numeri reali e  $b(x)$  funzione continua si dice *lineare a coefficienti costanti* (Buratto, Grosset, Viscolani 2020, p.360).

In ultimo, occorre accennare brevemente della risoluzione di questo tipo di equazioni. Una discussione approfondita sulle soluzioni di equazioni differenziali sarebbe una digressione rispetto all'argomento centrale di questo lavoro. Perciò, si includeranno solo alcune conclusioni rilevanti per lo scopo di questa analisi.

**Definizione 1.5:** La *soluzione* di un'equazione differenziale è una relazione tra le variabili dell'equazione in cui non compaiono derivate e che soddisfi l'equazione differenziale di partenza, ovvero che la renda un'espressione vera (Binmore, Davies 2002).

**Definizione 1.6:** La *soluzione generale* di un'equazione differenziale è l'insieme infinito delle soluzioni dell'equazione di partenza (Buratto, Grosset, Viscolani 2020, p.344), ed è rappresentata da una famiglia di *soluzioni particolari* (Buratto, Grosset, Viscolani 2020, p.344).

## 1.2 Il tempo discreto: le equazioni alle differenze lineari

Nella discussione di sistemi dinamici in tempo discreto, si richiede che la variabile tempo (d'ora in poi indicata con  $t$ ) prenda solo valori interi non negativi. Questo implica che l'evoluzione del sistema avvenga in momenti distinti. L'analisi dinamica di questo tipo di sistemi può essere figurativamente interpretato come delle "istantanee" dello stato del sistema fatte ad intervalli regolari.

La variabile dipendente cambia solo quando il valore di  $t$  passa da un numero intero a quello successivo. Il cambio di valore della variabile  $t$  determina un nuovo *periodo* e per questo la versione discreta dell'analisi dinamica di sistemi economici è chiamata *analisi di periodo*<sup>2</sup> (Chiang, Wainwright 2004, p.544).

In questo contesto appare abbastanza chiaro che lo strumento delle derivate non sia più rilevante. Ciò naturalmente implica l'impossibilità di utilizzare le *equazioni differenziali* per lo studio e la risoluzione di suddetti sistemi.

La controparte discreta delle *equazioni differenziali* sono chiamate *equazioni alle differenze*. Innanzitutto, è necessario introdurre una variazione di notazione. La descrizione del cambiamento di una variabile, qui  $y$ , nel tempo viene indicato in tempo continuo con la derivata  $\partial y/\partial t$ . In tempo discreto, per indicare il medesimo concetto di variazione si userà la notazione  $\Delta y/\Delta t$ .

---

<sup>2</sup> Si noti che il termine *periodo* non fa riferimento ad un intervallo temporale calendarizzato (come un giorno o un mese), ma ha qui un'accezione analitica. Quindi, un *periodo* potrà avere durata diversa tra un modello e l'altro o addirittura all'interno dello stesso modello

È utile notare come, dato che  $t$  può essere solo un numero naturale, il valore  $\Delta t$  sarà sempre necessariamente uguale a 1.

Quindi, la notazione di cui sopra può essere riscritta più semplicemente come  $\Delta y$  e si dirà *prima differenza di  $y$*  (Chiang, Wainwright 2004, p.545).

Più specificatamente,

$$\Delta y_t \equiv y_{t+1} - y_t \quad (1.8)$$

dove con la notazione  $y_t$  si indica il valore di  $y$  al  $t$ -esimo periodo e con  $y_{t+1}$  il suo valore al periodo immediatamente successivo.

Formalmente, sia  $t$  una variabile indipendente

$$t \in N \quad (1.9)$$

Sia poi definita una funzione  $y_t$

$$\begin{aligned} y: N &\rightarrow R \\ t &\rightarrow y_t \end{aligned} \quad (1.10)$$

Un'equazione alle differenze sarà un'equazione funzionale nella forma

$$f(t, y_t, \Delta y_t, \dots, \Delta^n y_t) = 0 \quad (1.11)$$

con  $f$  data funzione della variabile  $t$  e della funzione incognita  $y_t$  (Agarwal 2000, p.2).

Due formulazioni sono fornite dagli esempi (1.11) e (1.12).

$$\Delta y_t = 7 \quad (1.12)$$

$$\Delta y_t = 0.5y_t \quad (1.13)$$

Per convenienza, per il prosieguo di questa discussione tutte le equazioni alle differenze saranno scritte evitando l'utilizzo dell'operatore  $\Delta$ . Le equazioni (1.12) e (1.13) possono essere riscritte utilizzando (1.8) nella forma

$$y_{t+1} - y_t = 7 \quad (1.12b)$$

$$\begin{aligned} y_{t+1} - y_t &= 0.5y_t \\ y_{t+1} - 0.5y_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.13b)$$

Un'equazione alle differenze si dirà *in forma normale* se presentata nella forma (Agarwal 2000, p.3)

$$y_{t+n} = f(t, y_t, \dots, y_{t+n-1}) \quad (1.14)$$

Per quanto riguarda la classificazione delle equazioni alle differenze, si potrà distinguere tra *omogenee* o *non omogenee*, di *primo ordine* o ordini superiori al primo in modo del tutto analogo alle *equazioni differenziali* (Chiang, Wainwright 2004, p.546). Tale classificazione è stata presentata al paragrafo 1.1.

Inoltre, chiameremo *lineare* un'equazione alle differenze nella forma (Agarwal 2000, p.2)

$$\sum_{i=0}^n a_i(t)y_{t+i} = b_t \quad (1.15)$$

L'equazione (1.12b) è dunque un'equazione alle differenze lineare, non omogenea (il termine destro è diverso da 0) del primo ordine. L'equazione (1.13b) è un'equazione alle differenze lineare, omogenea del primo ordine. Si noti che entrambi gli esempi forniti sono in una forma paragonabile a quella di (1.7), essendo dunque a *coefficienti costanti*. In questa discussione, poiché il caso dei coefficienti costanti sarà l'unico preso in considerazione, d'ora in poi verrà implicitamente assunto.

### 1.2.1 Risoluzione delle equazioni alle differenze del primo ordine

L'obiettivo nella risoluzione di equazioni alle differenze è quello di cercare, similmente a quanto avviene in tempo continuo, una funzione della variabile  $t$  che definisca i valori di  $y$  nei diversi periodi che soddisfi l'equazione di partenza e le eventuali condizioni iniziali e che non contenga espressioni in  $\Delta y$  (o sue trasformazioni). (Chiang, Wainwright 2004, p.546)

**Definizione 1.7:** La *soluzione generale* di una data equazione alle differenze di ordine  $n$  sarà dunque un funzionale  $y_t$  che dipende da  $n$  costanti, ovvero  $y$  funzione di  $t, c_1, \dots, c_n$  (Agarwal 2000, p.4)

con

$$c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \quad (1.16)$$

Data una qualsiasi equazione alle differenze di ordine  $n$ , saremo interessati a risolvere il problema per trovare la *soluzione particolare*, ovvero quella soluzione per cui i primi  $n$  valori consecutivi di  $y$ , chiamati *condizioni iniziali*,

$$y_{a+i-1} = y_i \quad \text{con } 1 \leq i \leq n \quad (1.17)$$

siano conosciuti. Questo problema si dirà *problema ai valori iniziali* (Agarwal 2000, p.5).

Dato  $a = t$ , l'equazione (1.14) può essere riscritta come

$$y_{a+n} = f(a, y_a, \dots, y_{a+n-1}) \quad (1.18)$$

e per le condizioni iniziali (1.17) si avrà che

$$y_{a+n} = f(a, y_1, \dots, y_n) \quad (1.18b)$$

ovvero che il valore di  $y_{a+n}$  sia unicamente definito in funzione dei termini noti. Proseguendo con lo stesso ragionamento, imponendo  $t = a+1$ , si troverà che, analogamente,  $y_{a+n+1}$  è unicamente definito. Ripetendo tale procedimento fino a  $t = a+n$ , è dunque possibile concludere che tale problema avrà un'unica soluzione  $y_t$ . Si potrà dunque parlare di *esistenza* ed *unicità* della soluzione del *problema ai valori iniziali* (Agarwal 2000, p5).

Si passerà ora a presentare una breve analisi dal punto di vista pratico della risoluzione di equazioni alle differenze di primo ordine.

## Il Metodo Iterativo

Il primo metodo per la risoluzione trattato è quello *iterativo*. Per quanto elementare nel suo utilizzo, questo approccio risolutivo risulta essere piuttosto intuitivo e le conclusioni che si possono trarre dallo studio di tale metodo sono fondamentali per la comprensione della natura delle equazioni alle differenze di primo ordine (Chiang, Wainwright 2004, p.546).

Si prenda, per esempio, l'equazione (1.10b). Si supponga ora di conoscere il valore di  $y_0$ , lo *stato iniziale* del sistema, ovvero il valore assunto dalla variabile dipendente con  $t = 0$ . Sarà facilmente calcolabile il valore di  $y_1$ .

Per induzione sarà possibile trovare tutti i successivi valori di  $y$  (Elaydi 1996, p.2). Ciò consente di inferire la dinamica evolutiva sottesa dall'equazione differenziale. Di seguito è presentata la risoluzione per metodo iterativo dell'equazione (1.12b).

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 7 \\ y_2 &= y_1 + 7 = (y_0 + 7) + 7 = y_0 + 2 \times 7 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Quindi in generale, per qualsiasi valore di  $t$ :

$$y_t = y_0 + 7t \quad (1.20)$$

Questa rappresenta la *soluzione generale* dell'equazione (1.12b).

Si prenda ora un'equazione alle differenze lineare omogenea nella forma

$$my_{t+1} - ny_t = 0 \quad (1.21)$$

che può essere riscritta come

$$y_{t+1} = \frac{n}{m}y_t \quad (1.22)$$

La risoluzione per metodo iterativo di questa equazione

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(\frac{n}{m}\right)y_0 \\ y_2 &= \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}y_0\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^2 y_0 \\ y_t &= \left(\frac{n}{m}\right)^t y_0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

porta all'equazione (1.23) che, per semplicità, scriveremo come

$$y_t = Ab^t \quad (1.24)$$

Questa dunque sarà la forma della soluzione generale di qualsiasi equazione alle differenze di primo grado lineare omogenea. Ciò sarà di fondamentale importanza per la discussione di un metodo risolutivo generale (Chiang, Wainwright 2004, p.548).

Si noti che la soluzione trovata a (1.20) potrebbe inizialmente non sembrare compatibile con quanto appena affermato. Tuttavia, esaminando la controparte omogenea dell'equazione (1.12b)

$$y_{t+1} - y_t = 0 \quad (1.12c)$$

risulta immediato notare che il termine  $b = n/m$  risulta essere uguale a 1. Perciò la soluzione generale di tale equazione si riduce ad una costante.

## Il Metodo Generale

Si supponga ora di voler risolvere la seguente equazione alle differenze di primo ordine

$$y_{t+1} + ay_t = c \quad (1.25)$$

con  $a, c \in R$ . Si noti che il termine  $y_{t+1}$  ha coefficiente 1. Questa è una scelta deliberata e la ragione di tale decisione è di natura semplificatoria, come sarà possibile notare in seguito.

La soluzione generale ( $y_t$ ) di (1.25) sarà composta da due componenti: una *soluzione particolare*, che chiameremo  $y_p$  e sarà una soluzione qualsiasi dell'equazione non omogenea, ed una *soluzione complementare*, indicata con  $y_c$  che rappresenta la soluzione generale della versione omogenea di (1.25) (Chiang, Wainwright 2004, p.548).

La *soluzione particolare* rappresenta l'equilibrio intertemporale di  $y$  (Chiang, Wainwright 2004, p.548), ovvero il valore della variabile dipendente a cui rimarrebbe il sistema in assenza di deviazioni. Deviazioni che sono rappresentate dalla *soluzione complementare* (Chiang, Wainwright 2004, p.548).

Risulta più naturale, visti i risultati ottenuti dall'analisi del metodo iterativo, iniziare con la discussione di  $y_c$ .

La forma omogenea di (1.25) è rappresentata dall'equazione

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \quad (1.25b)$$

L'esperienza con il metodo iterativo suggerisce di provare con una soluzione che sia nella forma di (1.24). Nel caso in cui il termine  $Ab^t$  fosse nullo, la soluzione sarebbe semplicemente una successione costante. Dato lo scarso interesse di tale soluzione, richiederemo la condizione

$$Ab^t \neq 0 \quad (1.26)$$

Per (1.25) si avrà anche

$$y_{t+1} = Ab^{t+1} \quad (1.27)$$

Sostituendo (1.27) in (1.25b) si ottiene dunque

$$Ab^{t+1} + aAb^t = 0 \quad (1.28)$$

Dividendo l'equazione per il termine comune  $Ab^t$ , che sappiamo essere diverso da 0 dalla condizione a (1.26), si ottiene

$$\begin{aligned} b + a &= 0 \\ b &= -a \end{aligned} \quad (1.29)$$

Sostituendo questo risultato in (1.25), la soluzione complementare dell'equazione si può quindi scrivere come

$$y_c = A(-a)^t \quad (1.24b)$$

Per quanto riguarda la soluzione particolare, si noti che basta trovare una *qualsiasi* soluzione dell'equazione omogenea. Sarà quindi sufficiente testare diverse espressioni e controllare che esse siano effettivamente soluzione.

Data la semplicità di tale equazione, risulta naturale ed intuitivo cominciare con una soluzione nella forma

$$y_t = k \quad (1.30)$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . Essendo  $k$  una costante, anche il termine  $y_{t+1}$  sarà uguale a  $k$ . Ciò ci permette di sostituire in (1.25)

$$\begin{aligned} k + ak &= c \\ k &= \frac{c}{1+a} \end{aligned} \tag{1.31}$$

e, siccome (1.31) è soluzione di (1.25), avremo che

$$y_p = k = \frac{c}{1+a} \tag{1.31b}$$

con  $a \neq -1$  e quindi  $b \neq 1$ .

Si noti che questa soluzione descrive un *equilibrio stazionario*<sup>3</sup> (Chiang, Wainwright 2004, p.549).

Tuttavia, nel caso in cui  $a = -1$ , come nell'esempio (1.12), il termine  $k$  risulterà non definito e si dovrà quindi cercare una soluzione diversa. Chiang e Wainwright (2004) suggeriscono di procedere con una soluzione nella forma

$$y_t = kt \tag{1.32}$$

da cui anche

$$y_{t+1} = k(t+1) \tag{1.32b}$$

Sostituendo (1.32) e (1.32b) in (1.25) si trova

$$k(t+1) + akt = c \tag{1.33}$$

e, risolvendo per  $k$ ,

$$k = \frac{c}{t+1+at} = c \text{ poiché } [a = -1] \tag{1.34}$$

da cui

$$y_p = kt = ct \tag{1.35}$$

Questa forma della soluzione particolare rappresenta un *equilibrio non stazionario* (Chiang, Wainwright 2004, p.549).

---

<sup>3</sup> Per una discussione formale del concetto di equilibrio si veda 1.2.2

Una volta trovate  $y_c$  e  $y_p$  è possibile sommarle per ottenere le due soluzioni generali. In particolare, si avrà

$$y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a} \quad [\text{soluzione generale, } a \neq -1] \quad (1.36a)$$

$$y_t = A(-a)^t + ct = A + ct \quad [\text{soluzione generale, } a = 1] \quad (1.36b)$$

Entrambe le espressioni rappresentano soluzioni generali in coerenza con quanto affermato nella Definizione 1.7. Infatti, entrambe le forme individuano infinite soluzioni che differiscono per la costante arbitraria  $A$ .

Per ottenere la *soluzione particolare*, si imporrà la condizione iniziale

$$y_t = y_0 \text{ per } t = 0 \quad (1.37)$$

Ponendo  $t = 0$  in (1.36a) si avrà

$$\begin{aligned} y_0 &= A(-a)^0 + \frac{c}{1+a} \\ y_0 &= A + \frac{c}{1+a} \\ A &= y_0 - \frac{c}{1+a} \end{aligned} \quad (1.38a)$$

che, sostituita in (1.36a) da

$$y_t = \left( y_0 - \frac{c}{1+a} \right) (-a)^t + \frac{c}{1+a} \quad [\text{soluzione particolare, } a \neq -1] \quad (1.39a)$$

Analogamente, ponendo  $t = 0$  in (1.36b) si avrà

$$y_0 = A \quad (1.38b)$$

da cui

$$y_t = y_0 + ct \quad [\text{soluzione particolare, } a = -1] \quad (1.39b)$$

## 1.2.2 Stabilità dell'equilibrio: convergenza e oscillazione

Prima di proseguire nell'analisi delle caratteristiche delle soluzioni delle equazioni alle differenze, è necessario introdurre la nozione di *equilibrio* in quanto elemento di fondamentale interesse nell'analisi di qualsiasi sistema dinamico.

**Definizione 1.8:** Un punto  $y^*$  nel dominio di una funzione  $f$  si dirà *punto di equilibrio* del sistema dinamico caratterizzato dalla generica equazione alle differenze di primo ordine  $y_{t+1} = f(y_t)$ , se è un punto fisso di  $f$ , ovvero  $f(y^*) = y^*$ .  $y^*$  sarà dunque una *soluzione costante* dell'equazione alle differenze, poiché data la condizione iniziale  $y_0 = y^*$ , si avrà ovviamente  $y_1 = f(y^*) = y^*$ ,  $y_2 = f(y_1) = f(y^*) = y^*$  e così via (Elaydi 1996, p.9).

**Definizione 1.9:** Il punto di equilibrio  $y^*$  della generica equazione alle differenze del primo ordine  $y_{t+1} = f(y_t)$  si dirà *stabile* se, dato un  $\varepsilon > 0$ , esista un  $\delta > 0$  tale che  $|y_0 - y^*| < \delta$  implichi  $|f^t(y_0) - y^*| < \varepsilon$  per ogni  $t > 0$ . Se  $y^*$  non è stabile, allora sarà definito *instabile* (Elaydi 1996, p.11).

Dall'analisi condotta nel paragrafo 1.2.1 risulta evidente l'importanza fondamentale del termine  $Ab^t$ , in quanto forma distintiva delle soluzioni complementari delle equazioni alle differenze del primo ordine, per la discussione dell'equilibrio descritto dall'equazione stessa. In questo paragrafo si esaminerà in maniera più approfondita il ruolo dei termini  $A$  e  $b$  nella *stabilità* dell'equilibrio, ovvero l'evoluzione del valore del termine  $Ab^t$  per  $t \rightarrow \infty$ .

### 1.2.2.1 Il termine $b$

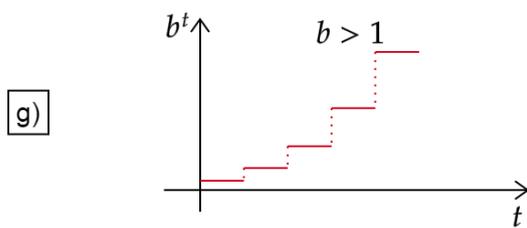
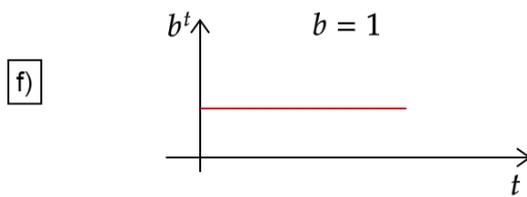
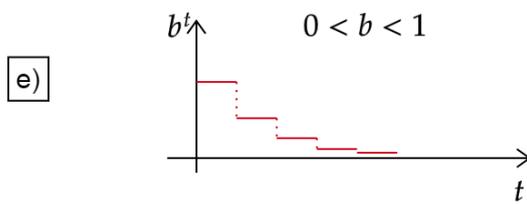
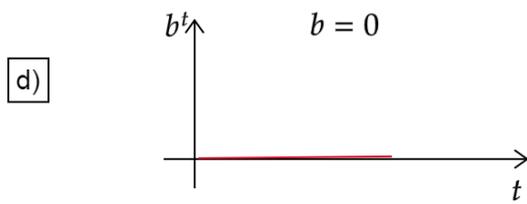
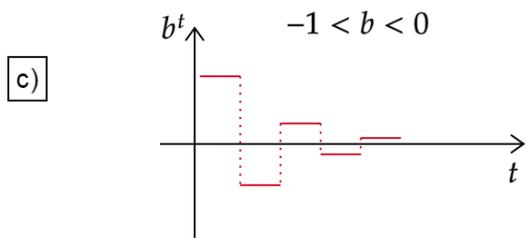
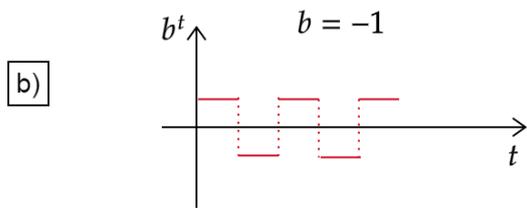
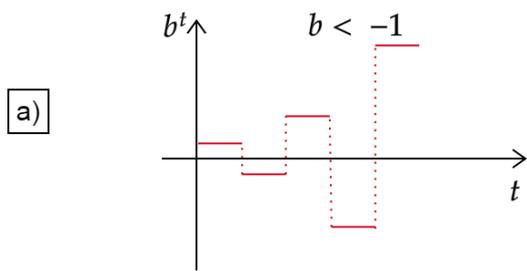
Per meglio concentrarsi sul parametro  $b$ , si assumerà  $A = 1$ . Il comportamento del termine  $b^t$  dipenderà naturalmente dal valore della base della potenza. Per facilitare l'analisi di tale comportamento e favorirne la comprensione, è opportuno accorpate i valori di  $b$  caratterizzati da dinamiche evolutive analoghe. Nella Tabella A sono illustrati sette diversi casi, presentati in ordine crescente.

Tabella A

Valore di $b$	Valore di $b^t$	Valore di $b^t$ al variare di $t$				
		$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$
$b < -1$	es. $(-2)^t$	1	-2	4	-8	16
$b = -1$	$(-1)^t$	1	-1	1	-1	1
$-1 < b < 0$	es. $\left(-\frac{1}{2}\right)^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$b = 0$	$0^t$	0	0	0	0	0
$0 < b < 1$	es. $\left(\frac{1}{2}\right)^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$b = 1$	$1^t$	1	1	1	1	1
$b > 1$	es. $2^t$	1	2	4	8	16

Dagli esempi forniti si possono già notare le diverse nature delle dinamiche evolutive determinate dai valori della base  $b$ . Tuttavia, per far emergere nitidamente tali caratteristiche è presentata una rappresentazione grafica della *Tabella A*. Si noti che i grafici forniti sono a scopo esemplificativo e semplificatorio, dunque non rappresentano fedelmente i dati forniti nella tabella.

Grafico A



I casi più semplici e forse anche economicamente interessanti sono rappresentati dai diagrammi *d)* e *f)*. Il primo, il cui grafico coincide con l'asse  $t$ , è presentato per completezza della discussione, anche se tale caso, ai fini di questo elaborato, è escluso dalla condizione (1.26). Il secondo ha un comportamento analogo, ma in questo caso il grafico è una retta parallela all'asse delle ascisse in corrispondenza del valore  $b = 1$ . In questi due scenari il termine  $b^t$  sarà una costante.

I diagrammi *e)* e *g)* rappresentano invece la dinamica evolutiva determinata da valori di  $b$  positivi. Quando  $b$  è minore di 1, l'elevazione ad un esponente nell'insieme dei naturali determina una progressiva diminuzione del valore della funzione, che, rimanendo sempre positiva, *converge* verso 0. Quando  $b$  è invece maggiore di 1, la natura dell'esponenziale determina un'esplosione del valore di  $b^t$ , *divergendo* a  $+\infty$ .

I diagrammi *a)*, *b)* e *c)* rappresentano invece il comportamento che emerge quando la base è un numero negativo. Si può subito notare una caratteristica peculiare, ovvero l'alternarsi dei valori tra positivi e negativi. Quando  $b$  è minore di -1, il valore assoluto dell'esponenziale aumenta, divergendo a  $+\infty$ . Quando invece è compreso fra 0 e -1, la dinamica evolutiva alternata converge a 0. Infine, quando il valore di  $b$  è uguale a -1 si osserva un perpetuo alternarsi tra +1 e -1, che chiameremo *oscillazione uniforme* (Chiang, Wainwright 2004, p.557).

Dalle osservazioni effettuate è possibile dunque generalizzare il comportamento del termine  $b^t$  a seconda del valore assunto dalla sua base. La convergenza dipenderà dal valore assoluto di  $b$ , mentre invece il comportamento oscillatorio dal suo segno. Prima di procedere, è opportuno che si enunci formalmente la definizione di *soluzione oscillatoria*.

**Definizione 1.10:** Una soluzione  $y_t$  si dirà *oscillatoria* (intorno allo 0) se per ogni  $N$  intero positivo esiste un  $t \geq N$  tale che  
 $(y_t)(y_{t+1}) \leq 0$  (Elaydi 1996, p.351)

Quindi, la dinamica evolutiva di  $b^t$  ( $b \neq 0$ ) si dirà (Chiang, Wainwright 2004, p.552):

- *Non-oscillatoria* per  $b > 0$
- *Oscillatoria* per  $b < 0$
- *Convergente* per  $|b| < 1$
- *Divergente* per  $|b| > 1$

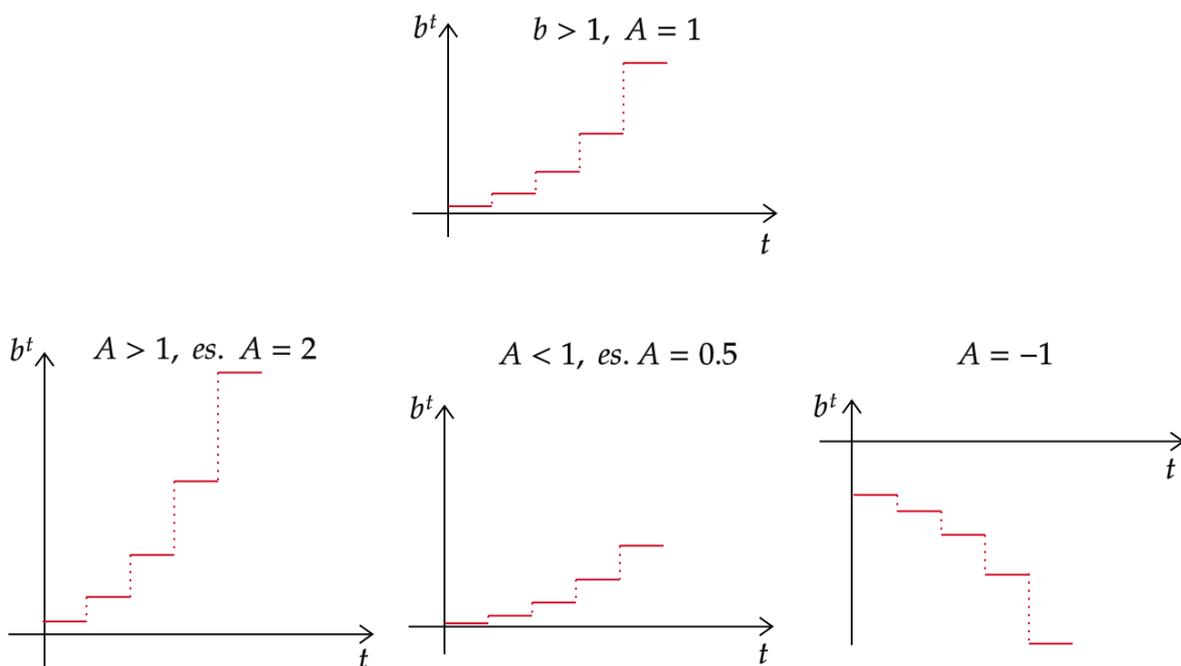
È opportuno notare che, nonostante il comportamento oscillatorio determinato da determinate equazioni alle differenze potrebbe ricordare l'andamento ondulatorio osservato, per esempio, in funzioni sinusoidali, qui le fluttuazioni non sono continue. Da ciò dunque la necessità di adottare il termine *oscillatorio*.

### 1.2.2.2 Il termine $A$

Il ruolo della costante  $A$  è abbastanza semplice da valutare e, anche in questo caso, può essere esaminato a seconda del segno e del valore assoluto della costante.

Il valore assoluto di  $A$  determinerà "l'esplosione" o la "mitigazione" del termine  $Ab^t$  (Chiang, Wainwright 2004, p.553), ma non le sue caratteristiche fondamentali. Per  $|A| > 1$  si avrà un effetto di scala positivo, invece per  $|A| < 1$  si avrà un effetto di scala negativo. Se la costante ha segno negativo, allora si avrà un effetto anche sulla forma del grafico, poiché causerà un *ribaltamento* rispetto all'asse delle ascisse. I tre effetti discussi sono illustrati dal Grafico B.

Grafico B



### 1.2.2.3 Convergenza all'equilibrio

L'analisi condotta in questo paragrafo non ha finora trattato del ruolo della *soluzione particolare* ( $y_p$ ), che rappresenta l'eventuale deviazione dall'equilibrio intertemporale dell'equazione. Si prenda, per esempio, una soluzione particolare

$$y_p = k \quad (1.40)$$

che vada quindi aggiunta al termine  $Ab^t$ . Ciò determinerà lo spostamento verso l'alto di  $q$  unità. Naturalmente, ciò non avrà alcun effetto sulle caratteristiche fondamentali del grafico (convergenza ed oscillazione), ma cambia il livello usato come riferimento per determinare l'eventuale convergenza. Quando si aggiunge  $y_p$ , infatti, andrà presa in considerazione la convergenza di  $y_t = y_c + y_p$  al livello di equilibrio  $y_p$  (Chiang, Wainwright 2004, p.554).

A tal proposito, si consideri l'illustrazione *f*) del Grafico A ( $b = 1$ ). In questo caso, in presenza di una soluzione particolare nella forma (1.40), ci sarà una deviazione sistematica dal punto di equilibrio  $y_p$ , poiché  $y_t$  prenderà il valore di  $y_p + A$ , non potendo dunque mai raggiungere  $y_p$  (salvo per  $A = 0$ ). In questo caso, la dinamica descritta è da considerarsi *divergente*.

### 1.2.3 Risoluzione di equazioni alle differenze non lineari: il Metodo Grafico

Nei paragrafi precedenti è stato presentato un metodo risolutivo di equazioni alle differenze lineari di primo ordine. Tuttavia, sarebbe irragionevole pensare che tutti i modelli economici possano essere ricondotti a sistemi descritti da equazioni lineari. Nel caso in cui il termine  $y_t$  compaia in termini non lineari, come ad esempio nelle equazioni (1.41) e (1.42), si parlerà di equazioni alle differenze non lineari.

$$y_{t+1} + y_t^2 = 7 \quad (1.41)$$

$$y_{t+1} + \cos(y_t) + e^{y_t} = 0 \quad (1.42)$$

La metodologia presentata precedentemente risulta non idonea per la risoluzione di suddette forme.

Uno strumento utile per l'analisi di questo tipo di equazione, la cui forma può essere genericamente enunciata come

$$y_{t+1} = f(y_t) \tag{1.43}$$

è il *diagramma di fase*.

**Definizione 1.11:** Si definirà diagramma di fase per l'equazione (1.43) il diagramma cartesiano che contiene il grafico della funzione  $f$ , detto *linea di fase*, e la bisettrice del primo e del terzo quadrante (Peccati, Salsa, Squellati 2014, p.343).

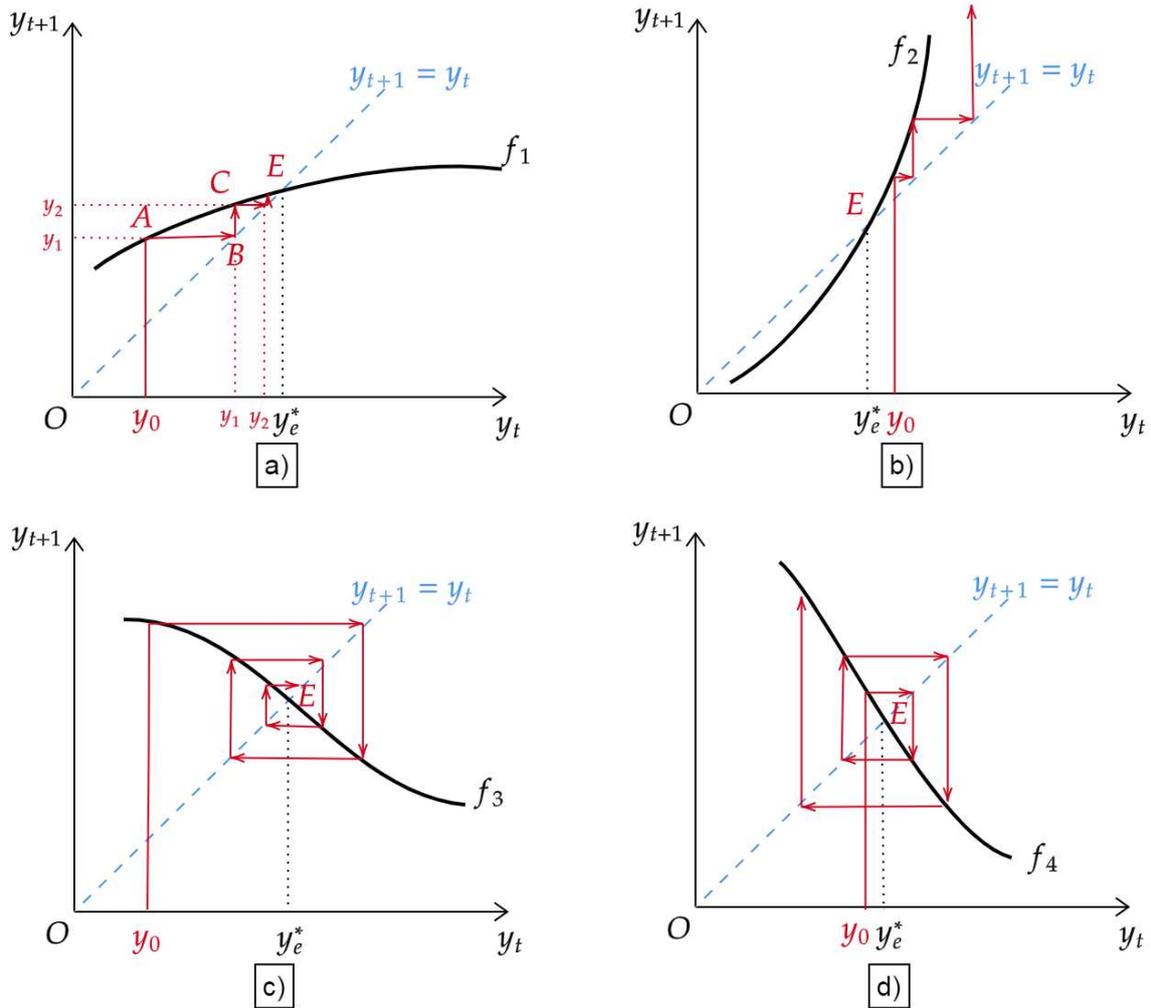
Sull'asse delle ascisse sarà riportata  $y_t$ , mentre su quello delle ordinate  $y_{t+1}$

Il diagramma di fase permette di individuare eventuali *punti di equilibrio* del sistema dinamico, che saranno rappresentati dalle intersezioni tra la linea di fase e la bisettrice (Peccati, Salsa, Squellati 2019, p.343; Chiang, Wainwright 2004, p.564). Inoltre, questo tipo di analisi consente di trarre importanti conclusioni sulla natura della dinamica evolutiva descritta dal sistema stesso (Peccati, Salsa, Squellati 2014, p.343; Chiang, Wainwright 2004, p.563).

Il processo di costruzione per iterazione del diagramma di fase è illustrato nel diagramma *a* del Grafico C.

Si prenda un punto iniziale  $y_0$  sull'asse delle ascisse. Riportando tale valore sulla linea di fase si individuerà il punto di coordinate  $(y_0, f(y_0))$ , ovvero il punto la cui ordinata avrà valore pari a  $y_1 = f(y_0)$ . Utilizzando la bisettrice come riferimento (poiché tale retta è descritta da  $y_{t+1} = y_t$ ) sarà ora possibile riportare tale valore sull'asse delle ascisse. Ripetendo questo procedimento, si potranno individuare tutti i punti di coordinate  $(y_t, y_{t+1})$  e  $(y_t, y_t)$  e, collegandoli con una spezzata (nel caso del diagramma *a*) con frecce per chiarezza) si giungerà ad un *diagramma a gradini* (Peccati, Salsa, Squellati 2014, p.344). Il diagramma a gradini, quindi, rappresenta graficamente l'orbita evolutiva descritta dall'equazione (1.41). Nel Grafico C, l'equilibrio intertemporale  $y^*_e$  è stato individuato graficamente dall'intersezione tra la linea di fase e la bisettrice, indicata con  $E$ .

Grafico C



Come illustrato dai diagrammi *b)*, *c)*, e *d)*, la dinamica evolutiva che si verrà a creare dipende dalla natura della funzione  $f$ .

Nei diagrammi *a)* e *b)* le funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono inclinate positivamente, mentre nei diagrammi *c)* e *d)* le funzioni  $f_3$  e  $f_4$  sono inclinate negativamente.

Nel diagramma *a)* l'orbita descritta converge in modo omogeneo verso  $E$ .

Nel diagramma *b)* si può invece notare una dinamica diversa, in cui le frecce si allontanano progressivamente in modo non oscillatorio dall'equilibrio.

Nel diagramma *c)* è descritta un'orbita convergente al livello di equilibrio  $y_e^*$  ma in modo oscillatorio, mentre le oscillazioni osservate in *d)* portano il grafico a divergere da  $E$ .

Quindi, il Grafico C consente di fare qualche previsione relativamente al comportamento che ci aspettiamo dalla dinamica evolutiva a seconda della funzione  $f$  coinvolta.

Nello specifico, analogamente a quanto osservato al paragrafo 1.2.2, è possibile intuire che il *segno algebrico* della pendenza della funzione determini la presenza o meno di oscillazioni

nel percorso all'equilibrio (Chiang, Wainwright 2004, p.565). Sembra anche abbastanza semplice convincersi con semplici analisi qualitative che la convergenza dipenda invece da quanto "ripido" è il grafico, ovvero dipenda dal modulo della pendenza della funzione relativamente alla pendenza della bisettrice.

Questa tendenza o meno alla convergenza in un grafico di fase si traduce nell'esistenza o nell'assenza di un punto di equilibrio *attrattore globale*.

**Definizione 1.12:** Un punto di equilibrio  $y^*$  è attrattore globale per un sistema dinamico discreto descritto da  $y_{t+1} = f(y_t)$  se, qualunque sia il punto iniziale  $y_0$ ,  $y_t$  converge a  $y^*$  (Peccati, Salsa, Squellati 2014, p.345).

E la apparentemente banale intuizione relativamente alla convergenza all'equilibrio può essere formalizzata da una condizione per l'unicità e l'esistenza di un attrattore globale.

**Teorema 1.1:** Sia  $f: R \rightarrow R$ , derivabile in ogni punto. Se  $|f'| \leq k < 1$  su tutto  $R$ , allora esiste un unico punto di equilibrio per il sistema dinamico  $y_{t+1} = f(y_t)$  ed esso è attrattore globale, dove con  $f'$  si indichi la derivata prima della funzione  $f$ .

**Dimostrazione** (Peccati, Salsa, Squellati 2014, p.345):

Per ipotesi abbiamo

$$|f'(y)| \leq k \quad \forall x \in R$$

Allora, il grafico di  $f$  è necessariamente compreso nel doppio settore del piano cartesiano delimitato dalle rette

$$y = f(0) - kx \quad e \quad y = f(0) + kx$$

dove  $f(0)$  rappresenta l'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate. Poiché  $k < 1$ , la bisettrice intersecherà il grafico di  $f$  *esattamente* in un punto  $y^*$ , che sarà dunque l'unico punto di equilibrio.

Per dimostrare che esso è attrattore globale, occorre dimostrare che qualsiasi altra soluzione  $y_t$  converge a  $y^*$ .

Si consideri la distanza tra  $y_t$  e  $y^*$ . Da (1.43) e dalla Definizione 1.8 per cui  $f(y^*) = y^*$  avremo che

$$|y_t - y^*| = |f(y_{t-1}) - f(y^*)|$$

Usando il teorema del valor medio di Lagrange<sup>4</sup> e per  $|f'| \leq k$ , si può scrivere

$$|f(y_{t-1}) - f(y^*)| = |f'(c_n)(y_{t-1} - y^*)| \leq k|y_{t-1} - y^*|$$

da cui

$$|y_t - y^*| \leq k|y_{t-1} - y^*|$$

Ripetendo lo stesso procedimento per calcolare la distanza fra  $y_{t-1}$  e  $y^*$ , ovvero il termine in valore assoluto a destra della disequazione, si trova

$$|y_t - y^*| \leq k|y_{t-1} - y^*| \leq k^2|y_{t-2} - y^*|$$

e, con gli stessi calcoli si arriverà a trovare

$$|y_t - y^*| \leq k|y_{t-1} - y^*| \leq k^2|y_{t-2} - y^*| \leq \dots \leq k^n|y_0 - y^*|$$

Poiché  $k < 1$  per ipotesi, il termine  $k^n$  tenderà a 0. Da ciò possiamo concludere che

$$|y_t - y^*| \rightarrow 0, \text{ ovvero } y_t \rightarrow y^*$$

indipendentemente dal valore di  $y_0$ .

Naturalmente, queste conclusioni sono basate sull'iniziale ipotesi che la pendenza di una determinata funzione sia sempre positiva o negativa e che il suo modulo sia sempre maggiore o minore di 1. Queste richieste sono piuttosto restrittive e in presenza di comportamenti ibridi la dinamica evolutiva descritta sarà più complessa e dipenderà dal valore della condizione iniziale (Chiang, Wainwright 2004, p.565). Tuttavia, il metodo di risoluzione grafico appena descritto potrà comunque fornire un valido strumento per interpretare il sistema dinamico in questione.

---

<sup>4</sup> Per l'enunciazione e dimostrazione di tale teorema si vada alla Sezione A dell'Appendice



## Capitolo 2

### Modelli Dinamici Discreti in Economia

In questo capitolo verranno presentati due modelli economici che fanno uso di equazioni alle differenze per descrivere un particolare fenomeno.

#### 2.1 Il Modello della Ragnatela

##### 2.1.1 Il Modello della Ragnatela Senza Magazzino

Questo primo modello permette di analizzare le dinamiche di domanda ed offerta per un mercato caratterizzato da un solo bene. La particolarità di questo modello è che la quantità offerta è supposta essere funzione del prezzo osservato nel periodo precedente, invece che del prezzo correntemente osservabile sul mercato (Ferguson 1960, p.300).

Per quanto atipica rispetto ai tradizionali modelli di equilibrio parziale costruiti con croci marshalliane (Sandelin, Trautwein, Wundrak, 2014, p.54), questa ipotesi non è del tutto irragionevole. Si prenda in considerazione, per esempio, il mercato per un bene agricolo. Il produttore deve fare le sue valutazioni per la massimizzazione del profitto al momento della semina, che chiameremo  $t$ . Il bene verrà scambiato sul mercato in un periodo successivo, ovvero  $t+1$ . Appare quindi razionale assumere che la quantità domandata sia determinata in base al prezzo al tempo  $t+1$ . Quindi, in questo modello si potrà parlare di funzione di offerta *ritardata* (Chiang, Wainwright 2004, p.555).

Per cui si avrà

$$Q_{s,t+1} = S(p_t) \quad (2.1)$$

*o anche*

$$Q_{s,t} = S(p_{t-1})$$

$$Q_{d,t} = D(p_t) \quad (2.2)$$

dove  $p_t$  rappresenta il prezzo unitario del bene al tempo  $t$ ,  $Q_{s,t}$  e  $Q_{d,t}$  rappresentano le quantità offerte e domandate al tempo  $t$  e le funzioni  $S$  e  $D$  le funzioni di offerta e domanda.

La seconda ipotesi, riguardante la forma di tali funzioni, è di natura semplificatoria. Si assumerà, infatti, che sia domanda che offerta siano funzioni lineari del prezzo (Chiang, Wainwright 2004, p.555; Elaydi 1996, p.17; Ferguson 1960, p.300).

Quindi, la domanda prenderà la forma

$$Q_{d,t} = -m_d p_t + b_d \text{ con } m_d > 0, b_d > 0 \quad (2.3)$$

e l'offerta

$$Q_{s,t} = m_s p_{t-1} + b_s \text{ con } m_s > 0, b_s > 0 \quad (2.4)$$

dove i coefficienti costanti  $m_s$  e  $m_d$  rappresentano la sensibilità di domanda e offerta al prezzo.

Infatti, si avrà che

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_d}{\partial p_t} &= -m_d \\ \frac{\partial Q_s}{\partial p_{t-1}} &= m_s \end{aligned} \quad (2.5)$$

ovvero che, al variare di un'unità del prezzo, la quantità offerta/domandata varierà di  $m$  unità.

La terza ipotesi che è necessario specificare è la *condizione di equilibrio del mercato* e prevederà che il prezzo sia determinato in modo tale che domanda e offerta si equivalgano, ovvero (Elaydi 1996, p.17; Ferguson 1960, p.300)

$$Q_{d,t} = Q_{s,t} \quad (2.6)$$

Una prima, più basilare versione di questo modello prevede che l'intero output di un periodo vada interamente scambiato sul mercato. Anche in questo caso, la condizione richiesta non è irragionevole se si pensa, per esempio, a beni altamente deperibili che non possono essere conservati per lunghi periodi.

Quindi, questo determina la possibilità di descrivere il modello, combinando (2.3), (2.4) e (2.6) con il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} Q_{d,t} = Q_{s,t} \\ Q_{d,t} = -m_d p_t + b_d \\ Q_{s,t} = m_s p_{t-1} + b_s \end{cases} \quad (2.7)$$

Sostituendo le equazioni per la quantità offerta e domandata nella condizione di equilibrio si ottiene

$$-m_d p_t + b_d = m_s p_{t-1} + b_s \quad (2.8)$$

che scritta in forma normale (con i pedici spostati avanti di un periodo per coerenza con la notazione impiegata nei paragrafi precedenti) diventa

$$p_{t+1} = -\frac{m_s}{m_d}p_t + \frac{b_d - b_s}{m_d} \quad (2.9)$$

Risulta evidente che, con le seguenti sostituzioni

$$\begin{aligned} p_t &= y_t \\ \frac{m_s}{m_d} &= a \\ \frac{b_d - b_s}{m_d} &= c \end{aligned} \quad (2.10)$$

tale equazione prende la forma di (1.25). Data la positività imposta ai coefficienti in (2.3) e (2.4), si può concludere che  $a \neq -1$ . Per la risoluzione dell'equazione (2.9) si potrà quindi utilizzare la formula risolutiva (1.39a).

Sostituendo dunque i termini in (1.39a) con (2.10) si otterrà

$$\begin{aligned} p_t &= \left( p_0 - \frac{b_d - b_s}{m_d} \times \frac{m_d}{m_d + m_s} \right) \left( -\frac{m_s}{m_d} \right)^t + \left( \frac{b_d - b_s}{m_d} \times \frac{m_d}{m_d + m_s} \right) \\ p_t &= \left( p_0 - \frac{b_d - b_s}{m_d + m_s} \right) \left( -\frac{m_s}{m_d} \right)^t + \frac{b_d - b_s}{m_d + m_s} \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove il termine  $p_0$  rappresenta il prezzo del bene al tempo 0.

Questa equazione ci consente di fare delle osservazioni importanti sulla dinamica descritta dal modello.

Innanzitutto, da (1.31b), sappiamo che il termine  $\frac{c}{1+a}$ , ovvero  $\frac{b_d - b_s}{m_d + m_s}$  nel caso specifico, è la soluzione particolare dell'equazione  $y_p$ , che, come presentato in 1.2.1, rappresenta l'equilibrio intertemporale del sistema. Quindi avremo che

$$\bar{p} = \frac{b_d - b_s}{m_d + m_s} \quad (2.12)$$

e, essendo tutti i termini in questione costanti, l'equilibrio descritto sarà un equilibrio stazionario (Chiang, Wainwright 2004, p.556; Elaydi 1996, p.18).

Sostituendo (2.12) in (2.11) si ottiene

$$p_t = (p_0 - \bar{p}) \left( -\frac{m_s}{m_d} \right)^t + \bar{p} \quad (2.11b)$$

Dall'equazione presentata in questa forma appare più evidente come, utilizzando (1.38a), si possa ricondurre il termine  $p_0 - \bar{p}$  al termine  $A$  della soluzione generale presentata a (1.24). Come analizzato in 1.2.2, il segno di questo parametro andrà a determinare se la dinamica evolutiva avverrà al di sopra o al di sotto del punto di equilibrio e il suo valore assoluto l'effetto di scala ad esso associato (si veda il Grafico B).

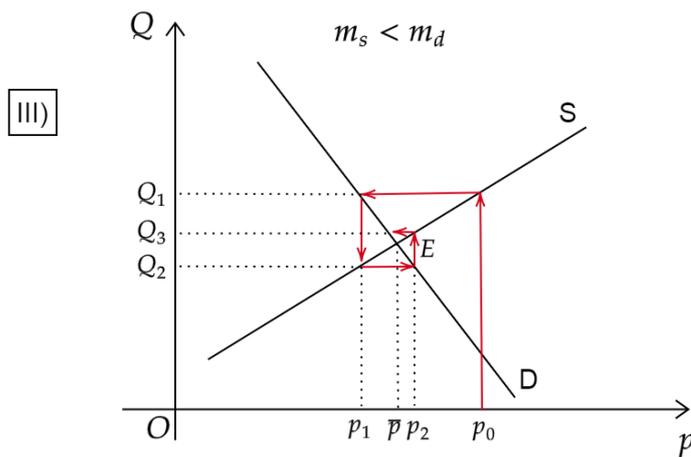
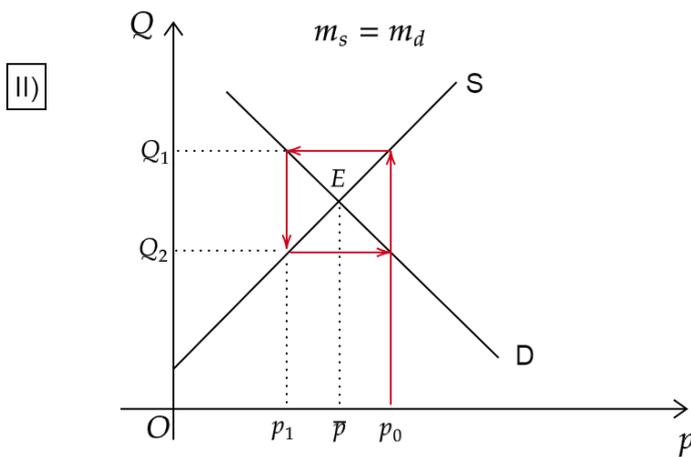
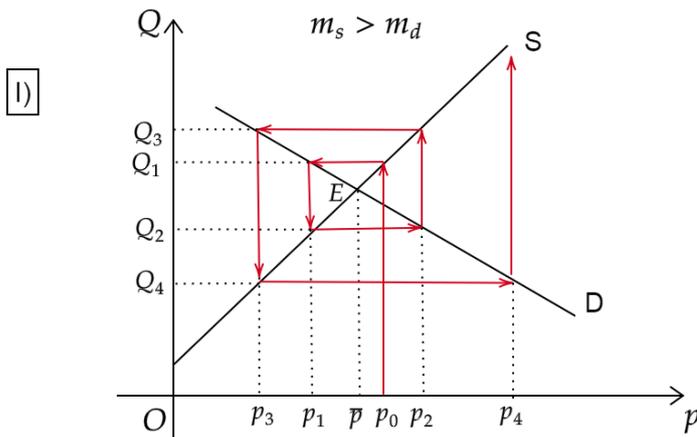
In ultimo, occorre naturalmente discutere del termine  $-\frac{m_s}{m_d}$ , che, come è possibile dedurre da (1.29), rappresenta il termine  $b$  di (1.24). Essendo entrambi i coefficienti positivi [(2.3), (2.4)], possiamo dedurre che questo parametro sarà negativo. Per  $b < 0$ , come presentato nel Grafico A, possiamo distinguere 3 diversi casi. Il primo, per  $b < -1$ , ovvero per  $m_s > m_d$ , determinerà una dinamica divergente, il secondo, per  $b = -1$ , ovvero per  $m_s = m_d$ , determinerà l'oscillazione fra due valori ed il terzo, per  $-1 < b < 0$ , ovvero per  $m_s < m_d$ , determinerà la convergenza all'equilibrio.

Fatte queste considerazioni, sarà ora possibile costruire una rappresentazione grafica del modello utilizzando un piano cartesiano. Contrariamente a quanto generalmente diffuso nella pratica economica (Sandelin, Trautwein, Wundrak, 2014, p.54), il prezzo sarà rappresentato sull'asse delle ascisse e le quantità su quello delle ordinate. Questa decisione è coerente con le modalità con cui è stato presentato il modello, dunque in ottica di discussione di dinamiche di prezzo. In ogni caso, un'analisi incentrata sull'evoluzione delle quantità sarebbe altrettanto valida.

Graficamente, la domanda sarà una retta inclinata negativamente con pendenza  $-m_d$ , mentre l'offerta una retta positivamente inclinata con pendenza  $m_s$ . L'intersezione tra le due rette, che rappresenta l'unico punto di equilibrio del sistema (Elaydi 1996, p.18), indicata con  $E$ , rappresenta l'equilibrio intertemporale e la sua proiezione sull'asse delle ascisse il prezzo  $\bar{p}$  (Chiang, Wainwright 2004, p.557).

Tale rappresentazione è illustrata nel Grafico D.

Grafico D



La modalità per la costruzione dei tre diagrammi è fondamentalmente analoga a quella utilizzata in 1.2.3 per i diagrammi di fase.

Si prenda, per esempio il diagramma I). Fissato il prezzo iniziale  $p_0$  sull'asse delle ascisse (in questo caso si è assunto  $p_0 > \bar{p}$ ), sarà possibile riportare tale valore sulla retta  $S$  per ottenere la

quantità  $Q_I$  che sarà offerta dai produttori al periodo successivo, ovvero al tempo  $t_I$ . Per soddisfare la condizione (2.6), ovvero l'uguaglianza tra quantità domandata ed offerta, il prezzo dovrà necessariamente essere uguale a  $p_I$ , come individuabile riportando  $Q_I$  su  $S$ . Questo sarà il prezzo sul quale i produttori baseranno la propria decisione relativamente alla quantità offerta per il periodo successivo ( $Q_2$ ) e quindi lo stesso procedimento si ripeterà.

Per quanto riguarda il diagramma I), analizzando l'evoluzione della variabile  $p$ , si possono osservare le due caratteristiche fondamentali della situazione determinata da un'offerta più sensibile al prezzo della domanda. Infatti, confrontando, per esempio,  $p_1$  e  $p_2$ , non solo si palesa  $|p_1 - \bar{p}| < |p_2 - \bar{p}|$ , quindi la divergenza dall'equilibrio, ma anche  $sgn(p_1 - \bar{p}) \neq sgn(p_2 - \bar{p})$ , ovvero la dinamica oscillatoria intorno all'equilibrio.

La stessa analisi può essere fatta per il diagramma III), in cui si può similmente notare l'oscillazione, quindi  $sgn(p_t - \bar{p}) \neq sgn(p_{t+1} - \bar{p})$ , ma in cui invece c'è convergenza all'equilibrio, quindi  $|p_t - \bar{p}| > |p_{t+1} - \bar{p}|$ .

Il diagramma II) illustra la situazione analizzata in 1.2.2.3, ovvero la dinamica che si genera quando, per  $p_0 \neq \bar{p}$ , si avrà una deviazione sistematica dall'equilibrio intertemporale. Si avrà dunque una dinamica con un equilibrio stabile (come da Definizione 1.9), ma in cui la convergenza non sarà mai raggiunta (Ferguson 1960, p.301).

In ultimo, occorre osservare come un'analisi condotta utilizzando il metodo grafico presentato in 1.2.3 porterebbe a conseguenze analoghe, offrendo dunque una valida alternativa per la comprensione di questo modello.

### **2.1.1.1 Un'applicazione: Intervento del Governo per la Stabilizzazione dei Prezzi**

In questo paragrafo si presenterà brevemente un'applicazione pratica del Modello della Ragnatela di base, in particolare facendo riferimento all'articolo "*Cobweb Model with Buffer Stock for the Stabilization of Tomato Prices in Ghana*" di Anokye e Tabi Oduro del 2012. Con l'obiettivo di modellare un metodo per la stabilizzazione dei prezzi dei pomodori, gli autori introducono qualche modifica alle ipotesi sottostanti il modello presentato in 2.2.1.

Nello specifico, si consideri la possibilità per il governo di intervenire sul mercato. Si definisca quindi  $M_t$  la quantità di pomodori immagazzinati dal governo in un determinato periodo, ovvero la variabile di stato, e  $G_t$  la quantità di bene che il governo decide di

immettere ( $G > 0$ ) o ritirare dal mercato ( $G < 0$ ), ovvero la variabile di controllo. Dovrà perciò valere

$$M_t = M_{t-1} - G_{t-1} \quad (2.13)$$

e la condizione di equilibrio sul mercato diventerà ora

$$Q_{d,t} = Q_{s,t} - G_{t-1} \quad (2.14)$$

Dato che non vi è alcuna condizione aggiuntiva sulle funzioni di domanda e offerta, il modello sarà dunque rappresentato dal seguente sistema

$$\begin{cases} Q_{d,t} = -m_d p_t + b_d \\ Q_{s,t} = m_s p_{t-1} + b_s \\ M_t = M_{t-1} - G_{t-1} \\ Q_{d,t} = Q_{s,t} - G_{t-1} \end{cases} \quad (2.15)$$

la cui risoluzione per sostituzione, analogamente a quanto fatto a 2.2.1, porta alla seguente equazione alle differenze

$$p_t = \left( -\frac{m_s}{m_d} \right) p_t - \left( \frac{b_s - b_d - G_{t-1}}{m_d} \right) \quad (2.16)$$

dove, con  $G = 0$ , si ottiene esattamente (2.9).

Gli autori stimano poi tramite il *metodo dei minimi quadrati* i coefficienti di domanda ed offerta, da cui ottengono  $\widehat{m}_d < \widehat{m}_s$ . Questo rientra nel caso descritto dal diagramma I) nel Grafico D, ovvero una dinamica evolutiva divergente con prezzi che tendono ad esplodere. Tuttavia, grazie all'introduzione delle riserve governative, è possibile garantire stabilità al mercato tramite una politica definita come *KSE* (Athanasiou et al. 2008; Anokye, Tabi Oduro 2012, p.4), ovvero il mantenimento dell'offerta il più vicino possibile a quella di equilibrio intertemporale, ovvero l'offerta di equilibrio per  $p_0 = \bar{p}$ , denominata  $Q_s^0$ .

Questa politica consente la stabilizzazione fissando  $G_t$  tramite (Athanasiou et al. 2008)

$$G_t = \min \left\{ M_t; \max \left\{ Q_s^0 - g(p_t^e); M_t - M_{max} \right\} \right\} \quad (2.17)$$

dove  $g(p_t^e)$  sia l'offerta stimata per il periodo  $t$  per il periodo  $t+1$ ,  $M_{max}$  sia la quantità massima immagazzinabile e  $Q_s^0$  sia l'offerta all'equilibrio intertemporale.

Il governo proverà quindi a fissare la quantità offerta totale al periodo  $t$ , pari a  $Q_{s,t} + G_t$ , il più vicino possibile all'offerta all'equilibrio intertemporale  $Q_s^0$ . Questa politica implica dunque che, nel caso in cui la quantità offerta dai produttori sia inferiore all'offerta di equilibrio, il governo interverrà vendendo parte delle sue scorte. Nel caso contrario, il governo acquisterà la quantità che eccede l'offerta d'equilibrio (Anokye, Tabi Oduro 2012, p.4; Athanasiou et al. 2008).

## 2.1.2 Il Modello della Ragnatela con Magazzino

La versione del modello presentato al paragrafo precedente può essere arricchita aggiungendo la possibilità per il produttore di mantenere immagazzinato quanto prodotto. Questa formulazione è più adatta a modellare, per esempio, il mercato dei beni di consumo non deperibili, in cui è ragionevole pensare che si tenga una scorta e che essa influisca sulle decisioni del produttore, rendendo dunque il modello leggermente più realistico (Ferguson 1960, p.302).

Chiang traduce questa richiesta con due modifiche sostanziali nelle ipotesi di partenza. La prima riguarda le funzioni di domanda e offerta, che saranno ora entrambe funzioni del prezzo corrente, ovvero

$$Q_{d,t} = b_d - m_d p_t \quad b_d > 0, m_d > 0 \quad (2.18)$$

$$Q_{s,t} = b_s + m_s p_t \quad b_s > 0, m_s > 0 \quad (2.19)$$

La seconda implica invece una modifica al meccanismo di aggiustamento del prezzo, che sarà determinato da una decisione dei venditori. I produttori all'inizio del periodo osservano la quantità di bene immagazzinata e, in base alla sua evoluzione rispetto al periodo precedente, modificano il prezzo. Nello specifico, se per il prezzo del periodo  $t-1$  è osservata una accumulazione delle scorte, si avrà che  $p_t < p_{t-1}$  con l'obiettivo di smobilizzare la merce. Se invece è vero l'opposto, si avrà  $p_t > p_{t-1}$ . Inoltre, si vuole che questo aggiustamento del prezzo sia, piuttosto ragionevolmente, decrescente rispetto alla variazione osservata nelle scorte (Chiang, Wainwright 2004, p.559).

Dunque, si avrà

$$p_{t+1} = p_t - \sigma(Q_{s,t} - Q_{d,t}) \quad \sigma > 0 \quad (2.20)$$

dove  $\sigma$  sia il coefficiente che descrive la sensibilità del prezzo alla variazione di magazzino ( $Q_{s,t} - Q_{d,t}$ ).

Sostituendo (2.18) e (2.19) in (2.20) si avrà

$$\begin{aligned} p_{t+1} &= p_t - \sigma(b_s + m_s p_t - b_d + m_d p_t) \\ p_{t+1} - [1 - \sigma(m_s + m_d)]p_t &= \sigma(b_s - b_d) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dalle condizioni sulle costanti, in particolare  $\sigma, m_d, m_s \neq 0$ , si avrà che il termine fra parentesi quadre in (2.21) sarà diverso da 1. Dunque, per la sua risoluzione si potrà usare (1.39a), da cui si ottiene

$$\begin{aligned} p_t &= \left( p_0 - \frac{b_d + b_s}{m_d + m_s} \right) [1 - \sigma(m_d - m_s)]^t + \frac{b_d + b_s}{m_d - m_s} \\ p_t &= (p_0 - \bar{p})[1 - \sigma(m_d + m_s)]^t + \bar{p} \end{aligned} \quad (2.21b)$$

Da questa forma, risulta evidente come l'espressione  $1 - \sigma(m_d + m_s)$ , definito d'ora in poi  $B$ , rappresenti il termine  $b$  di (1.17) e dal suo valore dipenderà quindi la dinamica descritta da questa equazione.

Nella Tabella B è specificato il valore di  $B$  in base al valore della costante  $\sigma$  in termini di  $m_s$  e  $m_d$ . Per ottenere, per esempio, un valore di  $B < -1$  basterà risolvere la semplice disequazione

$$\begin{aligned} 1 - \sigma(m_d + m_s) &< -1 \\ -\sigma(m_d + m_s) &< -2 \quad \text{ sottraendo 1 da entrambi i lati} \\ \sigma &< \frac{2}{m_d + m_s} \end{aligned} \quad (2.22)$$

e tale ragionamento può essere fatto per tutti i valori di  $B$ .

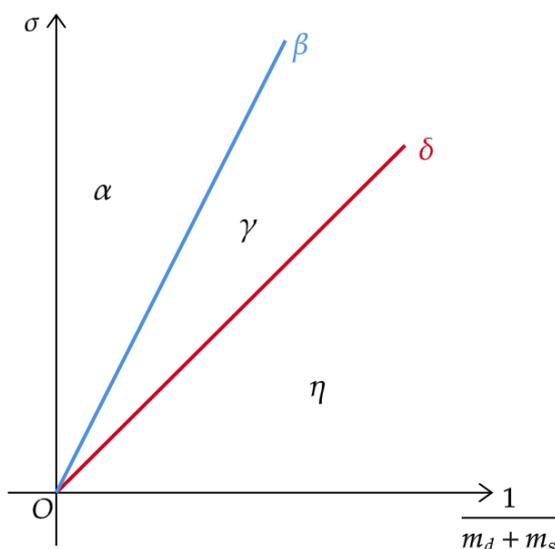
Tabella B

Valore di $\sigma$	Valore di $B$	Regione
$\sigma > \frac{2}{m_d + m_s}$	$B < -1$	$\alpha$
$\sigma = \frac{2}{m_d + m_s}$	$B = -1$	$\beta$
$\frac{1}{m_d + m_s} < \sigma < \frac{2}{m_d + m_s}$	$-1 < B < 0$	$\gamma$
$\sigma = \frac{1}{m_d + m_s}$	$B = 0$	$\delta$
$0 < \sigma < \frac{1}{m_d + m_s}$	$0 < B < 1$	$\eta$

Ogni regione descritta nella tabella presenterà un comportamento analogo a quello presentato al Grafico A. La Tabella B è costruita in modo che alla regione  $\alpha$  corrisponda il diagramma  $a)$  del Grafico A, a  $\beta$   $b)$  e così via. Si noti che i diagrammi  $f)$  e  $g)$  del Grafico A non sono rilevanti, in quanto  $B$  dovrà essere necessariamente  $< 1$  per le condizioni imposte sulle costanti.

La Tabella B permette anche di impostare una rappresentazione grafica, illustrata al Grafico E, su un piano cartesiano in cui vi sia  $\frac{1}{m_d+m_s}$  sull'asse delle ascisse e il parametro  $\sigma$  su quello delle ordinate. Tale diagramma consente di conoscere la dinamica evolutiva descritta dall'equazione dal solo valore dei parametri. Le due rette descritte dalle regioni  $\beta$  e  $\delta$ , rispettivamente in blu e in rosso nel grafico, consentono facilmente di individuare le restanti aree.

Grafico E



### 2.1.3 Un Mercato con Calmiere sui Prezzi

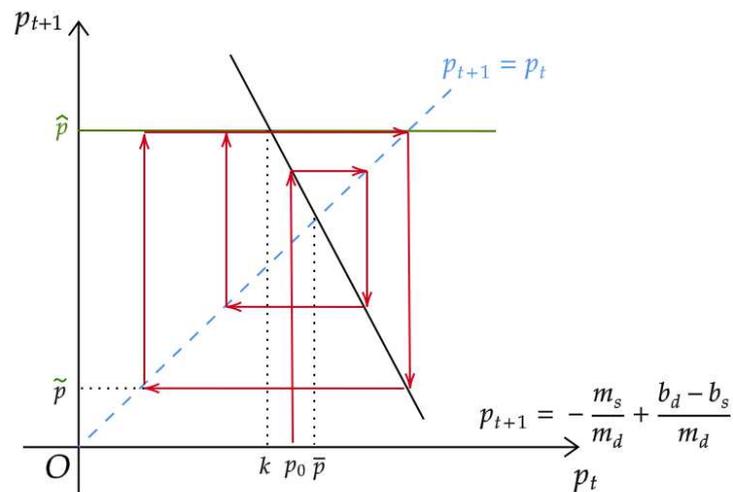
Un'ulteriore modifica applicabile al modello per analizzarne un'implicazione interessante, soprattutto in ottica di controllo dei prezzi, è quella di prendere in considerazione l'inserimento di un calmiera da parte del governo, ovvero un tetto massimo sui prezzi. Si chiami questo prezzo limite  $\hat{p}$ .

Si prenda ora come punto di partenza l'equazione (2.9). La rappresentazione grafica di questo modello su un piano cartesiano con  $p_t$  sull'asse delle ascisse e  $p_{t+1}$  sull'asse delle ordinate è

rappresentato da una retta negativamente inclinata con pendenza  $-\frac{m_s}{m_d}$ . L'imposizione del tetto massimo di prezzo è rappresentata dalla retta orizzontale descritta da  $p_{t+1} = \hat{p}$ , che esplicita dunque la richiesta che il prezzo sia esattamente uguale al limite imposto dal governo (Chiang, Wainwright 2004, p.566).

Tale illustrazione è riportata al Grafico F.

Grafico F



Si noti che la pendenza  $\left|-\frac{m_s}{m_d}\right|$  è stata qui assunta maggiore di 1 per descrivere un mercato che, senza intervento governativo, tenderebbe alla divergenza dall'equilibrio. Quanto richiesto dal calmiere risulta ora evidente: indipendentemente dal valore di  $p_t$ ,  $p_{t+1}$  non potrà eccedere  $\hat{p}$ . Da un punto di vista algebrico questo mercato sarà descritto dal sistema

$$p_{t+1} = \begin{cases} \hat{p} & p_t \leq k \\ -\frac{m_s}{m_d} p_t + \frac{b_d - b_s}{m_d} & p_t > k \end{cases} \quad (2.23)$$

che sarà dunque una spezzata.

Le modalità per la costruzione del diagramma di fase sono le stesse descritte in 1.2.3: partendo da un prezzo iniziale  $p_0$  si prosegue per iterazione a trovare l'evoluzione del sistema. Dopo i primi periodi, in cui si manifesta la tendenza divergente dell'equazione determinata dal suo coefficiente, risulta evidente la particolarità introdotta da questo modello. Raggiunto (e superato) il livello di prezzo  $p_t = k$ , la presenza del tetto massimo fa sì che il livello di

prezzo a  $t+1$  sia esattamente  $\hat{p}$ . Ma, essendo  $\hat{p}$  una costante, si avrà che  $f(\hat{p}) = \tilde{p}$  con  $\tilde{p}$  a sua volta una costante. Questo valore rappresenta di fatto un prezzo minimo (Chiang, Wainwright 2004, p.566), poiché il prezzo non scenderà mai al di sotto di  $\tilde{p}$ . Nei periodi successivi vi sarà perciò un'alternanza perpetua fra questi due valori.

Ciò che risulta significativo da questo risultato è che l'introduzione di un calmierante consente al governo di contenere la tendenza esplosiva delle oscillazioni del prezzo, limitandola ad un'oscillazione che presenta caratteristiche analoghe a quelle descritte dal diagramma *b*) del Grafico A, determinando quello che è definito come un *ciclo limite* (Chiang, Wainwright 2004, p.566) o *ciclo periodico* (Elaydi 1996, p.31).

Inoltre, risulta interessante osservare come l'esistenza di un ciclo uniforme considerando solo equazioni alle differenze lineari era possibile solamente per  $b = -1$ . Introducendo la non linearità nel sistema dinamico, tale ciclo potrà essere raggiunto anche per pendenze diverse. Come sottolineato da Chiang, la rilevanza economica di questa implicazione è sostanziale. Nel caso in cui si osservasse un'oscillazione uniforme in un fenomeno economico, non sarà più necessario affidarsi alla limitante – e poco plausibile – ipotesi che la pendenza del diagramma di fase sia esattamente -1.

## 2.2 La Dinamica Evolutiva del Rapporto Debito/Pil

Questo secondo modello permette la rappresentazione grafica ed un'immediata interpretazione della dinamica del rapporto fra debito pubblico e prodotto interno lordo di uno stato. Questo rapporto, che sarà d'ora in poi indicato con  $B/Y$ , e la sua evoluzione racchiudono gli elementi essenziali delle scelte fatte da uno stato (Ministero dell'Economia e delle Finanze 2011, p.1), ma anche la sua traiettoria futura e le implicazioni per le generazioni a venire.

**Definizione 2.1:** Il *disavanzo di bilancio* si scriverà come

$$disavanzo_t = rB_{t-1} + G_t - T_t \quad (2.24)$$

dove  $B_{t-1}$  sia il debito pubblico complessivo al periodo  $t-1$ ,  $r$  sia il tasso di interesse dovuto sul debito (per semplicità costante; si assuma anche inflazione pari a 0),  $G_t$  sia la spesa pubblica al tempo  $t$  e  $T_t$  le imposte al netto dei trasferimenti (Blanchard, Amighini, Giavazzi 2018, p. 558). Esso rappresenterà dunque (se positivo) quanto il governo dovrà indebitarsi nel periodo corrente per far fronte a tutte le spese e dunque l'aumento del debito. Perciò varrà anche

$$\begin{aligned}
 B_t - B_{t-1} &= \text{disavanzo}_t \\
 &\text{ovvero} \\
 B_t - B_{t-1} &= rB_{t-1} + G_t - T_t
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Scrivendolo in questa forma è possibile intuire come la variazione sul debito sia uguale agli interessi più il *disavanzo primario*, ovvero la differenza fra spesa pubblica e imposte. Il disavanzo primario è un elemento particolarmente importante da evidenziare, poiché indica in termini pratici quanto ogni stato sia virtuoso (o meno) nel raggiungimento del pareggio di bilancio per il singolo periodo.

La formulazione in (2.25) può essere riscritta come

$$B_t = (1 + r)B_{t-1} + G_t - T_t \tag{2.25b}$$

e, dividendo per  $Y_t$ , ovvero il prodotto interno lordo al periodo  $t$ , si ottiene

$$\frac{B_t}{Y_t} = (1 + r)\frac{B_{t-1}}{Y_t} + \frac{G_t - T_t}{Y_t} \tag{2.26}$$

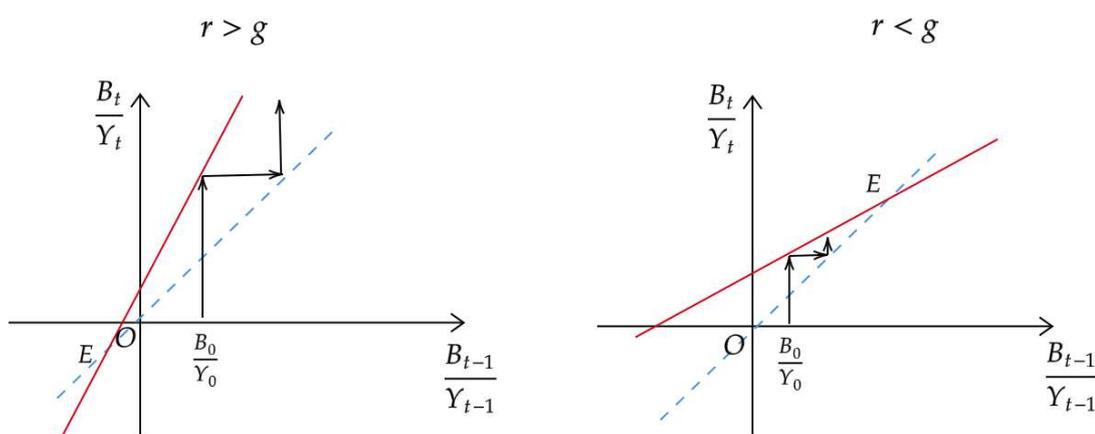
ovvero anche

$$\frac{B_t}{Y_t} = \left( \frac{1 + r}{1 + g} \right) \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} + \frac{G_t - T_t}{Y_t} \tag{2.26b}$$

poiché  $Y_t = Y_{t-1}(1+g)$ , dove  $g$  sia il tasso di crescita del PIL per il periodo  $t$ .

Questa equazione alle differenze lineare del primo ordine è analoga a quella di (1.43) e ci permetterà quindi di costruire il diagramma di fase, presentato al Grafico G.

Grafico G



I due diagrammi presentano le possibili dinamiche determinate dall'equazione alle differenze in base al valore assoluto della pendenza della retta, che in questo caso è rappresentato da  $\frac{1+r}{1+g}$ . Risulta evidente che, se tale termine sarà maggiore di 1, dunque per  $r > g$ , si determinerà una dinamica divergente dall'equilibrio intertemporale. Questo si traduce in un'esplosione del rapporto  $B/Y$  ed un debito pubblico che, senza interventi mirati, sarà destinato a non essere facilmente controllabile. Se invece la pendenza avrà valore assoluto minore di 1, ovvero per  $r < g$ , allora la dinamica descritta sarà convergente all'attrattore globale  $E$  e il rapporto  $B/Y$  si stabilizzerà.

Si noti che l'evoluzione del debito pubblico è indipendente dal segno del disavanzo primario.

### **Qualche considerazione sull'Italia**

La discussione dell'evoluzione del rapporto debito/PIL è particolarmente rilevante per l'Italia. Tale rapporto nel 2019 era del 135,7% (Ministero dell'Economia e delle Finanze 2019) e questo valore, oltre ad essere il più alto in Unione Europea, è problematico per quanto riguarda il rispetto del Trattato di Maastricht (1992) e, più nello specifico, il Patto di Stabilità e Crescita (1997) e prevedono che il rapporto debito/PIL non ecceda il 60%.

Utilizzando i dati del Documento Programmatico di Bilancio 2021 (Servizio Studi del Senato 2020) è possibile costruire il diagramma di fase che descrive la dinamica del rapporto debito/PIL italiano. Data la pandemia Covid-19, la variazione stimata del PIL per il 2020 è del -9,0% ed è invece +6% per il 2021 (Servizio Studi del Senato 2020). Vista la straordinarietà di questi numeri, è più prudente utilizzare le stime di crescita per il 2023, ovvero  $g$  pari a 0,025 (Servizio Studi del Senato 2020), in quanto più vicine ai valori pre-pandemici. Per quanto riguarda il dato del tasso di interesse, si fa riferimento ai Dati Statistici pubblicati dal Ministero dell'Economia e della Finanza sul costo del debito a marzo 2021 (Ministero dell'Economia e delle Finanze 2021). Tali dati sono riportati all'Immagine A.

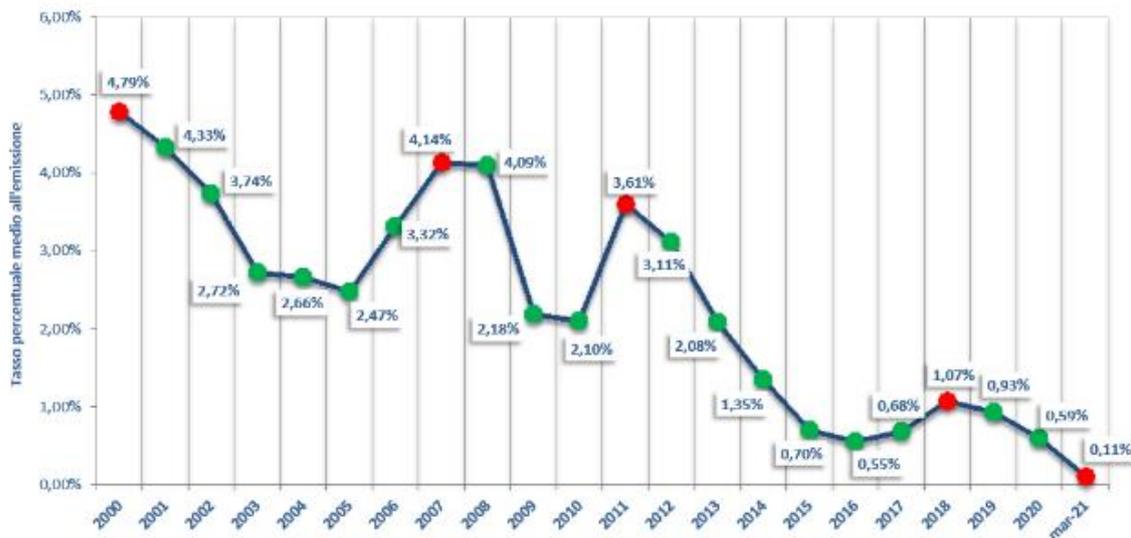
## Immagine A



Debito Pubblico

### COSTI MEDI ALL'EMISSIONE DEI TITOLI DI STATO

Andamento del tasso medio ponderato di interesse dei titoli di Stato calcolato sulla base dei rendimenti lordi all'emissione dei titoli emessi nel singolo anno



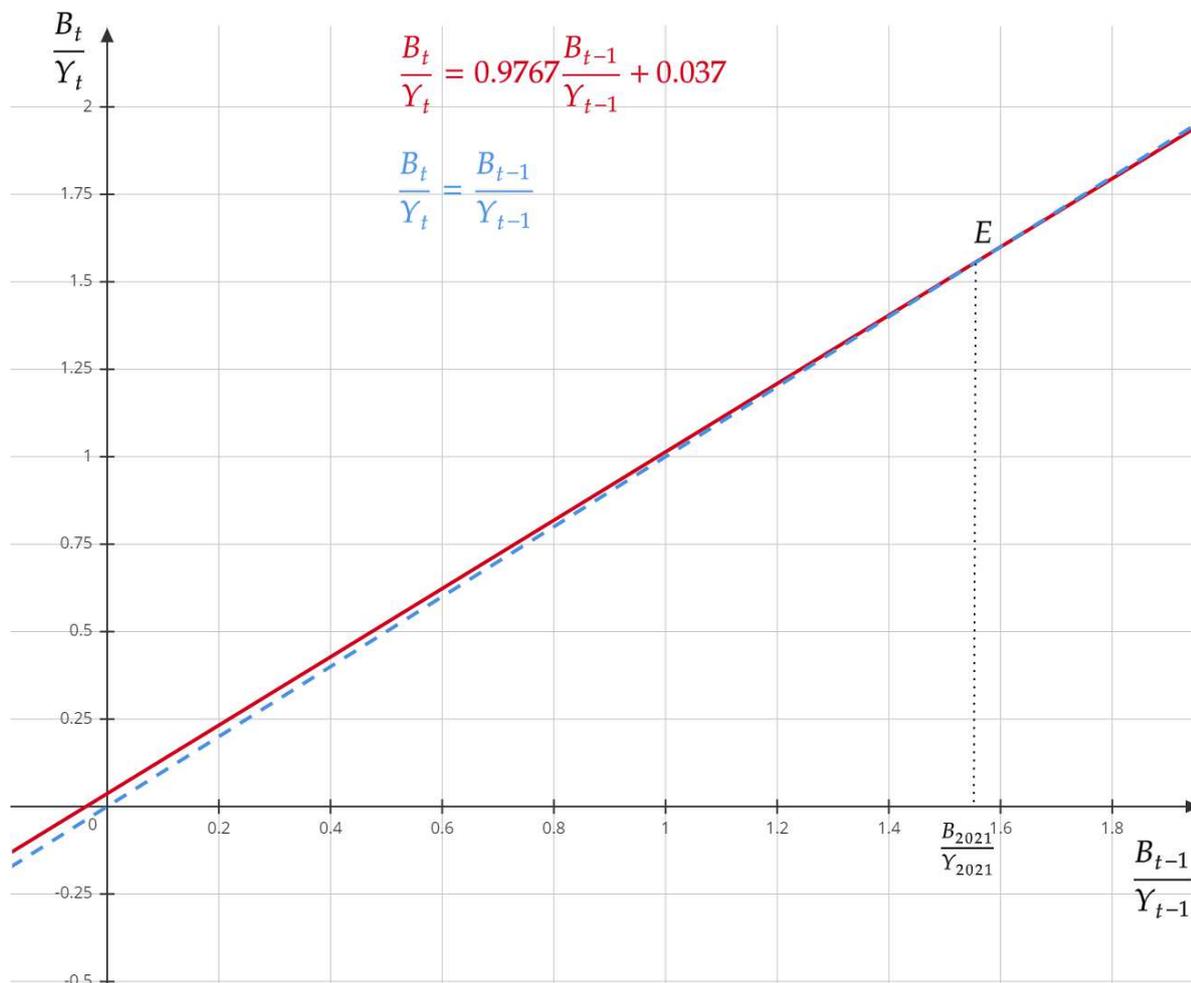
www.dt.mef.gov.it

Con tali dati, l'equazione (2.26b) per l'Italia risulta

$$\frac{B_t}{Y_t} = \left( \frac{1.0011}{1.025} \right) \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} + 0.037 \quad (2.27)$$

e la sua rappresentazione grafica è presentata al Grafico H.

Grafico H



Dal diagramma risulta come  $B/Y$ , alle attuali condizioni di politica monetaria e fiscale, sembri essere destinato a stabilizzarsi ad un valore intorno al 159%<sup>5</sup>.

È però necessario sottolineare l'eccezionalità della situazione degli ultimi anni, che ha visto il costo del debito in costante decrescita dal 2000 (Ministero dell'Economia e delle Finanze 2021) ed è, a marzo 2021, ai suoi minimi storici. Il Covid-19 ha rappresentato una grande sfida per le finanze pubbliche, con il rapporto debito/PIL che è previsto aumentare di oltre 20 punti percentuali in due anni, ma il contesto macroeconomico delineatosi è quantomai propizio per intraprendere un percorso di diminuzione di tale rapporto.

<sup>5</sup> Tale valore è calcolato risolvendo per l'equilibrio intertemporale. Nello specifico, si risolve il sistema rappresentato dalle due equazioni presentate. Esso avrà un'unica soluzione  $\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{B_t}{Y_t} = 1.5879$

## Conclusione

Questo elaborato ha cercato di presentare le equazioni alle differenze del primo ordine, strumento fondamentale per la modellazione di sistemi dinamici discreti. L'esplorazione di tali equazioni ha permesso di prenderne in considerazione alcuni aspetti caratterizzanti e non replicabili dalla loro controparte continua, come la presenza di dinamiche oscillatorie.

Per quanto riguarda i modelli presentati, sono doverose alcune considerazioni. Il Modello della Ragnatela nella forma presentata in questa trattazione è stato oggetto di critiche da parte di diversi economisti, soprattutto poiché la linearità assunta per le funzioni di domanda ed offerta non offre simulazioni particolarmente realistiche e descrittive della realtà economica (Ferguson 1960, p. 298). Tali critiche hanno portato a modifiche e rifiniture del modello, in particolare da parte di Goodwin, Hooten e Åkerman, in grado di ottenere risultati e simulazioni più coerenti con le osservazioni empiriche (Ferguson 1960, p.298). In ogni caso, il Modello della Ragnatela, anche nella sua versione più basilare, offre spunti interessanti dal punto di vista economico.

In primo luogo, il modello offre una possibile interpretazione della volatilità dei prezzi dei beni agricoli. Tale volatilità è un fatto ben noto ed è naturalmente elemento da monitorare sia per gli organi regolatori, sia per tutti gli agenti economici direttamente ed indirettamente coinvolti in tali mercati (Huchet-Bourdon 2011, p.8). In particolare, è importante comprenderne, per quanto possibile, l'origine in modo da poterne capire meglio l'evoluzione futura, dato l'impatto dei beni agricoli nel consumo quotidiano del consumatore medio. Le cause della volatilità nei suddetti mercati, come sottolineato da Huchet-Bourdon (2011), sono molteplici ed esistono anche diverse e contrastanti opinioni nella letteratura. È quindi irragionevole assumere che la prospettiva offerta dal Modello della Ragnatela sia esaustiva, tuttavia tali considerazioni risultano rilevanti, soprattutto in ottica di contenimento di tale volatilità, come dimostrato dagli articoli di Anokye, Oduro (2012) e di Karafyllis, Anthanasiou, Kotsios (2008).

In secondo luogo, la linearità del modello permette di fare alcune valutazioni relative all'elasticità relativa di domanda ed offerta. L'elasticità di un bene  $x$  in un punto è calcolata come  $\varepsilon = \frac{dx}{dp} \frac{p}{x}$  e rappresenta la sensibilità di domanda o offerta alle variazioni di prezzo. Nel Modello della Ragnatela, il rapporto  $\frac{dx}{dp}$  è rappresentato dai coefficienti  $m_s$  e  $m_d$  e si avrà invece, per la condizione di equilibrio sul mercato  $Q_s = Q_d$ , che il rapporto  $\frac{p}{x}$  sarà il medesimo per domanda ed offerta nel punto di equilibrio. Questo implica che l'analisi delle pendenze

relative delle due funzioni per determinare la natura convergente o divergente dell'equilibrio si potrà tradurre anche in considerazioni sull'elasticità relativa delle stesse. Elasticità che è particolarmente rilevante per i beni agricoli, poiché ci aspetteremo funzioni tendenzialmente anelastiche data la natura necessaria dei beni agricoli, tipicamente alimentari, e la rigidità dei fattori produttivi, in particolare il terreno.

Per quanto riguarda, infine, il modello per l'interpretazione dell'evoluzione della dinamica del rapporto debito/PIL, esso offre una comprensione immediata della situazione di uno stato, anche se l'intuizione offerta è piuttosto semplificatoria. Innanzitutto, tale modello non consente di analizzare l'impatto dei singoli componenti del debito pubblico, come ad esempio spesa pensionistica e previdenziale, che forniscono una spiegazione più completa e permettono di contestualizzare meglio tale spesa. Inoltre, questo modello non è particolarmente pregnante nel catturare la presenza di eventuali fluttuazioni significative dal trend di crescita di lungo periodo. Si pensi per esempio alla situazione generata dal Covid-19, in cui ad una fase di profonda recessione, con tassi di crescita del prodotto interno lordo ampiamente negativi, seguiranno anni con tassi di crescita ben al di sopra delle stime pre-pandemiche. Questa eterogeneità non è catturata dal modello in questione, che è più utile nell'analisi dei trend di medio-lungo periodo. Inoltre, è assente anche qualsiasi considerazione sulla composizione del debito, ovvero sul diverso impatto di debito a breve, a medio o a lungo termine.

Nel caso del debito pubblico, i numeri raccontano solo una versione parziale della realtà, in quanto stati paragonabili, e quindi numericamente analoghi, hanno avuto destini eterogenei. L'esperienza storica fornisce esempi di come alcuni paesi siano usciti da situazioni di elevato debito pubblico imboccando soluzioni molto diverse (Blanchard, Amighini, Giavazzi 2018, p.566).

In ogni caso, il modello qui preso in considerazione offre comunque spunti rilevanti. Nel caso dell'Italia, per esempio, descrive una situazione sicuramente problematica ma che, date le misure straordinarie decise dalla BCE<sup>6</sup> e il loro impatto sul tasso di interesse, lascia comunque spazio ad un moderato ottimismo, riflettuto anche dal Documento Programmatico di Bilancio 2021.

---

<sup>6</sup> Si pensi per esempio al PEPP, *Pandemic Emergency Purchase Programme*, che ha visto l'iniezione di 1850 miliardi di euro di liquidità (Banca Centrale Europea 2021)

# Appendice

## Appendice A - Il teorema del valor medio di Lagrange

Viene di seguito fornita l'enunciazione e dimostrazione del teorema seguendo quella fornita da Peccati, Salsa e Squellati (2014).

**Teorema:** Sia  $f$  derivabile in un intervallo  $(a,b)$  e continua anche in  $a$  e  $b$ ; allora esiste almeno un punto  $c$  in  $(a,b)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (A1)$$

*Dimostrazione:* L'equazione della retta che unisce i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  è

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (A2)$$

e definisce una funzione lineare affine. Si consideri la differenza tra  $f$  e tale funzione, ovvero

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (A3)$$

Si noti che  $g$  si annulla agli estremi  $a, b$  ed è differenziabile in  $(a, b)$  e varrà

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (A4)$$

Il teorema afferma che esiste un punto  $c \in (a, b)$ , nel quale la derivata di  $g$  si annulla. Essendo  $g$  continua nell'intervallo, estremi compresi, per il teorema di Weierstrass,  $g$  assume il suo massimo in  $M$  e il suo minimo in  $m$ , in corrispondenza a (almeno) due punti, definiti  $c_1$  e  $c_2$ , cioè  $g(c_1) = M$  e  $g(c_2) = m$ . Se tali punti sono gli estremi, dunque dove  $g$  si annulla, deve valere  $M = m = 0$  e  $g$  è nulla su tutto  $[a, b]$  e (A1) vale in ogni  $x \in (a, b)$ :

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (A5)$$

In caso contrario, almeno uno dei due punti  $c_1, c_2$ , battezzato  $c$  per l'occasione, è interno a  $(a, b)$ . Trattandosi di un punto d'estremo, la derivata di  $g$  si annulla in  $c$  per il teorema di Fermat.



# Bibliografia

- [1] Acemoglu, D., 2009. Introduction to Modern Economic Growth. Princeton: Princeton University Press.
- [2] Agarwal, R., 2000. Difference equations and inequalities: Theory, Methods and Applications. 2a ed. New York: Marcel Dekker.
- [3] Anokye, M. e Oduro, F., 2012. Cobweb Model with Buffer Stock for the Stabilization of Tomato Prices in Ghana. *Journal of Management and Sustainability*, 3(1).
- [4] Athanasiou, G., Karafyllis, I. e Kotsios, S., 2008. Price stabilization using buffer stocks. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 32, pp.1212-1235.
- [5] Banca Centrale Europea, 2021. Pandemic Emergency Purchase Programme [online]. Disponibile su: <https://www.ecb.europa.eu/mopo/implement/pepp/html/index.en.html>
- [6] Binmore, K. e Davies, J., 2002. Calculus: Concepts and Methods. Cambridge: Cambridge University Press.
- [7] Blanchard, O., Amighini, A. e Giavazzi, F., 2018. Macroeconomia. Bologna: Il Mulino.
- [8] Boucekkine, R., Licandro, O. e Paul, C., 1997. Differential-difference equations in economics: On the numerical solution of vintage capital growth models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp.347-362.
- [9] Buratto, A., Grosset, L. e Viscolani, B., 2020. Ottimizzazione Dinamica: modelli economici e gestionali. 5a ed. Padova: Libreria Progetto.
- [10] Chiang, A. e Wainwright, K., 2004. Fundamental methods of mathematical economics. 4a ed. New York: McGraw Hill/Irwin.
- [11] Elaydi, S., 1996. An introduction to difference equations. New York: Springer.

- [12] Ferguson, C., 1960. Learning, Expectations, and the Cobweb Model. *Zeitschrift für Nationalökonomie / Journal of Economics*, 20, pp.297-315.
- [13] Huchet-Bourdon, M., 2011. Agricultural Commodity Price Volatility: An Overview. OECD Food, Agriculture and Fisheries Working Papers, No. 52, Pubblicazione OECD
- [14] Machlup, F., 1959. Statics and Dynamics: Kaleidoscopic Words. *Southern Economic Journal*, 26(2).
- [15] Ministero dell'Economia e delle Finanze, 2019. Nota di Aggiornamento del Documento di Economia e Finanza 2019. Disponibile su:  
[http://www.dt.mef.gov.it/modules/documenti\\_it/analisi\\_progammazione/documenti\\_programmatici/def\\_2019/NADEF\\_2019\\_\\_FINALE.pdf](http://www.dt.mef.gov.it/modules/documenti_it/analisi_progammazione/documenti_programmatici/def_2019/NADEF_2019__FINALE.pdf) [Accesso 21 maggio 2021]
- [16] Ministero dell'Economia e delle Finanze – Dipartimento del Tesoro, 2021. Dati Statistici sul Debito Pubblico [online]. Disponibile su:  
[http://www.dt.mef.gov.it/it/debito\\_pubblico/dati\\_statistici/](http://www.dt.mef.gov.it/it/debito_pubblico/dati_statistici/) [Accesso 20 maggio, 2021].
- [17] Ministero dell'Economia e delle Finanze – Ragioneria Generale dello Stato, 2011. La Spesa dello Stato dall'Unità d'Italia. Disponibile su:  
[https://www.rgs.mef.gov.it/\\_Documenti/VERSIONE-I/Pubblicazioni/Studi-e-do/La-spesa-dello-stato/La\\_spesa\\_dello\\_Stato\\_dall\\_unit\\_d'Italia.pdf](https://www.rgs.mef.gov.it/_Documenti/VERSIONE-I/Pubblicazioni/Studi-e-do/La-spesa-dello-stato/La_spesa_dello_Stato_dall_unit_d'Italia.pdf) [Accesso 20 maggio, 2021]
- [18] Peccati, L., Salsa, S. e Squellati, A., 2014. *Matematica per l'economia e l'azienda*. 3a ed. Milano: EGEA.
- [19] Sandelin, B., Trautwein, H. e Wundrak, R., 2014. *A Short History of Economic Thought*. 3a ed. Abingdon: Routledge.
- [20] Servizio Studi del Senato della Repubblica, ottobre 2020. Documento programmatico di bilancio 2021. Nota breve n.18 del servizio di bilancio, XVIII Legislatura. Disponibile su:  
<https://www.senato.it/service/PDF/PDFServer/BGT/01178340.pdf> [Accesso 19 maggio 2021]
- [21] Schenk-Hoppé, K., 2000. Random dynamical systems in economics. Working Papers Collection/Institute for Empirical Research in Economics, 67.

[Conteggio parole (Bibliografia esclusa): 9228]