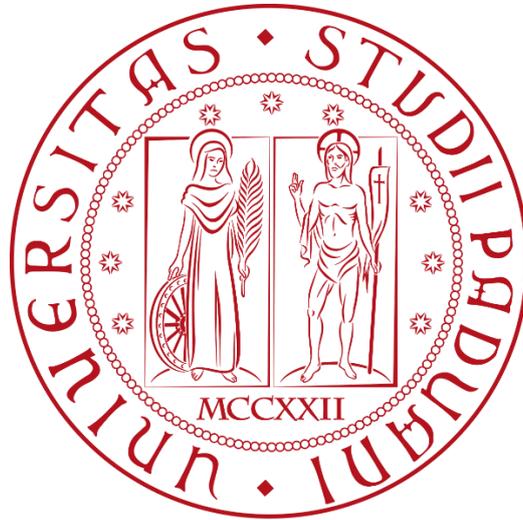


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Astronomia



Tesi di Laurea Triennale in Astronomia

Evoluzione di sistemi binari per emissione di onde gravitazionali

Laureanda
Marianna Žerajić De Giorgio

Relatrice
Prof.ssa Michela Mapelli

Correlatore
Dr. Giuliano Iorio

Anno accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	3
Cenni storici	5
1. Verso una nuova teoria della gravitazione	9
1.1 Teoria della gravitazione di Newton	9
1.2 Incongruenze della teoria di Newton	12
1.3 Teoria della Relatività Ristretta	12
2. La teoria della Relatività Generale	15
2.1 Massa inerziale e massa gravitazionale	15
2.2 Il principio di equivalenza	16
2.3 Curvatura e geodetiche	17
2.4 L'equazione di campo di Einstein	21
3. Onde gravitazionali	23
3.1 La teoria linearizzata della gravità	23
3.2 Equazioni linearizzate nel vuoto	25
3.3 La gauge trasversale-senza traccia (TT)	27
3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali piane	28
3.5 Effetti su particelle libere	30
3.6 Energia delle onde gravitazionali	31
3.7 Equazioni linearizzate con sorgenti	32
3.8 Potenza irradiata	33

4. Sorgenti di onde gravitazionali	37
4.1 Classificazione delle sorgenti	37
4.2 Sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali	39
4.3 Radiazione gravitazionale prodotta da sistemi binari	41
4.4 Episodi di rilevamento di onde gravitazionali	44
5. Script per l'evoluzione di un sistema binario	46
5.1 Schema di Eulero per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie	46
5.2 Tasso di variazione di semiasse maggiore ed eccentricità	47
5.3 Algoritmo per il tempo di coalescenza	48
5.4 Risultati	49
Conclusioni	56
Appendice	57
Bibliografia	60

Introduzione

Le onde gravitazionali sono un campo di studio scientifico più che mai attuale. Un secolo intero ci è voluto dal momento della loro ipotizzazione matematica per arrivare alla recente prova empirica. Un arco temporale cominciato con la pubblicazione della teoria della Relatività Generale di Albert Einstein, che postulava le onde gravitazionali come perturbazioni della struttura spaziotemporale dell'universo dovute al movimento di masse all'interno di questa geometria deformata: sistemi di masse in moto devono emettere onde gravitazionali analogamente a come sistemi di cariche in moto emettono onde elettromagnetiche.

Tuttavia Einstein stesso era incerto riguardo alla loro effettiva esistenza, e oltre a pubblicare un paio di articoli in merito, non si pronunciò molto sull'argomento.

Fu invece a partire dagli anni '60 (cosiddetta "rinascita" della Teoria, dopo la "bassa marea" dei decenni precedenti) che i fisici si mobilitarono verso la ricerca di prove sperimentali sull'esistenza delle onde gravitazionali. Il primo esperimento significativo fu eseguito da Joseph Weber, che sviluppò uno strumento apposito per la rilevazione, la barra di Weber, da cui tuttavia non si riuscì a trarre alcuna conferma; un'importante prova indiretta si ebbe con la scoperta da parte di Hulse e Taylor di un sistema binario di pulsar, le cui caratteristiche verranno discusse nel capitolo 4. Sempre nella seconda metà del secolo cominciò anche la costruzione di interferometri per rilevare le onde gravitazionali, ed è grazie a questi strumenti, che nel tempo sono diventati sempre più precisi e potenti, che è stato finalmente possibile rilevare le onde gravitazionali direttamente, a partire dal primo episodio nel 2015.

Nella mia tesi ho voluto esplorare questo argomento di studio, a partire dai fondamenti teorici. Dopo un capitolo preliminare sulla teoria della gravitazione Newtoniana e il suo superamento in seguito alla formulazione del principio di relatività di Einstein, arrivo alle basi della Relatività Generale, dalle cui equazioni di campo si giunge appunto alle onde gravitazionali. I dettagli teorici di queste ultime nell'ambito della teoria linearizzata sono discussi nel capitolo 3. Segue una panoramica sui tipi di sorgenti astrofisiche, tra cui i sistemi binari di oggetti cosmici compatti. Infine ho sviluppato un algoritmo in linguaggio di programmazione Python per calcolare il tempo di coalescenza di un sistema binario a seguito della perdita di energia per emissione di onde gravitazionali.

Cenni storici

«SALVIATI. Io non ho detto che la Terra non abbia principio né esterno né interno al moto circolare, ma dico che non so qual de' dua ella si abbia; ed il mio non lo sapere non ha forza di levarglielo. Ma se questo autore sa da che principio sieno mossi in giro altri corpi mondani, che sicuramente si muovono, dico che quello che fa muover la Terra è una cosa simile a quella per la quale si muove Marte, Giove, e che e' crede che si muova anco la sfera stellata; e se egli mi assicurerà chi sia il movente di uno di questi mobili, io mi obbligo a sapergli dire chi fa muover la Terra. Ma più, io voglio far l'istesso s'ei mi sa insegnare chi muova le parti della Terra in giù.

SIMPLICIO. La causa di quest'effetto è notissima, e ciaschedun sa che è la gravità.

SALVIATI. Voi errate, signor Semplicio; voi dovevi dire che ciaschedun sa ch'ella si chiama gravità. Ma io non vi domando del nome, ma dell'essenza della cosa: della quale essenza voi non sapete punto più di quello che voi sappiate dell'essenza del movente le stelle in giro, eccettuatone il nome, che a questa è stato posto e fatto familiare e domestico per la frequente esperienza che mille volte il giorno ne veggiamo; ma non è che realmente noi intendiamo più, che principio o che virtù sia quella che muove la pietra in giù, di quel che noi sappiamo chi la muova in su, separata dal proiciente, o chi muova la Luna in giro, eccettoché (come ho detto) il nome, che più singulare e proprio gli abbiamo assegnato di gravità. Doveché a quello con termine più generico assegniamo virtù impressa, a quello diamo intelligenza, o assistente, o informante, ed a infiniti altri moti diamo loro per cagione la natura»

(G. Galilei, "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo", 1632)

Il concetto della gravità e del perché essa esista è sempre stato un tema su cui gli uomini si sono interrogati e del quale hanno cercato la causa. Nel corso dei secoli i tentativi di spiegare il fenomeno sono stati molteplici e di vario tipo.

I pensatori della Grecia Antica partivano dall'idea di un'attrazione fra materie simili attuata da una causa motrice (definita in diversi modi, per esempio "Nous" da Anassagora, "Amore" da Empedocle, "Anima" da Talete) di cui non spiegavano però dettagliatamente l'origine e quindi rimaneva un concetto alquanto misterioso.

La dottrina platonica-aristotelica geocentrica prevedeva che l'universo fosse fatto di cerchi concentrici di sostanza pura ed eterea su cui si muovevano con moto circolare uniforme la Luna, i pianeti, il Sole e le stelle, corpi regolati da leggi permanenti ed immutabili e costituiti da materia perfetta.

Il movimento diventava rettilineo nella dimensione terrestre sublunare, soggetta al divenire e a cambiamenti e costituita da quattro cerchi composti dai quattro elementi tradizionali: terra, acqua,

aria e fuoco. Solo in questa regione i corpi sarebbero soggetti alla forza di gravità, che li trascina rettilineamente verso il basso in quanto tenderebbero naturalmente a tornare al loro elemento originario, la terra. Analogamente le sostanze simili agli altri tre elementi tenderebbero a tornare verso le rispettive sfere: anche l'acqua verso il basso, mentre aria e fuoco verso l'alto.

Il moto è pertanto distinto in *naturale*, cioè tale da non richiedere l'applicazione di forze, *violento*, causato da un essere animato che allontani con la forza uno dei quattro elementi dal suo ambiente naturale, e *perfetto*, proprio degli astri nelle sfere più elevate.

Inoltre Aristotele sosteneva che oggetti di peso diverso cadessero con velocità diverse, e che quindi quelli più pesanti, lasciati cadere da una certa altezza, raggiungessero il suolo tanto più velocemente quanto maggiore fosse il loro peso.

La distinzione fra elementi del mondo sublunare ed etere perdurò fino a quando Galileo Galilei (1564 – 1642) eseguì le sue osservazioni del cielo col cannocchiale. Queste dimostrarono che i corpi celesti non erano costituiti da materia incorruttibile e liscia come si pensava fino ad allora, ma la Luna mostrava montagne e depressioni e il Sole presentava sulla superficie delle macchie scure; inoltre la scoperta delle fasi di Venere provava che esso non ruotava intorno alla Terra ma attorno al Sole.

Galileo, unendo “sensate esperienze” a “dimostrazioni necessarie”, studiò gli effetti della forza di gravità, concludendo che tutti i corpi, a meno della resistenza dell'aria, cadono con la stessa velocità, indipendentemente dal materiale di cui sono composti, dal loro peso o dalla loro forma, e che la distanza da essi percorsa durante la caduta è proporzionale al quadrato del tempo impiegato a percorrerla.

Keplero (1571 – 1630), contemporaneo di Galileo, appoggiò la teoria eliocentrica copernicana. Egli, rifacendosi alla dottrina greca neoplatonica, attribuiva ai pianeti un’“anima”, intesa non tanto in senso spiritualistico ma come principio del movimento dei corpi, e in base a questo postulava che la forza che fa muovere i pianeti intorno al Sole fosse l'Amore. In un secondo tempo, invece, suppose che l'azione gravitazionale del Sole fosse un'azione di tipo magnetico.

Isaac Newton (1642 – 1727) fu il primo ad esporre con rigore matematico la formulazione di una teoria della gravità, basata su due concetti distinti ed indipendenti di *spazio* e *tempo*, e fu anche il primo a capire che la forza che fa cadere i corpi sulla Terra è la stessa che mantiene in orbita la Luna attorno alla Terra e i pianeti attorno al Sole.

Nel 1687 pubblicò l'opera “*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*” in cui introdusse la *legge di gravitazione universale*, secondo cui due corpi si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Newton era comunque sorpreso che la gravitazione agisse istantaneamente a distanza nel vuoto; in una lettera di corrispondenza scrisse:

«È inconcepibile che la materia bruta e inanimata possa agire o influire su altra materia senza reciproco contatto. [...] Che la gravità sia qualcosa di innato, di inerente ed essenziale alla materia, che un corpo possa agire a distanza su di un altro attraverso il vuoto senza la mediazione di un'altra cosa è per me un'assurdità»

E nella seconda edizione dei “*Principia*”, pubblicata nel 1713, aggiunse:

«In verità non sono ancora riuscito a dedurre dai fenomeni la ragione di queste proprietà della gravità, e non invento ipotesi [Hypotheses non fingo]»

Egli quindi si limitava a descrivere gli effetti dinamici della gravitazione, e non si pronunciava in merito alla causa di questi fenomeni.

La trattazione formulata da Newton e per secoli considerata il fondamento indiscutibile della teoria sulla gravità, venne ribaltata nel 1916 da una nuova teoria sulla gravitazione proposta da Albert Einstein (1879 – 1955).

In questa nuova teoria, i concetti di spazio e tempo, che nella visione Newtoniana erano separati e assoluti, vengono unificati in un’unica entità chiamata *spaziotempo*, in cui la gravità non è più intesa come una forza ma come una deformazione dello spaziotempo stesso dovuta alla presenza di masse; in questo modo viene eliminata la necessità di ammettere un’azione istantanea a distanza nel vuoto, l’idea che rendeva perplesso Newton.

L’essenza della teoria della Relatività Generale è ben espressa dalle parole del fisico John Archibald Wheeler:

«Lo spaziotempo dice alla materia come muoversi, la materia dice allo spaziotempo come curvarsi»

In particolare, una conseguenza prevista da questa teoria è che quando grandi masse subiscono forti accelerazioni, producono delle variazioni nel campo gravitazionale, le quali non possono propagarsi istantaneamente perché altrimenti supererebbero la velocità della luce, ma impiegano del tempo per viaggiare a grandi distanze. Queste increspature nello spaziotempo che si propagano nello spazio ad una velocità finita, che come vedremo è pari a c , sono chiamate *onde gravitazionali*.

1. Verso una nuova teoria della gravitazione

La forza di gravità è una delle quattro interazioni fondamentali della fisica. È un'interazione sempre attrattiva e a lunga distanza, agisce fra tutte le masse presenti nell'universo ed è la più debole delle quattro forze fondamentali. Sebbene sia la forza più debole, la gravità governa l'organizzazione dell'universo alle scale più grandi della cosmologia.

1.1 Teoria della gravitazione di Newton

La teoria della gravitazione Newtoniana è formulata all'interno di uno spazio euclideo tridimensionale, nei termini di tre coordinate spaziali e una coordinata temporale che sono assolute ed indipendenti. In tale spazio, il moto di una particella su cui non agiscono forze giace su una linea retta, data dalla distanza più breve tra due punti, e ha velocità costante (*principio di inerzia*).

La geometria di questo spazio è specificata in coordinate cartesiane dall'*elemento di linea* ds^2 invariante sotto cambiamento tra sistemi di riferimento inerziali:

$$ds^2 = \delta_{ij}x^i x^j = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

dove ds è la distanza infinitesima tra due punti separati da intervalli infinitesimi di coordinate dx , dy , dz . δ_{ij} è la *delta di Kronecker* e definisce la *metrica dello spazio euclideo*; le sue componenti sono gli elementi di una matrice 3×3 :

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Tale geometria è l'estensione in tre dimensioni di una geometria piana, ed è quindi chiamata spazio "piatto".

La meccanica Newtoniana è consistente col *principio di relatività*, la cui formulazione risale a Galileo: esso asserisce che esperimenti identici condotti in diversi sistemi di riferimento inerziali

– quelli nei quali vige il principio di inerzia, ossia dove un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo e uniforme – forniscono risultati identici. In altre parole risulta impossibile determinare la velocità assoluta di un sistema di riferimento inerziale mediante esperimenti puramente meccanici. È possibile invece stabilire se il sistema sta accelerando.

I sistemi di riferimento inerziali sono collegati tra loro dalle cosiddette *trasformazioni di Galilei*. Dati due riferimenti inerziali S ed S' individuati rispettivamente dai sistemi di coordinate $\{\mathbf{x}, t\}$ e $\{\mathbf{x}', t'\}$ e caratterizzati da una velocità relativa \mathbf{v} costante, la trasformazione di Galilei che li collega è definita da:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.3)$$

Questa legge di trasformazione ha delle conseguenze importanti:

1. La prima riguarda l'invarianza degli intervalli temporali, $\Delta t' = \Delta t$, in accordo all'ipotesi di Newton circa l'esistenza di un tempo assoluto che scorre in modo uniforme sempre e ovunque.
2. La seconda riguarda l'invarianza delle lunghezze. Consideriamo, ad esempio, un oggetto che nel riferimento inerziale S ha lunghezza $L = |\Delta \mathbf{x}|$ quando $\Delta t = 0$. La sua lunghezza nel riferimento S' risulta dalla trasformazione (1.3):

$$L' = |\Delta \mathbf{x}'|_{\Delta t'=0} = |\Delta \mathbf{x} - \mathbf{v}\Delta t|_{\Delta t=0} = |\Delta \mathbf{x}|_{\Delta t=0} = L$$

e coincide con quella nel riferimento S .

3. La terza conseguenza riguarda la composizione vettoriale delle velocità. Differenziando rispetto al tempo la prima delle trasformazioni (1.3) abbiamo:

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \quad (1.4)$$

4. La quarta conseguenza riguarda l'invarianza delle accelerazioni. Derivando rispetto al tempo l'equazione (1.4), dove \mathbf{v} è costante, risulta:

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a} \quad (1.5)$$

Questo implica che le equazioni della meccanica Newtoniana mantengono la stessa forma in tutti i sistemi inerziali.

Nell'ambito di questa meccanica Newton elaborò la *legge di gravitazione universale*, per esprimere quella forza universale attrattiva che agisce su tutti i corpi e che risulta essere direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Nel sistema di coordinate cartesiane dello spazio euclideo la forza di gravità tra un corpo di massa m e un altro di massa M agisce lungo la retta che congiunge i due corpi e ha la forma seguente:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - \frac{GMm}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.6)$$

dove \mathbf{x} è la posizione della massa m , \mathbf{x}' la posizione di M , e $G \approx 6.673 * 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la costante di gravitazione universale.

A partire da questa formula possiamo introdurre il *campo gravitazionale*, un campo vettoriale di forze attrattive generato da un corpo dotato di massa e che associa ad ogni punto dello spazio una forza. Se è la massa M a originare il campo, esso è definito come:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -GM \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^3} \quad (1.7)$$

dove \mathbf{x}' è la posizione di M e \mathbf{x} la posizione della massa di prova m presente all'interno del campo. Tale vettore, con le dimensioni di un'accelerazione, non dipende dal valore della massa di prova ma solamente dalla massa che genera il campo gravitazionale, e ha stessa direzione e verso del vettore forza.

Per ragioni che saranno utili in seguito, introduciamo anche il *potenziale gravitazionale*:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (1.8)$$

in modo tale che il campo gravitazionale si possa scrivere nella forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

È quindi possibile esprimere la forza esercitata sul corpo di massa m da parte del corpo M come:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -m\nabla\Phi(\mathbf{x}) \quad (1.10)$$

Per una distribuzione continua di massa con densità $\rho(\mathbf{x})$, possiamo riscrivere il potenziale gravitazionale (1.8) come l'integrale sulla massa $\rho(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}$ in un volume infinitesimo $d^3\mathbf{x}$, ossia:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d^3\mathbf{y} \quad (1.11)$$

La forma differenziale per questo potenziale, tenendo conto di (1.9), risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

ossia, con $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ che è l'operatore Laplaciano:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(\mathbf{x}) \quad (1.13)$$

Questa è detta *equazione di campo di Newton* ed esprime il legame tra il campo gravitazionale, rappresentato da $\nabla\Phi(\mathbf{x})$, e la sorgente di tale campo, che è la massa, contenuta nella quantità $\rho(\mathbf{x})$.

1.2 Incongruenze della teoria di Newton

La legge di Newton spiega con accuratezza il moto dei pianeti attorno al Sole, e dei corpi all'interno del Sistema Solare. Nonostante questo, c'è una significativa inconsistenza tra di essa e il limite imposto dalla velocità della luce.

Il problema sta nel fatto che la forza gravitazionale Newtoniana agisce istantaneamente, però nessun segnale può propagarsi a velocità maggiore di quella della luce, che è finita.

Inoltre la terza conseguenza discendente dalle leggi di trasformazione citata in precedenza ci dice che le velocità non sono invarianti per trasformazioni di Galilei ma passando da un riferimento inerziale ad un altro mediante una di queste trasformazioni, in accordo all'equazione (1.4), la velocità di un corpo deve cambiare. Questo dovrebbe valere anche per la velocità della luce, però tale fatto non è compatibile con i fenomeni elettromagnetici descritti dalle equazioni di Maxwell in quanto queste ultime definiscono in modo univoco la velocità di propagazione della luce. Dunque nel passaggio tra sistemi inerziali dovrebbe cambiare anche la forma di queste equazioni, e ciò significherebbe che la teoria elettromagnetica di Maxwell, a differenza della meccanica Newtoniana, non può essere invariante per le trasformazioni di Galilei.

Infine la velocità risultante dalla composizione (1.4) potrebbe a priori assumere valori arbitrariamente grandi a seconda delle velocità che entrano nella somma vettoriale, ma ciò è in disaccordo col fatto sperimentale che la velocità della luce è uguale in modulo in tutti i sistemi di riferimento inerziali e che essa è un limite insuperabile.

Tali contraddizioni implicano la necessità di superare la teoria di Newton, e questo passaggio verrà fatto ottenendo una teoria della gravitazione in accordo con la Relatività Speciale.

1.3 Teoria della Relatività Ristretta

Nel 1905 il giovane e sconosciuto fisico Albert Einstein, che lavorava presso l'ufficio brevetti di Berna, passò alla notorietà pubblicando su una prestigiosa rivista di fisica l'articolo "*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*", nel quale esponeva per la prima volta la sua teoria della Relatività Ristretta o Speciale. Essa si basa sull'invarianza della velocità della luce ed è formulata in due postulati:

1. *Principio di relatività*: non esiste un sistema di riferimento preferenziale ma le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

In altre parole nessun esperimento può misurare la velocità assoluta di un osservatore, in quanto i risultati di qualsiasi esperienza condotta da un osservatore non dipendono dalla sua velocità relativa rispetto ad un altro osservatore che non è coinvolto nell'esperimento.

2. *Universalità della velocità della luce*: la velocità dei segnali elettromagnetici nel vuoto è sempre $c \approx 3 * 10^8 \frac{m}{s}$ indipendentemente dallo stato di moto della sorgente rispetto all'osservatore.

In altre parole due diversi osservatori che misurino la velocità dello stesso fotone troveranno

entrambi che si muove a velocità c rispetto a se stessi, a prescindere dal loro stato di moto relativo.

Le trasformazioni galileiane devono allora essere riformulate in modo che le quantità fisiche risultino invarianti sotto una nuova classe di trasformazioni, dette *trasformazioni di Lorentz*. Queste assicurano l'invarianza delle leggi fisiche sotto traslazioni, rotazioni e boosts – che sono trasformazioni tra le coordinate di due sistemi inerziali con assi paralleli e concordi, origini coincidenti all'istante iniziale e velocità relativa arbitraria.

Per un sistema S' di coordinate $\{t', x', y', z'\}$ che si muove di velocità costante v rispetto ad un sistema S di coordinate $\{t, x, y, z\}$ nel verso positivo dell'asse x , le equazioni che esprimono le trasformazioni di Lorentz sono:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.14)$$

dove $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ è il *fattore di Lorentz* e $\beta = \frac{v}{c}$.

Queste trasformazioni si riducono alle trasformazioni di Galilei nel caso $\frac{v}{c} \ll 1$.

In particolare le trasformazioni di Lorentz per la coordinata temporale prevedono una dilatazione del tempo secondo la formula $\Delta t = \gamma \Delta \tau$, dove $\Delta \tau$, detto *tempo proprio*, è l'intervallo temporale tra due eventi nel sistema di riferimento dove questi avvengono nella stessa posizione dello spazio. Tale relazione implica che il tempo scorre in maniera diversa fra i due sistemi di riferimento considerati, poiché due eventi che sono simultanei in un riferimento non possono esserlo anche in un altro riferimento in moto rispetto al primo se la velocità della luce è la stessa in entrambi. Cade quindi la concezione Newtoniana di un tempo assoluto che scorre in maniera uguale ed uniforme in tutti i sistemi di riferimento.

Secondo la regola di composizione delle velocità che discende dalle trasformazioni di Lorentz è impossibile ottenere come risultato una velocità di modulo pari o superiore a c , indipendentemente da quanto siano vicine a c le velocità che entrano nella composizione; questa proprietà della composizione relativistica è in contrasto con i risultati della composizione vettoriale Galileiana, ma rispetta il principio di relatività di Einstein.

La Relatività Speciale viene formulata in una varietà quadridimensionale detta *spaziotempo* (di *Minkowski*) in cui le tre dimensioni spaziali sono combinate con la dimensione temporale, e dove i punti, detti *eventi*, sono associati ad una quaterna di coordinate $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, con $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ coordinate spaziali e $x^0 = ct$ coordinata temporale (con le dimensioni di una lunghezza per rendere le componenti del vettore dimensionalmente omogenee).

Il moto di un oggetto puntiforme descrive nello spaziotempo una traiettoria unidimensionale $x^\mu = x^\mu(t)$ detta *linea di universo*.

Secondo la Relatività Ristretta, due linee di universo che iniziano parallele rimangono tali per tutta la loro estensione; questa è esattamente la proprietà delle linee rette in una geometria euclidea. In questo senso lo spazio di Minkowski è detto “piatto”, poiché obbedisce all'assioma euclideo di

parallelismo. Non è però uno spazio euclideo, in quanto la metrica è differente: essa è indicata col simbolo $\eta_{\mu\nu}$, e la distanza infinitesima tra due punti è data nei termini della metrica da:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.15)$$

In notazione matriciale la *metrica Minkowskiana* è:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Anche qui, come nel caso dello spazio euclideo, la quantità ds^2 è invariante nel cambiamento tra sistemi di riferimento inerziali, ossia mantiene la stessa forma in tutti i sistemi di questo tipo.

Nel caso della meccanica Newtoniana, l'energia di una particella libera coincide con la sua energia cinetica, $E = \frac{1}{2}mv^2$. Nell'ambito della teoria della Relatività vale invece il principio di equivalenza tra massa ed energia per cui l'energia relativistica totale di una particella:

$$E_{tot} = m_0 \gamma c^2 \quad (1.17)$$

include un fattore legato alla massa a riposo m_0 (quella misurata nel riferimento in cui l'oggetto è in quiete), detto *energia a riposo*:

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1.18)$$

e uno all'energia cinetica relativistica:

$$K = (\gamma - 1)mc^2 \quad (1.19)$$

La quantità (1.17), a differenza dell'energia cinetica Newtoniana, è quindi diversa da zero anche se la particella è ferma, a causa della presenza del termine (1.18). Quest'ultimo esprime l'energia di un corpo massivo a riposo, mostrando che la massa rappresenta una forma di energia (*equivalenza massa-energia*) e può pertanto essere convertita in energia di altro tipo, come avviene ad esempio nei processi atomici, nucleari e subnucleari.

La teoria della Relatività Ristretta, che concilia i fenomeni dell'elettromagnetismo con la relatività galileiana, è tuttavia in contraddizione con la teoria della gravitazione universale di Newton, come abbiamo visto nel paragrafo 1.2. D'altra parte la Relatività Speciale descrive la fisica di un universo senza gravità.

Negli anni successivi alla pubblicazione di questa teoria, Einstein lavorò a degli studi concettuali e matematici per risolvere le incompatibilità con la gravitazione Newtoniana ed estendere la sua prima teoria così che tenesse conto anche della gravità, in modo da includerla in una teoria più generale.

2. La teoria della Relatività Generale

Einstein cominciò a sviluppare la teoria della Relatività Generale a partire dal 1907 per incorporare il campo gravitazionale nell'ambito della Relatività Speciale, ed essa fu presentata all'Accademia delle Scienze di Prussia nel 1915 nell'articolo "*Le equazioni di campo della gravitazione*".

La teoria della Relatività Generale porta ad una profonda rivoluzione concettuale nella visione dello spazio e del tempo: Einstein descrive la gravità nei termini di uno spaziotempo deformabile dove i corpi in caduta libera seguono la traiettoria più rettilinea possibile e l'effetto fisico della gravità viene spiegato dalla curvatura dello spaziotempo prodotta dalla presenza di masse.

Se nella teoria di Newton il Sole esercitava una forza gravitazionale sulla Terra ed essa si muoveva attorno al Sole in risposta a questa forza, nella Relatività Generale la massa del Sole curva lo spaziotempo circostante e la Terra si muove su un tragitto rettilineo in tale spaziotempo deformato. La gravità è geometria.

2.1 Massa inerziale e massa gravitazionale

Prima di parlare della Relatività Generale nel suo senso più stretto, introduciamo un principio che sta alla base di questa teoria, e prima ancora di fare questo, vediamo come quella che viene genericamente chiamata "massa" ha in realtà due definizioni concettualmente diverse.

Inserendo la legge di gravitazione universale scritta nella forma (1.10) nella legge del moto di Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, si ottiene:

$$m\mathbf{a} = -m\nabla\Phi(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

In quest'equazione si possono distinguere due ruoli della massa:

- la massa che compare nel termine di sinistra, ossia nell'equazione del moto di Newton, è definita *massa inerziale* m_I ed esprime la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto;
- la massa che compare nel termine di destra, ossia nella legge di gravitazione universale, è detta *massa gravitazionale* m_G e rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire gli effetti di un campo gravitazionale.

Dall'equazione (2.1) si ha:

$$\mathbf{a} = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

Ciò significa che tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione in un campo gravitazionale indipendentemente dalla loro massa o composizione. Questa universalità dell'accelerazione dei corpi in caduta libera è alla base della comprensione geometrica della gravità nella Relatività Generale.

2.2 Il principio di equivalenza

Uno dei passi fondamentali che portò Albert Einstein a sviluppare la teoria della Relatività Generale fu la semplice considerazione del fatto, già provato da Galileo col suo famoso esperimento dalla Torre di Pisa, che in un campo gravitazionale e in assenza di resistenza dell'aria tutti gli oggetti cadono a terra con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla loro massa.

Queste sono le parole con cui lo scienziato descrisse l'intuizione che ebbe in merito:

«Mi sopravvenne allora il pensiero più felice della mia vita, nella seguente forma. Il campo gravitazionale ha un'esistenza solamente relativa, in maniera simile al campo elettrico generato dall'induzione elettromagnetica. Perché per un osservatore in caduta libera dal tetto di una casa non esiste – almeno nelle sue immediate vicinanze – alcun campo gravitazionale. Infatti se l'osservatore fa cadere degli oggetti, allora questi rimangono, relativamente a lui, in uno stato di quiete o di moto uniforme, indipendentemente dalla loro particolare natura chimica o fisica (in questa considerazione la resistenza dell'aria è ovviamente ignorata). Pertanto l'osservatore può interpretare il suo stato come “di quiete”»

(Tratto da uno scritto di Einstein del 1907 mai pubblicato, riportato nella sua biografia “*Subtle is the Lord*” (1982) scritta da A. Pais, allievo di Einstein stesso)

In pratica, se esistesse un oggetto che cadesse in un campo gravitazionale in modo diverso da tutti gli altri oggetti, questo fatto aiuterebbe l'osservatore a rendersi conto che egli si trova in un campo di gravità e che al suo interno vi sta cadendo. Tuttavia, se un tale oggetto non esiste (com'è di fatto) allora all'osservatore mancherebbe un mezzo oggettivo che gli consentisse di percepire se stesso in caduta all'interno di un campo gravitazionale. Piuttosto egli avrebbe il diritto di considerare il suo stato in quiete e l'ambiente circostante a sè come assente da gravitazione.

In pratica non c'è modo di distinguere un sistema uniformemente accelerato in assenza di campo gravitazionale da un sistema senza accelerazione in un campo uniforme, i due sono equivalenti. Ciò implica che la massa di un corpo che viene attratto dalla gravità terrestre (massa gravitazionale) non può essere diversa da quella di un corpo soggetto ad un'accelerazione pari a g in assenza di gravità (massa inerziale), ossia $m_I = m_G$. Questa uguaglianza non discende da alcun principio fisico, ma è un fatto verificato sperimentalmente con molta accuratezza.

Il fatto che massa inerziale e massa gravitazionale siano numericamente uguali è detto *principio di equivalenza debole*.

Una delle conseguenze del principio di equivalenza debole è che il campo di gravità possa essere considerato nullo in un sistema di riferimento in caduta libera. Ad esempio se una palla di cannone e una piuma cadessero verso terra con accelerazioni diverse, non rimarrebbero in quiete rispetto al sistema in caduta libera, ma il rilevamento di una qualsiasi piccola differenza di accelerazione sarebbe sufficiente a dedurre la presenza di un'attrazione gravitazionale. L'eguaglianza tra la massa inerziale e gravitazionale implica quindi sia che il campo gravitazionale può essere eliminato quando si considera il moto di caduta libera, sia che un campo gravitazionale può essere generato dall'accelerazione di un corpo.

In un campo gravitazionale è dunque sempre possibile scegliere un sistema di riferimento che sia localmente inerziale, cioè in cui esiste un intorno sufficientemente piccolo del punto in cui è possibile eliminare l'effetto di una forza di gravità costante. In quell'intorno, quindi, si possono utilizzare le stesse leggi del moto che si utilizzano in assenza di gravità.

Visto in un'altra maniera, ciò significa che un osservatore in caduta libera può sempre trovare un sistema di riferimento locale (quello in caduta libera insieme a lui) nel quale le leggi della fisica sono le stesse del caso in cui egli non fosse in un campo gravitazionale. La coordinata accelerazione a non ha pertanto un'importanza fisica (come invece ha nel caso della gravità Newtoniana) in quanto si può sempre scegliere un sistema di riferimento, che cade liberamente insieme all'osservatore, in cui l'osservatore è in quiete. Questo concetto va sotto il nome di *principio di equivalenza forte*.

2.3 Curvatura e geodetiche

La metrica definita in una varietà matematica porta con sé l'informazione su come trascorrono gli intervalli di tempo fra punti diversi e sull'ammontare delle distanze tra essi.

Per descrivere una geometria generale definita su uno spaziotempo quadridimensionale con quattro coordinate x^α per ciascun evento, possiamo specificare l'elemento di linea della metrica – intervallo infinitesimo di distanza tra due punti vicini – nella forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})dx^\mu dx^\nu \quad (2.3)$$

dove $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ è il *tensore metrico dello spaziotempo* , simmetrico e in generale funzione delle coordinate x^α , e la quantità ds^2 è un invariante geometrico indipendente dal sistema di coordinate adottato. Essendo una matrice 4×4 simmetrica, $g_{\mu\nu}$ ha 10 componenti indipendenti e la sua forma è differente in base al sistema di coordinate utilizzato, ma la geometria che rappresenta rimane la stessa. Inoltre, siccome ci sono 4 arbitrarie funzioni coinvolte nella trasformazione delle 4 coordinate, restano $10 - 4 = 6$ funzioni indipendenti associate alla metrica.

In un campo gravitazionale non uniforme, le linee di universo di due particelle vicine che inizialmente sono parallele, in generale non rimangono tali: lo spaziotempo con presenza di gravità non è dunque piatto. Quando viene meno l'assioma euclideo di parallelismo, non si ha più

geometria euclidea ma si è in uno spazio curvo, descritto appunto dalla metrica più generale $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$.

Un esempio è la superficie di una sfera: linee che sono localmente rette, sull'intera superficie si estendono in cerchi, e questi si intersecano sempre. Tuttavia, ponendosi sufficientemente vicino a qualsiasi punto della sfera, si può approssimare la geometria ad una piatta, pertanto una sfera è localmente piatta. Ciò è vero per tutti i cosiddetti “spazi di Riemann”: in ciascun punto essi sono localmente piatti, ma le linee localmente dritte (chiamate geodetiche) non rimangono generalmente parallele su scale maggiori.

L'importante avanzamento di Einstein fu quello di intuire la somiglianza tra uno spazio di Riemann e la fisica della gravitazione. Egli identificò le traiettorie degli oggetti in caduta libera con le geodetiche di una geometria curva: esse sono localmente dritte siccome lo spaziotempo ammette sistemi locali di riferimento inerziali in cui tali traiettorie sono rette (secondo il principio di equivalenza forte) ma globalmente non rimangono parallele. Einstein ha quindi sviluppato una teoria della gravità che usa uno spaziotempo curvo per rappresentare l'effetto della gravità sulla traiettoria delle particelle.

Il principio di equivalenza debole, che massa inerziale e gravitazionale coincidono e dunque vale l'uguaglianza (2.2), implica che il tragitto attraverso lo spaziotempo di un corpo in caduta libera non dipende dalle sue proprietà, ma qualsiasi corpo lanciato dalla stessa posizione e con la stessa velocità iniziale seguirà esattamente la medesima curva. L'idea di Einstein fu che questa unicità della traiettoria nello spaziotempo fosse spiegabile in termini geometrici: se tutti i corpi, sotto le stesse condizioni iniziali, cadono lungo la stessa curva indipendentemente dalla loro composizione, allora tale curva può essere vista come una proprietà della geometria dello spaziotempo stesso e non come una forza – un'azione a distanza – che agisce tra i corpi.

Queste traiettorie sono chiamate *geodetiche* e, in uno spaziotempo piatto, sono linee rette, tali per cui a seguito dell'effetto deformante prodotto dalla presenza di masse rimangono dritte mentre lo spaziotempo si incurva. Una geodetica rappresenta pertanto la linea di universo di un corpo in caduta libera che minimizza la distanza spaziotemporale tra due eventi.

La gravitazione, ricapitolando, è la manifestazione della curvatura dello spaziotempo e tale curvatura mostra i suoi effetti nella deviazione di una geodetica da un'altra ad essa vicina, effetti che fisicamente vengono interpretati come un'accelerazione relativa tra corpi vicini.

A questo punto ci chiediamo: come si può quantificare la separazione e il cambiamento di separazione fra due geodetiche in uno spaziotempo curvo?

La risposta richiede due concetti: quello di “vettore tangente” per quanto riguarda la separazione tra geodetiche, e quello di “trasporto parallelo” per confrontare separazioni diverse, tenendo conto che in una varietà curvata non è possibile definire vettori *globalmente* paralleli, ma è possibile definire solo un parallelismo *locale*.

Il passaggio dalla geometria piatta a quella curva discende dal principio di equivalenza: “Le leggi della fisica sono le stesse in qualsiasi sistema di riferimento inerziale *locale* di uno spaziotempo curvo e *globale* di uno spaziotempo piatto”.

Nella pratica, ciò si traduce nel fatto che nell'intorno di un dato evento \mathcal{P} all'interno dello spaziotempo curvo, si avrà un sistema di coordinate tale per cui $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu}$ metrica dello spaziotempo piatto di Minkowski, e dove $g_{\mu\nu}$ rimane il più possibile simile a $\eta_{\mu\nu}$ nell'intorno di \mathcal{P} :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}(\mathcal{P})}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.4)$$

Questo significa che ogni spazio curvo ha uno spazio piatto tangente ad esso in ciascun punto. Per definizione, la derivata di un campo vettoriale coinvolge la differenza tra vettori in due diversi punti, nel limite in cui essi si avvicinano sempre di più. In uno spazio piatto viene naturale confrontare (e quindi eseguire la differenza tra) due vettori in punti diversi, perché l'operazione di muovere un vettore da un punto all'altro mantenendolo costante ha significato (Figura 2.1). Questo concetto di spostare un vettore lungo un cammino mantenendolo costante durante il procedimento è detto *trasporto parallelo*.

In uno spaziotempo curvo, però, la nozione di differenza tra vettori non è ben chiara, proprio perché tra un punto e l'altro lo spazio è curvo; pertanto ci chiediamo, nel confronto tra due vettori in punti diversi, rispetto a cosa essi cambiano? Per quantificare il cambiamento di un vettore (o meglio, di un tensore) all'interno dello spaziotempo, è necessario anche in questo caso avvalersi del trasporto parallelo, con la cruciale differenza, rispetto al caso piatto, che in uno spazio curvo il risultato del trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro dipende dal percorso effettuato (Figura 2.2). Questo significa che non esiste una maniera per spostare *univocamente* un vettore da uno spazio tangente ad un altro e nemmeno esiste una scelta naturale del cammino da prendere. Due vettori possono essere confrontati in modo naturale solamente se sono elementi dello stesso spazio tangente.

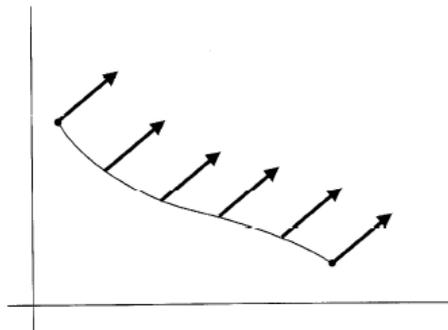


Figura 2.1. Nello spazio piatto si può effettuare il trasporto parallelo di un vettore semplicemente tenendo costanti le sue componenti cartesiane.

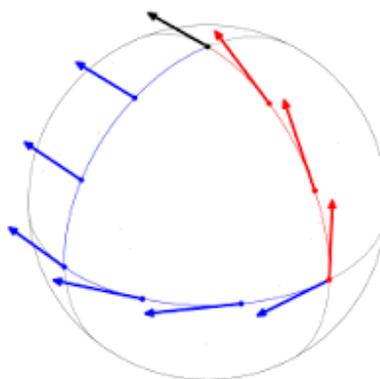


Figura 2.2. In una varietà curva il risultato del trasporto parallelo può dipendere dal percorso preso (a partire dal vettore nero c'è un risultato diverso a seconda del percorso blu o rosso).

Tradotto in concetti matematici, consideriamo una curva $\mathbf{x}(\lambda)$ – essendo λ il parametro lungo la curva –, in ogni punto della quale c'è un vettore tangente \mathbf{u} dato dalla derivata direzionale, $\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda}$. La condizione per la costanza di un vettore \mathbf{V} lungo questa curva in uno spazio piatto – e quindi per il trasporto parallelo di tale vettore – è semplicemente data dalla costanza delle sue componenti:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\alpha = 0 \quad (2.5)$$

Per generalizzare questa condizione al caso tensoriale in uno spazio generico, sostituiamo la derivata parziale con una covariante, ottenendo così la *derivata covariante direzionale*:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (2.6)$$

Definiamo quindi il trasporto parallelo del tensore \mathbf{T} (prendiamo per semplicità un tensore di tipo $(1, 0)$) lungo il cammino $\mathbf{x}(\lambda)$ dalla richiesta che la derivata covariante di \mathbf{T} lungo questo cammino si annulli:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^\mu = 0 \quad (2.7)$$

In uno spazio Euclideo una linea retta è l'unica curva che “trasporta parallelamente se stessa”, cioè la cui tangente in un punto rimane parallela alla tangente nel punto successivo. In uno spaziotempo curvo si possono analogamente disegnare curve “il più rettilinee possibile” imponendo il trasporto parallelo dei vettori ad esse tangenti lungo se stessi (Figura 2.3). Si ottengono così curve $x^\alpha(\lambda)$ i cui vettori tangenti $\mathbf{u} = \frac{dx}{d\lambda}$ soddisfano la (2.7), ossia:

$$\frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma \frac{dx^\mu}{d\lambda} = u^\sigma \nabla_\sigma u^\mu = 0 \quad (2.8)$$

Queste curve sono le geodetiche, e la (2.8) è detta *equazione della geodetica*.

Introducendo i coefficienti, detti simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

possiamo riscrivere l'equazione della geodetica (2.8) in componenti:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (2.9)$$

Si tratta di un sistema di quattro equazioni differenziali del secondo ordine, una per ogni valore dell'indice α , che ammette un'unica soluzione – un'unica curva geodetica – date la posizione iniziale e la velocità iniziale. L'equazione della geodetica è l'equazione alla base del moto delle particelle nello spaziotempo curvo.

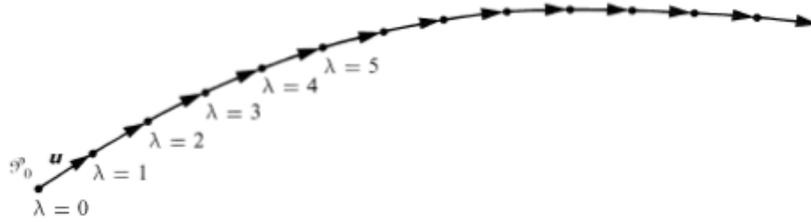


Figura 2.3. Una geodetica vista come regola per il trasporto parallelo. Si prenda un evento \mathcal{P}_0 e un vettore tangente $\mathbf{u} = d\mathcal{P}/d\lambda$ in quel punto. Si costruisca la geodetica unica $\mathcal{P}(\lambda)$ che (1) passa attraverso \mathcal{P}_0 : $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0$, e (2) ha \mathbf{u} come suo vettore tangente in tale punto: $(d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=0} = \mathbf{u}$. Questa geodetica può essere vista come una regola per prendere \mathbf{u} da $\mathcal{P}(0)$ e porlo sulla sua punta, $\mathcal{P}(1)$, nella maniera più dritta possibile:

$$\mathbf{u}_{\lambda=1} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=1}$$

e in seguito porlo di nuovo nella maniera più dritta possibile in $\mathcal{P}(2)$:

$$\mathbf{u}_{\lambda=2} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=2}$$

e così di seguito. Questa sequenza di trasporti “il più dritti possibile” ottenuti ponendo “coda sulla punta”, dà l’idea del fatto che $(d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=1}$ e $\mathbf{u} = (d\mathcal{P}/d\lambda)_{\lambda=0}$ sono lo stesso vettore in punti diversi lungo la geodetica, o, equivalentemente, che uno è stato ottenuto dall’altro attraverso “trasporto parallelo dritto”.

2.4 L’equazione di campo di Einstein

Avendo stabilito una descrizione della gravità, la sua azione sulla materia che è basata sull’idea di una varietà curva nella quale è definita una metrica, e la legge del moto dei corpi all’interno di tale varietà, dobbiamo ora completare la teoria postulando una legge che mostri come le sorgenti del campo gravitazionale determinano la metrica.

L’analogo Newtoniano è espresso dall’equazione di campo di Newton (1.13):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{1.13}$$

dove ρ è la densità di massa. La soluzione per una particella di massa m è:

$$\Phi = -\frac{Gm}{r} \tag{2.10}$$

L’equazione (1.13) dice che la sorgente del campo gravitazionale, nella teoria di Newton, è la densità di massa ρ . Nell’ambito della teoria della Relatività Generale, per garantire l’invarianza delle leggi fisiche e quindi l’inesistenza di un sistema di coordinate preferenziale, si introduce un tensore come sorgente del campo gravitazionale. Si tratta del tensore energia impulso $T_{\alpha\beta}$, il quale fornisce il flusso dell’energia e della quantità di moto attraverso un’ipersuperficie S_k con coordinate x_k costanti, e le cui componenti sono:

$$T_{00} = \text{densità di energia}$$

$$T_{0i} = \text{flusso di energia attraverso la superficie } x_i$$

$$T_{i0} = \text{flusso dell’}i\text{-esima componente della quantità di moto attraverso la superficie } t$$

$$T_{ij} = \text{flusso dell’}i\text{-esima componente della quantità di moto attraverso la superficie } x_j$$

Il tensore energia impulso è simmetrico, pertanto ha 10 componenti indipendenti.

La relazione tra la curvatura locale dello spaziotempo con la sua sorgente, che è la densità di materia-energia, è espressa dall'*equazione di campo di Einstein*, la formula fondamentale della Relatività Generale, che consiste in un insieme di dieci equazioni differenziali non lineari del secondo ordine alle derivate parziali per i coefficienti della metrica $g_{\alpha\beta}(x)$.

Prima di definirla, introduciamo alcuni tensori:

- *Tensore di Riemann* (parametrizza la curvatura della varietà spaziotempo)

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} w^{\gamma} := -(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha})w^{\delta} \quad (2.11)$$

dove ∇_{α} è la derivata covariante e \mathbf{w} è un arbitrario campo vettoriale.

- *Tensore di Ricci* (ottenuto contraendo due indici del tensore di Riemann)

$$R_{\alpha\beta} := R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu} \quad (2.12)$$

- *Scalare di Ricci* (è la traccia del tensore di Ricci)

$$R := g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

- *Tensore di Einstein*

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \quad (2.14)$$

L'equazione di campo di Einstein ha la forma:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (2.15)$$

Essa descrive come il campo gravitazionale è generato dalla materia, ossia la curvatura dello spaziotempo in funzione della distribuzione della densità di materia e dell'energia, rappresentate dal tensore energia impulso $T_{\alpha\beta}$. Il fattore costante $\frac{8\pi G}{c^4}$ si ottiene richiedendo che l'equazione predica il corretto comportamento dei pianeti nel Sistema Solare e più in generale nel caso di moti non relativistici e campo gravitazionale debole, detto "limite Newtoniano". La teoria gravitazionale descritta da Newton, infatti, anche alla luce di questa nuova teoria della gravitazione non è sbagliata, è un'approssimazione non relativistica all'interno della teoria relativistica della gravità.

3. Onde gravitazionali

Abbiamo visto che il concetto fondamentale introdotto dalla teoria della Relatività Generale è che lo spaziotempo viene curvato dalla presenza di masse, per cui la forza di gravità è interpretata non più come un'azione a distanza tra corpi, ma come una proprietà geometrica dello spaziotempo stesso. Grandi masse in movimento all'interno di un campo gravitazionale non uniforme producono delle increspature nella curvatura dello spaziotempo, le quali si propagano alla velocità della luce. Esse sono chiamate onde gravitazionali.

Nell'universo esiste un gran numero di sorgenti di onde gravitazionali, come sistemi binari di stelle o di buchi neri, esplosioni di supernovae, collassi di buchi neri e il Big Bang. Tuttavia nonostante la varietà di sorgenti, la radiazione gravitazionale è piuttosto debole e difficile da rilevare a causa della debolezza dell'interazione gravitazionale.

3.1 La teoria linearizzata della gravità

Concentriamoci inizialmente su onde gravitazionali che si propagano in uno spaziotempo quasi piatto in assenza di materia. Questa è un'approssimazione utile quando si considerano le onde gravitazionali a grandi distanze dalle sorgenti che le producono.

In queste condizioni la complicata equazione non lineare di Einstein (2.15) può essere risolta in maniera più agevole secondo un'approssimazione lineare, le cui soluzioni sono dette *onde gravitazionali linearizzate*. Esse hanno le seguenti proprietà:

- si propagano alla velocità della luce,
- sono trasversali,
- hanno due stati di polarizzazione indipendenti,
- possono essere rilevate dal loro effetto di provocare un moto relativo fra masse di prova,
- trasportano energia.

Occupiamoci ora di trattare le onde gravitazionali linearizzate dal punto di vista formale e matematico.

Se ci mettiamo nell'approssimazione di campo gravitazionale debole, la metrica dello spaziotempo è molto simile alla metrica piatta di Minkowski:

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

dove $h_{\mu\nu}$ è una piccola perturbazione, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Questa *perturbazione metrica* descrive l'onda gravitazionale considerata.

Sostituendo la metrica (3.1) nell'equazione di campo di Einstein (2.15), si può espandere quest'ultima nelle potenze di $h_{\mu\nu}$ e, senza troppa perdita di accuratezza dato che stiamo tenendo conto di increspature piccole, si possono mantenere solo i termini lineari. Il formalismo risultante va sotto il nome di *teoria linearizzata della gravità*.

Inizialmente linearizziamo il tensore di Ricci definito in (2.12) espandendolo al primo ordine in $h_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, scrivendo $h = h_{\mu}{}^{\mu}$ per la traccia di $h_{\mu}{}^{\nu}$:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}{}^{\mu} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h^{\mu}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) + O(h^2) \quad (3.2)$$

e lo scalare di Ricci (2.13):

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + O(h^2) = \frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + O(h^2) \quad (3.3)$$

In questo modo il tensore di Einstein (2.14) diventa:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 h^{\mu}{}_{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 h^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \\ &\quad + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introduciamo ora il *tensore di perturbazione metrica con la traccia inversa*, ottenuto sottraendo metà della traccia $h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha}$ ad $h_{\alpha\beta}$ stesso:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (3.5)$$

in cui $\bar{h} = \eta^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} = -h$, ed è per questo che viene detto "con la traccia inversa".

Sostituendo nell'equazione linearizzata per il tensore di Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{h}_{\beta}{}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) + O(h^2) \quad (3.6)$$

quindi l'equazione di campo linearizzata è:

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 \bar{h}_{\beta}{}^{\mu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha}{}^{\mu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} + O(h^2) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (3.7)$$

dove il primo termine a sinistra è l'operatore d'Alembertiano $\square \bar{h}_{\alpha\beta} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{h}_{\alpha\beta}$.

Per ottenere un'ulteriore semplificazione della forma dell'equazione di campo, bisogna stabilire un'appropriata condizione di gauge.

Cerchiamo dunque una trasformazione infinitesima di coordinate $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$ che trasformi la metrica nel seguente modo:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + O(h^2) \quad (3.8)$$

Qui $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ e $g'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}') = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')$. Perciò:

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + O(h^2) \quad (3.9)$$

che nei termini della perturbazione metrica con la traccia inversa diventa:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \rightarrow \bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + O(h^2) \quad (3.10)$$

e imponiamo la seguente condizione di gauge:

$$0 = \frac{\partial \bar{h}'^\mu{}_\beta}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \bar{h}^\mu{}_\beta}{\partial x^\mu} - \square \xi_\beta + O(h^2) \quad (3.11)$$

Ciò significa che, data la quantità $\bar{h}_{\alpha\beta}$, bisogna trovare una trasformazione di coordinate generata da un vettore $\boldsymbol{\xi}$ che soddisfi la condizione:

$$\square \xi_\beta = \frac{\partial \bar{h}^\mu{}_\beta}{\partial x^\mu} \quad (3.12)$$

Avendo ora scelto una gauge di Lorenz, l'equazione di campo di Einstein linearizzata può essere scritta nella forma:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

Essa mostra che l'equazione del moto di una perturbazione lineare dello spaziotempo è un'equazione d'onda, dove il tensore energia impulso ha il ruolo di sorgente.

3.2 Equazioni linearizzate nel vuoto

Quando il termine di sorgente $T_{\alpha\beta}$ è nullo, le equazioni di Einstein linearizzate nel vuoto diventano:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.14)$$

e la condizione di Lorenz è:

$$\frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3.15)$$

La soluzione più semplice è la soluzione di onda piana monocromatica, che ha la seguente forma complessa:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} e^{ik_\alpha x^\alpha} \quad (3.16)$$

dove $\{A_{\alpha\beta}\}$ sono le componenti costanti complesse di un tensore, detto *ampiezza*, e $\{k_\alpha\}$ sono le componenti costanti reali di una 1-forma (o campo vettoriale covariante), detta *vettore d'onda*. In particolare $k_\alpha = [\omega, \mathbf{k}]$ con $\omega = c \|\mathbf{k}\|$, dove ω è la frequenza dell'onda.

Affinché l'equazione (3.16) sia soluzione della (3.14), le due costanti \mathbf{A} e \mathbf{k} devono soddisfare le seguenti condizioni:

- $k^\alpha k_\alpha = 0$, ossia il quadrivettore k^α associato all'1-forma k_α dev'essere nullo (parte spaziale e temporale sono uguali in modulo);
- $k_\mu A^{\mu\alpha} = 0$, ossia \mathbf{A} e \mathbf{k} sono ortogonali e questo come conseguenza della gauge di Lorenz (3.15):

$$0 = \frac{\partial \bar{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\mu\alpha}$$

Quest'ultimo vincolo significa che l'onda è *trasversale*, cioè la perturbazione è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda (direzione del vettore \mathbf{k}).

Scegliamo che l'onda viaggi lungo l'asse $z = x^3$. L'equazione (3.14) implica che le componenti della perturbazione metrica devono essere funzioni del tempo t e della coordinata spaziale z , $t - \frac{z}{c}$.

La condizione di gauge (3.15) richiede che $\frac{\partial \bar{h}^{0\alpha}}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial \bar{h}^{3\alpha}}{\partial z} = 0$, quindi $\bar{h}_{0\alpha}(t - \frac{z}{c})$ e $\bar{h}_{3\alpha}(t - \frac{z}{c})$ sono costanti e possiamo scegliere che siano zero. Pertanto le componenti non nulle sono:

$$\bar{h}_{11} = \bar{h}_{11}\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \bar{h}_{22} = \bar{h}_{22}\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \bar{h}_{12} = \bar{h}_{21} = \bar{h}_{12}\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

e nei termini di $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}$ esse diventano:

$$h_{00} = -c^2 h_{33} = \frac{1}{2}c^2(\bar{h}_{11} + \bar{h}_{22}), \quad h_{11} = -h_{22} = \frac{1}{2}(\bar{h}_{11} - \bar{h}_{22}), \quad h_{12} = h_{21} = \bar{h}_{12}$$

Da queste equazioni risulta che la perturbazione si propaga lungo l'asse z alla velocità della luce. Questa soluzione è chiamata *onda gravitazionale*.

Un semplice esempio di un'onda gravitazionale piana che si propaga nella direzione z è dato dalla seguente perturbazione metrica:

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{matrix} t & x & y & z \\ \begin{matrix} t \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} f\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.17)$$

dove $f\left(t - \frac{z}{c}\right)$ è una funzione di $t - \frac{z}{c}$ con $|f\left(t - \frac{z}{c}\right)| \ll 1$. In queste condizioni l'elemento di linea dello spaziotempo è:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left[1 + f\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] dx^2 + \left[1 - f\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] dy^2 + dz^2 \quad (3.18)$$

Questa geometria rappresenta un'onda della curvatura spaziotemporale che viaggia nel verso positivo dell'asse z con velocità della luce, la cui ampiezza e forma è determinata dalla funzione f . La metrica espressa dalla (3.18) non risolve con assoluta esattezza l'equazione di Einstein (2.15), ma risolve quella linearizzata (3.13). Le onde gravitazionali linearizzate possono infatti considerarsi un'ottima approssimazione ad una vera soluzione dell'equazione (2.15) quando la loro ampiezza è piccola. Ad esempio un'ampiezza dell'ordine di 10^{-21} m è appropriata.

Le onde linearizzate hanno l'importante proprietà che possono essere sommate tra di loro per produrre altre onde linearizzate che risolvono l'equazione di Einstein con la stessa accuratezza (mentre questo non è valido per le soluzioni dell'equazione intera non lineare).

3.3 La gauge trasversale-senza traccia (TT)

Per ora abbiamo un solo vincolo sull'ampiezza $A_{\mu\nu}$ ($k_\mu A^{\mu\alpha} = 0$), ma possiamo utilizzare l'invarianza di gauge per restringerci ulteriormente.

È possibile scegliere una condizione di gauge rimanendo all'interno della classe di gauge di Lorenz usando qualsiasi vettore ξ che risolva:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \xi_\alpha = 0 \quad (3.19)$$

Iniziamo selezionando una quadrivelocità \mathbf{u} per la quale imponiamo la condizione sull'ampiezza:

$$A_{\mu\nu} u^\nu = 0$$

Questa implica soltanto tre e non quattro vincoli ad $A_{\mu\nu}$, perché uno di essi è già soddisfatto ($k^\mu A_{\mu\nu} u^\nu = 0$). Come quarto vincolo, usiamo una trasformazione di gauge per imporre:

$$A^\mu{}_\mu = 0$$

Ora abbiamo otto vincoli sulle dieci componenti dell'ampiezza: $A_{\mu\alpha} u^\alpha = A_{\mu\alpha} k^\alpha = A_\alpha{}^\alpha = 0$.

Le due componenti rimanenti di $A_{\mu\nu}$ rappresentano i gradi di libertà nel piano dell'onda gravitazionale, ossia i due stati di polarizzazione.

È utile riformulare le otto condizioni in un sistema di riferimento nel quale $u^0 = 1$, $u^j = 0$ e in una forma dove k^α non appaia esplicitamente:

$$h_{\mu 0} = 0 \rightarrow \text{solo le componenti spaziali } h_{ij} \text{ sono diverse da } 0 \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_j} = h_{ij}k_j = 0 \rightarrow \text{le componenti spaziali hanno divergenza nulla} \quad (3.20b)$$

$$h_{jj} = 0 \rightarrow \text{le componenti spaziali hanno traccia nulla} \quad (3.20c)$$

dove gli indici ripetuti si intendono sommati. Queste condizioni insieme definiscono la cosiddetta *gauge trasversale-senza traccia (TT)*. “Trasversale” perché il tensore a cui si riferiscono è puramente spaziale (3.20a) e trasverso alla sua stessa direzione di propagazione (3.20b); “senza traccia” per (3.20c).

I vincoli (3.20) che definiscono questa gauge possono essere riassunti come $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{TT}$.

L’assunzione della gauge TT può essere fatta per qualsiasi onda piana monocromatica. Se consideriamo invece un’onda arbitraria che possa anche non essere piana – ma rimanendo entro la teoria linearizzata – essa può essere vista come la sovrapposizione di onde piane, per ognuna delle quali è possibile introdurre la gauge (3.20). Notiamo che queste condizioni di gauge sono tutte lineari in $h_{\mu\nu}$, dunque anche l’onda arbitraria soddisferà i vincoli (3.20).

3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali piane

La metrica (3.17) non è la più generale possibile. Essa è uno degli esempi dei due indipendenti stati di polarizzazione di un’onda gravitazionale.

Per trovare il secondo, immaginiamo di ruotare gli assi x e y di un angolo $\theta = 45^\circ$. Allora, le relazioni tra coordinate di sistemi ruotati l’uno rispetto all’altro sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases} \quad (3.21)$$

Sostituendo queste trasformazioni nell’elemento di linea (3.18) otteniamo:

$$h_{x'x'} = 0, \quad h_{x'y'} = h_{y'x'} = h_{xx} = -h_{yy}, \quad h_{y'y'} = 0$$

e usando le coordinate x, y al posto di x', y' , la soluzione dell’equazione linearizzata di Einstein assume la forma:

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.22)$$

Questo corrisponde ad un secondo stato di polarizzazione lineare indipendente rispetto al primo. Le onde della forma (3.17) sono dette avere “polarizzazione +”, mentre quelle della forma (3.22) hanno “polarizzazione \times ”. In generale un’onda gravitazionale che si propaga nella direzione

positiva dell'asse z è data dalla sovrapposizione di due componenti con polarizzazione “+” e “ \times ” e ha la forma:

$$h_{\alpha\beta}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_+ \left(t - \frac{z}{c} \right) & f_\times \left(t - \frac{z}{c} \right) & 0 \\ 0 & f_\times \left(t - \frac{z}{c} \right) & -f_+ \left(t - \frac{z}{c} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Un altro modo di descrivere la polarizzazione delle onde gravitazionali è avvalendoci della gauge TT e prendendo la solita onda piana monocromatica che si propaga lungo la direzione z . Le condizioni (3.20) per $h_{\mu\nu}^{TT}$ implicano che le sue uniche componenti non nulle sono:

$$\begin{cases} h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT} = A_+ e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} \\ h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = A_\times e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} \end{cases} \quad (3.24)$$

dove le ampiezze A_+ e A_\times rappresentano i due stati di polarizzazione indipendenti dell'onda. Se abbiamo due masse di prova ferme, una nell'origine e l'altra a $x = L'$, $y = z = 0$, la loro distanza sarà L' nello spaziotempo piatto imperturbato, mentre quando passa l'onda la distanza diventa funzione del tempo, in accordo con la variazione nel tempo dell'onda stessa:

$$L(t) = \int |ds^2|^{1/2} = \int_0^{L'} |g_{xx}|^{1/2} dx = \int_0^{L'} [1 + h_{xx}(t, 0)]^{1/2} dx \approx L' \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}(t, 0) \right] \quad (3.25)$$

Da questa formula ricaviamo che le componenti del vettore di separazione lungo l'asse x tra le due particelle, chiamiamolo ξ , obbediscono a:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} L' \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} L' \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.26a)$$

Similmente, per due particelle inizialmente separate di L' nella direzione y :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi^y}{\partial t^2} = \frac{1}{2} L' \frac{\partial^2 h_{yy}^{TT}}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} L' \frac{\partial^2 h_{xx}^{TT}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \xi^x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} L' \frac{\partial^2 h_{xy}^{TT}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.26b)$$

Ricordando che, da (3.24), $h_{yy}^{TT} = -h_{xx}^{TT}$.

Le equazioni (3.26) definiscono la polarizzazione dell'onda gravitazionale, ossia il fatto che la variazione nella direzione del vettore di separazione ξ nel piano (x, y) segue leggi precise, e siccome h_{xx}^{TT} e h_{xy}^{TT} sono indipendenti, i due casi in (3.26a) (o analogamente quelli in (3.26b)) descrivono due diversi stati di polarizzazione.

Questo significa che si può scomporre un'onda gravitazionale piana in due componenti polarizzate

linearmente o, alternativamente, polarizzate circolarmente.

Per onde gravitazionali polarizzate linearmente i tensori unitari di polarizzazione lineare sono:

$$\mathbf{e}_+ \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\times \equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x$$

Per le onde polarizzate circolarmente i tensori unitari di polarizzazione circolare sono:

$$\mathbf{e}_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times)$$

$$\mathbf{e}_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times)$$

3.5 Effetti su particelle libere

L'onda piana (3.24), quando $A_\times = 0$, ha polarizzazione lineare \mathbf{e}_+ e può essere riscritta:

$$h_{jk} = A_+ e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} e_{+jk} \quad (3.27)$$

Essa avrà componenti $h_{xx}^{TT} \neq 0$ e $h_{xy}^{TT} = 0$. Il suo effetto nell'alterare la separazione tra due particelle di prova dipende dalla direzione della loro separazione. Per visualizzare l'effetto in tutte le direzioni contemporaneamente, consideriamo un anello circolare di particelle di prova inizialmente a riposo nel piano trasverso (x, y) che circonda una particella centrale. Nel momento in cui l'onda con polarizzazione $+$ passa, deforma quello che nel riferimento proprio della particella centrale era un cerchio in un'ellisse con gli assi nelle direzioni x e y , facendo oscillare le particelle in dentro e in fuori lungo i due assi coordinati.

Se invece l'onda avesse polarizzazione \times e quindi componenti $h_{xy}^{TT} \neq 0$ e $h_{xx}^{TT} = h_{yy}^{TT} = 0$, allora l'anello verrebbe distorto come nel caso precedente ma con una rotazione degli assi coordinati di un angolo di 45° con le direzioni x e y (Figura 3.1, prime due colonne).

Dal punto di vista della polarizzazione circolare, un'onda gravitazionale con polarizzazione \mathbf{e}_R ruota la deformazione dell'anello considerato verso destra, mentre un'onda con \mathbf{e}_L la ruota verso sinistra (Figura 3.1, ultime due colonne).

In ogni caso l'onda non comporta alcun cambiamento nella separazione delle masse lungo la direzione longitudinale z . Infatti la perturbazione metrica h_{zz} , essendo nulla, azzerava la formula analoga alla (3.25). Solo la separazione sul piano trasverso (x, y) cambia col tempo al passaggio dell'onda (essa infatti, come già detto, è trasversale).

Dall'equazione (3.25) notiamo che il cambiamento della distanza tra due punti è proporzionale alla loro separazione iniziale L' : le onde gravitazionali producono una distanza maggiore quanto più grande è la distanza iniziale. Questa è la ragione per cui i moderni rilevatori di onde gravitazionali vengono costruiti su grandi scale, misurando le variazioni di posizione lungo molti chilometri (nel caso dei rilevatori sulla Terra) o milioni di chilometri (nel caso dei rilevatori nello spazio).

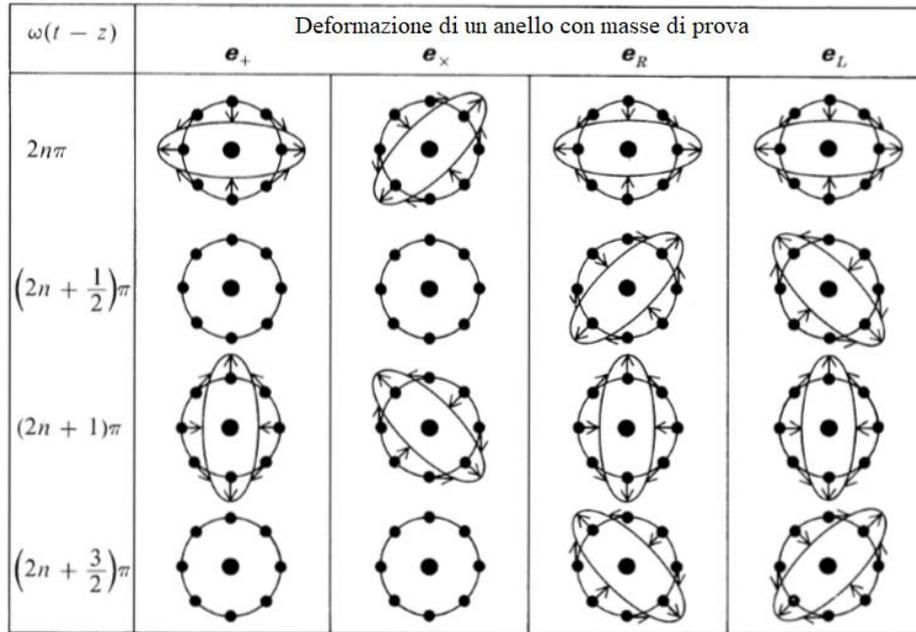


Figura 3.1. Distorsione di un anello di particelle di prova, nei termini dei vettori base della polarizzazione lineare e_x , e_+ e dei vettori base della polarizzazione circolare e_R ed e_L .

3.6 Energia delle onde gravitazionali

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che le onde gravitazionali producono degli effetti fisici sulle particelle che colpiscono modificando le distanze tra gli oggetti, i quali vengono accelerati avvicinandosi o allontanandosi gli uni dagli altri. È quindi evidente che queste onde devono trasportare energia.

La densità di energia in un campo gravitazionale Newtoniano è data da:

$$u_N(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi G} [\nabla\Phi(\mathbf{x})]^2 = -\frac{1}{8\pi G} [\mathbf{g}(\mathbf{x})]^2 \quad (3.28)$$

dove $\Phi(\mathbf{x})$ è il potenziale gravitazionale (1.8) e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ è il campo gravitazionale Newtoniano (1.9). Il segno negativo della formula precedente è dovuto al fatto che quella gravitazionale è una forza sempre attrattiva.

Ci chiediamo ora quale sia la densità di energia corrispondente alla (3.28) nella Relatività Generale. In effetti una quantità analoga non esiste.

Il motivo risiede nel principio di equivalenza: non si può definire l'energia locale di un'onda gravitazionale perché la nozione stessa di densità di energia gravitazionale locale non esiste in Relatività Generale, infatti è sempre possibile passare ad un sistema di riferimento localmente inerziale in cui non c'è campo gravitazionale e quindi non c'è energia.

Possiamo però calcolare la densità di energia associata ad un'onda gravitazionale la cui lunghezza d'onda λ sia molto minore rispetto alla scala della curvatura dello spaziotempo di sfondo nel quale

essa si propaga. Questa energia non è esattamente locale ma è una densità media su un volume di spaziotempo le cui dimensioni sono maggiori di λ ma molto più piccole della curvatura sullo sfondo. Un esempio in cui le condizioni sono queste è quando si considera la radiazione gravitazionale a grandi distanze dalla sorgente, dove lo spaziotempo è quasi piatto. A partire dall'equazione di campo di Einstein linearizzata (3.13), abbiamo che il tensore energia-impulso è dato da:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{TT}^{ij}}{\partial x^\mu} \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^\nu} \right\rangle \quad (3.29)$$

dove $\langle \rangle$ rappresenta la media su un gran numero di lunghezze d'onda e h_{ij}^{TT} è il tensore h_{ij} nella gauge TT. Da quest'equazione segue che il tensore energia-impulso per la seguente onda piana:

$$h_{\mu\nu} = (A_+ e_{+\mu\nu} + A_\times e_{\times\mu\nu}) e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})}$$

è:

$$T_{00} = c^2 T_{33} = -c T_{03} = -c T_{30} = \frac{c^4}{32\pi G} \omega^2 (A_+^2 + A_\times^2)$$

con le altre componenti nulle.

Ricaviamo quindi che la densità di energia – componente temporale del tensore energia-impulso – associata ad un'onda gravitazionale piana è:

$$u_{GW} = T_{00} = \frac{c^4}{32\pi G} \omega^2 (A_+^2 + A_\times^2) \quad (3.30)$$

3.7 Equazioni linearizzate con sorgenti

Torniamo adesso alla forma generale dell'equazione di Einstein linearizzata, la (3.13), che tiene conto della presenza di sorgenti, $T_{\alpha\beta} \neq 0$:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (3.13)$$

Ricordando che $\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$, allora ogni componente di $\bar{h}_{\alpha\beta}(x)$ obbedisce ad un'equazione d'onda della forma:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} + \nabla^2 f(x) = j(x) \quad (3.31)$$

dove $j(x)$ è la sorgente. La soluzione di un'equazione d'onda del tipo (3.31) per una qualsiasi $f(x)$ con una data sorgente $j(x)$ è un problema standard in fisica, che nel nostro caso fornisce la seguente

soluzione all'equazione di campo (3.13):

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\alpha\beta}(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (3.32)$$

3.8 Potenza irradiata

Ricapitoliamo le ipotesi in cui stiamo lavorando: studiamo le onde gravitazionali ad una grande distanza r dalla sorgente che le emette, assumendo che le velocità di quest'ultima siano piccole in confronto alla velocità della luce, e questo implica che le onde considerate abbiano lunghezze d'onda grandi rispetto alle dimensioni caratteristiche della sorgente:

$$r \gg R_{\text{sorgente}}, \quad \lambda \gg R_{\text{sorgente}}, \quad V_{\text{sorgente}} \sim \omega R_{\text{sorgente}} \ll c$$

con $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ la lunghezza d'onda associata alla frequenza caratteristica di variazione della sorgente, ω .

In queste condizioni l'energia e la quantità di moto sono conservate, e questo è espresso dalla seguente legge:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (3.33)$$

Una componente risulta:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{kt}}{\partial x^k} = 0$$

Differenziando quest'equazione rispetto al tempo e usando la simmetria $T^{kt} = T^{tk}$ e ancora una volta la legge di conservazione (3.33), si trova:

$$\frac{\partial^2 T^{00}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T^{tk}}{\partial x^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T^{tk}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 T^{kl}}{\partial x^k \partial x^l}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $x^i x^j$ e integrando sullo spazio, il risultato diventa:

$$\int T^{ij}(x) d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00}(x) x^i x^j d^3x \quad (3.34)$$

Nel limite da noi considerato, la densità di energia $T^{00}(x)$ sarà dominata dalla densità di massa, $T^{00} \approx \rho$, e l'integrale (3.34) definisce il *secondo momento di massa*:

$$I^{ij}(t) \equiv \int \rho(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x \quad (3.35)$$

La radiazione gravitazionale trasporta energia, sottraendola al sistema che la irradia. Calcolando il flusso di energia nelle diverse direzioni e integrando su un angolo solido si può ottenere un'espressione per la quantità totale di energia persa nel caso di campo gravitazionale debole e grande lunghezza d'onda, il cui risultato è la *formula del quadrupolo* (3.37).

La derivazione di tale formula non è troppo complicata ma è lunga, pertanto ci limitiamo a riportarne la forma finale.

Introducendo il *tensore ridotto di momento di quadrupolo*:

$$\mathcal{I}^{ij} \equiv I^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k \quad (3.36)$$

che si distingue dal secondo momento di massa I^{ij} solamente per la traccia, otteniamo che la potenza totale irradiata in onde gravitazionali risulta una combinazione quadratica della derivata temporale terza di I^{ij} :

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{\mathcal{I}}_{ij} \ddot{\mathcal{I}}^{ij} \rangle \quad (3.37)$$

dove $\langle \rangle$ indica la media temporale sul periodo caratteristico della sorgente, e le dimensioni sono ovviamente $\frac{\text{energia}}{\text{tempo}}$.

La formula del quadrupolo può essere applicata per calcolare, ad esempio, la potenza irradiata in onde gravitazionali da un sistema binario, con massa delle stelle M , raggio dell'orbita R e frequenza orbitale $\Omega = \frac{2\pi}{P}$, che risulta essere:

$$L_{GW} = \frac{128}{5} \frac{G}{c^5} M^2 R^4 \Omega^6$$

che numericamente è:

$$L_{GW} = 1.9 * 10^{33} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \frac{1 h}{P} \right)^{10/3} \frac{erg}{s}$$

La luminosità del Sole in radiazione elettromagnetica è $3.8 * 10^{33} \frac{erg}{s}$, pertanto sistemi binari con masse stellari solari e brevi periodi non sono particolarmente deboli in quanto ad emissione gravitazionale, però il debole accoppiamento della gravità con la materia rende difficile rilevare questa radiazione.

Ora che abbiamo introdotto il secondo momento di massa (3.35) possiamo anche calcolare una stima dell'ampiezza di un'onda gravitazionale emessa da una stella binaria. L'ampiezza espressa dalla formula (3.32) per grandi distanze r dalla sorgente diventa:

$$\bar{h}^{ij}(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{2}{r} \ddot{I}^{ij}(t - r) \quad (3.38)$$

Per il sistema binario appena considerato, possiamo assumere che una stima approssimativa del secondo momento di massa sia:

$$I^{ij} \sim MR^2$$

e due derivazioni rispetto al tempo aggiungono due fattori del periodo, dando:

$$\ddot{I}^{ij} \sim \frac{MR^2}{P^2}$$

Il raggio R dell'orbita è legato alla massa e al periodo da:

$$\frac{V^2}{R} = \frac{(2\pi R/P)^2}{R} = \frac{2GM}{R^2}$$

Quindi dalla (3.38) stimiamo per l'ampiezza dell'onda gravitazionale alla distanza r dal sistema binario:

$$\bar{h}^{ij} \sim \left(\frac{M}{r}\right) \left(\frac{M}{P}\right)^{2/3}$$

e, inserendo le unità di misura:

$$\bar{h}^{ij} \sim 10^{-21} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/3} \left(\frac{1 \text{ h}}{P}\right)^{2/3} \left(\frac{100 \text{ pc}}{r}\right)$$

Se inseriamo in questo esempio i parametri del sistema binario ξ Bootis, una delle più luminose sorgenti binarie di onde gravitazionali, collocato a circa 11.7 pc dalla Terra, con due stelle di masse $\sim 1 M_\odot$ e $\sim 0.6 M_\odot$ e periodo $P = 6.5$ h, otteniamo infine che $\bar{h}^{ij} \sim 10^{-21}$. Questo risultato dà una stima sull'ordine di grandezza dell'ampiezza di un esempio di onde gravitazionali che raggiungono la Terra.

Consideriamo ora un sistema astrofisico dinamicamente molto attivo, come per esempio una stella pulsante che ruota rapidamente o una stella che collassa o ancora un sistema caotico di molte stelle. Se la massa è M e il raggio è R , allora dal teorema del viriale (equilibrio fra energia potenziale ed energia cinetica $GM^2/R \sim Mv^2$) l'energia cinetica del sistema è $\sim M^2/R$. Il tempo scala caratteristico affinché la massa si muova da un lato all'altro del sistema è:

$$T \sim \frac{R}{\text{velocità media}} \sim \frac{R}{(M/R)^{1/2}} G^{-1/2} = \left(\frac{R^3}{M}\right)^{1/2} G^{-1/2}$$

Di conseguenza il flusso di potenza interna è:

$$L_{\text{interna}} \sim \frac{\text{energia cinetica}}{T} \sim \left(G \frac{M^2}{R}\right) \left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} G^{1/2} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^{5/2} G^{3/2}$$

La luminosità in onde gravitazionali è il quadrato di questa quantità:

$$L_{\text{GW}} \sim (M/R)^5 G^3 \tag{3.39}$$

infatti dalla definizione (3.35) del secondo momento di massa, la sua derivata temporale terza che compare in (3.37) sarà:

$$\ddot{\ddot{I}}_{ij} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{M(R/T)^2}{T} \sim \frac{\text{energia cinetica}}{T} \tag{3.40}$$

quindi:

$$\ddot{I}_{ij} \sim L_{interna} = (\text{potenza che fluisce da un lato all'altro del sistema})$$

Di conseguenza l'equazione (3.37) indica che la potenza irradiata in onde gravitazionali è proporzionale al quadrato del flusso interno di potenza:

$$L_{GW} \sim \frac{(L_{interna})^2}{L_0} \quad (3.41)$$

con $L_0 = \frac{c^5}{G}$.

Da (3.39) vediamo che la potenza in onde gravitazionali irradiata cresce molto al diminuire del raggio del sistema; tuttavia questa dimensione non può decrescere arbitrariamente, in quanto esiste un raggio limite, dipendente dalla massa del corpo, che contrassegna l'ultima orbita stabile ossia la distanza critica dal centro della distribuzione di massa al di sotto della quale il corpo collaserebbe su se stesso diventando un buco nero, in quanto la velocità di fuga supererebbe quella della luce. La formula classica per questo raggio, detto *raggio di Schwarzschild* o *raggio gravitazionale*, è:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.42)$$

Combinando le relazioni (3.40), (3.41) e (3.42), il massimo della potenza emessa si ha quando il sistema si trova vicino al suo raggio gravitazionale; e siccome nulla, neppure le onde gravitazionali, può scappare dall'interno del raggio gravitazionale, questo massimo risulta:

$$L_{GW,max} \sim L_0 = 3.63 * 10^{59} \frac{erg}{s}$$

indipendentemente dalla natura del sistema. Si tratta di un valore estremamente elevato se teniamo conto che, per esempio, la luminosità irradiata da GW150914, il primo evento di onde gravitazionali rilevato direttamente, è dell'ordine di $\sim 10^{56} \frac{erg}{s}$; per un ulteriore confronto, l'energia che emette una supernova è solitamente $\sim 10^{51} \frac{erg}{s}$, col massimo che può raggiungere 10^{53} .

Un altro evento super energetico, un lampo gamma lungo, emette al picco $\sim 10^{50} - 10^{52} \frac{erg}{s}$.

4. Sorgenti di onde gravitazionali

4.1 Classificazione delle sorgenti

Abbiamo visto che le onde gravitazionali sono prodotte dal moto a simmetria non sferica dei corpi che genera un momento di quadrupolo variabile nel tempo.

I processi dinamici coinvolti avvengono tipicamente su un tempo scala caratteristico, che stabilisce la banda di frequenza per l'emissione delle onde gravitazionali. Per esempio in un sistema binario è la frequenza orbitale a determinare la frequenza dell'emissione gravitazionale. Altri tempi scala determinano la durata del segnale. Per il sistema binario, il tempo scala secolare è determinato dal tasso di perdita di energia del moto orbitale, che causa in ultima istanza la coalescenza del sistema. Una classificazione delle sorgenti di onde gravitazionali si basa sulla banda di frequenze in cui vengono prodotte le onde (Tabella 4.1). Sistemi che producono onde gravitazionali con frequenze tra 1 Hz e 10 kHz sono detti sistemi irradianti nella *banda ad alte frequenze*, che è la banda a cui sono sensibili i rivelatori su base terrestre; gli interferometri laser nello spazio operano nella *banda a basse frequenze* tra 1 mHz e 1 Hz, mentre il metodo di pulsar timing in quella a *frequenze molto basse* (1 nHz – 1 mHz).

Un altro modo per classificare le sorgenti di onde gravitazionali si basa sul carattere dei processi dinamici che avvengono, i quali lasciano un segno sulla morfologia del segnale. Anche qui le categorie sono molteplici. Segnali generati da sorgenti che coinvolgono moti periodici con una frequenza stabile su lunghi tempi scala (tempi che sono significativamente più lunghi del tempo di osservazione) sono chiamati *segnali di onde continui*. Siccome la loro frequenza è relativamente stabile, per questi segnali si riesce a trovare un'adeguata modellizzazione. Un'altra classe di segnali continui comprende quelli che sono prodotti da casuali ma ininterrotti processi nell'universo, che formano un fondo di onde gravitazionali simile al fondo radiativo cosmico nelle microonde. Spesso tali segnali sono generati dalla sovrapposizione incoerente delle onde gravitazionali prodotte da innumerevoli sorgenti discrete, e sono classificati come *fondo stocastico* di onde gravitazionali. Invece segnali brevi, la cui durata è inferiore al tempo di osservazione, sono detti *segnali lampo* (burst signals).

Banda	Sorgenti tipiche	Rivelatori
Frequenze estremamente basse $\sim 10^{-18}$ Hz – 10^{-15} Hz	Fondo primordiale stocastico	Tracce di onde gravitazionali nel Fondo Cosmico delle Microonde
Frequenze molto basse 1 nHz – 1 mHz	Buchi neri binari supermassicci ($M \sim 10^3 M_\odot$); stringhe cosmiche	Pulsar timing array
Basse frequenze 1 mHz – 1 Hz	Buchi neri binari supermassicci ($M \sim 10^3 - 10^6 M_\odot$); binarie di nane bianche; extreme mass ratio inspirals	Interferometri spaziali (LISA, DECIGO)
Alte frequenze 1 Hz – 10 kHz	Stelle di neutroni binarie, buchi neri binari ($M \sim 1 - 10^3 M_\odot$); supernovae; binarie di pulsar a raggi X	Interferometri terrestri (GEO, LIGO, Virgo); rivelatori a risonanza di massa

Tabella 4.1. Sorgenti attese di onde gravitazionali divise per frequenza di banda e rivelatori che operano a tali frequenze.

Sorgenti di onde gravitazionali continue

Tali sorgenti sono sistemi rotanti in cui il moto rotazionale presenta una particolare frequenza stabile la quale determina la frequenza delle onde gravitazionali emesse. Tipicamente il segnale gravitazionale di una sorgente continua può essere modellizzato accuratamente come una sinusoide di frequenza fissa; tuttavia, nel corso di una lunga osservazione, ci saranno generalmente delle deviazioni nella frequenza (dovute alla perdita di energia e momento angolare con l'emissione gravitazionale) quindi è necessario modellizzare anche questo rallentamento.

Sistemi binari costituiti da oggetti compatti come nane bianche o buchi neri producono radiazione gravitazionale continua nella banda a basse e molto basse frequenze se il loro tempo scala di decadimento dell'orbita è più lungo del tempo di osservazione.

Nella banda ad alte frequenze, invece, non ci si aspetta che le binarie producano segnali continui, ma saranno sorgenti lampo. Qui le sorgenti principali di onde continue sono stelle di neutroni non simmetriche e rapidamente rotanti. La radiazione gravitazionale proveniente da una di queste pulsar avrà una frequenza proporzionale alla frequenza di rotazione.

Sorgenti lampo

Radiazione lampo viene prodotta in eventi violenti come coalescenza di sistemi binari (a seguito di decadimento orbitale e collisione di oggetti compatti come nane bianche, stelle di neutroni, buchi neri), esplosioni di supernovae, o durante altri tipi di eventi brevi altamente energetici.

4.2 Sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali

Nel paragrafo 3.8 abbiamo calcolato alcune stime riguardanti il flusso di potenza interna e la luminosità in onde gravitazionali. La conclusione di questi conti è che le onde gravitazionali più intense che possono raggiungere la Terra devono provenire da sistemi dinamici e deformati vicino al loro raggio gravitazionale, e questo tipo di sorgenti possono essere: collasso stellare, materia che cade all'interno di un buco nero, collisione fra buchi neri, esplosioni di supernova, pulsar giovani.

Collasso stellare

Secondo la teoria, quando una stella più massiva del limite di massa di Chandrasekhar, attorno a $1.44 M_{\odot}$ ma leggermente variabile a seconda della composizione chimica, ha esaurito il combustibile e ha compresso il suo nucleo fino alla densità di una nana bianca (almeno un milione di volte più alta di quella all'interno del Sole), l'instabilità porta la stella ad un catastrofico collasso. Il nucleo implode su se stesso fino a che la repulsione fra nucleoni ferma l'implosione. Il risultato è una stella di neutroni, a meno che la massa iniziale del nucleo non sia talmente grande che la gravità supera la repulsione tra nucleoni e porta la stella a formare un buco nero.

Una stella che collassa al di sotto del suo raggio gravitazionale termina la sua vita con un ultimo lampo di onde gravitazionali, che ne porta via una frazione significativa della massa. Una stima dell'ordine di grandezza fornisce:

$$\begin{aligned} & \text{(energia irradiata)} \\ & = \int L_{GW} dt \sim L_0 * (\text{tempo di durata della luminsità al picco}) \sim L_0 M \frac{G}{c^3} \end{aligned}$$

Materia che cade all'interno di un buco nero

La materia che sta cadendo irraderà solo debolmente quando è lontana dal raggio gravitazionale, ma quando si avvicina ad esso (fra $r \sim 4M$ e $r \sim 2M$), essa emette un forte lampo. Se m è la massa coinvolta nella caduta e M è la massa del buco nero, allora l'energia totale del lampo finale è:

$$E_{irradiata} \sim c \frac{m^2}{M}$$

e si spegne in un tempo $\sim M$ con una fuoriuscita di potenza di:

$$L_{GW} \sim \left(\frac{m}{M}\right)^2 L_0$$

Nel limite in cui la massa e le dimensioni dei detriti sono molto più piccole della massa e delle dimensioni del buco nero, $m \ll M$ ("blocco di materia a funzione di delta"), si può effettuare un calcolo esatto dello spettro in energia irradiata, considerando i detriti e le onde come piccole perturbazioni sulla geometria del buco nero. Si ottiene lo spettro in Figura 4.1, con un totale per l'energia irradiata:

$$E_{irradiata} = 0.0104c \frac{m^2}{M}$$

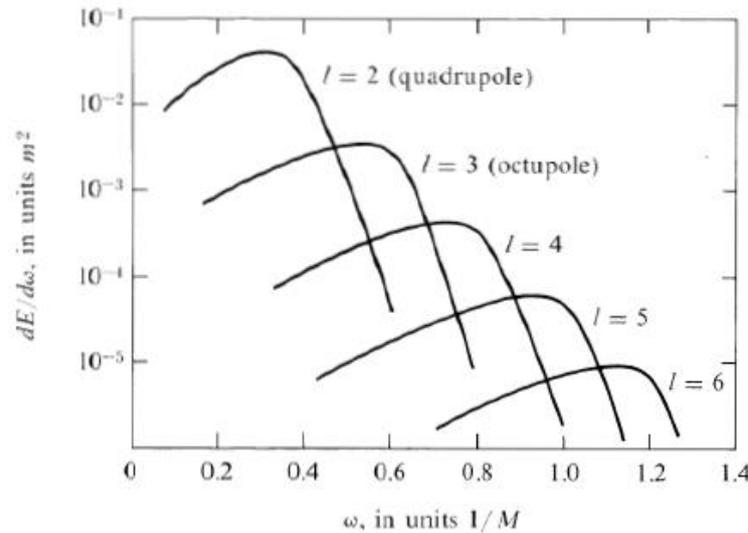


Figura 4.1. Spettro delle onde gravitazionali emesse da un blocco di materia “a funzione di delta” di massa m che cade in un buco nero non rotante di massa $M \gg m$. L’energia totale irradiata è distribuita su multipoli in accordo alla legge empirica:

$$(\text{energia delle onde nel polo } l) \approx \left(0.44c \frac{m^2}{M}\right) * e^{-2l}$$

$$\text{e lo spettro ha il picco alla frequenza angolare } \omega_{max} = \frac{0.32 c^3}{M G}.$$

Collisione fra buchi neri

Questo fenomeno produce una forte emissione di onde gravitazionali; stime dimensionali basate sulla formula del quadrupolo possono fornire un’idea della luminosità che può essere prodotta. Tutte le scale in questo problema sono determinate dal valore della massa dei buchi neri che collidono. Se ε è un fattore di efficienza dipendente dalla geometria di questo sistema (dell’ordine di 10^{-2} o 10^{-3}), avremo:

$$L_{GW} \sim \varepsilon \frac{c^5}{G} \sim \varepsilon * 10^{59} \frac{erg}{s}$$

Ad esempio la fusione fra due buchi neri di $10^9 M_{\odot}$ al centro di due galassie in collisione può produrre questo picco di luminosità su tempi scala di qualche giorno.

Esplosioni di supernova

Meno rare sono invece le esplosioni di supernova (all’incirca una ogni 100 anni per galassia). Una supernova è causata dal collasso del nucleo di una stella nel suo stadio evolutivo finale, fatto che insieme alla veloce rotazione del nucleo collassato (stella di neutroni), produce una rapida ma intensa scarica di onde gravitazionali. Le caratteristiche di questo lampo sono:

$$(\text{energia irradiata}) \sim \frac{M^2}{R} \sim 0.1 M \sim 10^{53} \text{ erg}$$

$$(\text{frequenza media}) \sim \frac{1}{T} \sim \left(\frac{M}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 0.03 M^{-1} \sim 3000 \text{ Hz}$$

$$(\text{potenza emessa}) \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5 L_0 \sim 10^{-5} L_0 \sim 3 * 10^{54} \frac{\text{erg}}{\text{s}}$$

$$(\text{tempo in cui la radiazione gravitazionale smorza il moto}) \sim M \left(\frac{M}{R}\right)^{-4} \sim 0.1 \text{ s} \sim 300 \text{ periodi}$$

Pulsar giovani

Dopo che le pulsazioni di una stella di neutroni sono state smorzate dalla radiazione gravitazionale, la stella continuerà a ruotare, irradiando contemporaneamente onde radio, luce e raggi X. In questa fase la radiazione gravitazionale è significativa solamente se la stella presenta una qualche deformazione dalla simmetria assiale, infatti la simmetria assiale implica un momento di quadrupolo costante, quindi, per la (3.37), un'emissione in onde gravitazionali nulla. Si può verificare che una deformazione contenente appena lo 0.1% della massa stellare può irradiare 10^{38} erg/s nel caso della pulsar più giovane conosciuta (Crab nebula).

4.3 Radiazione gravitazionale prodotta da sistemi binari

Un sistema binario di oggetti compatti è formato da due oggetti cosmici compatti che orbitano attorno al loro comune centro di massa sotto la reciproca attrazione gravitazionale.

Il processo che segue un qualunque sistema binario di questo tipo è quello della coalescenza, su tempi più o meno lunghi a seconda delle masse dei corpi in gioco, durante la quale si distinguono due principali fasi, quella dello spiraleggiamento e la collisione.

La radiazione gravitazionale emessa da questi sistemi binari risulta sia dal processo secolare di spiraleggiamento dei due corpi orbitanti, i quali si avvicinano lentamente l'uno verso l'altro per graduale perdita di energia e momento angolare, sia dal processo di collisione e conseguente fusione.

Nel primo caso la radiazione gravitazionale emessa è continua ma debole e può essere rilevata principalmente in modo indiretto dalla variazione dei parametri orbitali del sistema (riduzione del semiasse maggiore, dell'eccentricità e del periodo orbitale). Nel secondo caso il fenomeno è "impulsivo" e molto più energetico, quindi la radiazione gravitazionale è più copiosa ed è possibile rilevarla direttamente, attraverso gli interferometri terrestri e spaziali.

Infine l'oggetto risultante dalla fusione, nell'assestamento in uno stato stazionario, dissiperà ogni distorsione nella sua forma sottoforma di radiazione gravitazionale, e questa viene detta *radiazione di ringdown* (ringdown radiation).

Nella banda a basse frequenze prevalgono i segnali provenienti dalle binarie di nane bianche; nella banda ad alte frequenze, sondata dai rilevatori terrestri, risaltano le binarie di stelle di neutroni. Dalla banda a frequenze molto basse fino a quella ad alte frequenze, buchi neri binari in un ampio intervallo di masse sono anch'essi dei buoni candidati: generalmente le galassie presentano nel loro centro buchi neri supermassicci ($M \geq 10^6 M_\odot$) e ci si aspetta che quando le galassie collidono, la conseguente coalescenza fra questi buchi neri diventi un'importante fonte di studio per l'emissione

gravitazionale attraverso pulsar timing arrays e rilevatori su base terrestre.

I buchi neri originano anche dalle stelle massive (oltre le $\sim 20 M_{\odot}$), quindi è possibile (ed è già stato rilevato) che un sistema binario di tali stelle possa produrre un buco nero binario, portando alla fusione delle due componenti e diventando quindi anch'esso sorgente di onde gravitazionali.

Alcuni sistemi binari, come quelli di nane bianche, evolvono così lentamente da essere sorgenti continue di onde gravitazionali. Tuttavia se le due stelle sono sufficientemente vicine, il decadimento dell'orbita avviene in un tempo più breve del tempo di osservazione, diventando così una sorgente lampo.

Tipo di sistema	Nome	Periodo	m_1/M_{\odot}	m_2/M_{\odot}	Distanza dalla Terra [pc]	Tempo di spiraleggiamento ^(*)	L_{GW} [erg/s]
Sistema Solare (Sole + Giove)	Sistema Solare	11.86 yr	1.0	$9.56 \cdot 10^{-4}$	-	$2.5 \cdot 10^{23}$ yr	$5.2 \cdot 10^{10}$
Binarie risolte	η Cas	480 yr	0.94	0.58	5.9	$9.5 \cdot 10^{24}$ yr	$5.6 \cdot 10^{10}$
	ξ Boo	150 yr	0.96	0.67	6.7	$3.8 \cdot 10^{23}$ yr	$3.6 \cdot 10^{12}$
	Sirio	50 yr	2.28	0.98	2.6	$7.2 \cdot 10^{21}$ yr	$1.1 \cdot 10^{15}$
Binarie a eclisse	β Lyrae	13 d	19.48	9.74	330	$7.0 \cdot 10^{11}$ yr	$0.06 \cdot 10^{30}$
	β Persei	2.87 d	4.70	0.94	30	$3.2 \cdot 10^{11}$ yr	$0.01 \cdot 10^{30}$
	W Ursae Maj	0.33 d	0.76	0.57	110	$6.2 \cdot 10^9$ yr	$0.47 \cdot 10^{30}$
Binarie ipotetiche (stelle a neutroni o buchi neri)		12.2 s	1.0	1.0	1000	3.2 yr	$3.25 \cdot 10^{41}$
		0.39 s	1.0	1.0	1000	2.8 hr	$3.25 \cdot 10^{46}$
		12.2 ms	1.0	1.0	1000	1.0 s	$3.25 \cdot 10^{51}$
		0.39 ms	1.0	1.0	1000	0.1 ms	$3.25 \cdot 10^{56}$

(*) Il tempo di spiraleggiamento è quello impiegato dai due corpi a spiraleggiare l'uno verso l'altro se non intervengono forze non-gravitazionali

Tabella 4.2. Stime di radiazione gravitazionale prodotta da diversi sistemi binari ⁽¹⁾.

Operativamente, definendo la massa ridotta $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ e la massa totale $M = m_1 + m_2$, da un calcolo esatto basato sulla (3.37), la formula che esprime la potenza irradiata in onde gravitazionali, risulta che per un sistema binario con semiasse maggiore a ed eccentricità e , la potenza emessa mediata su un periodo orbitale è:

$$L_{GW} = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^3}{c^5 a^5} f(e) \quad (4.1)$$

dove:

$$f(e) = \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) (1 - e^2)^{-7/2}$$

è una funzione di correzione adimensionale che tiene conto dell'ellitticità dell'orbita.

(1) C. W. Misner – “Gravitation” (1973) – Box 36.3: Gravitational radiation from several binary star systems (based on tables by Braginsky (1965) and by Ruffini and Wheeler (1971)).

Man mano che il sistema perde energia per radiazione gravitazionale, le stelle spiraleggiano l'una verso l'altra, con l'energia cinetica del moto che decresce come:

$$\frac{dE}{dt} = -L_{GW}$$

Conseguentemente i parametri orbitali evolvono nel tempo, come vedremo nel capitolo seguente.

La maggior parte delle stelle conosciute si trova in sistemi binari o multipli, e questi sistemi sono le sorgenti più numerose di onde gravitazionali deboli.

L'osservazione del decadimento dell'orbita di un sistema binario di stelle dovuto all'emissione gravitazionale è stato il primo rilevamento degli effetti della radiazione gravitazionale, infatti l'emissione di onde gravitazionali riduce l'energia e il momento angolare del sistema orbitante e ne modifica il periodo orbitale.

Significativa in questo senso è la pulsar PSR B1913+16. L'interesse di questo sistema sta non solo nel fatto che si tratta del primo sistema binario di pulsar scoperto (da J. Taylor e R. Hulse nel 1974), ma soprattutto nel fatto che misure estremamente precise delle masse di queste due stelle e dei loro elementi orbitali hanno fornito una delle più forti prove della Relatività Generale.

Infatti è stata osservata una diminuzione del periodo orbitale, che implica che il sistema si sta contraendo, e questo è proprio dovuto alla perdita di energia causata dall'emissione di onde gravitazionali, con un tasso esattamente in accordo con le previsioni della Relatività Generale (Figura 4.2).

Alcuni dei parametri orbitali di PSR B1913+16 sono:

Massa della pulsar	$m_1 = 1.441 M_\odot$
Massa della compagna	$m_2 = 1.387 M_\odot$
Periodo orbitale	$P = 7.75 h$
Tasso di decrescita del periodo orbitale	$\dot{P} = -76 \frac{\mu s}{yr} = -2.405 * 10^{-12}$
Eccentricità orbitale	$e = 0.617$

Sotto emissione di radiazione gravitazionale, la Relatività Generale predice un decadimento dell'orbita:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{192\pi}{5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{c^3 P} \right)^{\frac{5}{3}} f(e) \quad (4.2)$$

Dati i valori delle masse delle stelle m_1 e m_2 , del periodo orbitale P e dell'eccentricità e , la predizione teorica per il decadimento orbitale è $\dot{P} = -2.405 * 10^{-12}$, in ottimo accordo con il tasso osservato (entro 0.3%), e a cui corrisponde un decremento del semiasse maggiore di 3.5 metri per anno.

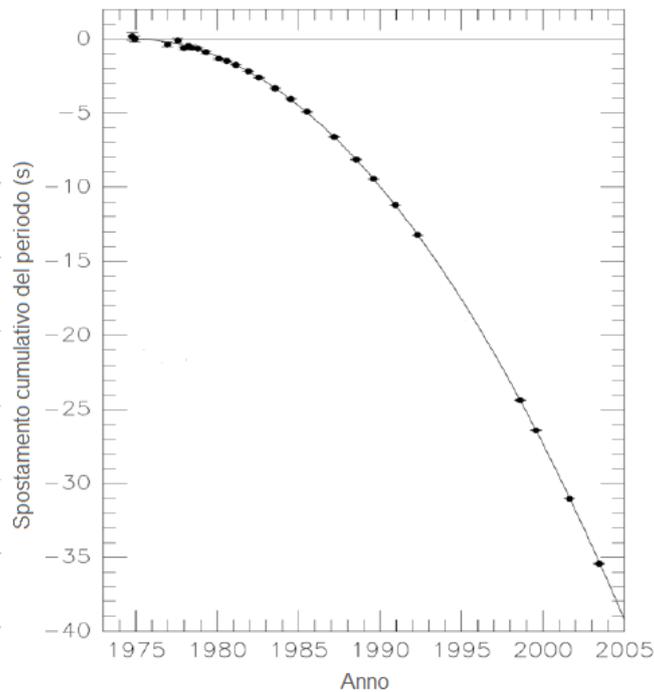


Figura 4.2. Grafico in cui i punti sono i dati raccolti col radio telescopio Arecibo nel corso di diversi decenni sullo spostamento cumulativo del periodo orbitale del sistema PSR B1913+16, e la curva continua rappresenta la predizione della teoria della Relatività Generale. Si nota come il periodo di rotazione della binaria si stia accorciando, fenomeno dovuto alla diminuzione della separazione tra le due stelle in conseguenza della perdita di energia tramite emissione di onde gravitazionali.

4.4 Episodi di rilevamento di onde gravitazionali

Gli episodi di rilevamento diretto di onde gravitazionali finora conosciuti provengono dalla fusione di due buchi neri (BH), due stelle di neutroni (NS) o un buco nero e una stella di neutroni.

Le osservazioni sono eseguite in “runs”, divise da periodi di mantenimento e aggiornamento dei rilevatori. I tre observing runs eseguiti finora sono:

- O1: dal 12 settembre 2015 al 19 gennaio 2016
- O2: dal 30 novembre 2016 al 25 agosto 2017
- O3: dal 1 aprile 2019 al 27 marzo 2020

Con l’ultimo annuncio risalente al 2 settembre 2020 del rilevamento di GW190521, gli eventi confermati sono ad oggi 15 (Tabella 4.3). Ci sono inoltre circa 50 eventi candidati in O3 che aspettano conferma tramite un’analisi più accurata.

Nome dell'evento	Tipo di binaria	$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	Massa finale [M_\odot]	Distanza [Mpc]
GW150914	BH – BH	$35.6^{+4.7}_{-3.1}$	$30.6^{+3.0}_{-4.4}$	$63.1^{+3.4}_{-3.0}$	440^{+150}_{-170}
GW151012	BH – BH	$23.2^{+14.9}_{-5.5}$	$13.6^{+4.1}_{-4.8}$	$35.6^{+10.8}_{-3.8}$	1080^{+550}_{-490}
GW151226	BH – BH	$13.7^{+8.8}_{-3.2}$	$7.7^{+2.2}_{-2.5}$	$20.5^{+6.4}_{-1.5}$	450^{+180}_{-190}
GW170104	BH – BH	$30.8^{+7.3}_{-5.6}$	$20.0^{+4.9}_{-4.6}$	$48.9^{+5.1}_{-4.0}$	990^{+440}_{-430}
GW170608	BH – BH	$11.0^{+5.5}_{-1.7}$	$7.6^{+1.4}_{-2.2}$	$17.8^{+3.4}_{-0.7}$	320^{+120}_{-110}
GW170729	BH – BH	$50.2^{+16.2}_{-10.2}$	$34.0^{+9.1}_{-10.1}$	$79.5^{+14.7}_{-10.2}$	2840^{+1400}_{-1360}
GW170809	BH – BH	$35.0^{+8.3}_{-5.9}$	$23.8^{+5.1}_{-5.2}$	$56.3^{+5.2}_{-3.8}$	1030^{+320}_{-390}
GW170814	BH – BH	$30.6^{+5.6}_{-3.0}$	$25.2^{+2.8}_{-4.0}$	$53.2^{+3.2}_{-2.4}$	600^{+150}_{-220}
GW170817	NS – NS	$1.46^{+0.12}_{-0.10}$	$1.27^{+0.09}_{-0.09}$	≤ 2.8	40^{+7}_{-15}
GW170818	BH – BH	$35.4^{+7.5}_{-4.7}$	$26.7^{+4.3}_{-5.2}$	$59.4^{+4.9}_{-3.8}$	1060^{+420}_{-380}
GW170823	BH – BH	$39.5^{+11.2}_{-6.7}$	$29.0^{+6.7}_{-7.8}$	$65.4^{+10.1}_{-7.4}$	1940^{+970}_{-900}
GW190412	BH – BH	$30.1^{+4.6}_{-5.3}$	$8.3^{+1.6}_{-0.9}$	$37.3^{+3.8}_{-4.0}$	740^{+130}_{-160}
GW190425	NS – NS	$1.60 - 1.87$	$1.46 - 1.69$		159^{+69}_{-71}
GW190521	BH – BH	85^{+21}_{-14}	66^{+17}_{-18}	142^{+28}_{-16}	5300^{+2400}_{-2600}
GW190814	BH – ? (*)	$23.2^{+1.1}_{-1.0}$	$2.59^{+0.08}_{-0.09}$	$25.6^{+1.1}_{-0.9}$	241^{+41}_{-45}

(*) La seconda componente di questo evento potrebbe essere o la NS più pesante oppure il BH più leggero mai osservati

Tabella 4.3. Lista delle osservazioni confermate di onde gravitazionali ⁽²⁾.

(2) I dati sono riportati dagli articoli scientifici:

- B. P. Abbott et al. – “*GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs*” (2019) – Physical Review X 9, 031040 – Tabella I.
- B. P. Abbott et al. – “*GW190425: Observation of a Compact Binary Coalescence with Total Mass $\sim 3.4 M_\odot$* ” (2020) – The Astrophysical Journal Letters, vol. 892, n. 1 – Tabella I.
- R. Abbott et al. – “*GW190412: Observation of a binary-black-hole coalescence with asymmetric masses*” (2020) – Physical Review D 102, 043015 – Tabella II.
- R. Abbott et al. – “*GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object*” (2020) – The Astrophysical Journal Letters, vol. 896 – Tabella I.
- R. Abbott et al. – “*GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of 150 M_\odot* ” (2020) – Physical Review Letters 125, 101102 – Tabella I.

5. Script per l'evoluzione di un sistema binario

Dedichiamo questo capitolo della tesi alla derivazione dell'evoluzione del semiasse maggiore a e dell'eccentricità e in un sistema binario che perde energia e momento angolare per emissione di onde gravitazionali. A questo scopo utilizzerò le equazioni ricavate da P. C. Peters ⁽¹⁾, due equazioni differenziali ordinarie di primo grado che esprimono le derivate del semiasse maggiore e dell'eccentricità rispetto al tempo.

Per la parte originale di questa tesi è stato sviluppato uno script in Python che integra le suddette equazioni, ed è stato utilizzato per descrivere l'evoluzione futura delle stelle di neutroni doppie osservate nella nostra galassia e per ricavare i loro tempi di coalescenza.

5.1 Schema di Eulero per la risoluzione di e. d. o.

Per risolvere le due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine utilizziamo l'approssimazione di Eulero.

Data l'equazione differenziale della forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{5.1}$$

per integrarla sviluppiamo la funzione $x(t)$ con un'espansione di Taylor nel parametro h :

$$x(t + h) = x(t) + \frac{dx}{dt}h + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}h^2 + \dots \tag{5.2}$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$x(t + h) = x(t) + hf(x, t) + \mathcal{O}(h^2) \tag{5.3}$$

(1) P. C. Peters – “Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses” (1964) – Physical Review, vol. 136, n. 4b – Equazioni (5.6), (5.7).

e trascurando i termini di ordine maggiore al primo:

$$x(t+h) = x(t) + hf(x, t) \quad (5.4)$$

Questa equazione ci dice che se conosciamo il valore di x a un tempo t allora possiamo stimare il valore di x al tempo $t+h$, e quindi ottenere l'integrazione dalla sommatoria di tutti gli $x(t+h)$ nell'intervallo di interesse. Quest'approssimazione è buona se h è sufficientemente piccolo rispetto a t .

Operativamente, per descrivere l'evoluzione di x in un intervallo di tempo fra $t = a$ e $t = b$, con $b - a \gg h$, bisogna ripetere l'equazione (5.4) per $N = (b - a)/h$ volte.

Lo schema di Eulero è un metodo di risoluzione al primo ordine in quanto l'espansione di Taylor viene arrestata ai termini in h trascurando i termini di ordine uguale o superiore al secondo, perciò gli errori scalano come h^2 .

5.2 Tasso di variazione di semiasse maggiore ed eccentricità

L'espansione delle equazioni di campo della Relatività Generale nelle potenze della costante di accoppiamento gravitazionale conduce alle leggi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare. Da queste si può ricavare la perdita di energia e momento angolare di un sistema dovuta all'emissione di onde gravitazionali.

Nel limite non relativistico la radiazione e la distribuzione angolare dell'energia e del momento angolare sono espresse nei termini delle derivate temporali del tensore di quadrupolo I^{ij} . Questi risultati possono essere applicati ad un sistema legato di due punti massivi che si muovono in orbite ellittiche, ottenendo che il decadimento secolare del semiasse maggiore e dell'eccentricità può essere espresso come funzione del tempo, e può essere successivamente integrato per specificare il decadimento a causa dell'emissione di radiazione gravitazionale del sistema in funzione delle condizioni iniziali.

Partiamo dall'equazione del moto orbitale relativo:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} \quad (5.5)$$

dove r è la separazione tra le due stelle, a è il semiasse maggiore, e l'eccentricità e ψ la coordinata angolare nel piano dell'orbita. Se il piano del moto e la posizione dell'orbita nel piano sono specificate allora sono due i parametri necessari a descrivere l'orbita: il semiasse maggiore a e l'eccentricità e . Nella teoria Newtoniana queste due quantità sono costanti del moto, invece in Relatività Generale sono funzioni del tempo. Questi parametri sono legati all'energia totale E ed al momento angolare L dalle equazioni:

$$a = -\frac{Gm_1m_2}{2E} \quad (5.6)$$

$$L^2 = Gm_1^2m_2^2 \frac{a(1-e^2)}{m_1+m_2} \quad (5.7)$$

Da ciò si può dimostrare che le variazioni temporali del semiasse maggiore e dell'eccentricità sono date dalle seguenti equazioni:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^3 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) \quad (5.8)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} e \frac{G^3 \mu M^2}{c^5 a^4 (1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right) \quad (5.9)$$

5.3 Algoritmo per il tempo di coalescenza

Lo script che ho elaborato in linguaggio di programmazione Python fornisce il tempo di coalescenza di un sistema binario di oggetti compatti che perde energia emettendo onde gravitazionali, ricavato utilizzando le due equazioni differenziali (5.8) e (5.9) risolte con integrazione numerica. I dati di input sono:

- semiasse maggiore iniziale
- eccentricità iniziale
- masse delle due componenti orbitanti

L'integrazione delle due equazioni viene eseguita col metodo di Eulero descritto nel paragrafo 5.1, partendo dall'istante iniziale $t = 0$. Il passo temporale h viene impostato inizialmente come una piccola frazione (per esempio lo 0.01) del "tempo scala semplificato per emissione di onde gravitazionali", definito:

$$t_{GW} = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a^4 (1-e^2)^{7/2}}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \quad (5.10)$$

All'interno di un ciclo `while` con la condizione che a rimanga maggiore del raggio di Schwarzschild del sistema, $R_S = \frac{2Gm_1m_2}{(m_1+m_2)c^2}$, a partire dai dati iniziali di semiasse maggiore $a(0)$ ed eccentricità $e(0)$ vengono calcolati ad ogni iterazione i valori $a(t+h)$ ed $e(t+h)$:

$$a(t+h) = a(t) + h \frac{da}{dt} \quad (5.11)$$

$$e(t+h) = e(t) + h \frac{de}{dt} \quad (5.12)$$

i quali sono salvati in due distinti arrays; anche il trascorrere del tempo, $t + h$, viene salvato in un terzo array.

Il timestep h viene reso adattivo per tenere conto del fatto che esso risulta un tempo lungo quando a è poco variabile nel tempo (quasi costante, cioè il caso in cui i due corpi sono ancora sufficientemente distanti), e risulta invece corto quando a è velocemente variabile nel tempo (i corpi sono molto vicini). Per quantificare le espressioni “lungo”, “corto”, “velocemente” o “poco variabile nel tempo”, è necessario imporre un parametro di tolleranza, ossia la percentuale tollerata per la variazione relativa del semiasse maggiore $\frac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}$.

Imponiamo quindi che se la variazione relativa di a è al di sotto di questa tolleranza, allora l'algoritmo può procedere col calcolo delle (5.11) e (5.12) usando il passo temporale così com'è. Se invece la variazione relativa di a supera il limite posto dalla tolleranza, è necessario ridurre il passo temporale, ad esempio dividendolo per un fattore 50. A questo punto si ricalcola $a(t + h)$ col nuovo valore di h , salvandolo nella lista.

L'output fornisce il tempo di coalescenza del sistema in Myr e come ultima operazione il programma esegue un grafico di a in funzione di t e uno di e in funzione di t .

Lo script è riportato per intero in appendice.

5.4 Risultati

Ho applicato il mio script alle proprietà orbitali di alcune stelle doppie di neutroni osservate nella nostra galassia di cui si conoscono le masse, il periodo attuale e l'eccentricità orbitale (Tabella 5.1). In questo modo ho descritto l'evoluzione della loro separazione orbitale ed eccentricità nel futuro, fino al momento in cui arrivano a coalescenza per emissione di onde gravitazionali, calcolando il tempo necessario perché ogni binaria raggiunga la coalescenza. I tempi calcolati con i miei script sono consistenti con quelli già calcolati in letteratura (Tauris et al. ⁽²⁾).

I grafici sotto mostrano le evoluzioni compute per ogni sistema considerato.

(2) T. M. Tauris et al. – “*Formation of Double Neutron Star Systems*” (2017) – The Astrophysical Journal, vol. 846, n. 170 – Tabella 2.

Sistema binario	$M_1 [M_\odot]$	$M_2 [M_\odot]$	P_{orb} [giorni]	e	τ_{GW} [Myr]	$\tau_{\text{GW, Tauris}}$ [Myr]	Differenza % (*)
PSR B1913+16	1.440	1.389	0.323	0.617	369	301	18 %
PSR J0737-3039	1.338	1.249	0.102	0.088	92	86	6 %
PSR J0453+1559	1.559	1.174	4.072	0.113	∞	∞	
PSR J1756-2251	1.341	1.230	0.320	0.181	1803	1660	8%
PSR J1906+0746	1.322	1.291	0.166	0.085	331	309	6 %
PSR B2127+11C	1.358	1.354	0.335	0.681	275	217	21 %
BBH test 1	35	30	1.433	0.5	197		
BBH test 2	85	66	0.940	0.5	16		

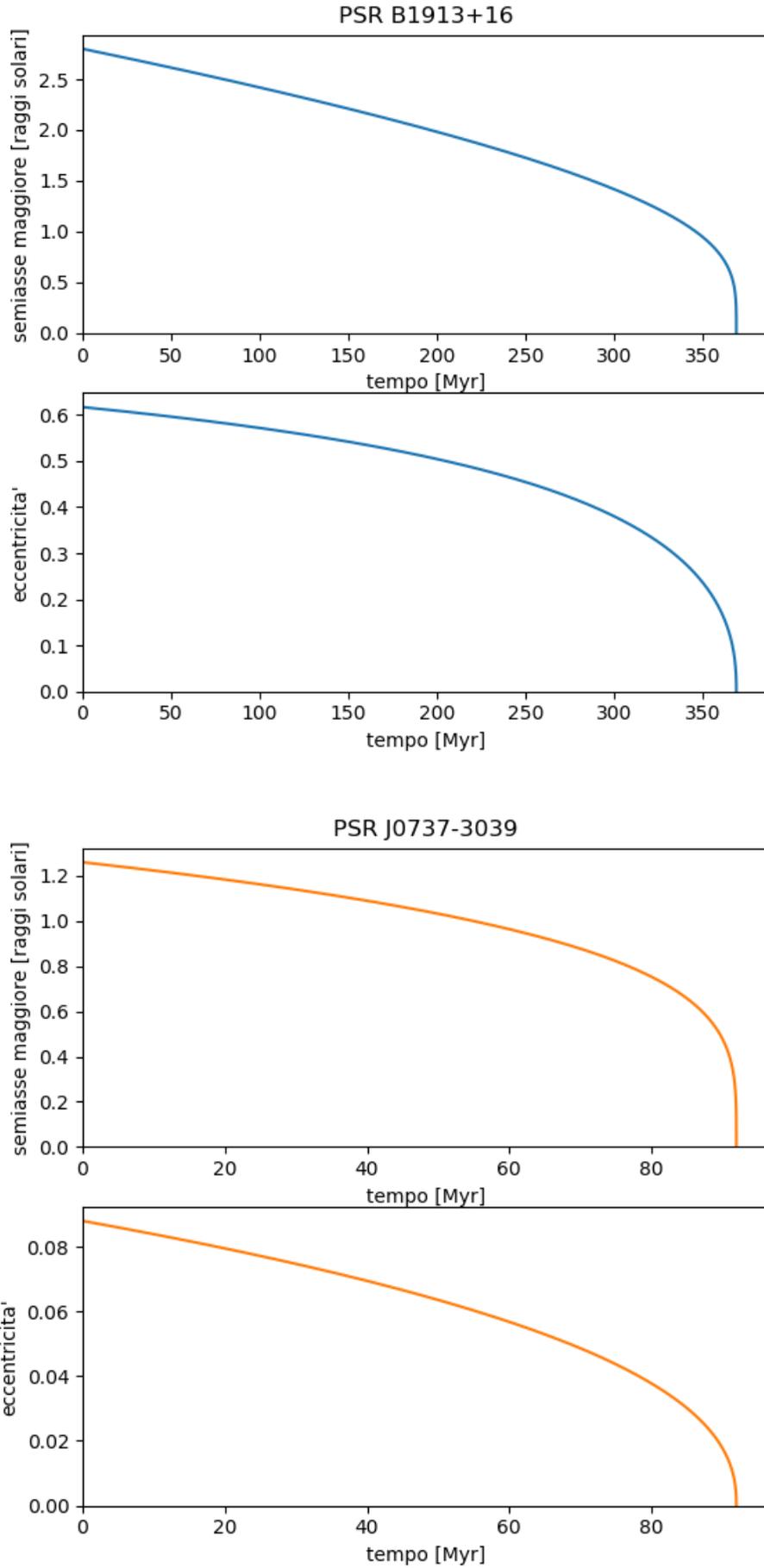
Tabella 5.1. Per ogni sistema binario con pulsar sono riportate le masse delle due componenti, il periodo orbitale, l'eccentricità dell'orbita, il tempo di coalescenza calcolato con il mio script e il tempo di coalescenza secondo

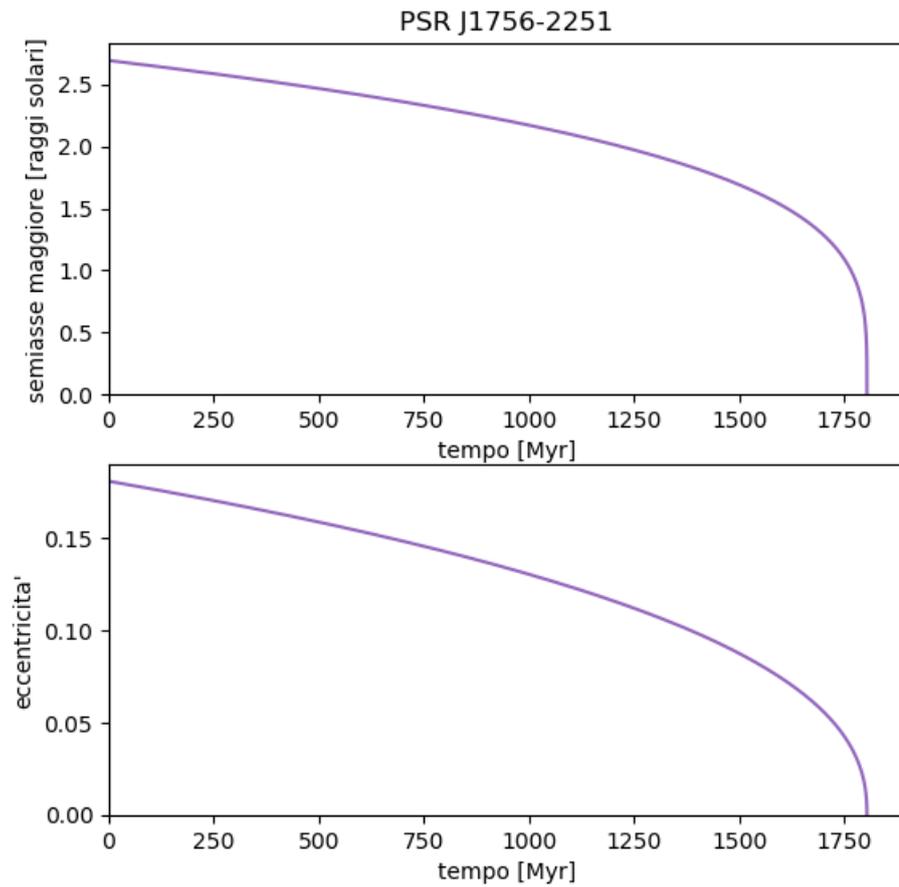
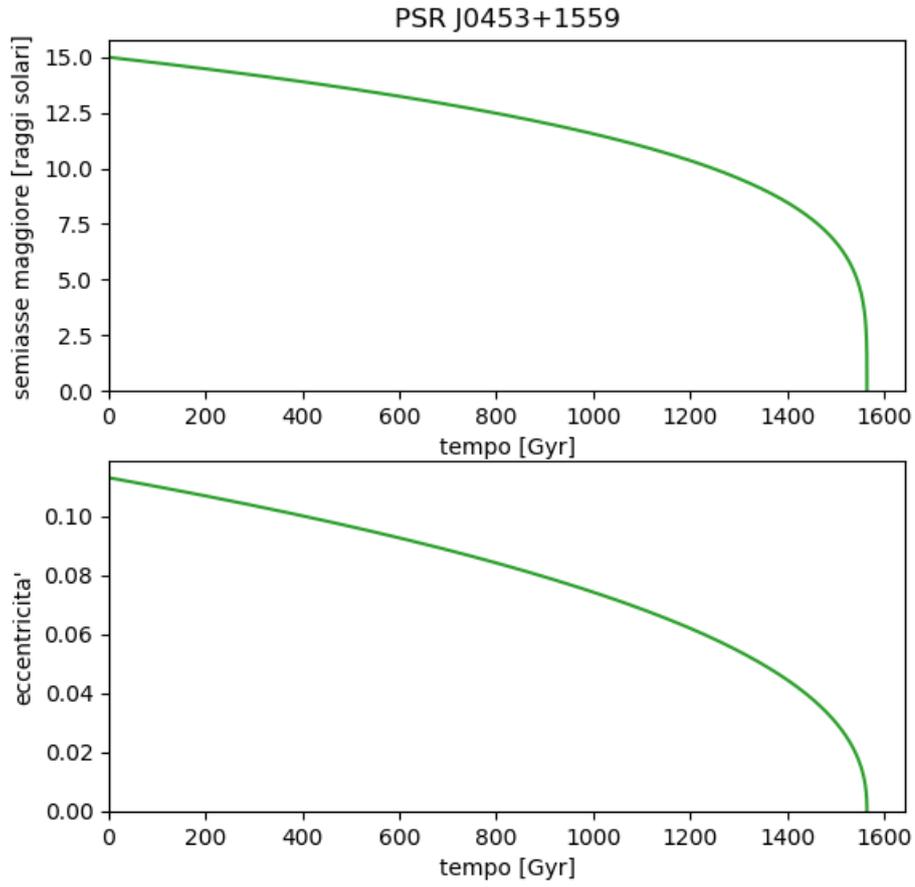
Tauris et al. Il simbolo ∞ indica $\tau_{\text{GW}} > 50$ Gyr.

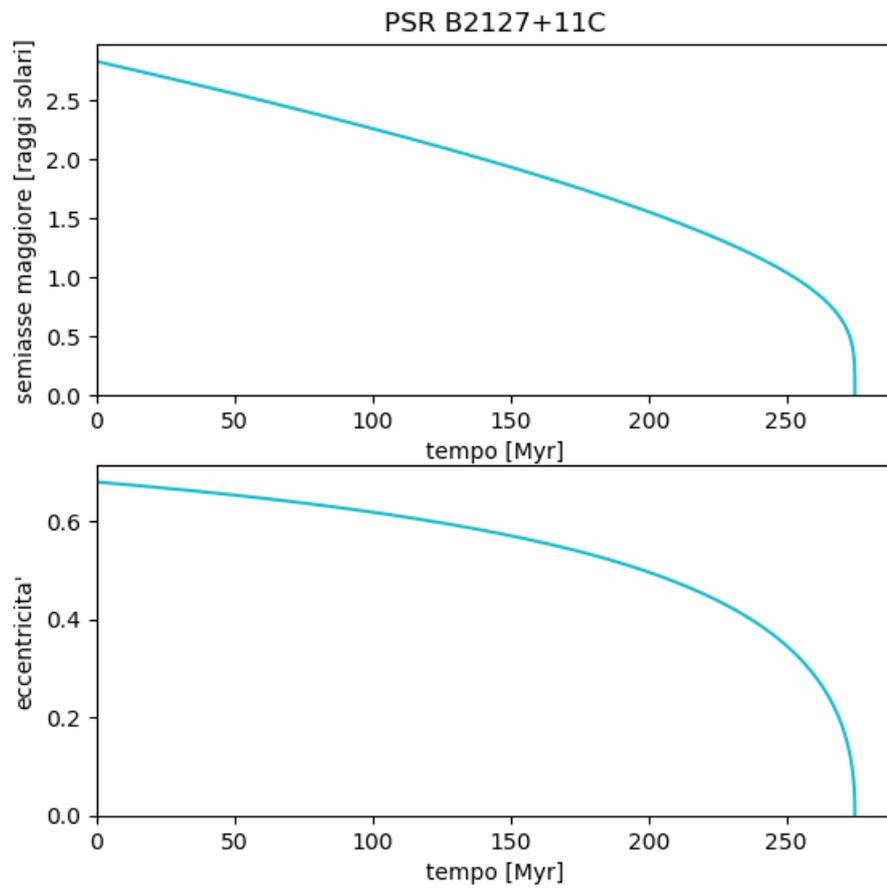
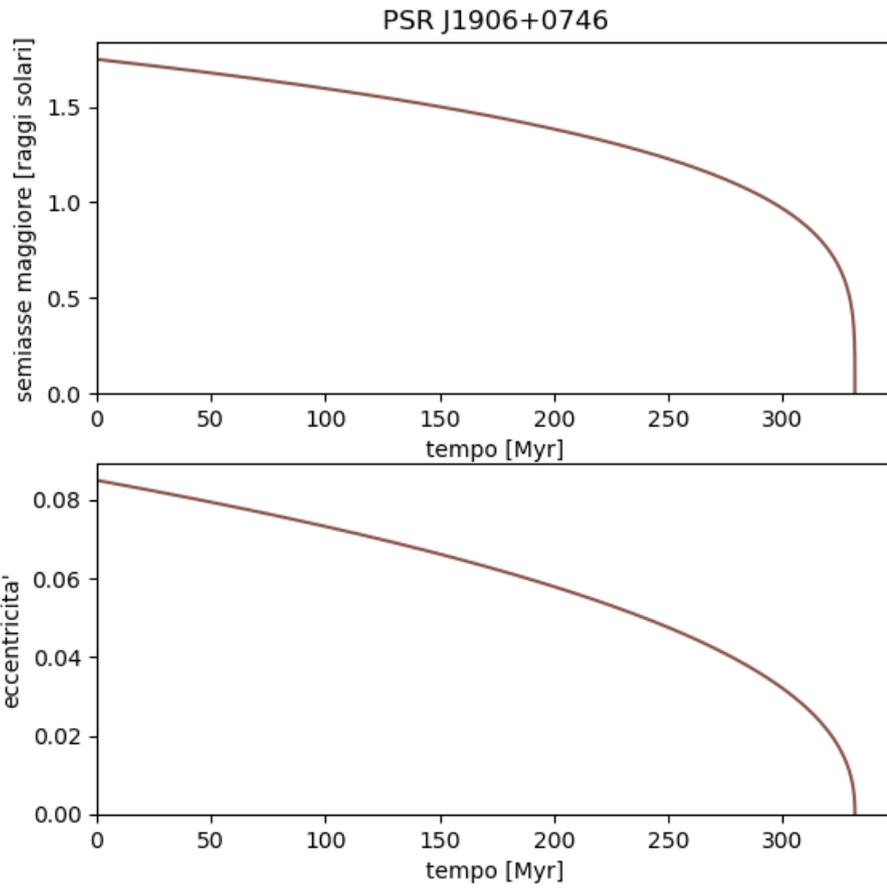
I due buchi neri di test sono presi con $a_{\text{iniziale}} = 0.1 \text{ UA}$ ed $e_{\text{iniziale}} = 0.5$ e i periodi sono calcolati con la terza legge di Keplero. Le coppie di masse sono quelle di GW150914 per BBH1 e di GW190521 per BBH2.

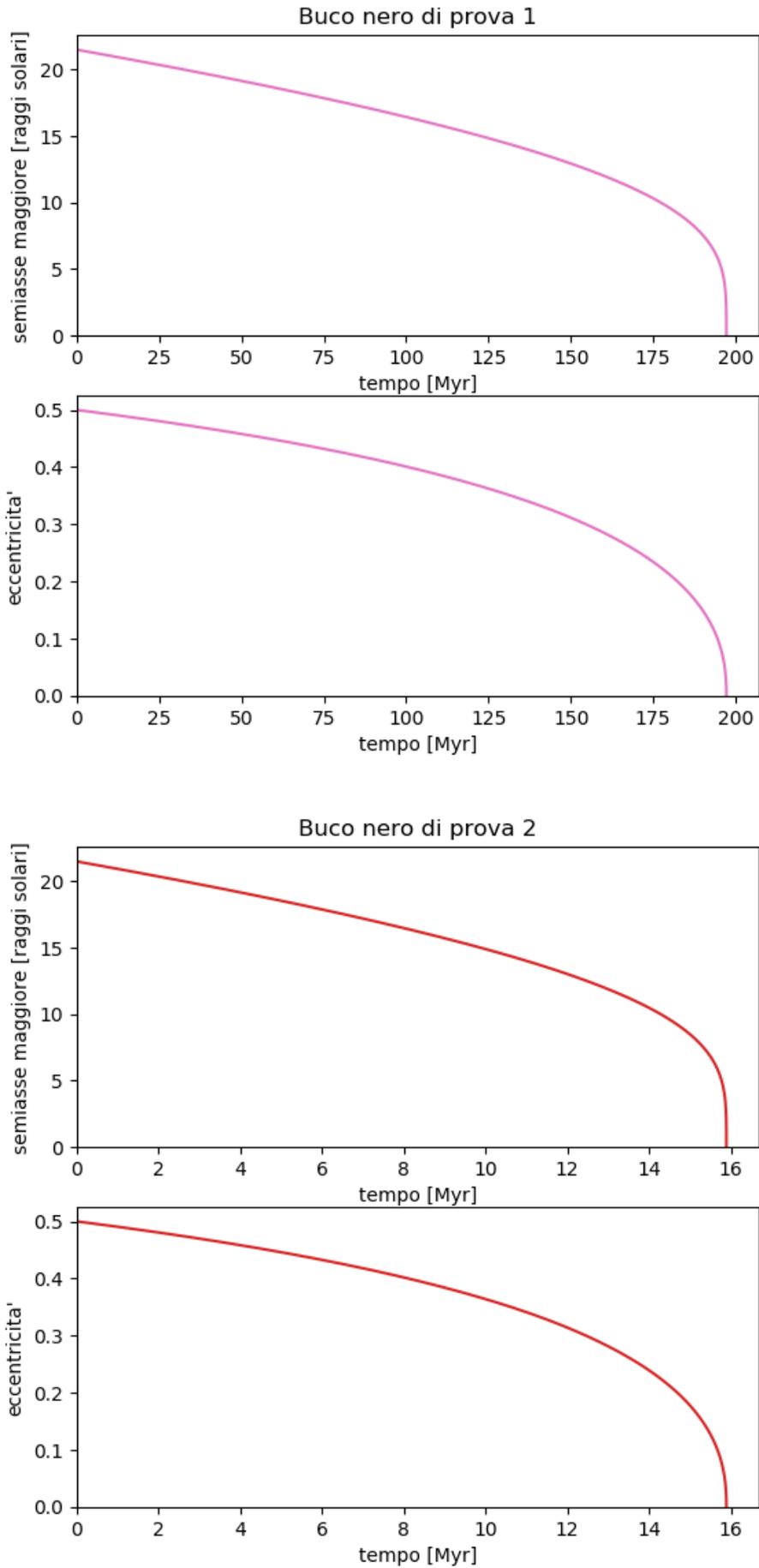
(*) La differenza percentuale è ottenuta come:

$$\frac{\tau_{\text{GW}} - \tau_{\text{GW, Tauris}}}{\tau_{\text{GW}}} * 100$$









Conclusioni

A partire dal secolo scorso la nostra visione della forza di gravità, un fenomeno che da una parte viene quotidianamente sperimentato da tutti e dall'altra regola la struttura dell'universo intero, ha subito una drastica deviazione da quello che era il cammino lineare ed elegante proposto da Newton. Una delle conseguenze più importanti di questa nuova visione della teoria della gravità, ovvero la Relatività Generale di Einstein, sono le onde gravitazionali, rilevate all'inizio indirettamente sulla base del decadimento orbitale di sistemi binari e, recentemente, si sono avute finalmente prove dirette della loro esistenza, prodotte dalla coalescenza di sistemi binari di buchi neri e stelle di neutroni. È quindi fondamentale capire come una binaria di buchi neri o stelle di neutroni evolve per emissione di onde gravitazionali.

Per questo lavoro di tesi ho dunque descritto l'evoluzione di sistemi binari con uno script Python che ho sviluppato, il quale, sulla base delle equazioni differenziali di P. C. Peters ⁽¹⁾ per la variazione del semiasse maggiore e dell'eccentricità col tempo, fornisce il tempo di coalescenza del sistema una volta immesse in input le masse e i valori iniziali di semiasse maggiore ed eccentricità, e mostra i grafici dell'evoluzione di a con t e di e con t .

Ho applicato questo script sia a stelle di neutroni binarie esistenti sia a coppie di buchi neri di test. Per le stelle di neutroni considerate ho confrontato i miei risultati dei tempi di coalescenza con quelli già ricavati nel lavoro di Tauris et al. ⁽²⁾, mostrando che le mie stime sono consistenti con quelle pubblicate, in generale entro il 20%. I tempi di coalescenza stimati risultano mediamente di qualche centinaio di milioni di anni, con casi che superano anche l'età dell'universo.

Per i buchi neri di prova ho posto come condizioni iniziali $a_{iniziale} = 0.1 \text{ UA}$ ed $e_{iniziale} = 0.5$ e ho assunto che le masse dei buchi neri fossero le stesse dei due eventi GW150914 (il primo evento mai osservato dagli interferometri di onde gravitazionali) e GW190521 (il sistema più massiccio mai osservato tramite onde gravitazionali). A parità di condizioni iniziali, il tempo di coalescenza è minore per il buco nero binario con maggiori masse, come predetto dalla Relatività Generale.

(1) P. C. Peters – “*Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses*” (1964) – Physical Review, vol. 136, n. 4b – Equazioni (5.6), (5.7).

(2) T. M. Tauris et al. – “*Formation of Double Neutron Star Systems*” (2017) – The Astrophysical Journal, vol. 846, n. 170 – Tabella 2.

Appendice. Script

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Periodo orbitale=27907 s
a=1949312770 #m semiasse maggiore
e=0.617 #eccentricità
t=0 #s

m1=1.440*1.9886e30 #kg (=1.440 masse solari)
m2=1.389*1.9886e30 #kg (=1.389 masse solari)

G=6.67408e-11 #m**3/(kg*s**2)
c=2.99792e8 #m/s
M=m1+m2
m=(m1*m2)/(m1+m2)

G3=G**3
c5=c**5

tgw=(5/256.)*c5/G3*(a**4)*((1-e**2)**3.5)/(m1*m2*(m1+m2))
h=0.01*tgw

#formula 5.6 Peters (risultato in m/s)
da=- (64/5)*G3*(m*(M**2))*(1+(73/24)*(e**2)+(37/96)*(e**4))/(c5*(a**3)*((1-
(e**2)**(7/2)))

#formula 5.7 Peters (risultato in 1/s)
de=- (304/15)*e*G3*(m*(M**2))*(1+(121/304)*(e**2))/(c5*(a**4)*((1-
(e**2)**(5/2)))

#raggio di Schwarzschild (risultato in m)
R=2*G*m/(c**2)

A=np.array([a])
E=np.array([e])
T=np.array([t])

i=0 #contatore
tol=0.01 #tolleranza del 1%

while (a>R):
    anew=a+h*da #a(t+h)

    if (abs(anew-a)/a<tol):
        a=anew
        e=e+h*de #e(t+h)
        t=t+h

```

```

#formula 5.6 Peters (risultato in m/s)
da=- (64/5)*G3*(m*(M**2))*(1+(73/24)*(e**2)+(37/96)*(e**4))/
      (c5*(a**3)*((1-(e**2))**(7/2)))

#formula 5.7 Peters (risultato in 1/s)
de=- (304/15)*e*G3*(m*(M**2))*(1+(121/304)*(e**2))/
      (c5*(a**4)*((1-(e**2))**(5/2)))

A=np.append(A, a)
E=np.append(E, e)
T=np.append(T, t)

i=i+1

else: #se abs(anew-a)/a>tol
    h=h/50
    a=a+h*da
    e=e+h*de
    t=t+h

    da=- (64/5)*G3*(m*(M**2))*(1+(73/24)*(e**2)+(37/96)*(e**4))/
          (c5*(a**3)*((1-(e**2))**(7/2)))

    de=- (304/15)*e*G3*(m*(M**2))*(1+(121/304)*(e**2))/
          (c5*(a**4)*((1-(e**2))**(5/2)))

    A=np.append(A, a)
    E=np.append(E, e)
    T=np.append(T, t)

    i=i+1

A_rsol=A/(696340000) #conversione in raggi solari
T_Myr=T/(3.1536e7*1e6) #conversione in Myr

T_coalesc=t/(3.1536e7*1e6)

print("TEMPO DI COALESCENZA DEL SISTEMA=", T_coalesc, "Myr")
print("numero di cicli:", i)

#grafico di a in funzione di t
A_T=pl.subplot(2, 1, 1)
A_T.plot(T_Myr, A_rsol, color='C0')
A_T.set_xlim(0, )
A_T.set_ylim(0, )
A_T.set_xlabel('tempo [Myr]')
A_T.set_ylabel('semiasse maggiore [raggi solari]')
A_T.set_title('PSR B1913+16')

#grafico di e in funzione di t
E_T=pl.subplot(2, 1, 2)
E_T.plot(T_Myr, E, color='C0')
E_T.set_xlim(0, )
E_T.set_ylim(0, )
E_T.set_xlabel('tempo [Myr]')
E_T.set_ylabel("eccentricita'")

pl.show()

```


Bibliografia

- J. D. E. Creighton, W. G. Anderson – “*Gravitational-Wave Physics and Astronomy. An Introduction to Theory, Experiment and Data Analysis*” (2011) – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA
- B. Schutz – “*A First Course in General Relativity (Second Edition)*” (2009) – Cambridge University Press
- J. B. Hartle – “*Gravity. An Introduction to Einstein’s General Relativity*” (2003) – Pearson Education
- C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler – “*Gravitation*” (1973) – W. H. Freeman and Company
- S. Carroll – “*Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*” (2004) – Pearson Education
- M. Gasperini – “*Manuale di Relatività Ristretta*” (2010) – Springer
- P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci – “*Fisica, volume II. Elettromagnetismo e onde*” (2002) – EdiSES
- P. C. Peters – “*Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses*” (1964) – Physical Review, volume 136, numero 4b
- T. M. Tauris et al. – “*Formation of Double Neutron Star Systems*” (2017) – The Astrophysical Journal, 846, 170
- A. Franceschini – “*Corso di Cosmologia*” (A. A. 2015-16)
- G. Giacometti – “*Platone 2.0 – La rinascita della filosofia come palestra di vita. Forza di gravità*” – <https://www.platon.it/moderno/premessa-la-rivoluzione-scientifica/modelli-elio-centrici/forza-di-gravita/>