

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
MATEMATICA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Alberi aleatori

Formula di Cayley e struttura degli alberi aleatori

Relatore:

Prof. David Barbato

Laureando:

Raffaele Antoccia

Matr. 2116302

Anno Accademico 2025/2026

17 Luglio 2026

Indice

1 Alberi: definizioni e proprietà	3
1.1 Grafi	3
1.2 Alberi	5
2 Formula di Cayley	9
2.1 Formula di Cayley	9
2.2 Combinatoria	12
3 Struttura degli alberi aleatori	15
3.1 Distanze dei nodi dalla radice	15
3.2 Struttura locale	17
3.3 Struttura globale	19
4 Processi di diramazione	27
4.1 Albero di Ulam-Harris	27
4.2 Alberi di Bienaymé	29

Introduzione

La **teoria dei grafi** è un'area della matematica sviluppatasi nei secoli scorsi ed è risultata rilevante nella risoluzione di vari problemi in diverse discipline, ad esempio l'informatica, la chimica e la logistica. In questo lavoro ci concentriamo sull'aspetto matematico di questa teoria, in particolare su come la **combinatoria** e la **probabilità** siano utili a fornire risultati sulla struttura degli oggetti di cui si occupa la teoria dei grafi.

Nella prima parte della tesi (i primi due capitoli) tratteremo maggiormente della teoria dei grafi, stabilendo gli oggetti di cui parliamo, cioè gli **alberi**, e sottolineando alcune proprietà fondamentali che ci saranno utili successivamente. Per concludere dimostriamo la **formula di Cayley**, un risultato cruciale che nel corso degli anni è stato riproposto utilizzando vari approcci, come mostrato da J. W. Moon [3]. La dimostrazione che vedremo si basa su una speciale **codifica**, un modo di associare univocamente una sequenza ad un albero e viceversa.

Nel terzo capitolo vediamo come questa speciale codifica ci permette di trarre delle conclusioni sulla struttura di un albero scelto a caso tra quelli di n nodi. In particolare vedremo

- La **struttura locale**: come sono distribuiti alcuni sottoalberi in base al loro numero di nodi.
- La **struttura globale**: come è distribuita la lunghezza dei rami di questi alberi.

Sarà interessante vedere cosa succede quando il numero di nodi che consideriamo diventa sempre più grande.

Nell'ultimo capitolo cambiamo prospettiva e pensiamo agli alberi come dei **processi** di evoluzione di una popolazione in cui ogni individuo ha la stessa determinata probabilità di riprodursi. Vedremo i risultati fondamentali dei processi di diramazione, caratterizzando in base a quali condizioni la popolazione è destinata all'estinzione o meno.

Capitolo 1

Alberi: definizioni e proprietà

In questo capitolo introduciamo il concetto di albero nella teoria dei grafi e vediamo alcune sue proprietà fondamentali, necessarie nella trattazione seguente. Stabiliamo in buona parte anche la notazione che useremo, basandoci per lo più sulle note di Louigi Addario-Berry [1] e sul libro *Introduction to Graph Theory* di R. J. Wilson [5].

1.1 Grafi

Definizione 1.1. Un grafo è una coppia ordinata $G = (V, E)$ dove V è l'insieme dei vertici, o nodi, ed $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$ è l'insieme degli spigoli. Per semplicità, scriveremo spesso uv al posto di $\{u, v\}$ per indicare il corrispettivo spigolo usando i suoi due estremi.

Nota 1.2. Per indicare l'insieme dei nodi V di un grafo G useremo anche la notazione $V(G)$, e similmente $E(G)$ per l'insieme degli spigoli.

Definizione 1.3. Un cammino P in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza finita $v_0, v_1, \dots, v_k$ di nodi distinti di G tali che $\forall 0 \leq i < k$ si ha $v_i v_{i+1} \in E$. Se $S \subset V$, diciamo che un cammino da S a $x \in V$ è un cammino in G che ha come nodo iniziale un elemento di S e come nodo finale x , in modo che nel cammino non ci siano altri elementi di S .

La *lunghezza* di un cammino P è data dal numero di spigoli di cui è composto.

Diciamo, inoltre, che due vertici u, v sono nella stessa *componente connessa* di G se esiste un cammino che li connette, nella notazione precedente, tale che $v_0 = u$ e $v_k = v$ o viceversa.

Definizione 1.4. Dati un grafo $G = (V, E)$ e due nodi $u, v \in V$, diciamo che la distanza tra u e v in G , $\text{dist}(u, v)$ è il minor numero di spigoli presenti in un cammino che li connette.

Per convenzione, se i due nodi si trovano in componenti connesse diverse, si pone $\text{dist}(u, v) = \infty$.

Analogamente, per $u \in V, S \subset V$ poniamo $\text{dist}(u, S) = \inf(\text{dist}(u, v) \mid v \in S)$, per la distanza da u ad S in G .

Definizione 1.5. Dato un grafo $G = (V, E)$, un sottografo $G' = (V', E')$ di G è un grafo tale che $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Nota 1.6. G' sottografo di G deve essere un grafo, perciò i suoi spigoli, oltre ad essere contenuti in E , possono avere come estremi solo ed esclusivamente i nodi presenti in V' . Un esempio nella Figura 1.2.

Vediamo adesso una classificazione dei grafi che ci aiuterà a definire gli alberi.

Definizione 1.7 (Connessione). Un grafo G si dice *connesso* se ha una sola componente connessa. Altrimenti si dice sconnesso.

Definizione 1.8 (Cicli). Un *ciclo* in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza finita $v_0, v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ di nodi tale che $v_0, v_1, \dots, v_k$ è un cammino, $v_{k+1} = v_0$ e $v_k v_0 \in E$. Un grafo che non contiene cicli è detto aciclico.

Esempio 1.9. Nella Figura 1.1 un esempio di un grafo connesso con

- Insieme dei nodi $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.
- Insieme degli spigoli $E = \{v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, v_1 v_5, v_2 v_3, v_2 v_6, v_3 v_4, v_3 v_5, v_3 v_6, v_4 v_5, v_5 v_6\}$.
- In blu è evidenziato un cammino da v_2 a v_5 , mentre in rosso un ciclo di 3 nodi.

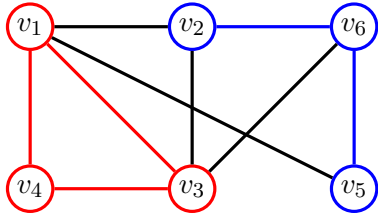


Figura 1.1: Un grafo connesso.

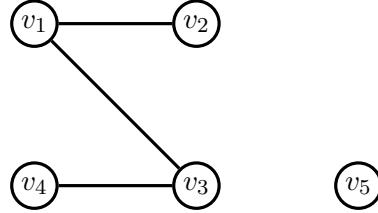


Figura 1.2: Un sottografo sconnesso del grafo a sinistra.

Proposizione 1.10. Sia $G = (V, E)$ un grafo finito, con k componenti connesse. Allora $|E| \geq |V| - k$.

Dimostrazione. Per definizione, se G è connesso, fissato $u \in V, \forall v \in V \setminus \{u\}, \exists P_v$, cammino in G da u a v . Dunque esistono $|V| - 1$ cammini in G che "terminano" in un nodo diverso. Scegliamo P_v tra i cammini da u a v di lunghezza minore (un cammino *minimo*). Mostriamo che ogni cammino minimo P_v ha lo spigolo finale diverso da quello di qualunque altro. Supponiamo che non sia così. Allora $\exists v_1, v_2 \in V$ tali che P_{v_1} termina in $v_2 v_1$, mentre P_{v_2} termina in $v_1 v_2$. Diciamo che la lunghezza di P_{v_1} sia minore o uguale della lunghezza di P_{v_2} . Ma allora considerando il cammino P_{v_1} privato dell'ultimo nodo otteniamo un cammino da u a v_2 , di lunghezza strettamente minore di P_{v_2} , che è assurdo poiché quest'ultimo è un cammino minimo. Dunque la lunghezza del cammino P_{v_2} deve essere minore della lunghezza del cammino P_{v_1} , e

per lo stesso argomento di prima si ottiene un assurdo. Dunque abbiamo verificato che lo spigolo finale deve essere unico per ogni cammino. Allora $|E| \geq |V| - 1$.

Sia ora $G_j = (V_j, E_j)$, $j \in \{1, \dots, k\}$ la j -esima componente connessa di G , grafo qualsiasi. Per quanto appena dimostrato si ha

$$|E| = \sum_{j=1}^k |E_j| \geq \sum_{j=1}^k (|V_j| - 1) = |V| - k$$

□

Corollario 1.11. *Una diretta conseguenza di questa proposizione è che se $|E| < |V| - k$, per qualche $k \in \mathbb{N}$, allora G ha almeno $k + 1$ componenti connesse.*

1.2 Alberi

Definizione 1.12. Un albero è un grafo connesso e aciclico.

Definizione 1.13. Dato un albero T , si dice che T' è un sottoalbero di T se T' è un albero ed è un sottografo di T .

Proposizione 1.14. *Sia T un albero. Rimuovendo da questo un qualsiasi spigolo si ottengono due sottoalberi (eventualmente uno dei due è l'albero banale composto da un solo nodo).*

Dimostrazione. Siano u_1, u_2 i due estremi dello spigolo rimosso. Consideriamo V_{u_i} l'insieme dei nodi connessi a u_i , per $i = 1, 2$. Allora $u_2 \notin V_{u_1}$ e $u_1 \notin V_{u_2}$, altrimenti il grafo di partenza avrebbe contenuto un ciclo e dunque non sarebbe stato un albero. Inoltre $V = V_{u_1} \sqcup V_{u_2}$, cioè il nuovo grafo ha esattamente due componenti connesse e acicliche (due alberi). □

Definizione 1.15. Un *albero etichettato* è un albero in cui ad ogni nodo viene associata un'etichetta univoca. Se $|V| = n \in \mathbb{N}$ si sceglie $V = [n]$, dove con $[n]$ intendiamo l'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definiamo anche $\mathcal{E}_n = \{T = (V, E) \mid T \text{ è un albero, } V = [n]\}$, l'insieme degli alberi etichettati di n nodi.

Definizione 1.16. Un *albero radicato* è una tripla $T = (V, E, \rho)$, dove (V, E) è un albero e $\rho \in V$ è un nodo detto radice di T .

Analogamente a quanto fatto precedentemente, si definiscono gli alberi radicati etichettati e di conseguenza $\mathcal{R}_n = \{T = (V, E, \rho) \mid T \in \mathcal{E}_n, \rho \in V\}$, l'insieme degli alberi radicati etichettati di n nodi (per semplicità, li chiameremo alberi radicati da qui in avanti).

Nota 1.17. Per indicare la radice ρ di un albero radicato T scriveremo anche $\rho(T)$. Per indicare la distanza di un nodo $v \in V$ dalla radice scriveremo $|v| := \text{dist}(\rho, v)$.

Osservazione 1.18. Si ha che $|\mathcal{R}_n| = n|\mathcal{E}_n|$, infatti per ogni albero etichettato, di n nodi, ci sono n alberi radicati, ognuno ottenuto ponendo uno qualsiasi dei suoi nodi come radice.

Negli alberi radicati è utile stabilire una *gerarchia* tra i nodi: u è detto *genitore* di v se è il nodo connesso a v nel cammino verso la radice. v viene invece detto *figlio* di u . Se due nodi sono figli di uno stesso nodo si dicono *fratelli*. I nodi che non hanno figli sono detti *foglie*.

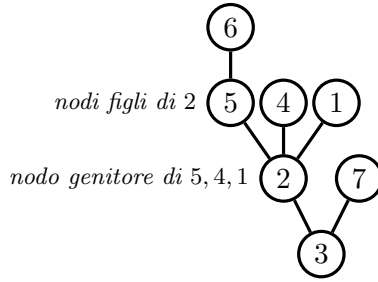


Figura 1.3: Un albero radicato.

Vediamo adesso le relazioni tra questi oggetti e le caratterizzazioni che torneranno utili nei prossimi capitoli.

Proposizione 1.19. Sia $T = (V, E)$ un grafo finito. Sono equivalenti:

- (A) T è un albero.
- (B) T è aciclico e si ha $|E| = |V| - 1$.
- (C) T è connesso e si ha $|E| = |V| - 1$.
- (D) $\forall u, v \in V \exists! P$ cammino in T da u a v .

Dimostrazione. Per $|V| = 1$ la proposizione è banalmente vera, perciò consideriamo $|V| \geq 2$.

$(A \Rightarrow B)$ T è un albero, quindi è aciclico. Mostriamo allora che $|E| = |V| - 1$. Siccome T non contiene cicli, rimuovere uno qualsiasi degli spigoli divide T in due sottoalberi (Proposizione 1.14). Per induzione si ha $|E(R)| = |V(R)| - 1$ e $|E(S)| = |V(S)| - 1$, quindi

$$|E| = |E(R)| + |E(S)| + 1 = |V(R)| + |V(S)| - 1 = |V| - 1$$

$(B \Rightarrow C)$ Sia k il numero di componenti connesse di T . Ogni T_j componente connessa di T è aciclica e connessa, quindi un albero. Allora per quanto appena dimostrato, $\forall 1 \leq j \leq k, |E(T_j)| = |V(T_j)| - 1$, quindi $|E| = |V| - k \implies k = 1$, cioè T è connesso.

($C \Rightarrow D$) Supponiamo che $\exists u, v \in V$ connessi da due cammini distinti P, Q . Allora necessariamente esisterà un ciclo in T . Infatti i due cammini condividono almeno due nodi, ed $\exists s \in E$ che non appare in Q perché P, Q sono distinti.

Ma allora anche rimuovendo s da T , il grafo T' ottenuto rimane connesso, perché gli estremi di quello spigolo sono connessi tra loro sfruttando il cammino Q , tramite i due nodi più vicini a loro che sono presenti sia in P , sia in Q . Dunque si ha $|E(T')| = |V| - 2$, cioè $|E(T')| < |V| - 1$, quindi T' deve avere almeno due componenti connesse, per quanto notato nel Corollario 1.11.

($D \Rightarrow A$) L'ipotesi ci garantisce che T sia connesso. Dunque dobbiamo mostrare che T non contiene cicli.

Supponiamo che esista un ciclo $v_0, v_1, \dots, v_n, v_0$ in T . Allora $v_0, v_1, \dots, v_n$ e v_0, v_n sono due cammini in T tra v_0 e v_n , il che contraddice la nostra ipotesi.

□

Capitolo 2

Formula di Cayley

In questo capitolo dimostriamo la *formula di Cayley*, che afferma $|\mathcal{E}_n| = n^{n-2}$, e vediamo una sua applicazione in combinatoria. Presentiamo nella prossima sezione una delle più recenti dimostrazioni, proposta da Addario-Berry e Donderwinkel [2], in cui si crea una biiezione tra l'insieme di alberi di n nodi e le sequenze di $n - 1$ numeri da 1 a n .

2.1 Formula di Cayley

Come abbiamo anticipato, la formula di Cayley conta gli alberi etichettati di n nodi. Notiamo che, dall'Osservazione 1.18, è equivalente dimostrare che $|\mathcal{R}_n| = n^{n-1}$.

Nota 2.1. Considerare gli alberi radicati ci permette di avere un ordine, giustificato dalla gerarchia tra nodi descritta nel capitolo precedente. Questo è il concetto chiave che ci permette di ricavare una sequenza univoca da ogni albero radicato e viceversa.

Definizione 2.2. Definiamo qui due funzioni. Il fatto che siano ben definite, ed una l'inversa dell'altra, lo vedremo di seguito nella dimostrazione, perciò non ce ne preoccupiamo in questo momento.

- Sia $v: \mathcal{R}_n \rightarrow [n]^{n-1}$ una funzione che associa ad ogni $T = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$ una sequenza di $n - 1$ numeri compresi tra 1 e n nel seguente modo:
 1. Siano $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ le foglie di T ordinate in modo crescente, e $S_0 := \{\rho\}$.
 2. $\forall i \in [k]$, sia P_i il cammino in T da S_{i-1} a l_i e $S_i := S_{i-1} \cup P_i$. Consideriamo P_i^* il cammino P_i privato di l_i .
 3. Sia $v(T)$ la concatenazione $P_1^*, P_2^*, \dots, P_k^*$.

Possiamo pensare a questa funzione come un algoritmo di *ricerca* delle foglie: si parte dalla radice e si raggiunge la prima foglia, tenendo in memoria gli altri nodi visitati. Il passo successivo è quello di raggiungere la foglia successiva, a partire da uno dei nodi già visitati, e così via, fino ad esaurire l'albero.

- Sia $t: [n]^{n-1} \rightarrow \mathcal{R}_n$ una funzione che associa ad ogni $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in [n]^{n-1}$ un albero radicato di n nodi nel seguente modo:
 1. Siano $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ gli elementi di $[n]$ che non sono presenti in u , ordinati in modo crescente.
 2. Siano $j(1), j(2), \dots, j(k-1)$ gli indici di ripetizione¹ di u , e fissiamo $j(0) := 1, (k) := n$.
 3. $\forall i \in [k]$, sia P_i il cammino $u_{j(i-1)}, \dots, u_{j(i)-1}, l_i$, formato da $j(i) - j(i-1)$ spigoli distinti tra loro.
 4. Sia $t(u) := (V, E, \rho)$ con $V = [n], \rho = u_1, E$ unione degli spigoli nei cammini $P_1, \dots, P_k$.

In analogia con quanto abbiamo detto per la funzione precedente, l'albero viene costruito mettendo insieme i cammini che conducono alle foglie. Le foglie sono i numeri che non compaiono nella sequenza, i cammini che vi conducono sono date dalle sequenze che si trovano tra due numeri che sono già apparsi nella sequenza, leggendola da sinistra verso destra.

Esempio 2.3. Consideriamo $T = (V = [7], E = \{32, 37, 21, 24, 25, 56\}, \rho = 3)$ l'albero della Figura 1.3 e ricaviamo la sequenza $v(T)$.

1. Individuiamo le foglie e la radice

$$l_1 = 1, l_2 = 4, l_3 = 6, l_4 = 7, S_0 = \{3\}$$

2. Scriviamo i cammini che ci permettono di visitare le foglie

$P_1 = (3, 2, 1)$	$S_1 = \{1, 2, 3\}$	$P_1^* = (3, 2)$
$P_2 = (2, 4)$	$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$	$P_2^* = (2)$
$P_3 = (2, 5, 6)$	$S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P_3^* = (2, 5)$
$P_4 = (3, 7)$	$S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$P_4^* = (3)$

3. La sequenza ottenuta è

$$v(T) = (3, 2, 2, 2, 5, 3)$$

Esempio 2.4. Verifichiamo che dalla sequenza $u = (3, 2, 2, 2, 5, 3)$ trovata possiamo ricostruire l'albero di partenza tramite la funzione t .

1. Individuiamo i numeri che non compaiono nella sequenza

$$l_1 = 1, l_2 = 4, l_3 = 6, l_4 = 7$$

2. Individuiamo gli indici di ripetizione

$$j(0) = 1, j(1) = 3, j(2) = 4, j(3) = 6, j(4) = 7$$

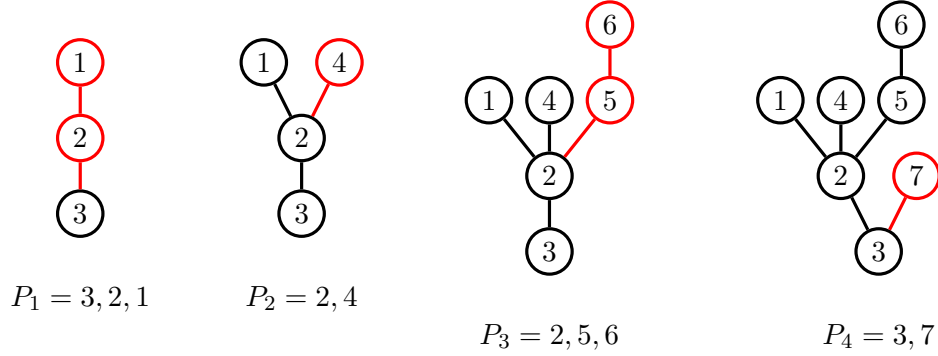


Figura 2.1: Costruzione dell'albero a partire dalla sequenza

3. Nella Figura 2.1 rappresentiamo la costruzione dell'albero. In rosso i cammini che vengono aggiunti andando avanti con la costruzione.
4. L'albero ottenuto è

$$t(u) = (V = [7], E = \{32, 21, 24, 25, 56, 37\}, \rho = 3)$$

Teorema 2.5 (Formula di Cayley). $|\mathcal{R}_n| = n^{n-1}$.

Dimostrazione. Il secondo membro dell'uguaglianza è la cardinalità dell'insieme $[n]^{n-1}$, perciò è sufficiente trovare una biiezione tra i due insiemi.

Consideriamo $v: \mathcal{R}_n \rightarrow [n]^{n-1}$ e $t: [n]^{n-1} \rightarrow \mathcal{R}_n$ come nella definizione 2.2.

Mostriamo che v sia ben definita, cioè $v(T) \in [n]^{n-1}, \forall T \in \mathcal{R}_n$: si ha che $\forall i \in [k], P_i^* \subset [n]$, infatti per costruzione non ci sono numeri ripetuti in P_i^* . Inoltre i cammini P_i formano una partizione di E , perché ogni spigolo si trova in uno ed uno solo dei cammini descritti. Infine $|P_i^*|$ è il numero di spigoli del cammino P_i , quindi per la Proposizione 1.19 la lunghezza di $v(T)$ è $|E| = |V| - 1 = n - 1$.

Mostriamo che t sia ben definita: il grafo $t(u)$ ha n nodi e $n - 1$ spigoli, infatti E ha lo stesso numero di spigoli dei cammini P_i , quindi

$$|E| = \sum_{i=1}^k |E(P_i)| = j(k) - j(0) = n - 1$$

Nuovamente per la Proposizione 1.19, ci basta mostrare che $t(u)$ sia connesso per verificare che sia un albero. Fissiamo $i \in [n - 1], i > 1$, se i non è un indice di ripetizione di u allora $u_{i-1}u_i$ è uno spigolo di $t(u)$. Se invece i è un indice di ripetizione di u , scelgo $j := \min\{j | u_j = u_i\}$. Se $j \neq 1$ allora $u_{j-1}u_i$ è uno spigolo di $t(u)$, quindi in entrambi i casi $\exists k < i \mid u_k u_i \in E$. Perciò per induzione, $\forall i \in [n - 1], u_i$ è connesso a u_1 , e siccome u_1 è connesso a $u_{j(i)}$, tutti i nodi sono connessi ad u_1 . Dunque $t(u)$ è connesso e $t(u) \in \mathcal{R}_n$.

¹diciamo che $j \in \{2, \dots, n - 1\}$ è un indice di ripetizione di u se $\exists i < j \mid u_i = u_j$.

Infine mostriamo che le due funzioni costituiscono una biiezione tra gli insiemi $\mathcal{R}_n$ e $[n]^{n-1}$, in particolare che $v(t(u)) = u$, per un generico $u \in [n]^{n-1}$. Sia $\bar{u} = v(t(u))$. Per definizione $\bar{u}_1 = \rho(t(u)) = u_1$. Inoltre $t(u)$ è un albero, quindi P_1 è l'unico cammino da u_1 a l_1 . Analogamente $\forall i \in [k], P_i$ è un cammino in $t(u)$ da $u_{j(i-1)}$ a l_i e per costruzione si ha che $P_i \cap \bigcup_{m < i} P_m = \{u_{j(i-1)}\}$, quindi P_i è l'unico cammino in $t(u)$ da S_{i-1} , l'unione dei nodi in $P_1, \dots, P_{i-1}$, a l_i . Di conseguenza $\bar{u}$ è la concatenazione dei cammini $P_1^*, \dots, P_k^*$, quindi $v(t(u)) = u$. $\square$

2.2 Combinatoria

In questa sezione vediamo un'identità combinatoria equivalente alla formula di Cayley. Questo approccio è stato usato da Peter W. Shor [4] per dimostrare la formula di Cayley, partendo dall'identità. Noi useremo lo stesso approccio per dedurre l'identità combinatoria. Prima di farlo abbiamo bisogno di definire alcuni oggetti.

Definizione 2.6. Sia $T = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$. Diciamo che $u \in V$ è un *discendente* di $v \in V$ se u è un nodo figlio di v o se (ricorsivamente) è un discendente di uno dei figli di v .

Definizione 2.7. Sia $T = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$ e $v \in V$. Definiamo $\beta(v)$ come il più piccolo nodo u nel sottoalbero di T contenente v , come radice, e tutti i suoi discendenti (si ha $\beta(v) \leq v$).

Definizione 2.8. Sia $T = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$. Diciamo che uno spigolo $uv \in E$ è uno spigolo proprio se il nodo genitore (per esempio u) è tale che $u < \beta(v)$. Altrimenti lo spigolo è detto *improprio* (se $u > \beta(v)$).

Teorema 2.9. Sia $Q(n, i)$ una funzione per $n \geq 1, i \geq -1$ definita come segue.

$$Q(n, i) = \begin{cases} 1 & \text{sen} = 1, i = 0 \\ 0 & \text{sen} \geq 1, i = -1 \\ 0 & \text{sen} = 1, i \geq 1 \end{cases}$$

e dalla ricorsione

$$Q(n, i) = (n-1)Q(n-1, i) + (n+i-2)Q(n-1, i-1) \quad (2.1)$$

per $n > 1, i > -1$.

Si ha che $Q(n, i)$ è il numero di alberi radicati di n nodi con i spigoli impropri. In particolare

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q(n, i) = n^{n-1}$$

Dimostrazione. Sia $Q'(n, i)$ il numero di alberi radicati di n nodi con i spigoli impropri. Notiamo che vale

$$Q'(n, i) = \begin{cases} 1 & \text{sen} = 1, i = 0 \\ 0 & \text{sen} = 1, i \geq 1 \end{cases}$$

Vogliamo trovare una ricorsione su $n \in \mathbb{N}, i < n$ per $Q'(n, i)$. Per farlo definiamo una mappa $\phi: \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{R}_{n-1}$ che associa ad ogni $T \in \mathcal{R}_n$ un albero radicato di $n-1$ nodi come di seguito:

1. Se n è un nodo foglia lo rimuoviamo da T , insieme allo spigolo di cui è estremo. Notiamo che in T , lo spigolo che è stato rimosso è uno spigolo proprio, quindi si ottiene $\phi(T) \in \mathcal{R}_{n-1}$, con lo stesso numero di spigoli impropri di T .
2. Se n non è un nodo foglia, dai suoi figli $x_1, \dots, x_d$, scegliamo il nodo x_a tale che $\beta(x_a) > \beta(x_j), \forall 1 \leq j \leq d, j \neq a$. Adesso "contraiamo" lo spigolo nx_a , di modo che i figli di n e quelli di x_a in T siano fratelli in $\phi(T)$, e il loro nodo genitore sarà x_a . Così $\phi(T) \in \mathcal{R}_{n-1}$ (abbiamo rimosso un nodo e uno spigolo) ed ha uno spigolo improprio in meno, infatti nx_a è certamente improprio in quanto $n > \beta(x_a)$, e $x_a \geq \beta(x_a) > \beta(x_j), \forall 1 \leq j \leq d, j \neq a$, quindi x_ax_j è uno spigolo improprio in $\phi(T)$, come $nx_j, \forall 1 \leq j \leq d, j \neq a$ in T . (Nella Figura 2.2 un esempio dell'azione di ϕ quando il nodo n non è un nodo foglia. In rosso gli spigoli impropri. In blu il sottoalbero con radice 4)

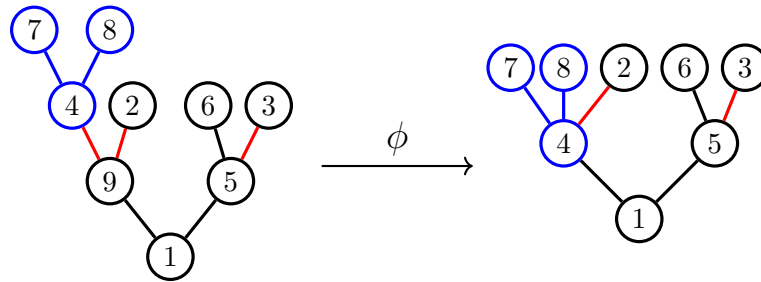


Figura 2.2: Esempio dell'azione di ϕ .

Adesso sia $R \in \mathcal{R}_{n-1}$ fissato. Vogliamo specificare quanti sono gli alberi in $\phi^{-1}(R)$ che hanno lo stesso numero di spigoli impropri di R e quanti ne hanno uno in più.

1. Possiamo aggiungere il nodo n come figlio di un qualsiasi nodo di R . In questo caso abbiamo, allora, $n-1$ scelte e il numero di spigoli impropri rimane lo stesso.
2. Altrimenti, possiamo considerare un qualsiasi nodo x di R , mettere n al posto di x e rendere x figlio di n . Ora i figli di x possono diventare figli di n o di x nel nuovo albero. Sia b il numero di spigoli impropri dove x è il nodo genitore in R , rispettivi ai figli $x_1, \dots, x_b$, ordinati di modo che $\beta(x_1) < \dots < \beta(x_b) < x$. Allora $\forall 0 \leq a \leq b$ posso considerare un albero $T \in \phi^{-1}(R)$ tale che $x_1, \dots, x_a$ sono figli di n e $x_{a+1}, \dots, x_b$ sono figli di x . Questi sono gli unici modi tali che $\beta(x) > \beta(y), \forall y$ figlio di n , e che quindi $\phi(T) = R$. Inoltre tutti gli spigoli $nx_j, 1 \leq j \leq a$ sono impropri in T , così come lo erano xx_j in R , e ne abbiamo uno in più, dato da nx . In questo caso abbiamo, dunque, che per ogni nodo x

di R ci sono $b + 1$ scelte, dove b è il numero di spigoli impropri con x genitore. Perciò, se R ha $i - 1$ spigoli impropri, abbiamo $(n - 1) + (i - 1)$ scelte e il numero di spigoli impropri in ognuno di questi alberi è i .

Ricapitolando, abbiamo mostrato che $\phi^{-1}(R)$ contiene $n - 1$ alberi in $\mathcal{R}_n$ che hanno lo stesso numero di spigoli impropri di R , e $n + i - 2$ che ne hanno uno in più. In formule abbiamo

$$Q'(n, i) = (n - 1)Q'(n - 1, i) + (n + i - 2)Q'(n - 1, i - 1)$$

che è proprio la formula di ricorsione della Q definita in (2.1). Possiamo artificialmente definire $Q'(n, i) = 0$ per $n \geq 1, i = -1$ per rendere la formula di ricorsione ben posta, senza modificarne il significato relativo agli alberi. Così facendo abbiamo verificato che il numero di alberi radicati di n nodi con i spigoli impropri è $Q(n, i)$.

Notiamo infine che ogni albero in $\mathcal{R}_n$ ha un numero di spigoli impropri che può andare da 0 a $n - 1$. Perciò dal Teorema 2.5 abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} Q(n, i) = \left| \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \{T \in \mathcal{R}_n \mid T \text{ ha } i \text{ spigoli impropri}\} \right| = |\mathcal{R}_n| = n^{n-1}$$

□

Capitolo 3

Struttura degli alberi aleatori

Scegliamo un albero a caso in modo *uniforme* tra quelli radicati di n nodi. Com'è distribuita la distanza di una foglia qualsiasi dalla radice? E la distanza di un nodo qualsiasi dalla radice?

Cosa possiamo dire invece della struttura di questi alberi? In particolare, è vero che i loro *sottoalberi* sono a loro volta distribuiti in modo uniforme? E come sono distribuite le *lunghezze* dei rami, cioè dei cammini che aggiungiamo mano a mano nella costruzione dell'albero usando la funzione t della Definizione 2.2?

Nota 3.1. Stabiliamo una notazione che useremo da qui in poi.

- Siano X e Y due variabili aleatorie. Con $X \stackrel{d}{=} Y$ indichiamo che hanno la stessa distribuzione.
- Siano $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie e X una variabile aleatoria. Con $X_n \xrightarrow{d} X$ indichiamo che la successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in distribuzione a X .
- Sia S un insieme finito, scriviamo $X \in_u S$ per indicare che X è scelto a caso, in modo uniforme, tra gli elementi di S .

3.1 Distanze dei nodi dalla radice

Proposizione 3.2. Siano $T \in_u \mathcal{R}_n$ e $L \in_u F_T$, dove F_T è l'insieme delle foglie di T . Sia $U = (U_i, i \geq 1)$ una sequenza di elementi $U_i \in_u [n]$ indipendenti tra loro. Detto $I = \min(i \geq 2 : U_i \in \{U_1, \dots, U_{i-1}\})$ l'indice del primo elemento ripetuto in U , si ha $|L| + 1 \stackrel{d}{=} \min(I, n)$.

Dimostrazione. Sia $U = (U_1, \dots, U_{n-1}) \in_u [n]^{n-1}$ la sequenza delle prime $n - 1$ entrate di U . Allora dalla Definizione 2.2 abbiamo $T := t(U) \in_u \mathcal{R}_n$.

Usando la notazione stabilita nella definizione abbiamo che gli indici di ripetizione

¹Essendo una biiezione tra insiemi finiti, l'uniformità nella scelta degli elementi si conserva.

di u sono $j(1), \dots, j(k-1)$, e posto $j(k) = n$ si ha $\min(I, n) = j(1)$, siccome $I \in \{2, \dots, n+1\}$. Ora, l_1 è un nodo foglia di $U_{j(1)-1}$, quindi

$$|l_1| = |U_{j(1)-1}| + 1 = j(1) - 2 + 1 = \min(I, n) - 1$$

Siccome $T \in_u \mathcal{R}_n$ e $L \in_u F_T$, si ha $|l_1| \stackrel{d}{=} |L|$. Questo perché il fatto che l_1 sia in particolare la foglia con etichetta minore, non influisce sulla sua distanza dal vertice. In altre parole, permutare in modo casuale le etichette delle foglie non ne cambia la distribuzione della relativa distanza dalla radice. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 3.3. *Siano $T \in_u \mathcal{R}_n$ e $U \in_u [n]$ indipendente da T . Allora $|U| \stackrel{d}{=} I-2$, dove I è definito come nella proposizione precedente.*

Per dimostrare questa proposizione abbiamo bisogno di modificare la biiezione presentata nel capitolo precedente, ed adattarla per alberi radicati con nodi segnati (cioè dove una certa quantità di nodi hanno uno o più segni che li distinguono ulteriormente).

Definizione 3.4. Sia $s: \mathcal{R}_n \times [n]^r \rightarrow [n]^{n+r-1}$ una funzione che ad ogni $T = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$ e $(s_i, i = 1, \dots, r) \in [n]^r$, sequenza di *segni*, associa una sequenza di $n+r-1$ numeri compresi tra 1 e n nel seguente modo:

1. Siano $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ le foglie di T senza segni, ordinate in modo crescente, e $S_0 := \{\rho\}$.
2. $\forall i \in [r]$, sia P_i^* il cammino in T da S_{i-1} a s_i e $S_i := S_{i-1} \cup P_i^*$.
3. $\forall i \in [k]$, sia P_{r+i} il cammino in T da S_{r+i-1} a l_i e $S_{r+i} := S_{r+i-1} \cup P_{r+i}$. Consideriamo P_{r+i}^* il cammino P_{r+i} privato di l_i .
4. Sia $v(T)$ la concatenazione $P_1^*, P_2^*, \dots, P_{r+k}^*$.

Per la prossima dimostrazione faremo uso di questa costruzione nel caso in cui $r = 1$. In particolare sarà il nodo scelto a caso ad essere segnato.

Dimostrazione della Proposizione. Siano $T \in_u \mathcal{R}_n, U \in_u [n]$. Considero (T, U) , a cui viene associata una sequenza $s(T, U) = (V_1, \dots, V_n) \in_u [n]^n$. In particolare, questa sequenza è tale che il primo indice ripetuto di $s(T, U)$, ponendolo uguale a $n+1$ nel caso in cui non ci siano ripetizioni, $I \in \{2, \dots, n+1\}$ si trova esattamente dopo il nodo segnato U . Allora si ha che $|U| = |V_{I-1}| = I-2$. $\square$

Abbiamo trovato la distanza dei nodi negli alberi aleatori in funzione della variabile aleatoria I , perciò ne calcoliamo adesso la distribuzione.

Lemma 3.5. *Sia I l'indice della prima ripetizione in una sequenza $V \in_u [n]^{n+1}$. Allora per $1 \leq k \leq n$ si ha*

$$\mathbb{P}(I = k+1) = \frac{k}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

Dimostrazione. Vogliamo calcolare $\mathbb{P}(I = k + 1), 1 \leq k \leq n$. Per farlo contiamo quante sono le sequenze tali che il primo indice di ripetizione sia $k + 1$ e dividiamo per il numero totale di sequenze (n^{n+1}).

1. Se il primo indice di ripetizione è $k + 1$, allora le prime k entrate ($V_1, \dots, V_k$) della sequenza saranno una disposizione di n elementi di classe k , dunque le possibilità sono $n(n-1) \cdots (n-k+1)$.
2. La $(k+1)$ -esima entrata, essendo una ripetizione, sarà uno tra i k elementi già utilizzati.
3. Le ultime entrate sono libere, dunque ci sono n^{n-k} possibilità.

Allora otteniamo che per $1 \leq k \leq n$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I = k + 1) &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)kn^{n-k}}{n^{n+1}} \\ &= k \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{k}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \end{aligned}$$

□

Corollario 3.6. Siano $T \in_u \mathcal{R}_n, U \in_u [n]$. Allora per $0 \leq k \leq n-1$ si ha

$$\mathbb{P}(|U| = k) = \frac{k+1}{n} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

Dimostrazione. Il corollario segue direttamente dalla Proposizione 3.3 e dal Lemma 3.5, infatti per $0 \leq k \leq n-1$ si ha $\mathbb{P}(|U| = k) = \mathbb{P}(I = k+2)$. □

3.2 Struttura locale

Vediamo alcune proprietà *locali* degli alberi aleatori, in particolare come sono distribuiti i sottoalberi.

Definizione 3.7. Sia $t = (V, E, \rho) \in \mathcal{R}_n$. Dato $v \in V$, indichiamo con t_v il sottoalbero massimo di t radicato in v . Cioè, il sottoalbero di t i cui nodi sono i nodi $u \in V$ discendenti di v in t .

Proposizione 3.8. Sia $T \in_u \mathcal{R}_n$. Allora $\forall v \in [n], \forall 1 \leq k \leq n$ si ha

$$\mathbb{P}(|V(T_v)| = k) = \frac{k^{k-1}}{k!} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!n^{k-1}}$$

Inoltre $V(T_v) \setminus \{v\}$ è uniforme in $[n] \setminus \{v\}$ rispetto alla sua cardinalità e T_v è uniformemente distribuito tra quelli radicati in v , rispetto a $V(T_v)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{R}_n(v, k) := \{t \in \mathcal{R}_n : |V(t_v)| = k\}$. Un elemento di questo insieme può essere costruito nel seguente modo:

1. Per prima cosa individuiamo l'insieme dei nodi $V(t_v) \subseteq V(t)$. Il nodo v è fissato, dunque abbiamo $\binom{n-1}{k-1}$ possibilità.
2. Poi dobbiamo specificare quale sia l'albero t_v . Nuovamente v è fissato come radice, dunque dalla formula di Cayley avremo k^{k-2} possibilità.
3. Successivamente stabiliamo quale sia l'albero $t - t_v$ ottenuto rimuovendo t_v da t . Questo albero avrà $n - k$ nodi, perciò, sempre dalla formula di Cayley, avremo $(n - k)^{n-k-1}$ possibilità.
4. Infine ci resta da indicare il genitore di v in t . Abbiamo $n - k$ possibilità.

Mettendo tutto insieme otteniamo $\mathcal{R}_n(v, k) = \binom{n-1}{k-1} k^{k-2} (n - k)^{n-k}$. Per concludere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|V(T_v)| = k) &= \frac{|\mathcal{R}_n(v, k)|}{|\mathcal{R}_n|} \\ &= \frac{(n-1)! k^{k-2}}{(n-k)!(k-1)!} \frac{(n-k)^{n-k}}{n^{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \frac{k^{k-1}}{k!} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

Le ultime due affermazioni discendono dal fatto che $T \in_u \mathcal{R}_n$. Infatti, fissato $V(T_v)$, abbiamo fissato anche $V(T - T_v)$. Dunque, riutilizzando quanto trovato nei punti (2),(3),(4), se $V(T_v) = V$, allora ci saranno $|V|^{|V|-2}$ possibili alberi radicati in v con insieme dei nodi $V(T_v)$ (chiamiamo questo insieme A) e $(n - |V|)^{n-|V|}$ alberi $T - T_v$ a cui T_v può essere "attaccato" (chiamiamo questo altro insieme B). Allora fissato un albero $t \in A$ con insieme dei nodi V di cardinalità k si ha

$$\mathbb{P}(T_v = t \mid V(T_v) = V) = \frac{\mathbb{P}(T_v = t)}{\mathbb{P}(V(T_v) = V)} = \frac{|B|}{|B||A|} = \frac{1}{|V|^{|V|-2}}$$

Infine, per $V \in [n] \setminus \{v\}$ segue che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V(T_v) \setminus \{v\} = V \mid |V(T_v)| = k) &= \frac{\mathbb{P}(V(T_v) = V \cup \{v\}, |V \cup \{v\}| = k)}{\mathbb{P}(|V(T_v)| = k)} \\ &= \frac{|B||A|}{|\mathcal{R}_n(v, k)|} = \binom{n-1}{k-1}^{-1} \end{aligned}$$

□

Cosa succede quando il numero di nodi tende ad *infinito*? Otteniamo una distribuzione nota?

Corollario 3.9. *Sia $T \in_u \mathcal{R}_n$. Allora, fissato $k \in \mathbb{N}$, per $n \rightarrow \infty, \forall v \in [n]$ si ha*

$$\mathbb{P}(|V(T_v)| = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{k^{k-1} e^{-k}}{k!}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente abbiamo che

$$\mathbb{P}(|V(T_v)| = k) = \frac{k^{k-1}}{k!} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{n-k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!n^{k-1}}$$

dunque per $n \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{n-k} &= \left(1 - \frac{k}{n} \right)^n \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-k} \\ \frac{(n-1)!}{(n-k)!n^{k-1}} &= \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1))}{n^{k-1}} = \frac{n^{k-1} + \cdots}{n^{k-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Da cui si trova la tesi. $\square$

Osservazione 3.10. L'espressione ottenuta nel corollario è quella della distribuzione di probabilità di Borel con parametro 1.

3.3 Struttura globale

Vediamo come si distribuiscono le lunghezze dei rami nella costruzione degli alberi che abbiamo usato per dimostrare la formula di Cayley nel capitolo precedente.

Nota 3.11. Diamo un po' di notazione. Sia $t = (V, E, \rho)$ un albero radicato e $S \subset V$:

- Indichiamo con $t\langle S \rangle$ il più piccolo sottoalbero di t contenente la radice e tutti gli elementi di S .
- Sia $v \in V$. Indichiamo con $\alpha(v, t\langle S \rangle)$ il nodo $w \in t\langle S \rangle$ che minimizza $\text{dist}(v, w)$.
- Usiamo la notazione del fattoriale discendente:

$$(m)_i = \frac{m!}{(m-i)!} = m(m-1) \cdots (m-i+1)$$

Osservazione 3.12. Quando abbiamo definito la funzione t per dimostrare la formula di Cayley, usando la notazione della Definizione 2.2, si nota che ad ogni iterazione, aggiungendo il cammino P_i all'albero che stiamo costruendo a partire da una sequenza $u \in [n]^{n-1}$, otteniamo l'albero $t_i = t(u)\langle l_1, \dots, l_i \rangle$.

Definizione 3.13. Sia $t \in \mathcal{R}_n$, con foglie $l_1, \dots, l_k$. Per $i \geq 1$ definiamo $D_{n,i}(t)$ come la distanza in t tra $t\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle$ e l_i .

Proposizione 3.14. Sia $T \in_u \mathcal{R}_n$. Siano $l_1, \dots, l_k$ le foglie di T ordinate in modo crescente. Per $i \geq 1$ consideriamo $D_{n,i} := D_{n,i}(T)$. Allora $\forall 1 \leq r \leq k$ e $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{N}$ che rispettano $g_j > 0, \forall j$ e $G_r := \sum_{j=1}^r g_j \leq n + r - 1$ si ha

$$\mathbb{P}(D_{n,i} = g_i, 1 \leq i \leq r) = \frac{(n)_{G_r - (r-1)}}{n^{G_r + 1}} \prod_{j=1}^r (G_j - (j-1)) \quad (3.1)$$

Inoltre, $\forall 1 \leq i \leq k$, il nodo $\alpha(l_i, T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle)$ è uniforme tra i nodi che non sono foglie di $T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle$.

Dimostrazione. Sia $T \in_u \mathcal{R}_n$. Sfruttando la funzione v della Definizione 2.2, consideriamo $V := v(T) = (V_1, \dots, V_{n-1})$, così abbiamo $V \in_u [n]^{n-1}$. Per coerenza con la notazione usata, indichiamo con $j(i)$ l'indice della i -esima cifra ripetuta in V . Allora per avere $D_{n,i} = g_i, \forall 1 \leq i \leq r$, dobbiamo avere $j(i) = 1 + G_i$. Di conseguenza bisogna che le entrate

$$\begin{aligned} &V_1, \dots, V_{g_1} \\ &V_{g_1+2}, \dots, V_{g_1+g_2} \\ &V_{g_1+g_2+2}, \dots, V_{g_1+g_2+g_3} \\ &\vdots \\ &V_{G_{r-1}+2}, \dots, V_{G_r} \end{aligned}$$

siano tutte distinte (chiamiamo questo evento A), e che

$$\begin{aligned} &V_{g_1+1} \in \{V_1, \dots, V_{g_1}\} \\ &V_{g_1+g_2+1} \in \{V_1, \dots, V_{g_1+g_2}\} \\ &\vdots \\ &V_{G_r+1} \in \{V_1, \dots, V_{G_r}\} \end{aligned}$$

(chiamiamo questo evento B). L'evento A consiste nel fatto che $G_r - (r-1)$ variabili aleatorie uniformemente distribuite su $[n]$ indipendenti siano tutte distinte, perciò ha probabilità

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{j=1}^{G_r-(r-1)} \frac{n - (j-1)}{n} = \frac{(n)_{G_r-(r-1)}}{n^{G_r-(r-1)}} \quad (3.2)$$

Per l'evento B , invece, procediamo dividendolo in sotto-eventi e usando la formula della probabilità totale: sia B_j l'evento $V_{G_j+1} \in \{V_1, \dots, V_{G_j}\}$. Dato che avvengono $A, B_1, \dots, B_{j-1}$, ci sono $G_j - (j-1)$ ripetizioni nell'insieme $\{V_1, \dots, V_{G_j}\}$, dunque

$$\mathbb{P}(B_j \mid A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}) = \frac{G_j - (j-1)}{n}$$

Dato che $B = \bigcap_{j=1}^r B_j$, segue che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \mid A) &= \prod_{j=1}^r \mathbb{P}(B_j \mid A \cap B_1 \cap \dots \cap B_{j-1}) \\ &= \frac{1}{n^r} \prod_{j=1}^r (G_j - (j-1)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Infine, mettendo insieme (3.2) e (3.3) otteniamo la (3.1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_{n,i} = g_i, 1 \leq i \leq r) &= \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) \\ &= \frac{(n)_{G_r-(r-1)}}{n^{G_r+1}} \prod_{j=1}^r (G_j - (j-1))\end{aligned}$$

Inoltre, $\forall 1 \leq i \leq k$, dato che A e $\bigcap_{j=1}^{i-1} B_j$ succedono, il nodo $\alpha(l_i, T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle)$ sarà $V_{G_{i+1}}$, e l'evento B_i , condizionato ai precedenti, ci dice che $V_{G_{i+1}}$ è un elemento di $\{V_1, \dots, V_{G_i}\}$, che è l'insieme dei nodi non foglia di $T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle$. Essendo $V_{G_{i+1}}$ una variabile aleatoria uniformemente distribuita, se la condizioniamo ad appartenere ad un particolare insieme, questa sarà una variabile aleatoria uniformemente distribuita su quell'insieme, perciò $\alpha(l_i, T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle)$ è uniforme tra i nodi che non sono foglie di $T\langle l_1, \dots, l_{i-1} \rangle$. $\square$

Infine, come nella sezione precedente, mandiamo il numero di nodi ad infinito, e vediamo qual è il limite delle nostre distribuzioni. Per farlo abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Lemma 3.15. *Sia $k \geq 1$ fissato. Allora la funzione*

$$f(x_1, \dots, x_k) = e^{-\frac{(x_1 + \dots + x_k)^2}{2}} \prod_{j=1}^k (x_1 + \dots + x_j)$$

è una densità di probabilità su $\mathbb{R}_+^k = (0, +\infty)^k$.

Dimostrazione. Notiamo che la funzione f è ben definita e positiva su $\mathbb{R}_+^k$.

Sia $x = (x_1, \dots, x_k)$, mostriamo che

$$\int_{\mathbb{R}_+^k} f(x) \, dx = 1$$

Effettuiamo prima un cambio di variabile: consideriamo $\forall j = 1, \dots, k$

$$y_j = \sum_{i=1}^j x_i$$

e visto che $y_j - y_{j-1} = x_j \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}0 &\leq y_k \leq +\infty \\ 0 &\leq y_{k-1} \leq y_k \\ &\vdots \\ 0 &\leq y_1 \leq y_2\end{aligned}$$

Quindi il nostro integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^k} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \int_0^{y_k} \cdots \int_0^{y_2} \left(e^{-\frac{y_k^2}{2}} \prod_{j=1}^k y_j \right) dy_1 \cdots dy_{k-1} dy_k \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y_k^2}{2}} \int_0^{y_k} y_{k-1} \cdots \int_0^{y_2} y_1 dy_1 \cdots dy_{k-1} dy_k \end{aligned}$$

Siccome

$$\int_0^{y_2} y_1 dy_1 = \frac{y_2^2}{2}$$

proseguendo con l'integrazione otteniamo

$$\int_0^{y_3} \frac{y_2^3}{2} dy_2 = \frac{y_3^4}{2^2 2}$$

Dunque, per induzione si osserva che per $0 < j < k$ si ha

$$\int_0^{y_{j+1}} \frac{y_j^{2j-1}}{(2^{j-1}(j-1)!) } dy_j = \frac{y_{j+1}^{2j}}{2^j j!}$$

Quindi ci rimane da mostrare che

$$\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \int_0^{+\infty} y_k^{2k-1} e^{-\frac{y_k^2}{2}} dy_k = 1$$

o equivalentemente

$$\int_0^{+\infty} y_k^{2k-1} e^{-\frac{y_k^2}{2}} dy_k = 2^{k-1}(k-1)!$$

Per semplicità scriviamo $y = y_k$ e integriamo per parti, integrando $ye^{-\frac{y^2}{2}}$ e derivando y^{2k-2}

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y^{2k-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= \int_0^{+\infty} y^{2k-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \left[-e^{-\frac{y^2}{2}} y^{2k-2} \right]_{y=0}^{y \rightarrow +\infty} + 2(k-1) \int_0^{+\infty} y^{2k-3} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= 2(k-1) \int_0^{+\infty} y^{2(k-1)-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Procedendo analogamente, per induzione si ottiene che per $0 < j < k$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} y^{2k-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= 2^{j-1} \prod_{i=1}^{j-1} (k-i) \int_0^{+\infty} y^{2(k-(j-1))-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \left[-e^{-\frac{y^2}{2}} y^{2(k-j)} \right]_{y=0}^{y \rightarrow +\infty} + 2^j \prod_{i=1}^j (k-i) \int_0^{+\infty} y^{2(k-j)-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= 2^j \prod_{i=1}^j (k-i) \int_0^{+\infty} y^{2(k-j)-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

e per $j = k - 1$ concludiamo

$$\int_0^{+\infty} y^{2k-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2^{k-1} (k-1)! \int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2^{k-1} (k-1)!$$

□

Lemma 3.16. *Sia $k(n) = x\sqrt{n}$, $x \in \mathbb{R}_+$. Allora*

$$\prod_{j=1}^{\lfloor k(n) \rfloor} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dimostrazione. Consideriamo equivalentemente il prodotto $\prod_{j=0}^{k(n)} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$, tralasciando la funzione *floor* che non influirà sul risultato quando si passerà al limite. Riordinando i termini si ha

$$\prod_{j=0}^{k(n)} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \prod_{j=0}^{\frac{k(n)}{2}} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(1 - \frac{k(n)-j}{n}\right)$$

Sviluppando i termini di questa produttoria otteniamo

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(1 - \frac{k(n)-j}{n}\right) &= 1 - \frac{j}{n} - \frac{k(n)-j}{n} + \frac{(k(n)-j)j}{n^2} \\ &= 1 - \frac{k(n)}{n} + \frac{(k(n)-j)j}{n^2} \end{aligned}$$

Notiamo che la quantità appena ricavata può essere stimata, per ogni j , come segue:

$$1 - \frac{k(n)}{n} \leq 1 - \frac{k(n)}{n} + \frac{(k(n)-j)j}{n^2} \leq 1 - \frac{k(n)}{n} + \frac{k(n)^2}{4n^2} = 1 - \frac{4k(n) - x}{4n}$$

Sostituendo termine per termine si ottiene da un lato

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{k(n)} \left(1 - \frac{j}{n}\right) &\geq \prod_{j=0}^{\frac{k(n)}{2}} \left(1 - \frac{k(n)}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{k(n)}{n}\right)^{\frac{k(n)}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Mentre dall'altro lato si ha

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{k(n)} \left(1 - \frac{j}{n}\right) &\leq \prod_{j=0}^{\frac{k(n)}{2}} \left(1 - \frac{4k(n) - x}{4n}\right) \\
&= \left(1 - \frac{4k(n) - x}{4n}\right)^{\frac{k(n)}{2}} \\
&= \left(1 - \frac{4x\sqrt{n} - x}{4n}\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}} \\
&\leq \left(1 - \frac{4 - \epsilon}{4\sqrt{n}}x\right)^{\frac{x\sqrt{n}}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{4 - \epsilon}{4} \frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza vale $\forall \epsilon > 0$, per $\sqrt{n} > \frac{1}{\epsilon}$. Perciò, in definitiva si ha

$$\prod_{j=1}^{k(n)} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

□

Proposizione 3.17. *Sia $k \geq 1$ fissato e sia $D = (D_1, \dots, D_k)$ un vettore aleatorio con densità*

$$f_D(x_1, \dots, x_k) = e^{-\frac{(x_1 + \dots + x_k)^2}{2}} \prod_{j=1}^k (x_1 + \dots + x_j)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$. Allora $(n^{-1/2}D_{n,1}, \dots, n^{-1/2}D_{n,k}) \xrightarrow{d} D$, per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ e $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$. Scriviamo $x := \sum_{i=1}^k x_i$. Dalla Proposizione 3.14 abbiamo che vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{n,i} = \lfloor x_i \sqrt{n} \rfloor, 1 \leq i \leq k) &= \\
&= \frac{\binom{n}{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor - (k-1)}}{n^{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor + 1}} \prod_{j=1}^k (\lfloor x_1 \sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor x_j \sqrt{n} \rfloor - (j-1))
\end{aligned}$$

Allora abbiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor - (k-1)}}{n^{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor + 1 - k}} &= \frac{n(n-1) \dots (n - (\lfloor x\sqrt{n} \rfloor - (k-1)) + 1)}{n^{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor - (k-1)}} \\
&= \prod_{j=1}^{\lfloor x\sqrt{n} \rfloor} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

per il Lemma 4.1. Allora possiamo dire che, per $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{n,i} = \lfloor x_i \sqrt{n} \rfloor, 1 \leq i \leq k) &= \\
&= (1 + o(1)) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{n^k} \prod_{j=1}^k (\lfloor x_1 \sqrt{n} \rfloor + \cdots + \lfloor x_j \sqrt{n} \rfloor - (j-1)) \\
&= (1 + o(1)) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{n^k} \prod_{j=1}^k \sqrt{n} \left(x_1 + \cdots + x_j - \frac{j-1}{\sqrt{n}} \right) \\
&= (1 + o(1)) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{n^{k/2}} \prod_{j=1}^k (x_1 + \cdots + x_j) \\
&= \frac{1 + o(1)}{n^{k/2}} f_D(x_1, \dots, x_k)
\end{aligned}$$

Di conseguenza, per ogni rettangolo $R = \prod_{j=1}^k [a_j, b_j] \in \mathbb{R}_+^k$, definendo il rettangolo riscalato $n^{-1/2}R = \prod_{j=1}^k [n^{-1/2}a_j, n^{-1/2}b_j]$ e con un cambio di variabili, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((n^{-1/2}D_{n,1}, \dots, n^{-1/2}D_{n,k}) \in R\right) &= (1 + o(1)) \int_{n^{-1/2}R} \left(\frac{1}{n^{k/2}} f_D(x_1, \dots, x_k) \right) d\mathbf{x} \\
&= (1 + o(1)) \int_R f_D(x_1, \dots, x_k) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Per cui concludiamo che $(n^{-1/2}D_{n,1}, \dots, n^{-1/2}D_{n,k}) \xrightarrow{d} D$, per $n \rightarrow \infty$. $\square$

Osservazione 3.18. Se si pone $k = 1$ si ottiene

$$f_D(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

che è la densità di una distribuzione di Rayleigh con parametro 1.

Capitolo 4

Processi di diramazione

I processi di diramazione sono dei particolari *processi stocastici* che descrivono l'evoluzione nel numero degli individui di una popolazione.

Gli alberi sono un ottimo strumento per visualizzare l'evoluzione della popolazione, infatti ad ogni livello dell'albero corrisponderà una *generazione*. Assumiamo che ogni individuo si riproduca procreando un numero di figli che segue una distribuzione di probabilità fissata, uguale per tutti gli individui. Riusciamo a trovare delle condizioni che ci permettano di stabilire se eventualmente la popolazione si estinguerà, o se riuscirà a sopravvivere indefinitamente?

4.1 Albero di Ulam-Harris

Definizione 4.1. L'albero di Ulam-Harris $\mathcal{U}$, è un albero con insieme dei nodi $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$, dove $\mathbb{N}^0 := \{\emptyset\}$. Dunque

1. $\emptyset$ è la radice.
2. un nodo all'altezza n è etichettato da una stringa $v = v_1 v_2 \dots v_n \in \mathbb{N}^n$ ed ha genitore $\text{gen}(v) = v_1 v_2 \dots v_{n-1}$ e figli $(vi, i \geq 1) = (v_1 v_2 \dots v_n i, i \geq 1)$.

Si può pensare ai figli di un nodo generico v come nati uno dopo l'altro, cioè prima v_1 , poi v_2 e così via. In questo senso, se $i < j$ diciamo che vi è un fratello maggiore di vj . Ne forniamo una rappresentazione nella Figura 4.1: con le linee tratteggiate intendiamo che il ramo prosegue sia in *altezza* che in *larghezza*.

Nota 4.2. Scriveremo $\mathcal{U}$ anche per indicare $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$, identificando l'albero con l'insieme dei suoi nodi.

Definizione 4.3. Un sottoalbero di $\mathcal{U}$ è un insieme $t \subset \mathcal{U}$ che rispetta le seguenti proprietà:

1. $\emptyset \in t$; la radice deve essere presente.
2. Se $v \in t$, allora $\text{gen}(v) \in t$; cioè se c'è un nodo, ci devono essere anche tutti i nodi di cui è discendente.

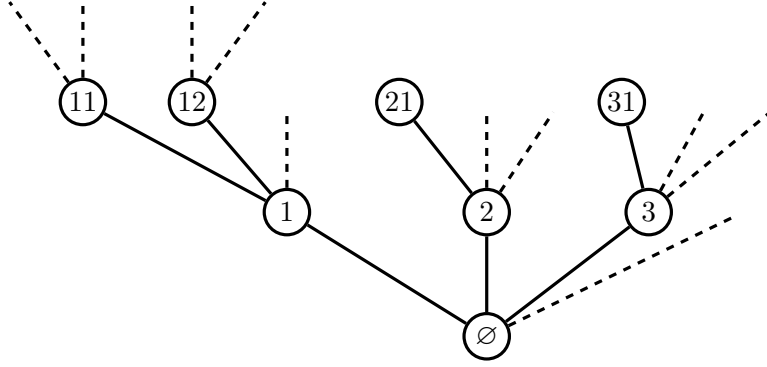


Figura 4.1: L'albero di Ulam-Harris

3. Se $v = wi \in t$, allora $wj \in t, \forall j \leq i$; cioè se c'è un nodo devono esserci anche tutti i suoi fratelli maggiori.

Dato un sottoalbero t di $\mathcal{U}$, per $v \in t$ scriviamo $c(v; t) := \sup\{i : vi \in t\}$ per indicare il numero di figli di un nodo v in t (può essere infinito).

Nota 4.4. Diamo un po' di notazione:

- $t_n := t \cap \mathbb{N}^n$; possiamo pensarlo come l' n -esima generazione di t .
- $t_{\leq n} := \bigcup_{m=0}^n t_m$.
- Un sottoalbero $t \subset \mathcal{U}$ è *finito* se $|t| < \infty$.
- Un sottoalbero $t \subset \mathcal{U}$ è *localmente finito* se $\forall n \in \mathbb{N}, |t_n| < \infty$; in questi sottoalberi ogni nodo ha un numero finito di figli.

Definizione 4.5. Definiamo l'insieme degli *alberi piani*

$$\mathcal{T} = \{t \subset \mathcal{U} \mid t \text{ è localmente finito}\}$$

Osservazione 4.6. Gli insiemi di alberi considerati nel capitolo precedente erano insiemi finiti, dunque non dovevamo preoccuparci di definire dove le misure di probabilità stessero agendo, in quanto l'insieme delle parti forniva una σ -algebra.

In questo caso, invece, l'insieme $\mathcal{T}$ che stiamo considerando, e su cui vogliamo definire degli *alberi aleatori*, non è un insieme finito. Perciò dobbiamo definire uno spazio misurabile su $\mathcal{T}$ (cioè definire una σ -algebra su questo insieme).

Definizione 4.7. Sia $t \in \mathcal{T}$ e $n \in \mathbb{N}$. Definiamo $[t]_{\leq n} = \{t' \in \mathcal{T} \mid t'_{\leq n} = t_{\leq n}\}$.

Nota 4.8. La relazione $t'_{\leq n} = t_{\leq n}$, con cui definiamo l'insieme sopra, è una relazione d'equivalenza. Dunque quegli insiemi sono classi di equivalenza, e al variare di n ne abbiamo numerabili.

Definizione 4.9. Sia $\mathcal{F}_n := \sigma(\{[t]_{\leq n} \mid t \in \mathcal{T}\})$. Definiamo la σ -algebra $\mathcal{F} := \sigma(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n)$ su $\mathcal{T}$.

Osservazione 4.10. In particolare, visto che $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \forall n \geq 0$, si ha che $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ è una filtrazione in $\mathcal{T}$.

Sia $\mathcal{F}^{\text{fin}} = \sigma(\{\{t\} \mid t \in \mathcal{T}, |t| < \infty\})$ la σ -algebra generata dagli alberi piani finiti, allora $\mathcal{F}^{\text{fin}} \subset \mathcal{F}$.

4.2 Alberi di Bienaymé

Vediamo finalmente come possiamo modellare l'aleatorietà dell'evoluzione della popolazione per riuscire a rispondere alle domande poste all'inizio del capitolo.

Definizione 4.11. Sia μ una misura di probabilità su $\mathbb{N}$. Un albero di *Bienaymé* con distribuzione dei discendenti μ , o albero di Bienaymé(μ), è un albero piano aleatorio T che è l'albero della famiglia del processo di diramazione con distribuzione dei discendenti μ .

La legge B_μ di T è determinata unicamente dalla seguente proprietà: $\forall h \geq 1, \forall t \in \mathcal{T}$ di altezza al più h si ha

$$\mathbb{P}(T_{\leq h} = t) = B_\mu(\{t \in \mathcal{T} \mid T_{\leq h} = t\}) = \prod_{v \in t_{\leq h-1}} \mu(c(v; t))$$

Un albero T di Bienaymé(μ) può essere costruito equivalentemente nei due modi descritti di seguito:

1.
 - Si parte dalla radice $\emptyset$. Sia $X_\emptyset \stackrel{d}{=} \mu$.
 - Diamo a $\emptyset$ i figli $1, \dots, X_\emptyset$.
 - $\forall k = 1, \dots, X_\emptyset$, siano $X_k \stackrel{d}{=} \mu$, tutti indipendenti tra loro.
 - Diamo a k i figli $k1, k2, \dots, kX_k$.
 - Ripetere per sempre o fino ad esaurimento; chiamiamo T l'albero aleatorio ottenuto alla fine.
2. Siano $(X_v, v \in \mathcal{U})$ variabili aleatorie indipendenti di legge μ . Sia T il sottoalbero aleatorio di $\mathcal{U}$ in cui la radice $\emptyset$ ha $X_\emptyset$ figli e in generale, per induzione, se $v \in T$, allora $c(v; T) := X_v$.

Definizione 4.12. Sia $Z_n = Z_n(T)$ il numero di individui di T nella n -esima generazione $T_n = T \cap \mathbb{N}^n$, e indichiamo con $|T| := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ il numero totale di individui. Diciamo che c'è *sopravvivenza* se $\forall n, Z_n > 0$, altrimenti c'è *estinzione*. Equivalentemente, c'è sopravvivenza se $|T| = \infty$, mentre c'è estinzione se $|T| < \infty$.

Adesso enunciamo il teorema che ci fornirà delle risposte alle domande poste ad inizio capitolo.

Teorema 4.13. [Teorema fondamentale dei processi di diramazione] Sia $X \stackrel{d}{=} \mu$ una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$, e sia T un albero di Bienaymé(μ). Allora $\mathbb{P}(|T| = \infty) > 0$ se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni.

(i) $\mathbb{P}(X = 1) = 1$.

(ii) $\mathbb{E}[X] > 1$.

Nota 4.14. Notiamo che riusciamo a stabilire solamente se $\mathbb{P}(|T| = \infty) > 0$, perciò non avremo la certezza che la nostra popolazione sopravviverà indefinitamente. In effetti questo è banalmente vero se $\mu(0) = 0$, mentre se $\mu(0) > 0$ avremo sempre una probabilità non nulla che la popolazione si estingua.

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati intermedi, da cui il teorema discenderà facilmente dopo qualche osservazione.

Lemma 4.15. Sia $X \stackrel{d}{=} \mu$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X]^n$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n \in \mathbb{N}$. Banalmente per $n = 0$ si ha $Z_n = 1$ (l'unico individuo presente è la radice), dunque la tesi è verificata. Supponiamo che per un qualche $n \in \mathbb{N}$ valga $\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[X]^n$. Allora si ha

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_\emptyset]] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_\emptyset = k] \mathbb{P}(X_\emptyset = k)$$

Dato $X_\emptyset = k$, ognuno dei k figli di $\emptyset$ sono la radice di una copia indipendente del processo iniziale, dove però gli individui della generazione $n + 1$ del rispettivo ramo nel processo iniziale, corrispondono agli individui della generazione n del nuovo processo. Dunque si ha

$$\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid X_\emptyset = k] = k\mathbb{E}[Z_n]$$

Allora, si conclude per induzione

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}[Z_n] \mathbb{P}(X_\emptyset = k) = \mathbb{E}[Z_n] \mathbb{E}[X_\emptyset] = \mathbb{E}[X]^{n+1}$$

□

Seconda versione del Lemma. Usiamo un altro approccio che ci dice qualcosa di più. Per $n \geq 0$ consideriamo $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_k, 0 \leq k \leq n)$. Allora $Z_{n+1} = \sum_{v \in T_n} X_v$, dunque $\forall S \subset \mathbb{N}^n$ fissato, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{n+1} \mid T_n = S] &= \mathbb{E} \left[\sum_{v \in S} X_v \mid T_n = S \right] = \sum_{v \in S} \mathbb{E}[X_v \mid T_n = S] \\ &= \sum_{v \in S} \mathbb{E}[X] = |S| \mathbb{E}[X] \end{aligned}$$

Dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato l'indipendenza delle $(X_v, v \in \mathcal{U})$.

Con $Z_n = |S|$ si ottiene $\mathbb{E}[Z_{n+1} \mid \mathcal{G}_n] = Z_n \mathbb{E}[X]$.

Dunque, con un argomento induttivo simile a quello usato in precedenza otteniamo il lemma, mentre se consideriamo $M_n = Z_n(\mathbb{E}[X])^{-n}$, abbiamo che $(M_n, n \geq 0)$ è una $\mathcal{G}_n$ -martingala. In particolare, se $\mathbb{E}[X] = 1$, allora $(Z_n, n \geq 0)$ è una $\mathcal{G}_n$ -martingala. $\square$

Corollario 4.16. *Se $\mathbb{E}[X] < 1$ allora $\mathbb{E}[|T|] < \infty$, cioè $\mathbb{P}(|T| = \infty) = 0$.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{E}[X] < 1$, ricordando la definizione di $|T|$ e il lemma appena dimostrato, si ha

$$\mathbb{E}[|T|] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[X]^n = \frac{1}{1 - \mathbb{E}[X]} < \infty$$

Infine, $\forall n \in \mathbb{N}$, dalla disuguaglianza di Markov, si ha

$$\mathbb{P}(|T| = \infty) \leq \mathbb{P}(|T| > n) \leq \frac{\mathbb{E}[|T|]}{n}$$

Dunque, necessariamente $\mathbb{P}(|T| = \infty) = 0$. $\square$

Consideriamo adesso la funzione

$$F(z) = F_\mu(z) := \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) z^k$$

Osservazione 4.17. Elenchiamo alcune proprietà di F che useremo prossimamente:

$$(1) \quad F(0) := \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(0)^k = \mathbb{P}(X = 0)$$

$$(2) \quad F(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)(1)^k = 1$$

(3) La F è una funzione continua¹ non decrescente, infatti

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k) z^k \Rightarrow F'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mu(k) z^{k-1} \geq 0$$

$$(4) \quad F'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mu(k) = \mathbb{E}[X].$$

¹serie di funzioni che converge totalmente in $[0, 1]$, per cui esistono e sono continue anche le sue derivate

(5) Anche la derivata seconda è una funzione continua:

$$F''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\mu(k)z^{k-2} \geq 0$$

Proposizione 4.18 (Proposizione fondamentale dei processi di diramazione). *Se $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ allora $\mathbb{P}(|T| < \infty) = \min_{x \geq 0} \{F(x) = x\}$*

Dimostrazione. Sia $p := \mathbb{P}(|T| < \infty)$. Mostriamo prima che p è un punto fisso per F (cioè $F(p) = p$), poi che p è la soluzione non negativa minima per $F(x) = x$.

Notiamo che $|T| < \infty \Leftrightarrow Z_n = 0, \exists n \in \mathbb{N}$, dunque

$$p = \mathbb{P}(|T| < \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right)$$

Inoltre se in una generazione non ci sono individui, si può certamente dire che vale lo stesso per quella successiva, cioè si ha che $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, equivalentemente $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$. Segue che

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) \quad (4.1)$$

Ora scriviamo $F_1(x) = F(x)$ e per $n > 1$, $F_n(x) = F(F_{n-1}(x))$, così $F_n(x)$ è il risultato di applicare F ad x n volte. Vogliamo mostrare che $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(Z_n = 0) = F_n(0)$. Per $n = 1$ abbiamo $F_1(0) = F(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Z_1 = 0)$. Analogamente a quanto fatto nel Lemma 4.15, per $n > 1$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0 \mid Z_1 = k) \mathbb{P}(Z_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0)^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_{n-1}(0)^k \mu(k) = F(F_{n-1}(0)) = F_n(0) \end{aligned}$$

Dunque, sostituendo in (4.1) e sfruttando la continuità di F , abbiamo

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(F_{n-1}(0)) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n-1}(0)\right) = F(p)$$

Infine, supponiamo che q sia una qualsiasi altra soluzione non negativa per $F(x) = x$. Dalla proprietà (3) si ha che F è non decrescente, perciò $q \geq 0 \Rightarrow q = F(q) \geq F(0)$ e di conseguenza $\forall n \in \mathbb{N}, q = F_n(q) \geq F_n(0)$. Per $n \rightarrow \infty$ otteniamo $q \geq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = p$, dunque che p è effettivamente la soluzione minima dell'equazione $F(x) = x$. $\square$

Torniamo adesso al Teorema 4.13.

Dimostrazione del Teorema fondamentale dei processi di diramazione. Abbiamo già mostrato che se $\mathbb{E}[X] < 1$ l'estinzione è certa, perciò assumiamo che $\mathbb{E}[X] \geq 1$.

- (i) Se $\mathbb{P}(X = 1) = 1$ ogni nodo, a partire dalla radice, avrà sicuramente un figlio, perciò si ha $\mathbb{P}(|T| = \infty) = 1$.
- (ii) Supponiamo allora che $\mathbb{P}(X = 1) < 1$. Sfruttando le proprietà (3),(4) dall'Osservazione 4.17 abbiamo $F'(1) = \mathbb{E}[X]$; perciò se $\mathbb{E}[X] > 1$, per continuità di F' , $\exists x < 1$ tale che $F'(y) > 1, \forall y \in (x, 1)$. Allora, espandendo F con la formula di Taylor con resto di Lagrange, centrata in 1, otteniamo

$$\begin{aligned} F(y) &= F(1) + F'(\xi)(y - 1) & \exists \xi \in (y, 1) \\ F(y) - y &= 1 - F'(\xi)(1 - y) - y \\ &= (1 - y)(1 - F'(\xi)) < 0 & \text{per } y \in (x, 1) \end{aligned}$$

Dato che $F(0) = \mathbb{P}(X = 0) \geq 0$, per il teorema dei valori intermedi si ha che $\exists z \in [0, x)$ tale che $F(z) = z$. Dunque, dalla Proposizione 4.18 si ha che

$$\mathbb{P}(|T| = \infty) = 1 - \mathbb{P}(|T| < \infty) \geq 1 - z > 0$$

Se invece, $\mathbb{E}[X] = 1$, dato che $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ si ha che $F(0) = \mathbb{P}(X = 0) > 0$, e inoltre $\exists k > 1$ tale che $\mu(k) > 0$. Di conseguenza, dalla proprietà (5) si nota che $F''(z) > 0, \forall z > 0$. Analogamente a prima abbiamo che

$$\begin{aligned} F(x) &= F(1) + F'(1)(x - 1) + \frac{F''(\xi)}{2}(x - 1)^2 & \exists \xi \in (x, 1) \\ F(x) - x &= 1 + \mathbb{E}[X](x - 1) - x + \frac{F''(\xi)}{2}(x - 1)^2 \\ &= \frac{F''(\xi)}{2}(x - 1)^2 > 0 & \forall x \in (0, 1) \end{aligned}$$

Dunque, in questo caso, l'unica soluzione per $F(z) = z$ si ha con $z = 1$, cioè

$$\mathbb{P}(|T| = \infty) = 1 - \mathbb{P}(|T| < \infty) = 0$$

□

Bibliografia

- [1] Louigi Addario-Berry. Lecture notes for the 2021 CRM-PIMS summer school in probability. 2021. <https://problab.ca/louigi/notes/ssprob2021.pdf>.
- [2] Louigi Addario-Berry, Serte Donderwinkel, Mickaël Maazoun, and James Martin. A new proof of Cayley’s formula. *arXiv preprint arxiv:2107.09726*, 2021.
- [3] John W Moon. Various proofs of Cayley’s formula for counting trees. In *A seminar on Graph Theory*. Holt, Rinehart and Winston, 1967.
- [4] Peter W Shor. A new proof of Cayley’s formula for counting labeled trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 71(1):154–158, 1995.
- [5] Robin J. Wilson. *Introduction to Graph Theory*. Longman, 4th edition, 1996.