

# Indice

<b>1 Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2 Modelli di sospensioni</b>	<b>4</b>
2.1 Generalità .....	4
2.2 Sospensione passiva <i>single mass</i> .....	7
2.3 Sospensione attiva <i>single mass</i> .....	9
2.4 Sospensione attiva <i>double mass</i> .....	10
2.5 Fondo stradale .....	12
<b>3 Controllo</b>	<b>12</b>
3.1 Caso <i>single mass</i> .....	13
3.1.1 Tuning .....	15
3.1.2 Stabilità .....	19
3.2 Caso <i>double mass</i> .....	20
3.2.1 Forza di contatto .....	24
3.2.2 Stabilità .....	25
<b>4 Conclusioni</b>	<b>27</b>
<b>Appendice</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>



# 1 Introduzione

La sospensione di un veicolo è il sistema di connessione fra il telaio e la ruota. Quindi tutto ciò che contribuisce alla massa sospesa: telaio, carrozzeria, componenti meccanici e passeggeri è sostenuto dalle sospensioni. Parte della massa è invece non sospesa, e comprende il pneumatico, la ruota, parte dell'impianto frenante e della sospensione stessa. Oltre a garantire il sostegno del mezzo le sospensioni hanno il compito di assorbire le irregolarità del fondo stradale, limitando gli spostamenti e le accelerazioni della parte sospesa del veicolo a fronte delle asperità del terreno. Questi due obiettivi, che si traducono da una parte in controllo dell'assetto e della manovrabilità e dall'altra in comfort di marcia, risultano essere contrastanti fra loro.

Un buon sostegno del veicolo è dato da una sospensione che si deforma poco, in questo modo tutti i trasferimenti di carico dovuti a disturbi aerodinamici, frenate, marcia in curva ecc.. sono ben contrastati dalla sospensione e l'altezza del veicolo dal terreno resterà quasi invariata. Non si avranno quindi comportamenti indesiderati come il rollio e il beccheggio: oscillazioni del veicolo intorno ai propri assi longitudinale e trasversale rispettivamente. Si avrà allora un'ottima stabilità e guidabilità del mezzo. D'altra parte una sospensione del genere non offrirebbe alcun comfort di marcia in quanto tutte le sollecitazioni provenienti dal fondo stradale non sarebbero assorbite da una sufficientemente veloce o ampia deformazione della sospensione. Normalmente è impossibile raggiungere entrambi gli obiettivi e si sceglie il compromesso migliore fra guidabilità e comfort in funzione del tipo di veicolo in questione.

Le sospensioni sono generalmente composte da due elementi disposti in parallelo: un ammortizzatore ed uno smorzatore. Il primo può essere schematicamente individuato da una molla di costante elastica  $k_s$ , il secondo da uno smorzatore viscoso con costante di smorzamento  $c$  proporzionale alla velocità di deformazione. Per venire incontro a entrambe le esigenze sopra esposte sarebbero necessarie sospensioni in grado di modificare le proprie caratteristiche a seconda dei casi e dei disturbi a cui sono sottoposte. In generale per automezzi che non devono rispondere a requisiti sportivi particolari o di alta gamma i parametri  $k_s$  e  $c$  sono fissi e scelti dalla casa costruttrice. Diversamente, sospensioni che si servono di uno smorzatore la cui

costante  $c$  è opportunamente modulabile da un controllore si dicono semiattive, sono dette invece attive sospensioni che si avvalgono di un attuatore in grado di generare una forza variabile  $F(t)$  fra veicolo e ruota. Obiettivo di questa tesina è la sintesi di un controllore che fornisca un'opportuna  $F(t)$  e la verifica tramite simulazione.

## 2 Modelli di sospensioni

### 2.1 Generalità

Poiché il comportamento dinamico di un veicolo è molto complesso e i fattori che lo influenzano sono vari e di difficile studio unificato, i modelli di analisi (e sintesi) sono semplificati in tre categorie:

- modelli *quarter car*
- modelli *half car*
- modelli *full car*

I modelli *quarter car* descrivono il comportamento di una sola ruota, quindi di un quarto dell'intero veicolo. In questo modo lo studio complessivo del mezzo è diviso in quattro sezioni distinte e vengono tralasciate le interazioni fra le quattro parti del veicolo: non si considerano quindi i moti di rollio, beccheggio e imbardata.

Della massa del veicolo considerata (corrispondente circa a un quarto del totale) una parte è trattata come massa sospesa  $M_s$  (massa derivante da carrozzeria, motore, passeggeri ecc..) e una come massa non sospesa  $M_n$  (elementi della sospensione, la ruota, il pneumatico ecc..). Massa sospesa e massa non sospesa sono connesse dalla sospensione, modellata, come detto sopra, da una molla di costante elastica  $k_s$  e da uno smorzatore viscoso con costante di smorzamento  $c$ ; mentre il tutto è separato dal manto stradale dal pneumatico, trattato in modo semplificato come una molla di costante  $k_p$ . Il modello *quarter car* dà quindi il seguente schema:

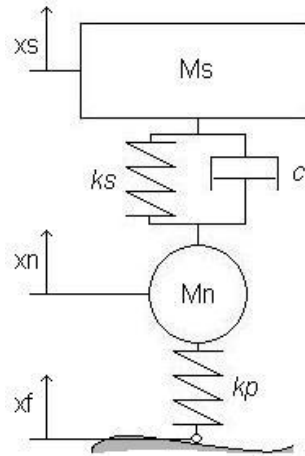


Fig.1 Schema modello *quarter car*.

I riferimenti per la posizione delle masse sono dati dalle quote  $x_s$  e  $x_n$  rispetto a un asse di riferimento orizzontale, mentre  $x_f$  descrive il profilo del fondo stradale.

Con il modello *half car* invece è possibile tenere conto, oltre che dei moti di semplice traslazione verticale, anche del beccheggio. La vettura è infatti considerata a metà nel senso della lunghezza tramite un'unica massa sospesa  $M_s$  sostenuta da una sospensione anteriore e una posteriore. Oltre alle quote  $x_s$  e  $x_n$ , per tenere conto anche del beccheggio si considera l'angolo  $\vartheta$ , che esprime appunto il fenomeno dato dall'accoppiamento dei movimenti anteriore e posteriore.

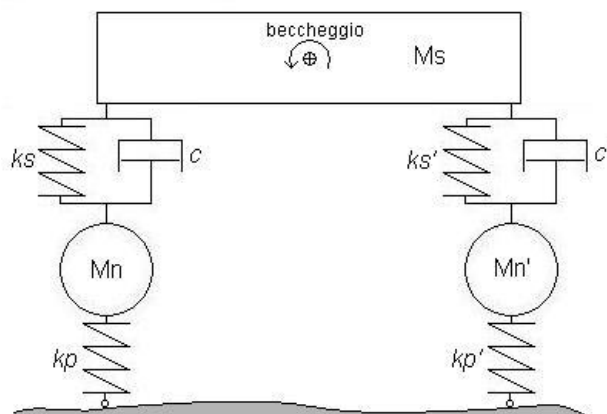


Fig.2 Schema modello *half car*.

Nel modello *full car*, in cui si considerano tutti i comportamenti del mezzo, la massa sospesa è un parallelepipedo sostenuto da tutte e quattro le

sospensioni. Questo consente di modellare anche il rollio e l'imbardata analogamente al beccheggio.

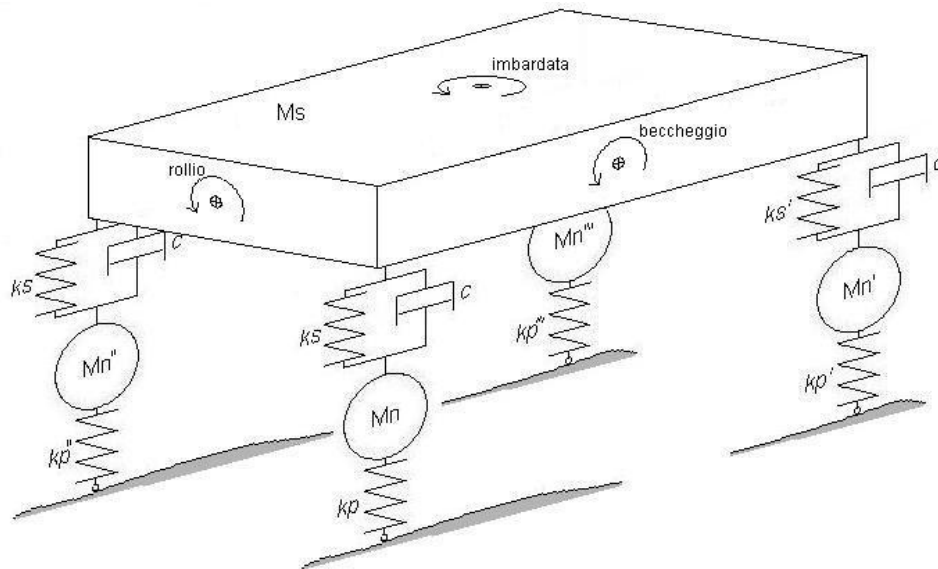


Fig.3 Schema modello *full car*.

I modelli ora considerati vengono scelti a seconda dell'accuratezza che si desidera ottenere e dei fenomeni che si intendono studiare. Può essere che per alcuni comportamenti del veicolo, modelli molto semplificati si discostino troppo dalla realtà, rendendo i risultati di studio e simulazioni poco attendibili. Nonostante ciò è possibile introdurre un'ulteriore semplificazione considerando una sola massa sospesa. Mentre nei modelli precedenti, detti *double mass*, le masse sospese erano due, si possono ottenere modelli *single mass*, a una sola massa sospesa, accorpendo le due parti in un unico elemento inerziale. La molla che fungeva da modello per il pneumatico viene eliminata e viene assegnato un nuovo valore alla molla del parallelo, che rappresenterà quindi il comportamento elastico sia dell'ammortizzatore che del pneumatico.

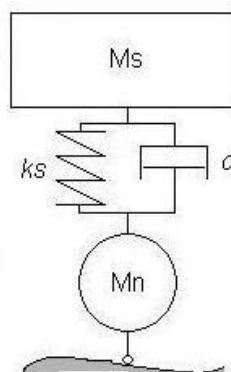


Fig.4 Shema *single mass* del modello *quarter car*

## 2.2 Sospensione passiva *single mass*

Per trovare il modello matematico che descrive il comportamento di una sospensione passiva *single mass* si considera il bilancio delle forze agenti sulla massa sospesa  $M_s$ . Concorrono a tale bilancio la resistenza data dallo smorzatore, la forza elastica dell'ammortizzatore, e la forza peso della vettura. L'ammortizzatore, a differenza dello smorzatore, darà un contributo anche a riposo, perché la molla sarà compressa sotto l'azione della forza peso. Chiamata  $L_r$  la lunghezza della molla a riposo,  $\Delta_s = x_f - x_s$  la deformazione della sospensione e  $\dot{\Delta}_s = \dot{x}_f - \dot{x}_s$  la velocità di deformazione, si ha:

$$M_s \ddot{x}_s = c \dot{\Delta}_s + k \Delta_s + k L_r - M_s g \quad (1)$$

Le quote  $x_f$  e  $x_s$  precedentemente introdotte possono ora fungere rispettivamente da ingresso ed uscita: mentre la prima rappresenta le sollecitazioni del veicolo provenienti dalla strada, la seconda, e le sue derivate, danno la risposta della vettura, che si traduce direttamente in guidabilità e comfort all'interno del veicolo.

Il punto di equilibrio  $\bar{x}_s$  del sistema (1) si calcola per  $x_f = 0$ , cioè con disturbo nullo:

$$\bar{x}_s = L_r - \frac{M_s g}{k}$$

Esso quindi può essere interpretato come la compressione che si ha quando la forza peso  $M_s g$  bilancia esattamente la spinta  $k L_r$  della molla compressa. Questo consente di semplificare la (1) considerando il sistema "traslato" con una nuova variabile  $\delta x_s$  così definita:

$$\delta x_s = x_s - \bar{x}_s = x_s - L_r + \frac{M_s g}{k} \quad (2)$$

Riscrivendo il sistema con  $x_s = \delta x_s + \bar{x}_s$ , visto che  $\dot{x}_s = \delta \dot{x}_s$  e  $\ddot{x}_s = \delta \ddot{x}_s$  si ottiene:

$$M_s \delta \ddot{x}_s = c(\dot{x}_f - \delta \dot{x}_s) + k(x_f - \delta x_s) \quad (3)$$

Riordinando l'equazione secondo ingressi ed uscite come esposto precedentemente:

$$M_s \delta \ddot{x}_s + c \delta \dot{x}_s + k \delta x_s = c \dot{x}_f + k x_f \quad (4)$$

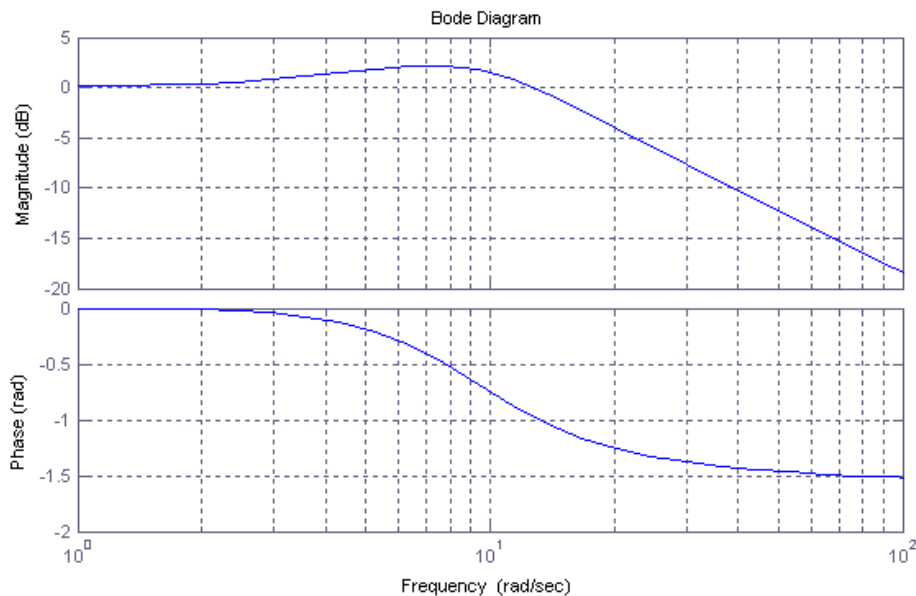
La (4) quindi dà alle trasformate di Laplace la funzione di trasferimento fra l'ingresso  $x_f$  e l'uscita  $\delta x_s$  :

$$G_{pass}(s) = \frac{cs + k}{M_s s^2 + cs + k} \quad (5)$$

Il confronto del polinomio caratteristico con la forma standard  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  dà la pulsazione naturale e il coefficiente di smorzamento:

$$\omega_n = \sqrt{k/M_s} \quad ; \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{kM_s}}$$

Assegnando ai parametri valori medi realistici per un'automobile ( $M_s = 250 \text{ Kg}$ ,  $c = 3000 \text{ Ns/m}$ ,  $k = 20000 \text{ N/m}$ ) si ottiene il seguente diagramma di Bode:



Dal grafico si nota che la sospensione funge da filtro per le asperità in alta frequenza del fondo stradale. Un miglioramento dell'effetto filtrante si può ottenere sia arretrando  $\omega_n$ , sia aumentando, se possibile, la pendenza del



grafico. La prima soluzione si può avere diminuendo il valore di  $k$ , che però non può essere ridotto oltre un certo valore in quanto la molla deve poter sostenere il peso della vettura; la seconda invece è ottenibile spostando in alta frequenza lo zero dalla funzione di trasferimento. Si nota infatti che lo zero deriva dall'effetto  $(c \dot{x}_f)$  che dà lo smorzatore nei confronti delle deformazioni del manto stradale. Lo smorzatore in effetti darebbe un contributo positivo se opponesse resistenza a un disturbo proveniente dai movimenti della vettura rispetto alla ruota, mentre dà un effetto negativo opponendo resistenza alle asperità dell'asfalto rispetto alla vettura, per le quali la sospensione dovrebbe essere il più possibile morbida. Questo comportamento negativo si riconosce appunto nello zero in  $-k/c$ . Si nota d'altra parte che per fare ciò bisognerebbe diminuire il valore di  $c$  il che porterebbe anche a una diminuzione di  $\xi$  e quindi a un sistema molto risonante.

## 2.3 Sospensione attiva *single mass*

Come esposto precedentemente una sospensione attiva comprende un attuatore in grado di generare una forza  $F(t)$  fra veicolo e ruota. L'entità di tale forza dipende sia dal controllo scelto sia dal tipo di tecnologia utilizzato per l'attuatore.

Aggiungendo l'attuatore al parallelo del modello passivo di Fig.4 si ottiene il seguente schema:

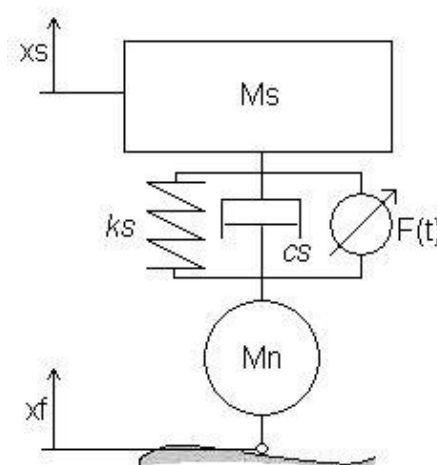


Fig.5 Schema *single mass* del modello *quarter car* attivo.

Per impostare le formule che descrivono il sistema si può procedere analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente per il modello passivo. Si ottiene:

$$M_s \ddot{x}_s = c_s \dot{\Delta}_s + k \Delta_s + k L_r - M_s g + F(t) \quad (6)$$

Dove, come prima,  $\dot{\Delta}_s = \dot{x}_f - \dot{x}_s$  e  $\Delta_s = x_f - x_s$ .

Il punto di equilibrio è ancora:

$$\bar{x}_s = L_r - \frac{M_s g}{k}$$

Utilizzando la nuova variabile  $\delta x_s$  definita in (2) e riscrivendo la (6) si ottiene:

$$M_s \delta \ddot{x}_s = c_s (\dot{x}_f - \delta \dot{x}_s) + k (x_f - \delta x_s) + F(t) \quad (7)$$

Dalla (7) si potrà ottenere lo schema retroazionato per applicare il controllo tramite  $F(t)$ . Se necessario, le grandezze utili al feedback saranno supposte, in linea teorica, tutte misurabili.

## 2.4 Sospensione attiva *double mass*

Si consideri ora un affinamento del modello precedente in cui si tiene conto anche del comportamento elastico del pneumatico. In questo modo, come detto in precedenza, si aggiunge la quota di riferimento  $x_n$  della massa non sospesa, e la costante elastica  $k_p$  del pneumatico. Questo, oltre che a migliorare il modello, consente di valutare un altro fenomeno importante per un veicolo, cioè la forza di contatto fra roua e asfalto, grandezza determinante per la stabilità del mezzo e la tenuta di strada.

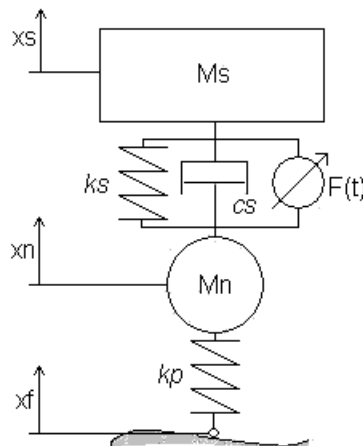


Fig.6 Schema *double mass* del modello *quarter car* attivo.

Si impostano qui due equazioni, una per la massa sospesa e una per la massa non sospesa:

$$M_s \ddot{x}_s = c_s(\dot{x}_n - \dot{x}_s) + k_s(x_n - x_s) + k_s L_r - M_s g + F(t) \quad (8)$$

$$M_n \ddot{x}_n = -c_s(\dot{x}_n - \dot{x}_s) - k_s(x_n - x_s) + k_p(x_f - x_n) - k_s L_r + k_p L_p - M_n g - F(t) \quad (9)$$

dove  $L_p$  è la lunghezza a riposo della molla corrispondente al pneumatico. I valori di equilibrio nei due casi sono:

$$\bar{x}_s = L_p + L_r - \left( \frac{M_s}{k_s} + \frac{M_s + M_n}{k_p} \right) g \quad ; \quad \bar{x}_n = L_p - \frac{M_s + M_n}{k_p} g$$

Traslando il sistema con le nuove variabili  $\delta x_s = x_s - \bar{x}_s$  e  $\delta x_n = x_n - \bar{x}_n$  si ottengono le due nuove equazioni prive, come prima, dei termini  $Mg$  e  $kL$ :

$$M_s \delta \ddot{x}_s = c_s(\delta \dot{x}_n - \delta \dot{x}_s) + k_s(\delta x_n - \delta x_s) + F(t) \quad (10)$$

$$M_n \delta \ddot{x}_n = -c_s(\delta \dot{x}_n - \delta \dot{x}_s) - k_s(\delta x_n - \delta x_s) + k_p(x_f - \delta x_n) - F(t) \quad (11)$$

La forza di contatto  $F_C(t)$  è data invece da:

$$F_C(t) = k_p(x_f - x_n) + k_p L_p$$

che con la variabile  $\delta x_n$  dà:

$$F_C(t) = k_p(x_f - \delta x_n) + (M_s + M_n)g \quad (12)$$

**Osservazione:** nei modelli descritti dalle (1),(7),(10) e (11) non sono considerati tutti i comportamenti della vettura dovuti ad altre cause esterne che non siano le irregolarità del fondo stradale, come per esempio accelerazioni della vettura nella marcia in curva, in frenata ecc..

## 2.5 Fondo stradale

Caratterizzare il profilo stradale in modo realistico con un segnale è un problema complesso. Inoltre, visto che la bontà dei controllori si testa con segnali canonici quali gradino, rampa, ecc., scegliere un segnale adatto per  $x_f$  che sia realistico e nel contempo favorevole per lo studio è ancora più arduo. Le sollecitazioni provenienti dal fondo stradale possono essere le più varie: dalla scabrosità dell'asfalto ai dossi artificiali, da dissesti stradali ad avvallamenti più o meno lunghi. Questa varietà di situazioni fa sì che la banda di frequenze che interessano il disturbo in questione sia molto ampia, dipendendo anche dalla velocità lineare del veicolo. Nel seguito per le simulazioni più realistiche sarà utilizzato un segnale a forma d'onda casuale di ampiezza non superiore a  $3\text{ cm}$  e di frequenza  $10\text{ Hz}$  per imitare la ruvidità dell'asfalto. Frequenze superiori a  $10\text{ Hz}$  sono di minor interesse in quanto già ben assorbite dalla parte passiva della sospensione, come si vede dal diagramma di Bode. Per controllare gli effetti e la taratura del controllore invece sarà adottato un segnale a gradino, nonostante il modello perda parzialmente di validità. Il sistema infatti insegue il gradino assestandosi in un punto di equilibrio diverso da zero, il che significa, a meno di una nuova traslazione del sistema simile a (2), che la sospensione rimane indefinitamente compressa o elongata, situazione molto lontana dalla realtà. Questo comportamento è invece realistico per disturbi di natura diversa, come per esempio un carico o l'assetto del veicolo.

## 3 Controllo

Per poter applicare un controllo attivo alla sospensione si rende necessaria la scelta delle grandezze che fungeranno da ingressi e uscite. La parte di modellizzazione è stata sviluppata supponendo che l'unico disturbo al sistema provenisse dalla sede stradale, di cui è stato considerato il profilo dissestato  $x_f$ . Questo sarà quindi l'ingresso di disturbo al sistema. Per quanto riguarda l'uscita possono essere interessanti diverse scelte in quanto, ai fini di un buon comfort all'interno della vettura, può risultare utile minimizzare tanto lo spostamento verticale della vettura, quanto, per esempio, l'accelerazione di tale

spostamento. Inoltre sono importanti per un veicolo anche altri fattori, come per esempio l'assetto (che non è stato compreso nei modelli) o la forza di contatto del pneumatico al terreno, grandezza compresa solo nel modello a due masse e importante per la sicurezza. Per semplicità nel seguito saranno considerati soltanto lo spostamento  $\delta x_s$  e la forza di contatto  $F_C(t)$ .

Visto che  $\delta x_s$  è definita come lo scostamento del livello del veicolo dal suo punto di equilibrio, il riferimento che sarà dato all'ingresso del sistema retroazionato sarà  $x_{rif} = 0$ .

### 3.1 Caso *single mass*

Applicando quanto detto e facendo riferimento alla (7) si ottengono due funzioni di trasferimento, una con ingresso  $x_f(t)$  e una con ingresso  $F(t)$ :

$$G(s) = \frac{sc_s + k_s}{s^2M_s + sc_s + k_s} \quad ; \quad G_1(s) = \frac{1}{s^2M_s + sc_s + k_s} \quad (13)$$

e il seguente schema di controllo in retroazione:

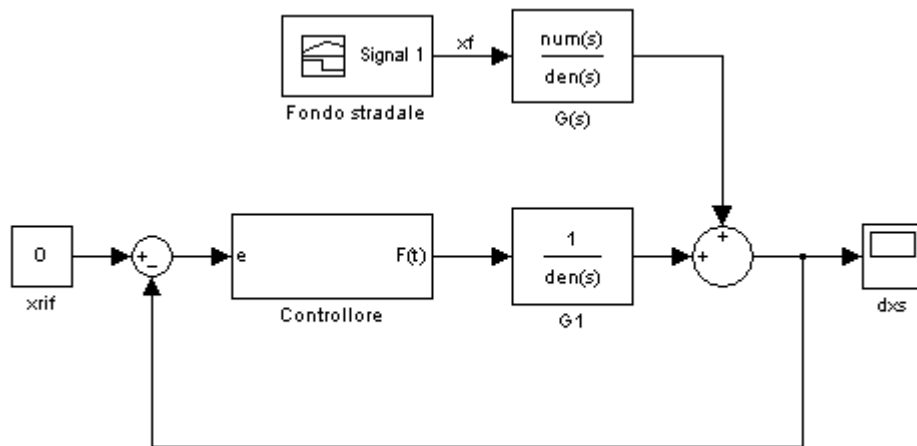


Fig. 7 Schema SIMULINK del sistema retroazionato.

La funzione di trasferimento fra disturbo e uscita quindi risulta essere :

$$W_{DY}(s) = \frac{G(s)}{1 + G_1(s)C(s)} \quad (14)$$

Si tratta ora di progettare il controllore  $C(s)$  in modo che siano garantite la stabilità del sistema a catena chiusa e una buona reiezione del disturbo in ingresso al sommatore. Per attenuare l'effetto del disturbo occorrerà rendere

piccolo  $|W_{DY}(j\omega)|$  almeno in corrispondenza delle frequenze di interesse, quindi dovrà essere  $|G_1(j\omega)C(j\omega)| \gg 1$ .

Si nota che l'ingresso del controllore è il segnale di errore dato da quanto si discosta l'altezza del veicolo dall'equilibrio e l'uscita è una forza. Questo significa che progettare un controllore puramente proporzionale equivale ad assimilarlo a una molla, mentre un contributo derivativo lo renderebbe uno smorzatore. Un termine integrale invece consentirebbe di correggere disturbi a frequenza nulla (o bassa) come per esempio la compressione in seguito a un carico oppure l'assetto.

Consideriamo per  $C(s)$  quindi la classica struttura PID:

$$C(s) = k_p \left( \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_l} + 1 \right) \quad (15)$$

Come valori iniziali, prima della taratura scegliamo:  $k_p = 40000$ ,  $T_d = 0.5$ ,  $T_i = 2$  per rendere preponderante il comportamento come sospensione di  $C(s)$  rispetto alla sospensione reale. Si ottiene il grafico seguente:

```
M=250
c=2500
k=20000
kp=40000
Td=0.5
Tl=0.1
Ti=2
```

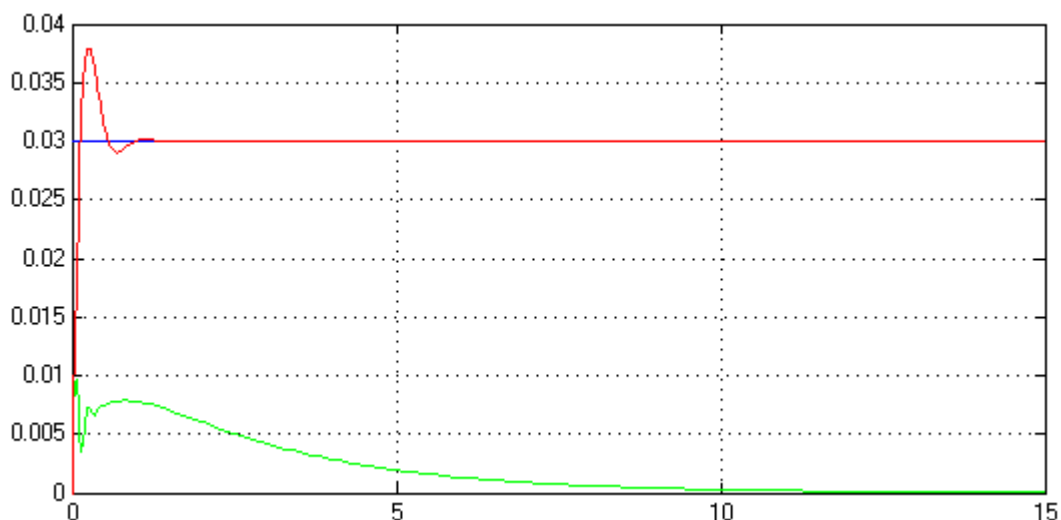


Fig. 8 Risposta del sistema (in metri) a un gradino di disturbo in assenza di controllo (in rosso) e con controllo (in verde).

Sono mostrate entrambe le risposte  $\delta x_s(t)$  con (in verde) e senza (in rosso) l'intervento del controllo. Il segnale in blu è un gradino di 3 cm di altezza. Nonostante quest'ultimo, come detto in 2.5, si discosti dalla realtà, si nota un effettivo miglioramento del comportamento della vettura sotto l'azione del controllo.

**Osservazione:** nel modello in figura 7 non è presente la saturazione dell'attuatore, che sarà considerata più avanti.

### 3.1.1 Tuning

Si nota sperimentalmente che la costante di tempo  $T_l = 0.1$ , necessaria per la realizzabilità del termine derivativo del controllore, non è sufficientemente lontana dalla banda di frequenze di interesse. Viene quindi spostata in alta frequenza di una decade:  $T_l = 0.01$ .

In generale (a meno di inserire saturazioni) aumentando il guadagno  $k_p$  e la costante di tempo  $T_d$  si ottiene un miglioramento dell'uscita, e diminuendo  $T_i$  un transitorio più breve. Aggiustando i parametri per ottenere un'uscita il più possibile vicina a zero ma senza causare sottoelongazioni si ha:

```
M=250
c=2500
k=20000
kp=50000
Td=0.4
Tl=0.01
Ti=0.5
```

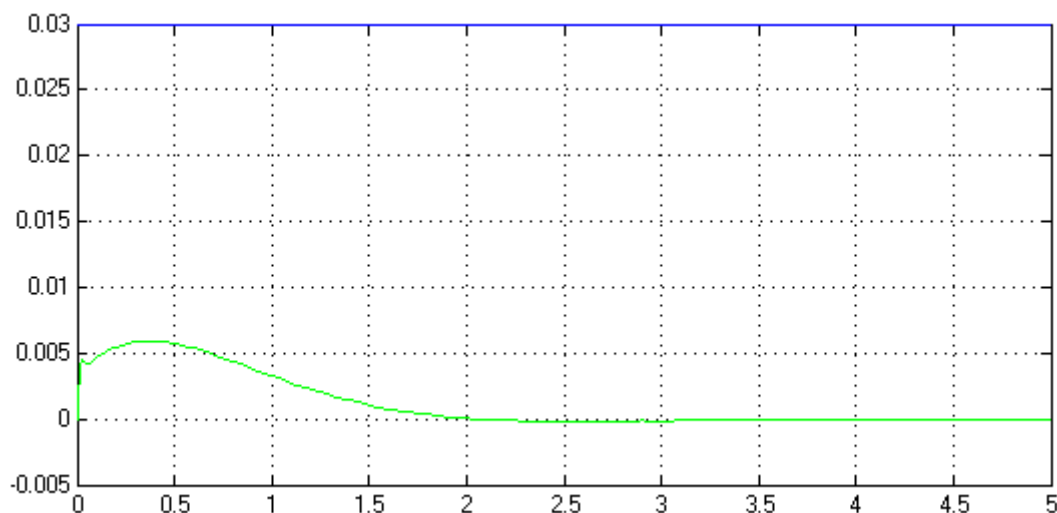


Fig. 9 Risposta del sistema (in metri) al gradino di disturbo a tuning effettuato.

dove sempre a fronte di una maggiore attenuazione del disturbo e di un transitorio molto più breve non si ha più il comportamento oscillatorio iniziale.

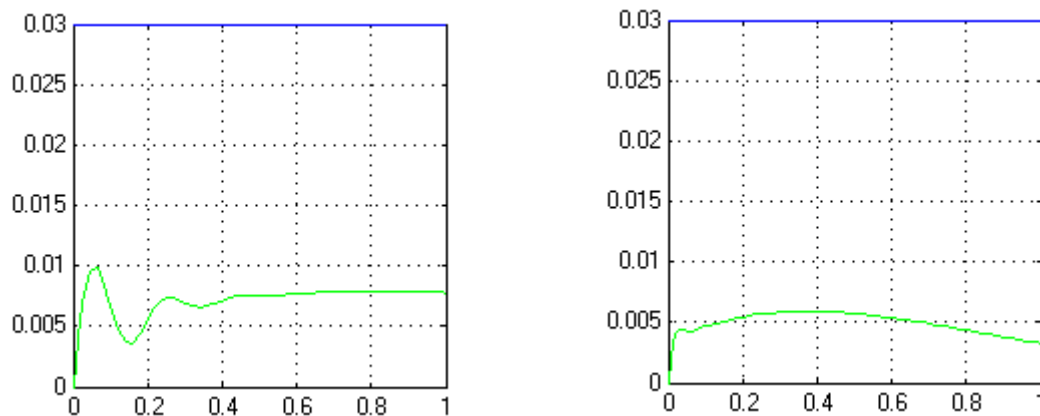


Fig. 10 Ingrandimento degli andamenti delle uscite coi due diversi controllori.

Oltre all'uscita  $\delta x_s(t)$  è interessante osservare anche l'andamento di  $F(t)$ , variabile di uscita del controllore. Infatti si tratta della forza [Newton] che l'azione di controllo prevede debba essere esercitata dall'attuatore. Visto che quest'ultimo non può, nella realtà, sviluppare una forza superiore a un valore massimo (450 N), è utile valutare la presenza di saturazione. Utilizzando lo stesso ingresso delle simulazioni precedenti si ottiene:

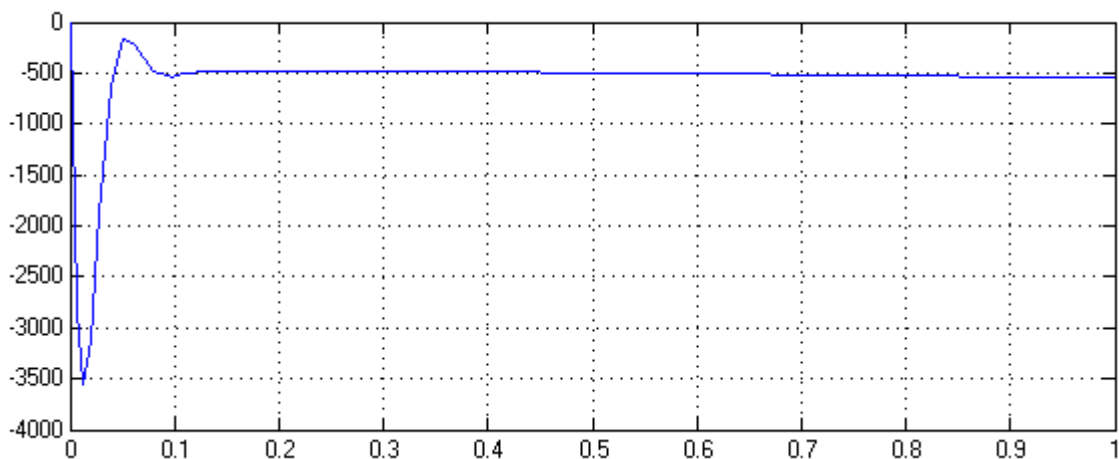


Fig. 11 Grafico della forza applicata dal controllore (in Newton).

Effettivamente il controllore dà forti impulsi, con picchi in questo caso fino a oltre 3000 N, per contrastare gli scostamenti del gradino dallo zero. Tenendo conto del limite dell'attuatore e inserendo nel modello una saturazione con



valori massimo e minimo di  $\pm 450 N$  a valle del blocco  $C(s)$ , si ottiene l'uscita seguente:

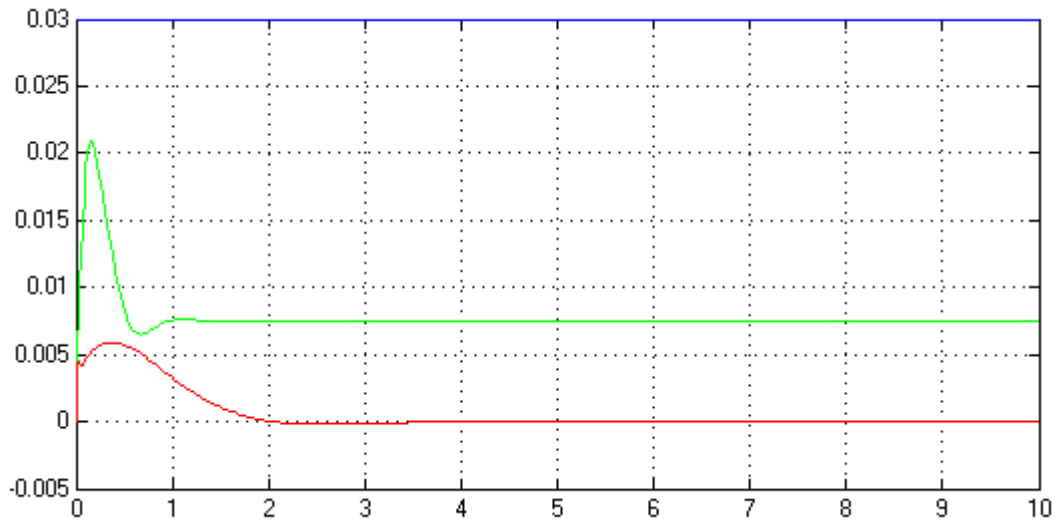


Fig. 12 Comparazione delle uscite dei sistemi con presenza (in verde) e assenza (in rosso) di saturazione all'uscita del controllore.

Con il limite nell'attuazione il salto del gradino non è più attenuato come nel caso senza saturazione. Nonostante ciò, è mantenuto un buon effetto smorzante. Tuttavia la limitazione data dalla saturazione è maggiormente visibile con segnali "veloci". Con un segnale variabile di  $\pm 3cm$  alla frequenza di  $10 Hz$  si ottiene il grafico seguente:

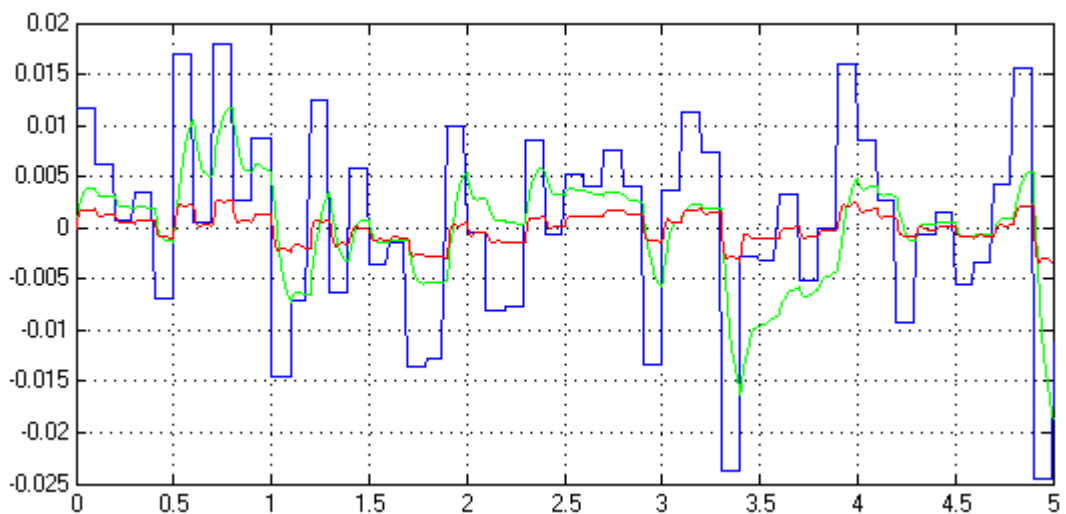


Fig.13 Effetto della saturazione (linea verde) per un ingresso a frequenza 10 Hz.

dove l'uscita del sistema saturato (in verde) risulta molto più perturbata che nel caso non saturato (in rosso).

Con la presenza della saturazione inoltre, il controllo non è più in grado di riportare l'uscita a zero. Questo perché la forza data dalla compressione è superiore alla forza che l'attuatore è in grado di applicare; si verifica quindi che la sospensione non riesce ad elongarsi e l'uscita resta costantemente lontana dallo zero di equilibrio. Questo si nota anche dal grafico in Fig. 11, dove la forza necessaria a vincere il gradino si assesta a un valore superiore a 450 N. Questo comportamento, irrealistico per un disturbo proveniente dal fondo stradale, modella invece la compressione dovuta a un carico nella vettura. Per questo motivo l'uscita potrebbe rimanere lontana dal riferimento anche per molto tempo, potendo causare così la saturazione del termine integrale o *wind-up*. Lo schema di desaturazione proposto serve a eliminare questo comportamento:

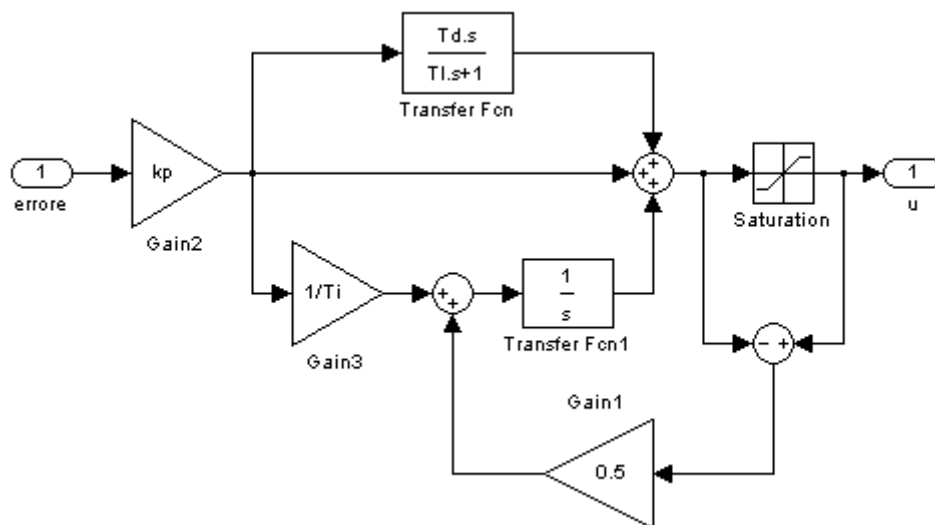


Fig. 14 Schema SIMULINK del controllo con l'azione di desaturazione del termine integrale.

In Fig.15 è mostrato il comportamento dell'uscita con l'effetto *wind-up* (linea rossa), mentre la linea verde mostra la correzione apportata dallo schema di desaturazione:

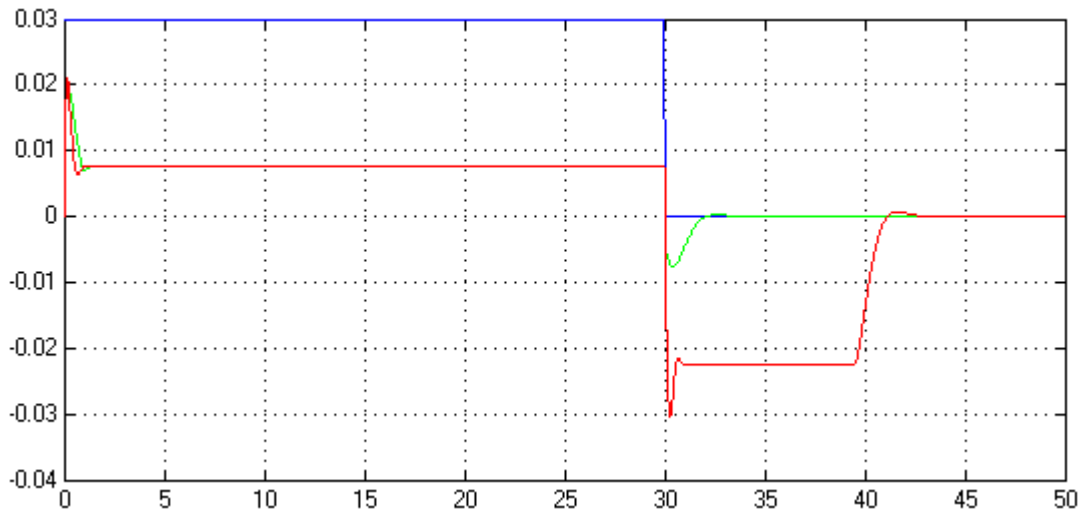


Fig. 15 Effetti della saturazione del termine integrale in linea rossa, in verde la risposta con *anti reset wind-up*.

### 3.1.2 Stabilità

Per lo studio della stabilità consideriamo  $W_{DY}(s)$  e  $W_{RY}(s)$ , funzioni di trasferimento a catena chiusa che legano rispettivamente il disturbo  $x_f$  e il riferimento  $x_{rif}$  con l'uscita (in realtà  $x_{rif}$  è posto uguale a zero). Esse risultano avere lo stesso denominatore:

$$W_{DY}(s) = \frac{G(s)}{1 + G_1(s)C(s)} \quad ; \quad W_{RY}(s) = \frac{G_1(s)C(s)}{1 + G_1(s)C(s)}$$

Quindi affinché il sistema sia BIBO stabile è necessario che gli zeri di  $1 + G_1(s)C(s)$  siano a parte reale negativa. Utilizzando le funzioni di trasferimento (13) per  $G_1(s)$  e  $G(s)$ , e (15) per  $C(s)$ , è possibile esplicitare  $1 + G_1(s)C(s)$  con i parametri del modello e del controllore. Si ottiene un polinomio di quarto grado le cui radici, con i valori proposti sono:

$$p_1 = -53.99 + 33.51i$$

$$p_2 = -53.99 - 33.51i$$

$$p_3 = -2 + 0.26i$$

$$p_4 = -2 - 0.26i$$

Si conclude che il sistema a catena chiusa è BIBO stabile. Infatti, considerando come unico ingresso il segnale di errore  $x_{rif} - \delta x_s$ , il luogo delle radici che si ottiene è il seguente:

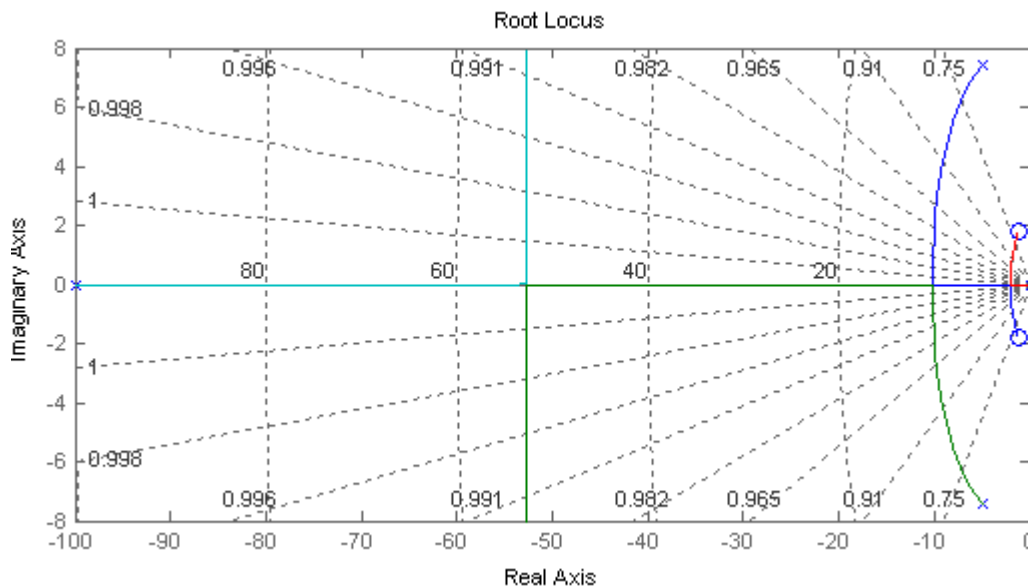


Fig. 16 Lougo delle radici di  $C(s)G_1(s)$ .

All'aumentare del guadagno i poli del sistema permangono nel semipiano negativo.

In appendice è riportato il file MATLAB utilizzato per il calcolo.

### 3.2 Caso *double mass*

Il modello *double mass* ha portato alle due equazioni (10) e (11). Procedendo come fatto per il caso *single mass*, si considera  $\delta x_s$  come uscita e  $x_f$  come ingresso di disturbo. Il controllo viene applicato, anche qui, mediante retroazione dall'uscita inserendo un controllore PID. In questo caso lo schema a blocchi risulta leggermente più complesso del caso precedente perché si verifica un'interazione mutua fra gli spostamenti  $\delta x_s$  e  $\delta x_n$ , inoltre la forza di controllo  $F(t)$  agisce su entrambe queste grandezze. Dalle funzioni di trasferimento ricavate a partire dalle (10) e (11) si ottiene il seguente schema:

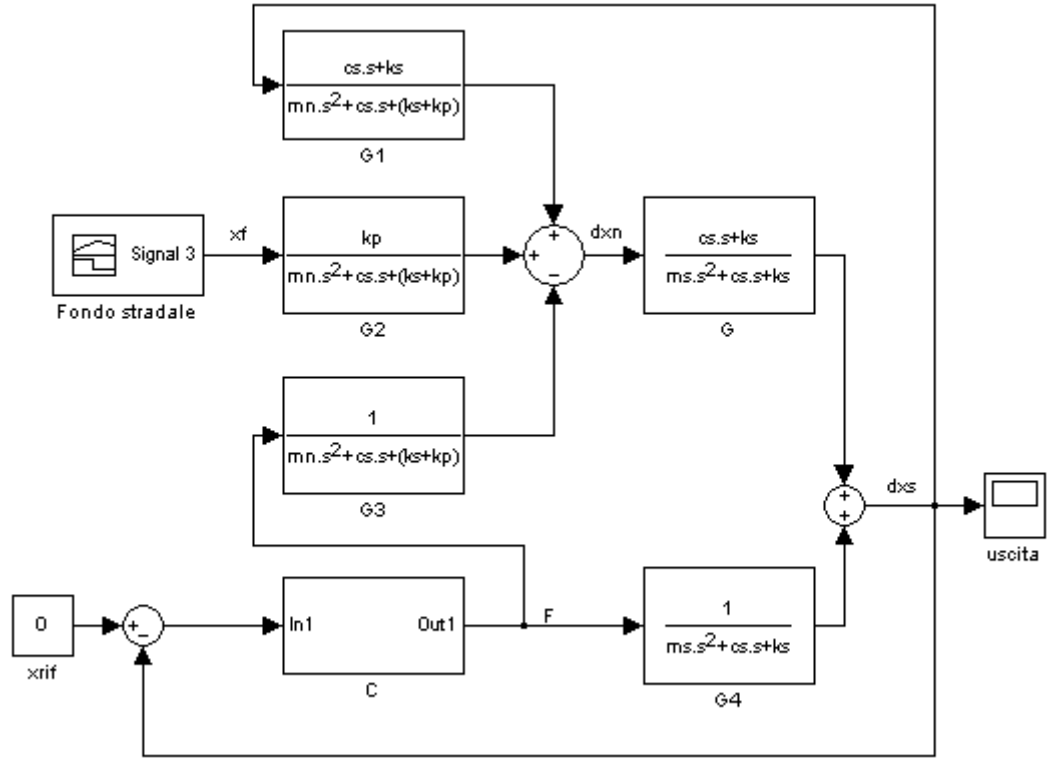


Fig. 17 Schema SIMULINK del sistema retroazionato.

dove le funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $G_4(s)$  hanno la forma (13) mentre  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$  e  $G_3(s)$  sono:

$$\begin{aligned}
 G_1(s) &= \frac{sc_s + k_s}{s^2M_n + sc_s + k_s + k_p} \\
 G_2(s) &= \frac{k_p}{s^2M_n + sc_s + k_s + k_p} \\
 G_3(s) &= \frac{1}{s^2M_n + sc_s + k_s + k_p}
 \end{aligned} \tag{16}$$

In questo caso la funzione di trasferimento  $W_{DY}(s)$  a catena chiusa fra  $x_f$  e  $\delta x_s$  è:

$$W_{DY}(s) = \frac{G_2(s)G(s)}{1 - G_1(s)G(s) - G_3(s)G(s)C(s) + G_4(s)C(s)} \tag{17}$$

Applicando un gradino di ampiezza 3 cm all'ingresso di disturbo, l'uscita che si ottiene ad anello aperto è la seguente:

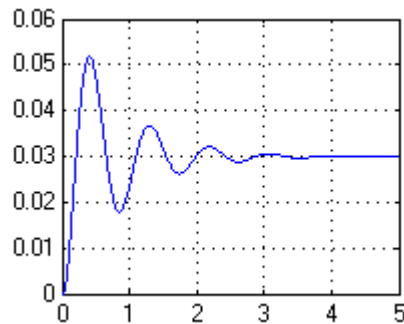


Fig. 18 Risposta della sospensione senza la presenza del controllo.

Anche in questo caso abbiamo considerato l'utilizzo di un controllore PID. Con gli stessi parametri trovati per il caso *single mass*, applicando lo stesso ingresso si ottiene un'uscita analoga ma disturbata da ampie oscillazioni nel transitorio (linea rossa). Spostando  $T_i$  di una decade in alta frequenza e portando  $T_i$  a 0.2 si ha un leggero miglioramento (linea verde):

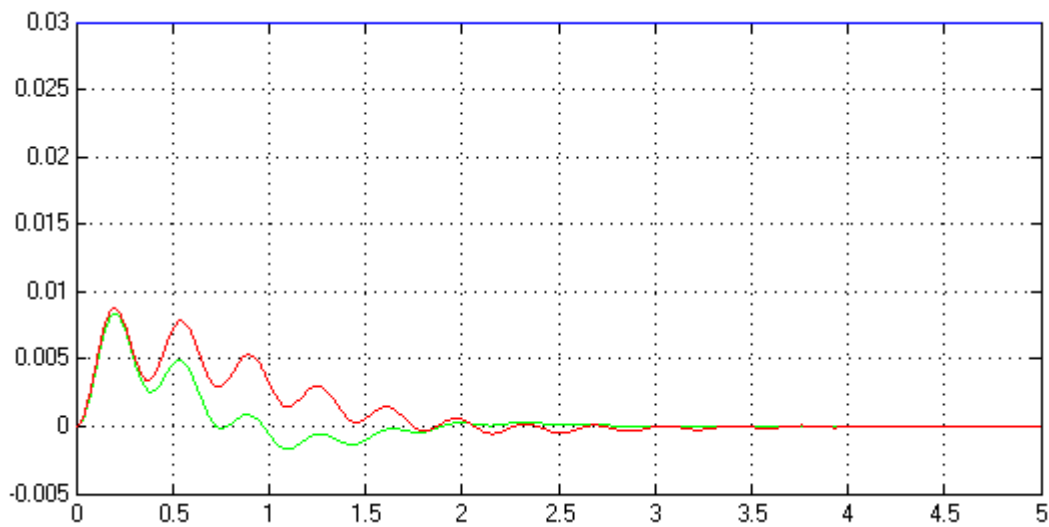


Fig. 19 Raffronto fra il controllore con  $T_i$  in 0.01 (rosso) e in 0.001 (verde).

Per quanto riguarda l'uscita del controllore si ottiene il seguente grafico della forza:

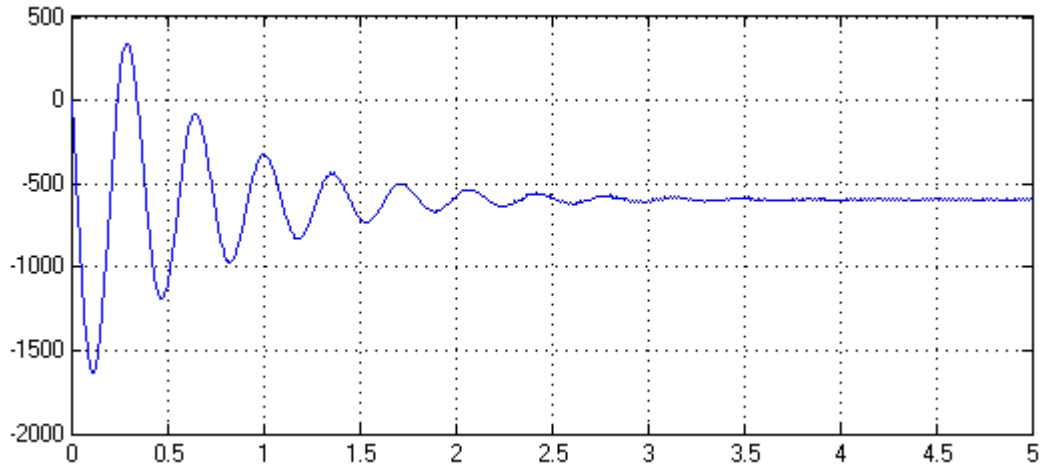


Fig. 20 Grafico della forza applicata dal controllore (in Newton).

Si vede che l'oscillazione supera il limite dell'attuatore. Inserendo la saturazione come fatto nel caso *single mass*, l'uscita che si ottiene presenta forti oscillazioni. Questo a causa della saturazione del termine integrale. Applicando lo stesso schema anti *wind-up* del caso precedente e comparando le uscite si ottiene:

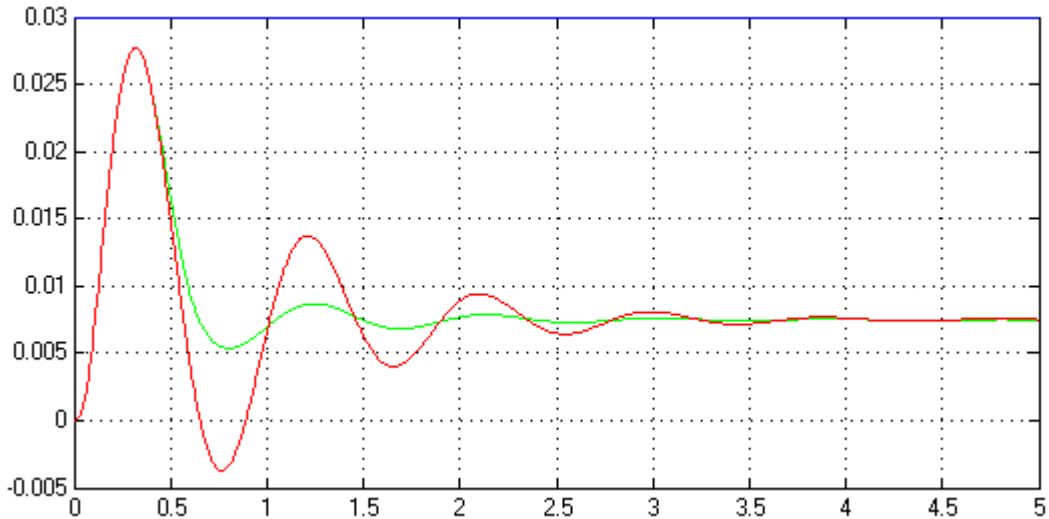


Fig. 21 Confronto delle uscite dei sistemi con presenza (in verde) e assenza (in rosso) di saturazione all'uscita del controllore.

La sottoelongazione è stata eliminata e l'oscillazione è quasi del tutto smorzata (linea verde). Le prestazioni però, come prima, sono fortemente penalizzate dal limite di forza: l'attenuazione del salto del gradino è molto minore e, per questo ingresso, il controllo non riesce a riportare l'uscita a zero. Nonostante ciò,

confrontando le Fig.18 e 21 la catena chiusa riesce a dimezzare gli effetti del disturbo.

Una buona attenuazione si nota anche cambiando ingresso e applicando una forma d'onda casuale di frequenza 10 Hz. L'uscita che si ottiene è simile al caso *single mass*. Nonostante la saturazione il controllo riesce a contenere il disturbo (linea blu). La linea in rosso in questo caso è l'uscita del sistema privo di controllo.

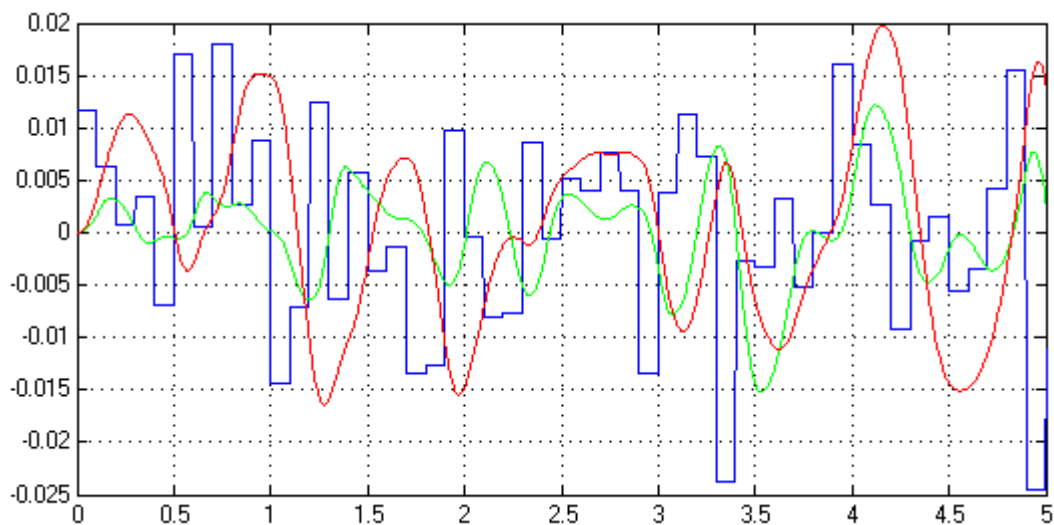


Fig. 21 Confronto fra le risposte del sistema privo di controllo e con controllo e desaturazione.

### 3.2.1 Forza di contatto

Come accennato in precedenza, un parametro fondamentale per valutare la bontà di una sospensione è la forza di contatto fra il pneumatico e la strada. Le variazioni di tale forza in seguito a un disturbo proveniente dal fondo stradale o dall'assetto del veicolo, sono direttamente connesse con l'aderenza e la tenuta di strada, quindi con il controllo del veicolo e la sicurezza.

Utilizzando la formula (12) è possibile ampliare lo schema SIMULINK usato in precedenza per visualizzare gli effetti del disturbo sulla forza di contatto. Il disturbo applicato è ancora un gradino di altezza 3 cm. Sono riportate in rosso la forza di contatto del sistema privo di controllo, in verde con il controllo applicato (con saturazione) e in blu la forza di contatto a riposo, cioè la forza data dal solo peso delle masse sospesa e non sospesa:



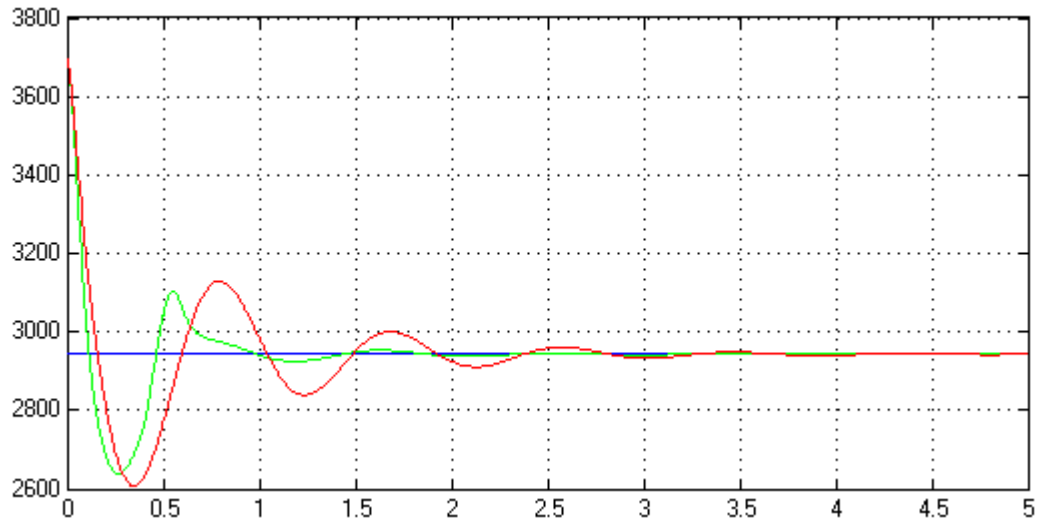


Fig. 22 Grafico della forza di contatto [Newton].

Si nota che anche per quanto riguarda questa grandezza il controllo dà notevoli vantaggi, visto che ne elimina rapidamente le fluttuazioni.

In appendice è riportato lo schema SIMULINK aggiuntivo utilizzato per questa simulazione.

### 3.2.2 Stabilità

I poli di  $W_{DY}(s)$ , funzione di trasferimento a catena chiusa fra disturbo  $x_f$  e uscita  $\delta x_s$ , sono gli zeri di  $1 - G_1(s)G(s) - G_3(s)G(s)C(s) + G_4(s)C(s)$ . Tenendo conto delle semplificazioni si ottiene, con MATLAB, un polinomio di sesto grado. Con i valori dei parametri considerati in precedenza:

```
ms=250
cs=2500
ks=20000
mn=50
kpn=25000
kp=50000
TD=0.4
TL=0.001
TI=0.2
```

si ottengono le seguenti radici:

$$p_1 = -905.46$$

$$p_2 = -148.34$$

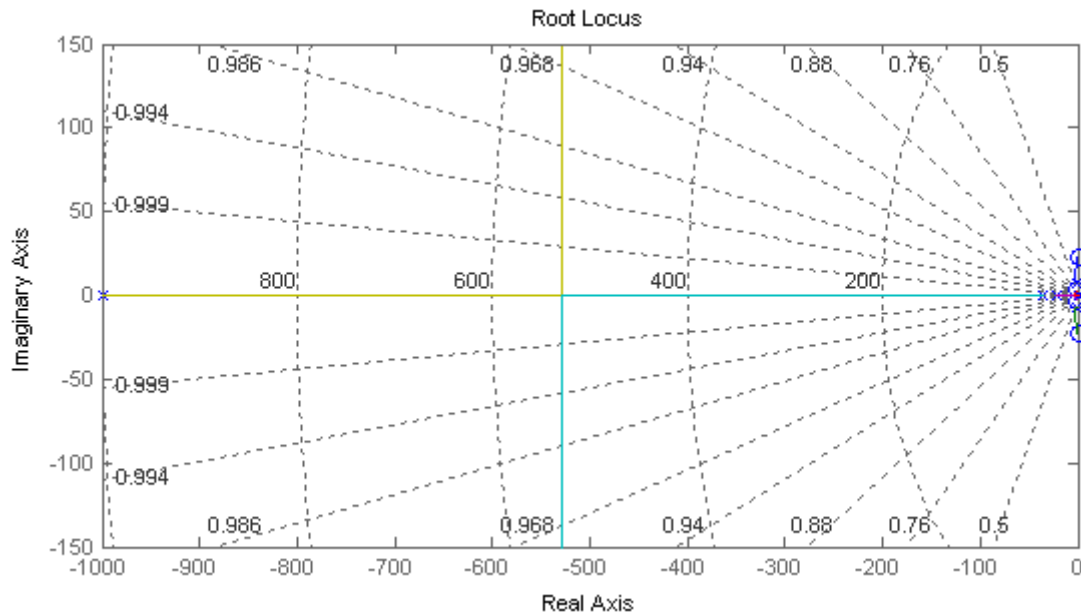
$$p_3 = -1.53 + 17.65i$$

$$p_4 = -1.53 - 17.65i$$

$$p_5 = -1.56 + 3.06i$$

$$p_6 = -1.56 - 3.06i$$

Anche in questo caso il denominatore di  $W_{DY}(s)$  è uguale a quello di  $W_{RY}(s)$ . Il sistema quindi risulta essere BIBO stabile. Il luogo delle radici infatti, considerando come ingresso il segnale di errore  $x_{rif} - \delta x_s$  è:



Nei pressi dell'origine:

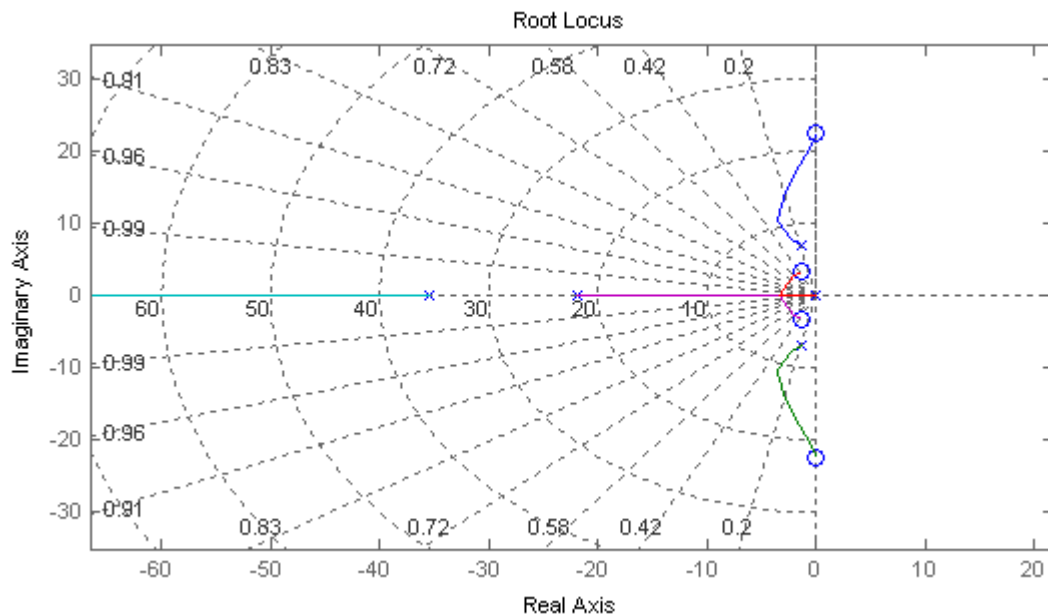


Fig. 23 Luogo delle radici di  $[G_4(s) - G_3(s)G(s)]C(s)/[1 - G(s)G_1(s)]$

## 4 Conclusioni

Nelle considerazioni dell'introduzione si è messo in evidenza come i due compiti principali delle sospensioni, ossia sostenere la vettura e assorbire le imperfezioni del manto stradale, siano intrinsecamente contrastanti. Questo rende necessario un compromesso che le sospensioni attive consentono in parte di evitare. Questo grazie al fatto che la grandezza che comporta correzione da parte del controllore è lo scostamento dell'altezza della vettura dal suo valore di equilibrio. Considerando un esempio semplificato in cui il controllore dà solo un'azione derivativa  $F(t) = -c_F \delta \dot{x}_s$ , posta appunto proporzionale non alla velocità di deformazione  $\dot{\Delta}_s$ , ma alla sola velocità verticale  $\delta \dot{x}_s$  del veicolo, si ha che l'effetto smorzante della sospensione è dato da due contributi, uno proveniente dallo smorzatore e uno dall'attuatore. Il vantaggio portato dal controllo è che l'effetto smorzante di quest'ultimo si comporta come se il relativo smorzatore fosse agganciato a un punto fisso esterno al veicolo. In questo modo è assicurato uno smorzamento del movimento della carrozzeria e non della ruota, che, in casi come buche o dissesti stradali, deve essere libera di muoversi velocemente per assecondarli. Si è visto che ottenere una modellizzazione accurata dei fenomeni in gioco è un problema difficoltoso, inoltre il controllo *double mass* è risultato molto più complesso del caso a una sola massa. Nonostante ciò, i risultati ottenuti con il controllo PID si possono ritenere abbastanza buoni. Riferendosi sempre al gradino, il controllo dà un miglioramento dell'uscita, rispetto a una sospensione passiva, anche superiore all'80 %. Questa prestazione peggiora drasticamente arrivando al 50 % tenendo conto del limite di forza degli attuatori. Questi risultati sono dovuti probabilmente oltre che a un segnale di disturbo molto sfavorevole rispetto alla realtà, anche alla possibilità di tarare diversamente il PID. Infatti è probabile che ricorrendo a una taratura differente o addirittura a un compensatore di struttura diversa si possano migliorare ulteriormente le prestazioni. Questo però porterebbe a un sistema molto più complesso e necessiterebbe di modelli e simulazioni molto più accurati. In questa sede inoltre non sono stati considerati altri fattori come il costo dei dispositivi aggiuntivi richiesti da una sospensione attiva, la loro affidabilità, il consumo di

energia, l'ingombro e il peso addizionali. A queste problematiche si deve probabilmente il fatto che ad oggi le sospensioni attive non sono ancora diffuse.

## APPENDICE

- File MATLAB utilizzato in 3.1.2 per il calcolo degli zeri di  $1 + G_1(s)C(s)$ :

```

M=250                                     %dati e parametri controllore
c=2500
k=20000
kp=35000
Td=1
Tl=0.1
Ti=5

g=tf([c k],[M c k])                       %definizione funzioni di trasferimento
g1=tf([1],[M c k])
C=tf([k*Td*Ti+k*Ti*Tl k*Tl+k*Ti k],[Ti*Tl Ti 0])
Wdy=g/(1+g1*C)                             %definizione di Wdy
Wdycancell=minreal(Wdy)                   %tengo conto delle semplificazioni
[n ,d]=tfdata(Wdycancell,'v')             %estraggo numeratore e denominatore
roots(d)                                   %trovo i poli di Wdy

```

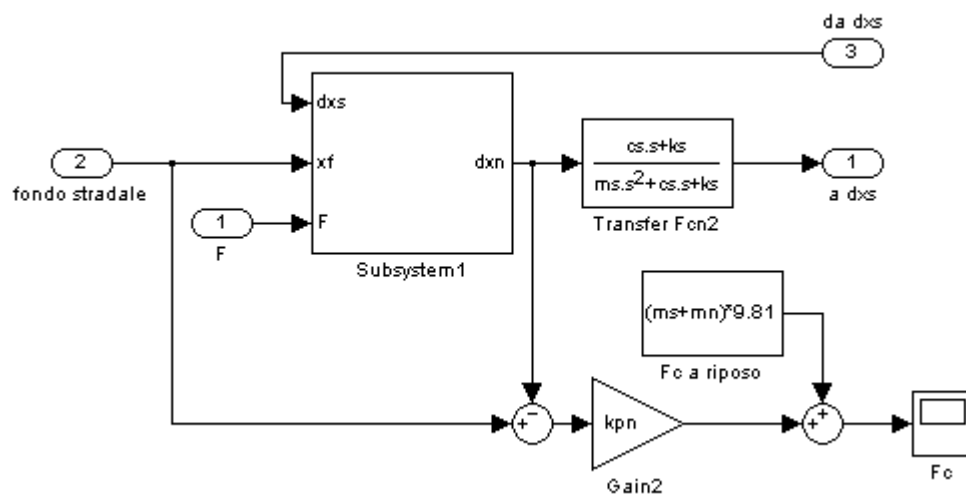
- File MATLAB utilizzato in 3.1.2 per il calcolo del luogo delle radici:

```

Cs=tf([Ti*Td+Td*Tl Ti+Tl 1],[Ti*Tl Ti 0]) %fdt controllore
Cszpk=zpk(Cs)
[z, p, k1]=zpkdata(Cszpk)
contr=zpk(z, p, 1) %elimino il guadagno
g1=tf([1],[M c k])
G=minreal(contr*g1) %fdt fra errore e uscita
rlocus(G)

```

- Schema SIMULINK utilizzato in 3.2.1:



- File MATLAB utilizzato in 3.2.2 per il calcolo degli zeri di:

$$1 - G_1(s)G(s) - G_3(s)G(s)C(s) + G_4(s)C(s):$$

```

ms=250
cs=2000
ks=15000
mn=60                                %dati e parametri controllore
kpn=25000
TI=30
TD=3.5
TL=0.1
kp=1000

g1d=tf([cs ks],[mn cs ks+kpn]) %definizione funzioni di trasferimento
g2d=tf([kpn],[mn cs ks+kpn])
g3d=tf([1],[mn cs ks+kpn])
gd= tf([cs ks],[ms cs ks])
g4d= tf([1],[ms cs ks])
cd=tf([kp*TD*TI+kp*TI*TL kp*TL+kp*TI kp],[TI*TL TI 0])
wdy=(gd*g2d)/1-gd*g1d-gd*g3d*cd+g4d*cd %definizione di Wdy
wdycancellaz=minreal(wdy)           %tengo conto delle semplificazioni
                                     %estraggo numeratore e denominatore
[num ,den]=tfdata(wdycancellaz,'v')
roots(den)                          %trovo i poli di Wdy

```

- File MATLAB utilizzato in 3.2.2 per il calcolo del luogo delle radici:

```

Cs=tf([TI*TD+TI*TL TI+TL 1],[TI*TL TI 0])%fdt controllore
Cszpk=zpk(Cs)                        %trasformo in zpk
[z, p, k]=zpkdata(Cszpk)
contr=zpk(z, p, 1)                   %estraggo C(s) senza guadagno
                                     %fdt fra errore e uscita
G=minreal( (g4d-g3d*gd)*contr/(1-gd*g1d))
rlocus(G)

```

# Bibliografia

Bisiacco M. & Valcher M. E. (2008), *Controlli automatici*, Padova, Libreria Progetto

Ciscato D. (2009), *Appunti di Controllo Digitale*, Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università degli Studi di Padova

Franklin G.F. Powell J.D. Emami-Naeini A. (2005), *Controllo a retroazione di sistemi dinamici vol.2*, Napoli, Edises [tit. orig: Feedback Control of Dynamic System]

Pisano A. (2009), *Modellistica, analisi e controllo di sospensioni attive per autoveicoli*, Università degli Studi di Cagliari,  
<[http://www.diee.unica.it/~pisano/Suspensioniv\\_V1.1Giu2011.pdf](http://www.diee.unica.it/~pisano/Suspensioniv_V1.1Giu2011.pdf)>

Rosati S. (2005), *Fisica generale*, Milano, Casa editrice Ambrosiana