

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE ED AMBIENTALE

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

Strutture

TESI DI LAUREA

STUDIO DELLA RISPOSTA SISMICA DI STRUTTURE CON SMORZATORI A MASSA ACCORDATA

Relatore: Prof. Ing. Renato Vitaliani

Correlatore: Ing. Lorenzo De Stefani

Laureando: Andrea Baron

Anno Accademico 2014 - 2015

Ai miei genitori e a mio zio Renato

Indice

1	INTRODUZIONE SULLA PROTEZIONE SISMICA.....	- 1 -
1.1	L'ISOLAMENTO SISMICO.....	- 1 -
1.2	TIPOLOGIE DI ISOLATORI.....	- 4 -
1.2.1	<i>Isolatori sismici elastomerici.....</i>	<i>- 4 -</i>
1.2.2	<i>Isolatori sismici a scorrimento a superficie curva.....</i>	<i>- 8 -</i>
1.3	LA DISSIPAZIONE ENERGETICA.....	- 11 -
1.4	TIPOLOGIE DI SMORZATORI SISMICI.....	- 12 -
1.4.1	<i>Smorzatori sismici metallici.....</i>	<i>- 12 -</i>
1.4.2	<i>Smorzatori sismici visco-elastici.....</i>	<i>- 14 -</i>
1.4.3	<i>Smorzatori fluido-viscosi.....</i>	<i>- 16 -</i>
1.5	SMORZATORI SISMICI A MASSA ACCORDATA.....	- 17 -
2	PREMESSE SULLA EQUAZIONE DEL MOTO.....	- 19 -
2.1	EQUAZIONE DEL MOTO.....	- 19 -
2.1.1	<i>Equazioni del Moto per sistema ad 1 GDF non smorzato.....</i>	<i>- 20 -</i>
2.1.2	<i>Oscillazioni libere di un sistema non smorzato.....</i>	<i>- 21 -</i>
2.1.3	<i>Sistemi con oscillazioni smorzate.....</i>	<i>- 22 -</i>
2.1.4	<i>Risposta con Smorzatore Passivo.....</i>	<i>- 24 -</i>
2.2	SMORZAMENTO NON PROPORZIONALE.....	- 28 -
2.2.1	<i>Comparazione dei modi di vibrare tra Sistemi smorzati proporzionali e non-proporzionali.....</i>	<i>- 29 -</i>
2.2.2	<i>Equazioni del Moto per Smorzamento Non-Proporzionale.....</i>	<i>- 32 -</i>
3	SMORZATORI A MASSA ACCORDATA: STATO DELL'ARTE - METODOLOGIE.....	- 35 -
3.1	METODO DI CALCOLO CLASSICO – DEN HARTOG.....	- 36 -
3.2	METODO DI CALCOLO DI VILLAVERDE.....	- 37 -
3.2.1	<i>Selezione parametri.....</i>	<i>- 38 -</i>
3.3	METODO DI CALCOLO DI SADEK E TAYLOR.....	- 39 -
3.3.1	<i>TMD per modelli SDOF.....</i>	<i>- 39 -</i>
3.3.2	<i>MTMD per modelli MDOF.....</i>	<i>- 43 -</i>
3.4	METODO DI CALCOLO DI FENG E MITA.....	- 45 -
3.4.1	<i>Caratteristiche dinamiche.....</i>	<i>- 46 -</i>

3.4.2	<i>Frequenza di risposta</i>	- 46 -
3.4.3	<i>Caratteristiche flusso energetico</i>	- 47 -
3.4.4	<i>Robustezza metodo</i>	- 48 -
3.4.5	<i>Ottimizzazione</i>	- 48 -
3.5	RIFLESSIONI SULLO STATO DELL'ARTE	- 49 -
3.5.1	<i>Aspetti notevoli dei metodi analizzati</i>	- 49 -
3.5.2	<i>Ricerche in letteratura</i>	- 53 -
3.5.3	<i>Fattori di riferimento</i>	- 55 -
4	DESCRIZIONE CASI STUDIO E CALCOLO PARAMETRI TMD	57
4.1	PREDIMENSIONAMENTO DEI MODELLI	57
4.1.1	<i>Forze e Rigidezza laterale per un sistema a n gradi di libertà</i>	58
4.1.2	<i>Determinazione dei modi di vibrare della struttura</i>	61
4.1.3	<i>Caratteristiche strutturali</i>	61
4.2	CONFIGURAZIONE PARAMETRI TMD	68
4.2.1	<i>Metodi di accordamento</i>	68
4.2.2	<i>Configurazione Struttura a 3 Piani</i>	70
4.2.3	<i>Configurazione Struttura a 6 Piani</i>	74
4.2.4	<i>Configurazione Struttura a 10 Piani</i>	78
4.3	MODELLAZIONE NUMERICA	82
5	ANALISI DINAMICHE SU MODELLI FE.....	83
5.1	CLASSIFICAZIONE DEL SEGNALE FORZANTE	83
5.2	STUDIO DELLA RISPOSTA SISMICA PER SEGNALI SINUSOIDALI.....	85
5.2.1	<i>Segnali con ampiezza definita su forzanti su periodi fondamentali</i> <i>strutture</i>	86
5.2.2	<i>Forzanti con periodo intervallato</i>	97
5.3	STUDIO DELLA RISPOSTA SISMICA PER ACCELEROGRAMMI ARTIFICIALI.....	110
5.4	STUDIO DELLA RISPOSTA SISMICA PER ACCELEROGRAMMI REALI	124
6	CONCLUSIONI.....	131
7	BIBLIOGRAFIA.....	135
	APPENDICE	137
	APPENDICE A SVILUPPO EQUAZIONE DEL MOTO CON SMORZAMENTO NON PROPORZIONALE	137

A.1	<i>Soluzione della Equazione Omogenea</i>	137
A.2	<i>Ortogonalità dei Modi Disaccoppiati</i>	140
A.3	<i>Determinazione di Autovalori e Autovettori dalla Matrice</i>	
	<i>d'Iterazione</i> 142	
A.4	<i>Sweeping</i>	144
A.5	<i>Disaccoppiamento delle Equazioni Non-Omogenee</i>	146
A.6	<i>Soluzione delle Equazioni Disaccoppiate</i>	148
APPENDICE B	FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI FOURIER	151
B.1	<i>Relazioni Forzante-Risposta</i>	151
B.2	<i>Risposta Complessa in Frequenza</i>	151
B.3	<i>Risposta Impulsiva</i>	153
B.4	<i>Sistema a due gradi di libertà</i>	154
B.5	<i>Relazioni Forzante-Risposta per Processi Stazionari Random</i>	155
B.6	<i>Risposta di un Sistema a due gradi di libertà ad una Forzante</i>	
	<i>Stazionaria Random: Rumore Bianco</i>	158
APPENDICE C	RECORDS SEGNALI SISMICI USATI NELLO STUDIO	161

Sommario

Nel presente lavoro vengono presentate e confrontate tecniche per la progettazione antisismica di strutture multipiano basate sulla dissipazione di energia mediante l'introduzione di dispositivi inerziali ausiliari, definiti *smorzatori a massa accordata*. Il lavoro si basa sullo studio e l'utilizzo di metodologie di progettazione di smorzatori inerziali non abitualmente utilizzate nella pratica ingegneristica, ma riportate nella letteratura scientifica del settore. L'analisi proposta si concentra nell'applicare i metodi di progetto studiati a tre tipologiche di strutture a telaio con numero di piani, rispettivamente pari a 3, 6 e 10 piani.

Nell'introduzione si espongono le due diverse tipologie di protezione sismica attualmente utilizzate nell'ingegneria moderna: l'isolamento sismico alla base e la dissipazione energetica mediante l'introduzione di dispositivi ausiliari di smorzamento. In questa parte del lavoro è riportata una rapida carrellata delle tecnologie esistenti, sviluppate secondo le due teorie.

Il capitolo 2 riassume la teoria alla base delle equazioni del moto e introduce il concetto di smorzamento non proporzionale ampiamente utilizzato nei metodi di progetto per smorzatori a massa accordata. Successivamente, nel capitolo 3 vengono espone le metodologie di progetto per smorzatori inerziali studiate e presenti nella letteratura scientifica. In letteratura si distinguono TMD singoli con una sola massa accordata e MTMD con più masse accordate ai piani. I metodi di progetto sono stati individuati sulla base delle pubblicazioni studiate, inerenti al problema dell'accordamento di smorzatori a masse oscillanti, (sia TMD che MTMD). In letteratura le ricerche su TMD hanno raggiunto risultati notevoli, in particolar modo per la protezione dall'azione del vento per edifici alti; esse si concentrano su modalità diverse per ottenere i parametri di configurazione. Per MTMD gli studi, relativamente recenti, hanno evidenziato una sola relazione per ottenere prestazioni ottimali, il posizionamento delle masse a seconda del modo di vibrare della struttura; ma non hanno ancora chiari quali altri aspetti possano influire. L'argomento ha suscitando l'interesse di molti ricercatori, i quali hanno prodotto molte teorie basate su prove sperimentali in scala reale e ridotta e su analisi numeriche. I primi studi risalgono alla seconda metà del '900.

Il capitolo 4 tratta la descrizione dei casi studio analizzati in questa tesi ed il dimensionamento dei TMD e di MTMD secondo le teorie espone in precedenza al capitolo 3.

Il capitolo 5 riporta i risultati delle analisi dinamiche al passo svolte su modelli agli elementi finiti che rappresentano i tre casi studio descritti in precedenza. Le analisi sono condotte sia su telai senza smorzatori a massa accordata e sia sui telai con gli smorzatori TMD e MTMD dimensionati per ogni metodologia studiata.

Sempre in questo capitolo vengono accennati alcuni aspetti inerenti alla teoria dei segnali, che sono alla base della scelta delle forzanti utilizzate per lo svolgimento delle analisi dinamiche al passo.

Mediante il post-processo dei risultati ottenuti dalle analisi numeriche si è valutata l'efficacia delle metodologie proposte, confrontando spostamenti ed accelerazioni sia per la struttura principale ed anche per la massa accordata.

Lo studio condotto ha permesso di raggiungere l'obiettivo di questo lavoro di tesi: la definizione dei vantaggi e degli svantaggi di ogni metodo di progetto utilizzato.

Abstract

In this paper we present the compared techniques for seismic design of structures based on the multi-energy dissipation by introducing inertial auxiliary devices, tuned mass dampers defined. The work is based on the study and use of design methodologies of inertial dampers not commonly used in engineering practice, but reported in the scientific literature in the field. The proposed analysis focuses in applying the methods to three typological frame structures with a number of plans, respectively equal to 3.6 and 10 floors.

In the introduction we expose the two different types of seismic protection currently used modern engineering: the seismic isolation to the base and the energy dissipation through the introduction of auxiliary damping. In this part of the work, a quick overview of existing technologies, developed according to the two theories is given.

Chapter 2 summarizes the theory behind the equations of motion and introduces the concept of non proportional damping, that is widely used in the design methods for tuned mass dampers. Later, in chapter 3, the basic design methodologies for inertial dampers, studied in the scientific literature, are presented. In literature scholars distinguish TMD with one tuned mass and MTMD with more tuned masses, placed in different storeys. The methods have been identified on the basis of the publications studied, related to the problem to tune dampers to oscillating masses, (TMD is that MTMD). In literature searches on TMD have achieved remarkable results, particularly for the protection from the action of the wind to tall buildings, focus on different ways to obtain the configuration parameters. For MTMD studies, relatively recent, showed a single report for optimal performance, the positioning of the masses according to the mode of vibration of the structure; but they have not yet clear what other aspects can influence. The topic attracting the interest of many researchers who have produced many theories based on experimental evidence and reduced scale and numerical analysis. The first studies date back to the second half of the '900.

Chapter 4 deals with the description of the case studies analyzed in this thesis and sizing of TMD and MTMD according to the theories outlined above in Chapter 3.

Chapter 5 presents the results of the dynamic analysis carried out from finite element models representing the three case studies described above. Analyses are conducted both on frames without dampers and both on frames with TMD and MTMD, configured for each methodology studied.

Also in this chapter some aspects of the theory of signals are mentioned, which are the basis of the choice of forcing used to perform the dynamic analysis.

Through the post-process of the results obtained from the numerical analysis the effectiveness of the proposed methodologies has evaluated, comparing displacements and accelerations for both the main structure and also for the tuned mass.

The study has allowed us to achieve the goal of this thesis: the definition of the advantages and disadvantages of each design method used.

1 Introduzione sulla protezione sismica

Il problema della protezione sismica delle strutture può essere illustrato in modo intuitivo mediante un approccio energetico rappresentato dalla seguente equazione di bilancio:

$$E_I = E_E + E_K + E_V + E_H$$

in cui:

- E_I : è l'energia in ingresso che rappresenta il lavoro compiuto dalla forza di inerzia agente sulla struttura a causa dello spostamento del suo punto di applicazione;
- E_E : è l'energia di deformazione elastica;
- E_K : è l'energia cinetica;
- E_V, E_H è l'energia dissipata attraverso distinti meccanismi, ad esempio viscosi o isteretici.

E_I rappresenta quindi la domanda di energia mentre E_E, E_K, E_V, E_H rappresentano l'offerta di energia.

Affinché la protezione sismica sia garantita deve essere soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$E_I \leq E_E + E_K + E_V + E_H$$

Tale obiettivo può essere perseguito riducendo la domanda di energia oppure incrementando l'offerta di energia. Per esempio una progettazione basata sul principio della "gerarchia delle resistenze" propone un incremento dell'offerta di energia agendo sulle capacità dissipative della struttura che deve essere dotata di un'adeguata duttilità. Gli interventi di isolamento sismico si propongono invece l'obiettivo di ridurre la domanda di energia ovvero l'energia in ingresso. L'energia in entrata non deve essere intesa come una proprietà intrinseca del sistema poiché dipende oltre che dallo spostamento del terreno anche dalla risposta strutturale ovvero il periodo fondamentale di vibrazione.

Di seguito è riportata una breve introduzione ai concetti di isolamento e dissipazione.

1.1 L'isolamento sismico

Il concetto che sta alla base dell'isolamento sismico è molto semplice: consiste nella ricerca del disaccoppiamento del moto della struttura da quello del terreno. Interponendo, infatti, elementi strutturali di bassa rigidità, denominati isolatori, tra le fondazioni e la sovra-struttura, si riesce ad ottenere una forte riduzione delle accelerazioni orizzontali su quest'ultima. Nella strategia dell'incremento del periodo si utilizzano dispositivi a comportamento quasi-elastico, per abbattere

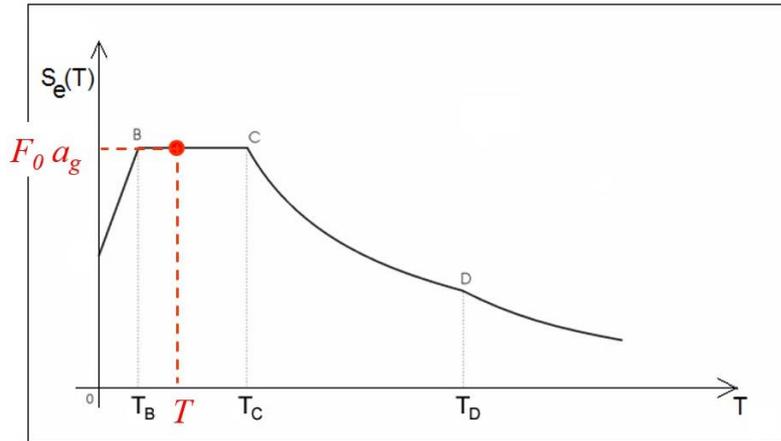


Figura 1-1 Abbattimento dell'accelerazione per effetto dell'isolamento

le accelerazioni sulla struttura, secondo i principi appena esposti. In un'interpretazione energetica del comportamento del sistema strutturale, la riduzione degli effetti sulla struttura è conseguita principalmente attraverso l'assorbimento nei dispositivi di gran parte dell'energia sismica in input, sotto forma di energia di deformazione, in buona parte dissipata per isteresi dai dispositivi stessi al completamento di ogni ciclo di oscillazione. La dissipazione d'energia del sistema d'isolamento riduce sia gli spostamenti alla base, che, entro certi limiti, le forze trasmesse alla sovrastruttura.

Un esempio schematico di slittamento del periodo si può osservare nella figura 1-1, le strutture tradizionali, a base fissa, hanno periodo principale T abbastanza bassi, che in genere ricadono nell'intervallo in cui l'accelerazione spettrale S_e viene notevolmente amplificata.

Se alla base si interpone, tra fondazione e struttura, un elemento molto deformabile in senso orizzontale, il periodo cresce notevolmente e conseguentemente l'accelerazione si riduce a valori molto più bassi, come si nota in figura 1-2.

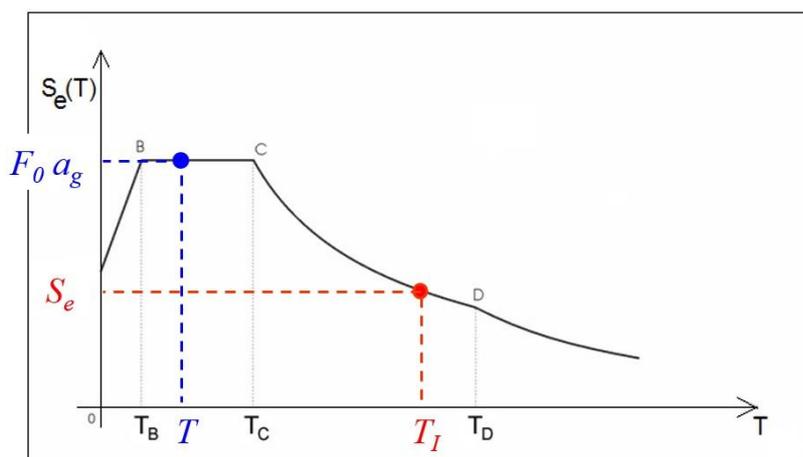


Figura 1-2 Incremento del periodo di oscillazione per effetto dell'isolamento

Nella strategia della limitazione della forza si utilizzano dispositivi a comportamento rigido perfettamente plastico o elastico-perfettamente plastico, o comunque fortemente non lineare, con un ramo pressoché orizzontale per grandi spostamenti (incrudimento quasi nullo). La riduzione

degli effetti sulla struttura avviene attraverso la limitazione, da parte dei dispositivi (in quanto insita nella forma stessa del loro ciclo di isteresi), della forza trasmessa alla sovrastruttura. L'imposizione di un limite massimo alla forza trasmessa può essere anche vista come un'applicazione del *capacity design* a livello di sistema strutturale, nella quale viene stabilita una gerarchia tra la resistenza globale della struttura e la "resistenza" del sistema di isolamento. La dissipazione d'energia del sistema d'isolamento è sfruttata essenzialmente per contenere gli spostamenti alla base. Ciò si traduce anche in una riduzione della forza trasmessa nel caso d'incrudimento non trascurabile.

La strategia basata sullo "slittamento" del periodo della struttura è certamente la più frequentemente adottata nell'isolamento degli edifici, per ragioni diverse, tra cui, non secondarie, quelle legate ad aspetti tecnologici e realizzativi. Quella basata sulla limitazione delle sollecitazioni trova maggior impiego nei casi in cui il controllo delle forze indotte dal sisma sulla struttura rappresenta l'aspetto cruciale della progettazione (come può accadere nell'adeguamento sismico delle strutture esistenti), ed in linea di principio anche nei casi in cui la strategia ad incremento del periodo raggiunge i suoi limiti di applicabilità e convenienza (ad esempio in presenza di strutture deformabili o di terremoti attesi con elevato contenuto energetico alle basse frequenze). Un aspetto positivo della strategia della limitazione della forza è la sostanziale indipendenza dell'efficacia dell'isolamento dalle caratteristiche del sisma (intensità e contenuto in frequenze), a condizione di poter accettare spostamenti anche molto elevati del sistema di isolamento.

I benefici che si hanno implementando l'isolamento sismico sono principalmente:

- a. L'abbattimento delle forze d'inerzia, quindi delle forze entranti, prodotte dal sisma sulla struttura, tale da evitare il danneggiamento degli elementi strutturali (travi, pilastri, ecc.) anche sotto terremoti violenti;
- b. Una drastica riduzione degli spostamenti interpiano, tale da eliminare il danno agli elementi non strutturali (tamponature, tramezzi, etc.) e garantire la piena funzionalità dell'edificio, anche a seguito di un terremoto violento,
- c. Un'elevata protezione del contenuto all'interno della struttura;
- d. Una percezione molto minore delle vibrazioni dovute all'azione del terremoto da parte degli utenti presenti all'interno della struttura.

La conseguenza di questi punti porta a ottenere come risultato una netta diminuzione o totale cancellazione dei costi di riparazione degli elementi strutturali per un evento sismico di elevata intensità; finalità che, con il progredire della ricerca e dello sviluppo, è sempre più richiesta dalle normative antisismiche. Naturalmente, i costi iniziali rispetto ad una struttura antisismica progettata in modo "normale", possono essere mediamente superiori, essendo funzione di molti parametri, quali:

- Il numero di piani;
- La configurazione dell'edificio, in relazione alla facilità di sistemare il piano di isolamento;
- La maglia strutturale, in relazione al numero di dispositivi necessari per realizzare il sistema di isolamento;

- Il contenuto in frequenze dell'azione di progetto, in relazione all'entità dell'abbattimento delle accelerazioni;
- La presenza di edifici in adiacenza, in relazione alla realizzazione di giunti di separazione e alle relative problematiche architettoniche e impiantistiche;
- Il tipo di dispositivo del sistema di isolamento.

In particolar modo il numero di piano è il parametro che influenza maggiormente i costi, poiché può essere molto aggravante sia che sia troppo piccolo, sia troppo grande: nel primo caso perché i costi per la realizzazioni degli impianti del sistema e le tecnologie inserite vengono ripartiti in un numero esiguo di piani; nel secondo caso perché il periodo della struttura, considerata a base fissa, può risultare elevato da limitare i vantaggi dell'isolamento in termini di riduzione delle forze sismiche.

Un sistema d'isolamento deve in generale possedere le seguenti caratteristiche:

- Capacità di sostenere i carichi gravitazionali in condizioni di riposo e in condizioni sismiche (funzioni di appoggio);
- Elevata deformabilità (o bassa resistenza) in direzione orizzontale sotto azioni sismiche;
- Buona capacità dissipativa;
- Adeguata resistenza ai carichi orizzontali non sismici (vento, traffico, etc.).
- Capacità di ricentraggio, che permette di avere spostamenti residui nulli o trascurabili al termine del sisma.

1.2 Tipologie di isolatori

1.2.1 Isolatori sismici elastomerici

Gli isolatori in gomma armata sono i componenti fondamentali di questi sistemi di isolamento. Essi sono realizzati alternando strati di elastomero dello spessore di 5-20 mm con lamierini in acciaio dello spessore di 2-3 mm (vedi figura.1-3). Questi ultimi esplicano un'azione di confinamento sull'elastomero, che ne limita la deformabilità verticale (così da contenere in 1-3 mm l'abbassamento del dispositivo sotto i carichi di esercizio), incrementando sensibilmente la portata ai carichi verticali, senza influenzare significativamente la deformabilità a taglio dell'isolatore in direzione orizzontale.

Per le proprietà di resistenza a fatica e di elasticità della gomma, gli isolatori elastomerici sono in grado di soddisfare molti dei requisiti di un sistema di isolamento. Alcune varianti, ottenute attraverso l'uso di speciali mescole additivate o di inserti atti ad aumentarne le capacità dissipative e a variarne in maniera favorevole la rigidità, permettendo di conseguire in pieno tali requisiti e di realizzare sistemi di isolamento costituiti unicamente da isolatori elastomerici, senza altri dispositivi ausiliari.



Figura 1-3 Isolatore elastomerico in gomma

Alcune problematiche sono comuni a tutti i dispositivi di isolamento in gomma, fra di esse si ricordano:

- La stabilità del dispositivo sotto compressione a taglio;
- L'aumento di deformazione sotto carico costante (creep) della gomma;
- L'efficacia dell'aderenza di deformazione gomma-acciaio ad elevati spostamenti;
- Le variazioni di comportamento meccanico dell'elastomero con la temperatura, la frequenza di oscillazione e l'invecchiamento.

Ciascuno di tali aspetti va valutato attentamente in fase sperimentale e portato debitamente in conto in fase di progettazione e verifica della struttura isolata. Molte normative, così come quella italiana, prescrivono l'esecuzione della cosiddetta "Upper and Lower Bound Analysis" per determinare le quantità progettuali della risposta del sistema strutturale, prendendo in considerazione i valori minimi e massimi dei parametri di comportamento del dispositivo nelle diverse condizioni di lavoro, con particolare riferimento agli effetti della temperatura e dell'invecchiamento.

Caratteristica comune a tutti gli isolatori in gomma è la riduzione della loro capacità portante verticale al crescere dello spostamento orizzontale applicato, sia per la deformazione a taglio indotta che per la riduzione dell'area di impronta effettiva. Ciò è chiaramente messo in luce dalla figura 1-4, nel quale sono riportati i valori della forza registrata in diverse serie di cicli consecutivi, in corrispondenza dello spostamento nullo o dello spostamento massimo

Come si può vedere, la capacità portante verticale dei dispositivi elastomerici si riduce rapidamente al crescere dello spostamento orizzontale applicato. Ciò può rendere problematico il dimensionamento di tali dispositivi in zona ad elevata sismicità, ove sono previsti spostamenti

considerevoli, soprattutto se la struttura è affetta da significative variazioni del carico assiale negli isolatori.

Essi sono sostanzialmente divisi in tre tipi di isolatori elastomerici attualmente in commercio, classificabili in relazione alle caratteristiche dissipative dell'elastomero e dell'eventuale presenza di inserti:

- In gomma armata a basso smorzamento;
- In gomma armata ad elevato smorzamento;
- In gomma armata con nucleo in piombo o altro materiale dissipativo.

Gli isolatori in gomma armata a basso smorzamento presentano un comportamento meccanico sostanzialmente molto basso, dell'ordine del 2-4%. Sono semplici da realizzare, facili da modellare e il loro comportamento meccanico risulta sostanzialmente indipendente dalla frequenza di oscillazione e poco sensibile alla temperatura. Per contro, un sistema di isolamento realizzato con tali isolatori richiede opportuni dispositivi ausiliari, per incrementarne le capacità

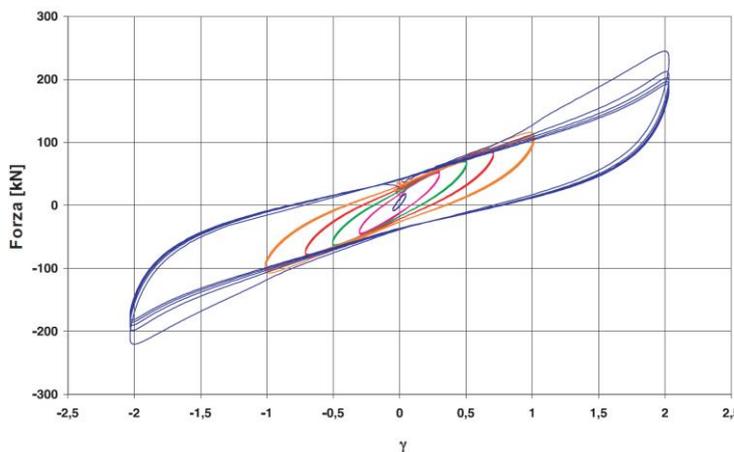


Figura 1-4 Ciclo isteretico isolatore elastomerico

dissipativa sotto sisma ed evitare movimenti eccessivi delle strutture per effetto delle azioni orizzontali di esercizio (vento, etc.).

Gli isolatori in gomma armata ad elevato smorzamento sono ottenuti aggiungendo alla miscela della gomma opportuni additivi (resine, oli, etc.) che consentono di raggiungere valori di smorzamento compresi fra il 10% ed il 20%, per deformazioni a taglio dell'ordine del 100%. La natura della dissipazione di energia è in parte viscosa, ossia quadratica con lo spostamento, ed in parte isteretica, ossia lineare con lo spostamento (vedi fig. 1-4). Ciò implica una certa dipendenza del comportamento meccanico dalla frequenza di oscillazione, cui si aggiunge anche un'influenza non trascurabile della temperatura.

Sia il modulo a taglio che lo smorzamento dipendono in modo significativo dalla deformazione a taglio (γ) applicata. A bassi livelli di deformazione ($\gamma < 10\%$) il modulo di deformazione a taglio risulta piuttosto elevato, anche di 5-10 volte maggiore di quello relativo ai livelli di deformazione raggiunti

nelle condizioni sismiche di progetto ($\gamma = 100-150\%$). All'aumentare della deformazione oltre tali limiti, il modulo di taglio cresce di nuovo, determinando un significativo incrudimento nel ciclo forza-spostamento dell'isolatore.

Gli isolatori in gomma ad elevato smorzamento possono da soli realizzare un sistema di isolamento completo, che soddisfa i requisiti fondamentali precedentemente espressi. L'elevata capacità dissipativa assicura un buon controllo degli spostamenti indotti dal sisma. L'elevata rigidità iniziale limita gli spostamenti sotto i carichi orizzontali non sismici. Il comportamento

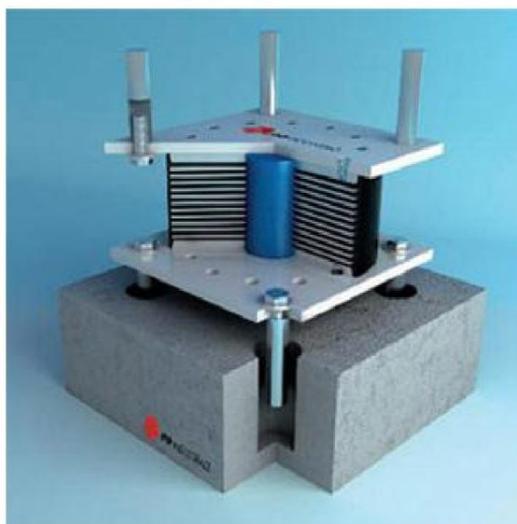


Figura 1-5 Isolatore elastomerico con nucleo in piombo

quasi-elastico garantisce ottime capacità ricentraggio.

Inoltre, l'incrudimento della gomma, a deformazioni maggiori di quelle associate al terremoto di progetto, può risultare utile nel limitare gli spostamenti nel caso di eventi sismici anomali per intensità o per contenuto in frequenza.

Le proprietà meccaniche degli isolatori ad elevato smorzamento variano in modo significativo durante i primi cicli di deformazione, a causa del fenomeno noto come "scragging". All'atto dello scarico si ha un parziale recupero delle proprietà iniziali. È importante osservare, al riguardo, che le specifiche sulle caratteristiche del dispositivo indicate in fase di progetto andrebbero comunque riferite al 2°-3° ciclo di carico con ampiezza pari allo spostamento di progetto.

Gli isolatori in gomma armata con nucleo in piombo, in figura 1-5, utilizzano uno o più inserti cilindrici in piombo, disposti in appositi fori verticali nell'isolatore in gomma armata, per ottenere la necessaria rigidità ai carichi orizzontali di servizio (vento, forze di frenatura nei ponti, ect.), unitamente ad un'elevata capacità dissipativa sotto sisma. Il comportamento meccanico di tali dispositivi (vedi figura 1-6) risulta sostanzialmente combinazione di quello elastico lineare degli appoggi elastomerici a basso smorzamento con quello elasto-plastico del nucleo in piombo sottoposto ad un regime deformativo di tipo tagliente. La deformazione a taglio del nucleo è assicurata dall'azione di confinamento delle piastre d'acciaio del dispositivo in gomma. Lo

smorzamento viscoso equivalente, associato ai cicli di isteresi descritti, risulta tipicamente compreso fra il 15% ed il 35%, a seconda dello spostamento imposto e della dimensione dell'inserito in piombo.

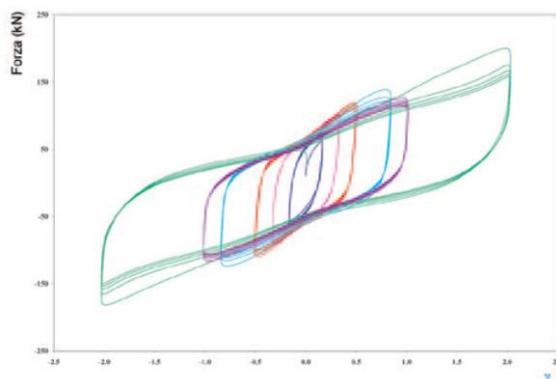


Figura 1-6 Ciclo isteretico dell'isolatore elastomerico con nucleo in piombo

La rigidezza secante e lo smorzamento viscoso equivalente risultano funzione del numero di cicli applicato. Sia la rigidezza che l'energia dissipata diminuiscono progressivamente al crescere dei cicli, tendendo a stabilizzarsi dopo 10-15 cicli di carico, con un fenomeno analogo allo "scragging" nella gomma, ma con effetti più marcati. Questo comportamento è evidenziato dal grafico di figura 1-6, nel quale sono riportati i valori della forza registrata in diverse serie di cicli consecutivi, in corrispondenza dello spostamento nullo o dello spostamento massimo. La ripetizione delle serie a distanza di 5 minuti e di 12 giorni dimostra il recupero delle caratteristiche iniziali. All'origine di tale fenomeno c'è il surriscaldamento del nucleo in piombo, prodotto dai ripetuti cicli di oscillazione ad alta frequenza. L'entità della diminuzione di rigidezza e smorzamento, al crescere del numero di cicli applicati, è funzione delle dimensioni del dispositivo in gomma e del nucleo in piombo.

Elevate capacità dissipative, ma con un'aliquota viscosa decisamente più elevata ed un comportamento più stabile, possono essere ottenute utilizzando nuclei di materiali polimerici ad elevata viscosità.

1.2.2 Isolatori sismici a scorrimento a superficie curva

Gli isolatori a scorrimento possono essere unidirezionali e multidirezionali, permettendo spostamenti in una sola direzione e in tutte le direzioni del piano orizzontale, rispettivamente. I primi hanno trovato e possono trovare applicazione nell'isolamento sismico dei ponti, essendo questi caratterizzati da un comportamento totalmente diverso nelle due direzioni e necessitando, talvolta, di un sistema d'isolamento efficace in una sola direzione (spesso quella longitudinale). Negli edifici, ovviamente, si tende ad ottenere un comportamento isotropo (nel piano orizzontale) del sistema d'isolamento nel suo complesso e si preferiscono gli isolatori multidirezionali. Questi ultimi sono costituiti da due dischi di diverso diametro che scorrono l'uno sull'altro, costituiti da

materiali particolari che sviluppano una bassa resistenza d'attrito tra le superfici a contatto. Le superfici di scorrimento più elevate, e ampiamente sperimentate nella tecnologia degli appoggi per ponti, sono di acciaio inossidabile lucidato e PTFE (Teflon). Il coefficiente di attrito dinamico risulta, in tal caso, compreso fra il 6% ed il 12%, riducendo all'1-2% in caso di lubrificazione delle superfici, ed è funzione: 1) della pressione di contatto; 2) della velocità di scorrimento; 3) della temperatura. Anche il numero di cicli, o più precisamente la distanza totale percorsa dalle superfici a contatto nello scorrimento relativo, influenza in modo non trascurabile il coefficiente d'attrito dinamico, a causa del deterioramento delle superfici di scorrimento.

Le principali caratteristiche del coefficiente d'attrito si possono riassumere, come:

- Aumenta rapidamente al crescere della velocità, mantenendosi, però, pressoché costante nell'intervallo di velocità tipicamente raggiunte in condizioni sismiche;
- Si riduce all'incirca linearmente al crescere della pressione di contatto;
- Diminuisce al crescere della temperatura;
- È fortemente influenzata dallo stato di lubrificazione delle superfici a contatto, con differenze di un ordine di grandezza in condizioni limite (superfici perfettamente lubrificate al confronto con superfici non lubrificate, ad elevata velocità di scorrimento).

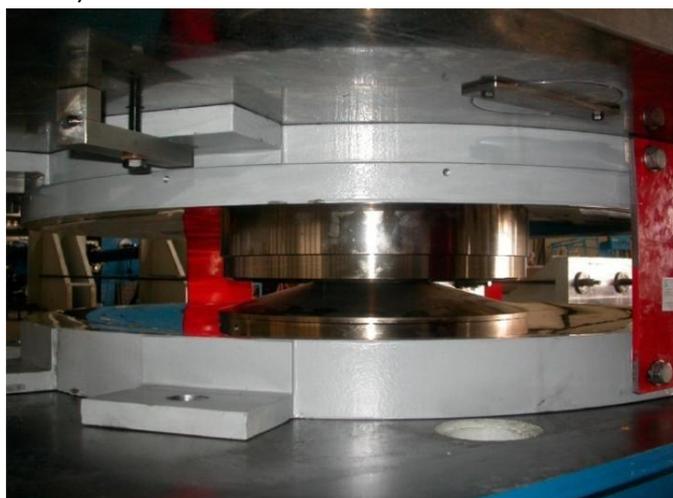


Figura 1-7 Isolatore a pendolo con doppia curvatura

Nella pratica, si rinuncia quasi sempre a sfruttare la dissipazione di energia per attrito degli isolatori a scorrimento, per l'eccessiva variabilità del coefficiente d'attrito, nel tempo e a causa delle diverse condizioni ambientali (temperatura, umidità, ecc.) e di pulizia nelle quali l'isolatore può svolgere la sua funzione antisismica. Si utilizzando, perciò, isolatori lubrificati, con l'unica funzione di sostegno di carichi verticali, lasciando praticamente liberi gli spostamenti orizzontali. Per questo gli appoggi scorrevoli in acciaio-PTFE non sono utilizzati quasi mai come unico componente del sistema di isolamento, a meno che non incorporino elementi atti ad aumentare la rigidità iniziale e la capacità dissipativa e/o a fornire capacità di ricentraggio.

Gli unici isolatori a scorrimento che incorporano la funzione ricentrante e dissipativa, senza l'aggiunta di altri elementi, sono quelli con superfici di scorrimento curve. Tra questi il più noto è il

“Friction Pendulum System” (FPS), la cui capacità di ricentraggio deriva dall’impiego di una superficie di scorrimento di tipo sferico non lubrificata, e perciò in grado anche di dissipare energia. Al raggio di curvatura di tale superficie sferica è legata la rigidità effettiva del dispositivo, e quindi il periodo di vibrazione della struttura isolata. I problemi principali del FPS sono legati alle sue notevoli dimensioni, ai movimenti verticali che inevitabilmente accompagnano gli spostamenti orizzontali, che possono produrre effetti parassiti sulla struttura, all’affidabilità nel tempo dell’attrito tra le superfici di contatto, ai costi elevati.

Gli isolatori in acciaio-PTFE lubrificati a superficie piana devono, invece, essere utilizzati congiuntamente a dispositivi ausiliari funzione ricentrante e/o dissipativa. Frequente è l’utilizzo di dispositivi in gomma, sia come dispositivi ausiliari, quindi senza funzione di appoggio, che come isolatori veri e propri. In questo ultimo caso si realizzano dei sistemi di isolamento ibridi, in cui coesistono isolatori elastomerici ed isolatori a scorrimento. Questa configurazione presenta interessanti vantaggi sia tecnici che economici. Essa permette di ottenere sistemi a bassa rigidità (lungo periodo), con notevoli abbattimenti degli effetti del sisma, anche quando la massa strutturale competente a ciascun isolatore è limitata, e buone capacità ricentranti, senza l’utilizzo di dispositivi ausiliari. La principale controindicazione è legata alla differente deformabilità verticale, sia istantanea, sia differita nel tempo (creep), che può determinare spostamenti differenziali verticali in corrispondenza dei diversi isolatori, sia in condizioni statiche, sia dinamiche. In tali casi è importante limitare al massimo tali differenze (ad esempio adottando isolatori elastomerici molto rigidi verticalmente) e valutare attentamente le conseguenze degli spostamenti differenziali sulla struttura. Qualora sussistano dubbi su tali conseguenze, è comunque possibile utilizzare gli isolatori in gomma, nelle diverse versioni viste in precedenza, unicamente come dispositivi ausiliari multidirezionali a comportamento quasi-elastico. In tal caso, ovviamente, decadendo la funzione di sostegno dei carichi verticali, il loro dimensionamento non sarà più condizionato dalla rigidità e dalla portanza ai carichi verticali, ma unicamente dalle proprietà di rigidità e dalla portanza rispetto ai movimenti orizzontali che si vogliono conseguire.

Fra i dispositivi ausiliari per il completamento di un sistema basato su isolatori a scorrimento, si ricordano i dispositivi a comportamento non lineare fortemente dissipativi basati sullo snervamento dell’acciaio, che sfruttano elementi di forma opportuna deformati in regime di flessione e/o torsione, e i dispositivi basati su elementi in piombo sollecitati a taglio oppure quelli in cui il piombo è estruso all’interno di un cilindro da un pistone (“Lead Extrusion Damper”). Per ottenere una perfetta capacità ricentrante, tenuto anche conto della resistenza d’attrito che si sviluppa negli isolatori, una soluzione proposta di recente prevede l’utilizzo di dispositivi ausiliari basati su leghe a memoria di forma (LMF), ancora a comportamento fortemente non lineare. Una funzione esclusivamente dissipativa è svolta, invece, dai dispositivi viscosi, basati sull’estrusione di

un fluido altamente viscoso all'interno di un cilindro con pistone dotato di un orificio di adatte dimensioni. In generale questi dispositivi svolgono, oltre alla funzione dissipativa e/o ricentrante sotto azioni sismiche, anche quella di vincolo laterale, sotto carichi orizzontali non sismici (vento, etc.).

Una questione molto discussa è la necessità di dotare il sistema d'isolamento di capacità ricentranti. Mancando queste ultime, la risposta del sistema mostrerebbe una deriva in una certa direzione ed un elevato spostamento residuo al termine dell'evento sismico. Questo fenomeno può risultare particolarmente accentuato in presenza di terremoti di elevata intensità in vicinanza della sorgente sismica ("near fault"). Il problema si pone innanzitutto rispetto alle condizioni di utilizzabilità della struttura dopo l'evento (eccessivi spostamenti residui potrebbero non essere compatibili con le condizioni di utilizzazione) e quindi rispetto alle condizioni di sicurezza nei confronti di scosse successive ("aftershoks"), che potrebbero fare assumere al fenomeno dimensioni eccessive. Per questo motivo molte normative accettano l'utilizzo di sistemi di isolamento privi di capacità ricentrante, a patto di far riferimento ad uno spostamento superiore, pari a tre volte allo spostamento massimo di progetto del sistema di isolamento, per la verifica di giunti, impianti, etc.. In generale il problema del riposizionamento della struttura nella sua configurazione originaria non presenta particolari difficoltà di soluzione se già nel progetto si prevedono elementi di contrasto da cui spingere la struttura mediante martinetti disposti orizzontalmente, avendo disconnesso i dispositivi ausiliari dissipativi, così da limitare la forza necessaria allo spostamento alla sola reazione di attrito negli isolatori a scorrimento. Di seguito un esempio di ciclo isteretico per questo dispositivo, in figura 1-8.

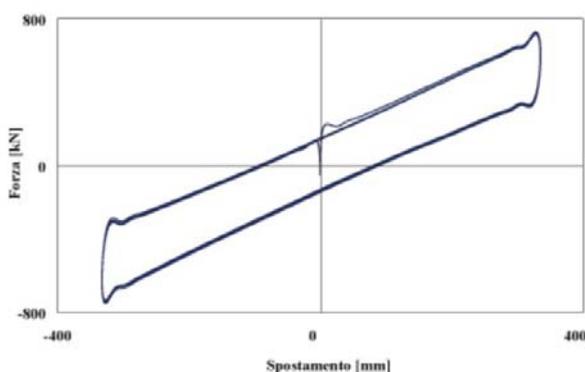


Figura 1-8 Ciclo isteretico dell'isolatore a pendolo

1.3 La dissipazione energetica

L'obiettivo dell'introduzione di dissipazione energetica supplementare nelle costruzioni di nuova concezione ed in quelle esistenti è quello di dissipare gran parte dell'energia indotta dal sisma mediante i dispositivi introdotti e preservare il resto della struttura in modo che questa garantisca la resistenza alle azioni gravitazionali anche dopo il sisma.

I sistemi di dissipazione energetica si distinguono in due grandi categorie: dissipatori dipendenti dallo spostamento e dissipatori dipendenti dalla velocità.

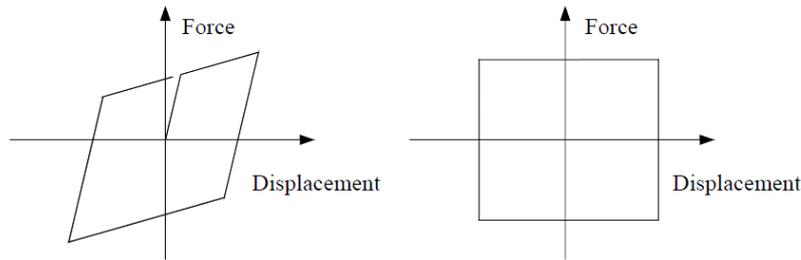


Figura 1-9 Cicli isteretici dissipatori: (a) ciclo di un dissipatore elasto-plastico , (b) ciclo di un dissipatore ad attrito

I principali sistemi di dissipazione dipendenti dallo spostamento sono quelli basati sullo snervamento dei metalli e quelli basati sull'attrito i cui cicli isteretici sono riportati in figura 1-9.

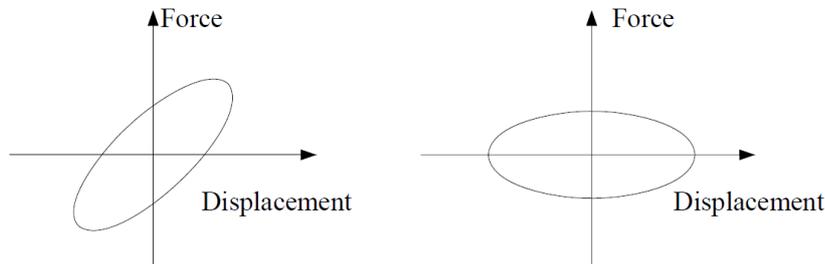


Figura 1-10 Cicli isteretici dissipatori: (a) dissipatore visco-elastico; (b) dissipatore fluido-viscoso

I principali sistemi di dissipazione dipendenti dalla velocità sono quelli basati sulla deformazione di materiale solido visco-elastico e quelli basati sul passaggio forzato di fluido viscoso attraverso appositi orifizi. In figura 1-10 sono riportati i cicli isteretici dei dissipatori dipendenti dalla velocità. Gli smorzatori visco-elastici solidi si avvalgono di materiali polimerici o vetrosi che dissipano energia per effetto delle deformazioni tangenziali (questa tipologia di dissipatori è ormai superata poiché permette una limitata dissipazione), mentre quelli fluido-viscosi si basano sulla deformazione di oli silconici e dal passaggio degli stessi attraverso appositi orifizi.

1.4 Tipologie di smorzatori sismici

1.4.1 Smorzatori sismici metallici

Uno dei meccanismi di maggior efficacia disponibili per la dissipazione di energia, immessa nella struttura durante un terremoto, è attraverso la deformazione a comportamento inelastico di materiali metallici. Nelle tipiche strutture in acciaio, la progettazione antisismica ripone sopra al campo di duttilità di elementi specifici nella struttura il compito di provvedere alla dissipazione

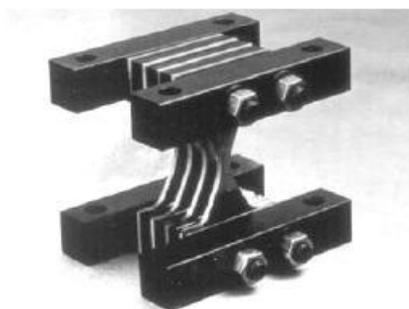


Figura 1-11 Dissipatore X-Shape

richiesta. L'idea di utilizzare smorzatori metallici basati sulle proprietà isteretiche nella struttura per assorbire la maggior parte dell'energia sismica è iniziata con il concetto e i lavori di sperimentazione da Kelly e al. (1972 e Skinner e al. (1975). Principalmente i dispositivi studiati da questi ricercatori includono la trave torsionale, trave a flessione, e smorzatori U-strip.

Al fine di includere questi dispositivi nella progettazione di una struttura attuale, si deve essere in grado di descrivere perfettamente il loro comportamento non lineare nello spostamento sotto cicli di carico arbitrari. Negli anni successivi alle prime ricerche, si è progressivamente affinato lo sviluppo di questi smorzatori metallici. Per esempio, molto modelli sono stati presentati come quello a forma di X, in figura 1-11, e triangolare.

Per apprezzare a pieno il comportamento dei dissipatori metallici di energia, si deve prima di tutto considerare la risposta inelastica dei metalli in funzione di tempo-cicli di carico. Una volta che il modello forza-spostamento è stato stabilito, il progettista deve analizzare il comportamento della struttura nel suo complessivo. Indipendentemente dalla forma del dispositivo, il principio che regola il meccanismo dissipativo è in tutti i casi la deformazione inelastica del materiale. Spesso si utilizza acciaio dolce, sebbene qualche volta vengono impiegati anche materiali particolari come metalli inusuali per l'ambito di lavoro. Idealmente, si potrebbe sviluppare uno smorzatore con ogni metallo, una volta studiato il comportamento deformante, governato dalla teoria delle dislocazioni. Si considera per primo il comportamento di un'asta cilindrica metallica, con lunghezza iniziale L_0 e sezione trasversale A_0 , soggetta ad una tensione uniassiale come mostrato nella figura 1-12. Si assume che il carico sia incrementato lentamente, per confermare l'ipotesi di azione quasi-statica.

In questi diagrammi, l'ascissa rappresenta la deformazione convenzionale ε , mentre la tensione nominale σ_n è plottata nell'asse delle ordinate. In riferimento alla figura 1-12:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

$$\sigma_n = \frac{P}{A_0}$$

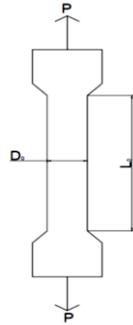


Figura 1-12 Cilindro soggetto a forze assiali alle estremità

La curva in figura 1-13 è tipica di molti metalli. Al carico corrispondente alla tensione nominale fino al campo di snervamento σ_y , la risposta dell'elemento è completamente lineare, con σ_x proporzionale a ε . In questo range, lo stato iniziale è pienamente reversibile alla rimozione del carico applicato, e non c'è dissipazione di energia. Dall'altra parte, quando la tensione nominale eccede il campo di snervamento ε_y , una deformazione plastica irreversibile accade in coincidenza con la dissipazione inelastica di energia.

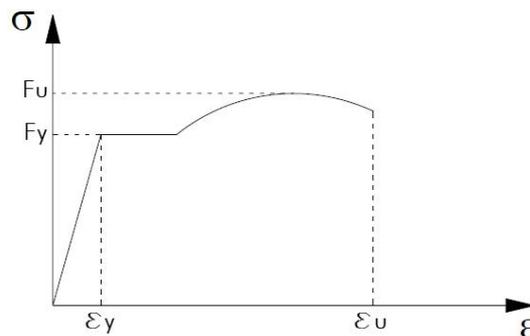


Figura 1-13 Schema tensione nominale

1.4.2 Smorzatori sismici visco-elastici

L'applicazione di materiali viscoelastici per il controllo delle vibrazioni può essere datato indietro fino agli anni '50 quando fu usato per la prima volta un aereo come il principale controllo delle vibrazioni indotte dalla fatica. Da quel periodo, ci fu un vivido incremento d'uso per gli aerei

e le strutture aerospaziali per ridurre le vibrazioni. La sua applicazione nelle strutture ingegneristiche a finalità civili è apparsa alla fine degli anni '60 quando 10.000 smorzatori viscoelastici erano installati in ognuna delle torri gemelle del World Trade Center a New York per imporre resistenza ai carichi da vento. Questa applicazione è stata applicata a molte opere simili, cioè edifici alti sia in America che nel resto del mondo.

Le applicazioni sismiche di smorzatori viscoelastici hanno un'origine molto recente. Per queste, gli incrementi maggiori di smorzamento sono richiesti in comparazione con quelli richiesti per mitigare le vibrazioni indotte dal vento. Inoltre, l'energia immessa nella struttura è spesso diffusa con una banda di frequenza più ampia, richiedente molti più numerosi elementi viscoelastici. I materiali viscoelastici usati nell'applicazione strutturale sono tipicamente co-polimerici o sostanze vetrose che dissipano energia quando sono soggette a deformazioni a taglio. Un tipico smorzatore viscoelastico (VE) è mostrato in figura 1-14 che consiste di strati viscoelastici con piatti d'acciaio. Quando vengono montati in una struttura, la deformazione a taglio e quindi l'energia dissipata si sviluppa quando la vibrazione strutturale induce movimento tra le flange d'acciaio e il piano centrale.

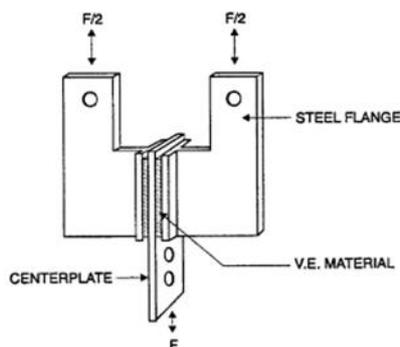


Figura 1-14 Smorzatore viscoelastico

Sotto un carico sinusoidale con frequenza ω , la deformazione a taglio $\gamma(t)$ e la tensione a taglio $\tau(t)$ di un materiale viscoelastico oscillano alla stessa frequenza ω , ma in generale fuori fase. Essi possono essere espressi da:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \gamma_0 \sin \omega t \\ \tau(t) &= \tau_0 \sin(\omega t + \delta)\end{aligned}$$

dove, come mostrato nella figura 1-15, γ_0 e τ_0 sono, rispettivamente, il picco di deformazione a taglio e il picco di tensione a taglio, e δ è il ritardo angolare. Per un dato γ_0 , entrambi τ_0 e δ sono funzioni di ω .

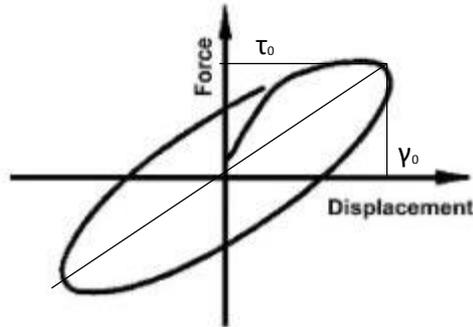


Figura 1-15 Schema tensioni-deformazioni

La tensione a taglio può anche essere scritto come:

$$\tau(t) = \gamma_0 [G'(\omega) \sin \omega t + G''(\omega) \cos \omega t]$$

dove

$$G'(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta, \quad G''(\omega) = \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta$$

La quantità $\gamma_0 \sin \omega t$ può essere riposta da $\gamma(t)$ come:

$$\cos \omega t = \frac{1}{\gamma_0 G''(\omega)} [\tau(t) - G'(\omega) \gamma(t)]$$

Con $\sin \omega t$ dato precedentemente, e usando l'identità $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, si ha che la relazione tensione-deformazione:

$$\tau(t) = G'(\omega) \gamma(t) \mp G''(\omega) [\gamma_0^2 - \gamma^2(t)]^{1/2}$$

che definisce un'ellisse come illustrato in figura 1-, di cui l'area dà l'energia dissipata dal materiale viscoelastico per unità di volume e per ciclo di oscillazione. È ottenuta da:

$$E_H = \int_0^{2\pi/\omega} \tau(t) \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi/\omega} \gamma_0^2 \omega \cos \omega t [G'(\omega) \sin \omega t + G''(\omega) \cos \omega t] dt = \pi \gamma_0^2 G''(\omega)$$

1.4.3 Smorzatori fluido-viscosi

Fino ad ora tutti i meccanismi affrontati sono smorzatori che dissipano energia basata su variazioni di forma delle deformazioni inelastiche. Metallici, a frizione e viscoelastici sono smorzatori che utilizzano tutti l'azione di solidi per accrescere le performance delle strutture soggette a azioni esterne vibranti.

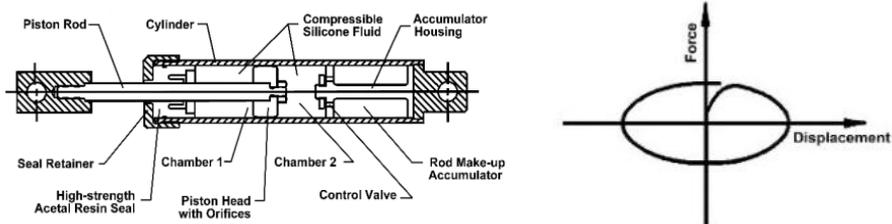


Figura 1-16 Schema smorzatore fluido-viscoso e relativo ciclo isteretico

Un significativo sforzo è stato fatto direttamente nei recenti anni attraverso lo sviluppo di smorzatori fluido-viscosi per applicazioni strutturali, principalmente attraverso la conversione della tecnologia dallo sviluppo militare e dall'industria pesante. Un tipo di progettazione è modellato direttamente sul classico pistone: la dissipazione avviene per conversione dell'energia meccanica in calore come un pistone deforma una sostanza spessa, altamente viscosa, come ad esempio un gel in silicone, come nello schema in figura 1-16.

Mentre questi dispositivi possono essere anche schierati con la sovrastruttura, un'alternativa, forse più efficace, il concetto progettuale coinvolge lo sviluppo di un muro con smorzamento viscoso (VDW). In questo progetto, sviluppato da Sumitomo Construction Comedy, il pistone è semplicemente un piatto d'acciaio confinato a muoversi nel suo piano con un contenitore stretto rettangolare d'acciaio riempito con un fluido viscoso. Si devono considerare due aspetti importanti alla base di questo tipo di smorzatore: il primo coinvolge la caratteristica che i fluidi hanno tipicamente una sorta di memoria (cioè mostra la dipendenza dalla frequenza). Di conseguenza, si enfatizza il modello reologico del fluido viscoelastico.

1.5 Smorzatori sismici a massa accordata

Ora si analizza il dispositivo su cui si andranno a ricercare e confrontare i metodi per l'applicazione progettuale. L'obiettivo di incorporare uno smorzatore a massa accordata nella struttura è alla base la stessa di quelli associati agli smorzatori metallici e ad altri dissipatori d'energia, quindi quello di ridurre la domanda di energia da dissipare da parte degli elementi principali strutturali sotto l'azione di forze esterne, dinamiche. Questa riduzione, in questo caso, è raggiunta attraverso il trasferimento di parte dell'energia vibrante dalla struttura alla massa accordata (TMD) che, nella sua più semplice forma, consiste di un sistema ausiliario, formato da una massa collegata in parallelo ad una molla e ad un pistone, ancorata o attaccata alla struttura principale.

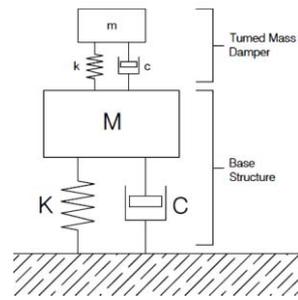


Figura 1-17 Schema di uno smorzatore a massa accordata

Il moderno concetto di smorzatori a massa accordata per applicazioni strutturali ha le sue radici negli assorbitori di vibrazioni studiati agli inizi, nel 1909 da Frahm [2]. Una rappresentazione schematica dello suo smorzatore è mostrano nella fig. 1-17. Sotto un carico armonico, si può vedere che la massa principale può essere resa completamente stazionaria quando la frequenza naturale dello smorzatore attaccato è impostata per essere la frequenza dell'eccitazione agente.

Den Hartog, per primo, ha studiato la teoria di sistemi non-smorzati e smorzati per vibrazioni dinamiche, che ha sviluppato le basi principali per la selezione corretta dei parametri dello smorzatore. Lo smorzamento nel sistema principale era incluso nell'analisi di smorzatori per vibrazioni dinamiche, sviluppate da Bishop e Welbourn (1952) [2]. Successivamente a tutti i lavori, una procedura ottimale era stata derivata da Falcon e altri (1967) per ottenere il picco di risposta minimo e quello massimo per l'efficacia dello smorzamento nella struttura primaria. Molti studi descritti in precedenza erano indirizzati nell'impiego per macchine, al fine di attenuare le vibrazioni. Le costruzioni sono soggette a carichi ambientali, come vento e terremoti, che posseggono molte componenti di frequenze. La performance di uno smorzatore per vibrazione dinamica, frequentemente riferito come smorzatore a massa accordata (TMD), nel complesso multi gradi di libertà e spesso smorzate strutture, si aspettano essere diverse. Molta ricerca e sviluppo negli ultimi vent'anni ha quindi diretto lo studio dell'efficacia dei TMD quando sono operanti per le vibrazioni dovute all'ambiente esterno. Tuttavia, come si vedrà nei capitoli successivi, la tecnica di smorzamento a massa accordata presenta alcune problematiche, che la rendono poco affidabile. Il principale aspetto che si riscontra, avvicinandosi al TMD, è che soffre di un fenomeno definito "detuning", [3] che comporta l'inoperatività dello smorzatore: il fenomeno non è da ricondursi solo ai motivazioni, quali la modifica delle caratteristiche della struttura in seguito a un dato evento (ad esempio un cedimento strutturale, ampliamento, ecc.) che sarebbe facilmente risolvibili, ma, soprattutto, alla variabilità del segnale sismico ed la conseguente interazione con la struttura di non facile lettura.

Lo scopo di questo lavoro è quello di fornire degli strumenti per sfruttare al meglio questa tecnica, e per capire il motivo di possibili situazioni d'interazione struttura-TMD, che ad una prima lettura possono portare a dare un'opinione negativa.

2 Premesse sulla Equazione del Moto

In questo breve capitolo vengono introdotte le equazioni che descrivono il comportamento delle strutture soggette ad un carico dinamico, agente in direzione orizzontale. Oltre alla trattazione classica dell'equazione del moto, viene introdotta anche l'equazione per sistemi con smorzamento non proporzionale, la quale è alla base di alcuni dei metodi che vengono trattati in questa tesi.

2.1 Equazione del moto

Si inizia con il più semplice modello che mostra alcune delle caratteristiche di una struttura soggetta ad un carico dinamico. È importante tenere a mente che qui si sta studiando il comportamento del modello idealizzato matematico, non quello della struttura reale; per descrivere una costruzione in modo completo sono richiesti un numero maggiore di elementi. Una struttura ideale elastica, quindi, non presenta alcun smorzamento interno. Comunque, molte strutture e materiali per le costruzioni in pratica usano solo una piccola parte dello smorzamento proprio interno, in tal modo le vibrazioni naturali possono persistere per un lungo periodo con una diminuzione graduale dell'ampiezza. La caratteristica delle vibrazioni naturali di una struttura ideale dipende dalla sua massa distribuita, dal suo comportamento sotto carichi flettenti, e dal modo in cui il moto ha inizio.

Se le condizioni iniziali sono propriamente poste, è possibile ottenere tutti i modi di vibrare della struttura che la caratterizzano. In un modo singolo di vibrare ogni punto esegue un moto armonico, rimanendo in equilibrio statico. Ovviamente, la frequenza dell'oscillazione è la stessa per ogni punto e questa si definisce come la frequenza associata ad un definito modo di vibrare. Se si considera ogni punto della struttura nell'istante in cui ognuno raggiunge la massima escursione di oscillazione e, per un momento, li consideriamo stazionari, si può visualizzare la struttura in una particolare configurazione deformata che è proprietà peculiare del modo di vibrare.

Una struttura elastica può avere vari modi di vibrare. Infatti questa, avente proprietà distribuite, ha un infinito numero di modi di vibrare in teoria. In generale, ogni modo è distinto dagli altri e di conseguenza anche la rispettiva frequenza. I modi di vibrare che si possono determinare per una struttura ideale sono pari al numero di gradi di libertà.

2.1.1 Equazioni del Moto per sistema ad 1 GDF non smorzato

Si consideri il moto laterale di un sistema ad 1 grado di libertà (SDOF), configurato con una massa m , che si muove lungo una direzione generica x . Il modello matematico di un sistema ad un grado di libertà è illustrato nella figura 2-1 seguente:

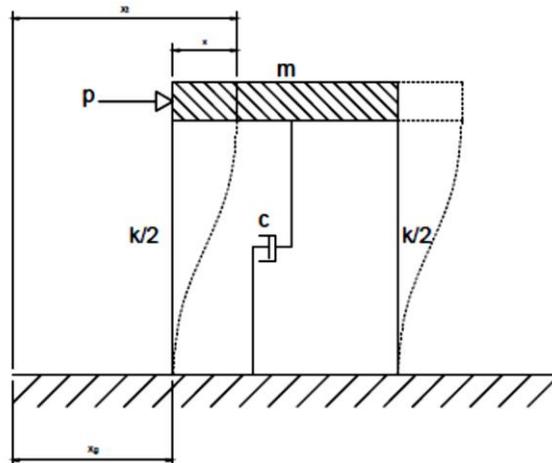


Figura 2-1 Schema di un sistema ad un grado di libertà

dove:

- $f(t)$ = forza dinamica variabile nel tempo;
- m = massa del sistema;
- $x(t)$ = spostamento relativo della massa m in un sistema di riferimento solidale alla base;
- k = rigidità del sistema (forza statica richiesta per indurre uno spostamento unitario);
- c = coefficiente di smorzamento viscoso equivalente del sistema (forza dinamica richiesta per indurre una velocità unitaria). Questo smorzamento viscoso è introdotto per rappresentare la dissipazione di energia, originata da cause di non semplice individuazione, durante le vibrazioni del sistema.

Questo sistema SDOF è soggetto ad un disturbo di origine sismica, caratterizzata da uno spostamento spaziale uniformemente, in funzione del tempo $x_g(t)$, e carico da vento rappresentato da $p(t)$. Il modello eccitato lateralmente risponde con spostamento $x(t)$ rispetto al terreno. Perciò lo spostamento totale della struttura idealizzata è:

$$x_t(t) = x_g(t) + x(t)$$

Sia $x_g(t)$ che $x(t)$ sono assunte come continue, entrambe funzioni differenziabili. Per definizione, una molla elastica produce una forza proporzionale allo spostamento, mentre la forza in uno smorzatore viscoso è proporzionale alla velocità. Come risultato, l'equazione del moto per questo sistema SDOF può essere scritta:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_g + p$$

nella quale i punti rappresentano le funzioni differenziali rispetto al tempo.

2.1.2 Oscillazioni libere di un sistema non smorzato

Si assuma che, per un momento, la massa m sia disposta nella posizione x_0 e fornita di velocità iniziale nulla al tempo t_0 . Con entrambe $\dot{x}_g(t) = 0$ e $p(t) = 0$, l'equazione si riduce al caso di oscillazioni libere. Inoltre, in assenza di smorzamento (cioè con $c = 0$), la risposta è semplicemente un moto armonico:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$$

dove ω_0 è la velocità espressa in rad/s per una struttura non smorzata, definita come:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

Altri parametri d'interesse, sono la frequenza naturale f_0 e il periodo naturale che sono definite come:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Il sistema non smorzato è, certamente, conservativo, caratterizzato da una percentuale di scambio di potenziale (deformazione) e energia cinetica. Non c'è dissipazione.

Dall'altra parte, l'esperienza indica che i sistemi reali sono sempre dissipativi per alcune estensioni. Con lo smorzamento nullo, la risposta nella oscillazione non smorzata di un sistema SDOF diventa:

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta \omega_0 t} \left[\cos \omega_D t + \frac{\zeta \omega_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

dove ω_D e ζ rappresentano la velocità angolare di un sistema smorzato e il rapporto adimensionale di smorzamento, rispettivamente. Nello specifico:

$$\omega_D = \omega_0 (1 - \zeta^2)^{1/2}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Si noti che per $\zeta = 0$ si semplifica, l'equazione è valida solo per sistemi non smorzati, nei restanti casi per $\zeta < 1$. Comunque, questo è esattamente il caso più interessante da approfondire. La risposta definita è plottata nella figura 2-2 per alcuni valori del rapporto di smorzamento in ordine da illustrare i drastici effetti che l'incremento dello smorzamento viscoso può avere sulla risposta del sistema SDOF. Per $\zeta = 0.01$ il sistema oscilla per 35 cicli prima di ridurre la propria ampiezza al valore di $0.10x_0$, mentre per $\zeta = 0.20$ bastano poco meno di due cicli. In tutti i casi, i

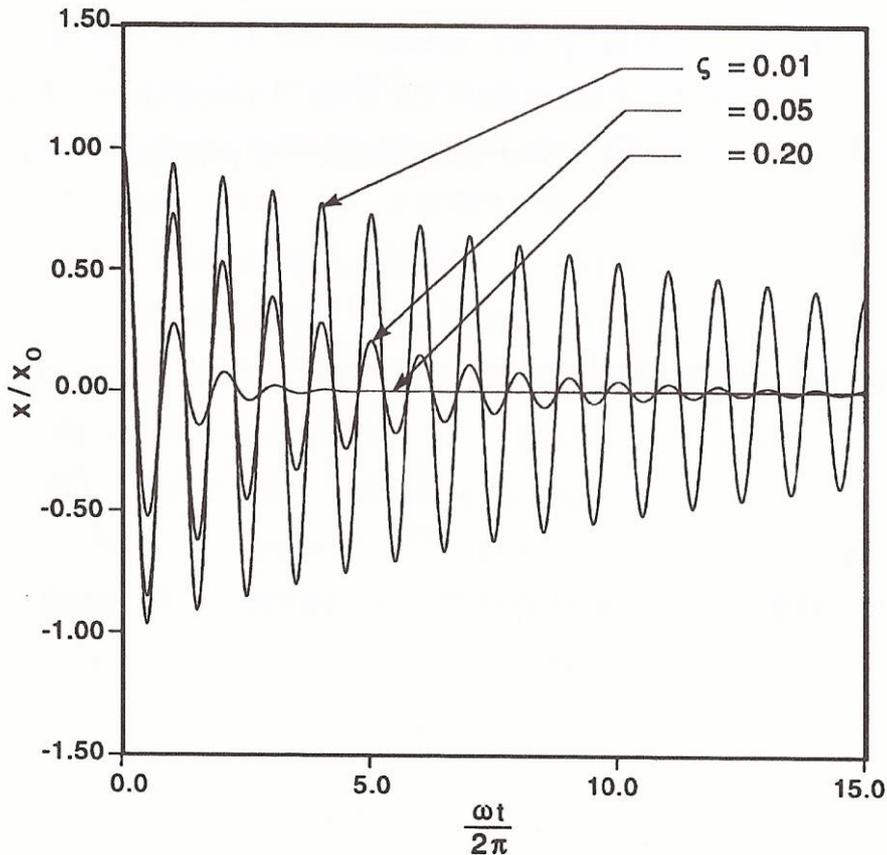


Figura 2-2 Diagramma di confronto tra sistemi con diverso rapporto di smorzamento

sistemi smorzati ritornano con andamento asintotico al loro stato indeformato, dove l'energia inizialmente immagazzinata nella molla è dissipata attraverso l'azione viscosa.

2.1.3 Sistemi con oscillazioni smorzate

Si affronta ora il problema di sistemi smorzati, inizialmente si esamina la risposta di un sistema SDOF attraverso l'applicazione di un carico di intensità p_0 e di frequenza ω . È importante in questa fase utilizzare la forma esponenziale complessa di carico. Perciò, si va applicando la forza nella equazione del moto e si ottiene:

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t}$$

dove dalla formula di Eulero:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

con i rappresenta il numero immaginario (cioè $i = (-1)^{1/2}$). L'accelerazione \ddot{x}_g è assunta nulla. Per un sistema che inizia con $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, la soluzione della Eq. (1-2) con un carico armonico può essere scritta come:

$$x(t) = x_1 e^{i(\omega t - \theta_1)} + e^{-\zeta \omega_0 t} x_2 e^{i(\omega_D t - \theta_2)}$$

nel quale le ampiezze x_1 e x_2 , e le fasi angolari θ_1 e θ_2 sono ottenuti da:

$$x_1 = \frac{p_0}{k} \frac{1}{[(1 - \beta^2) + (2\zeta\beta)^2]^{1/2}}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta\beta}{1 - \beta^2} \right]$$

$$x_2 = \frac{\beta x_1}{(1 - \zeta^2)^{1/2}}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[\frac{2\zeta^2 - (1 - \beta^2)}{2\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2}} \right]$$

con β rappresentante il rapporto delle frequenze applicate rispetto alla frequenza naturale. Quindi:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

I due termini che compongono l'equazione corrispondono alla componente dello stato di fatto e a quella di transizione del moto, rispettivamente. L'intensità del termine di transizione diminuisce con il tempo allo stesso modo del modello con oscillazione libere (o non smorzate). Di conseguenza, se il carico armonico agisce per un tempo sufficientemente lungo, solo il termine dello stato di fatto avrà un contributo significativo. Si assumerà questo come caso da analizzare. Gli spostamenti possono anche essere scritti in termini di funzioni di risposta in frequenza complesse $\tilde{h}(i\omega)$. Questo è, in questa fase:

$$x(t) = x_1 e^{i(\omega t - \theta_1)} = p_0 \tilde{h}(i\omega) e^{i\omega t}$$

dove:

$$\tilde{h}(i\omega) = \frac{1}{m[\omega_0^2 + 2i\zeta\omega_0\omega - \omega^2]}$$

Uno studio ulteriore della equazione precedente, rivela che l'intensità dello spostamento di risposta x_1 non è solo dipendente dal tempo, ma può essere anche scritto come prodotto della risposta statica ($x_{st} = p_0/k$) e un fattore di amplificazione dinamica, che dipende solo dalla

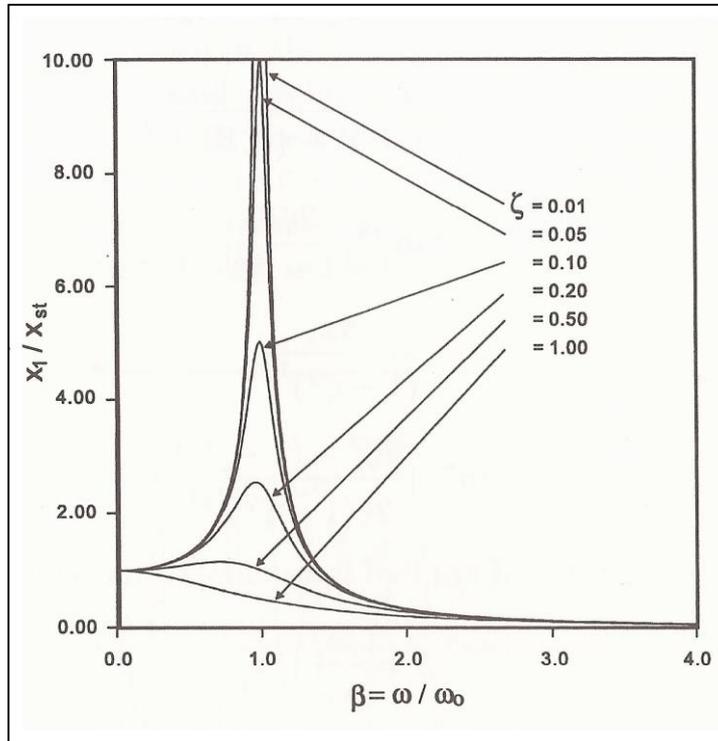


Figura 2-3 Risonanza

frequenza e dal rapporto di smorzamento. Il diagramma della variazione del fatto di amplificazione (x_1/x_{st}) rispetto a β per definiti valori del rapporto di smorzamento ζ è mostrato nella figura 2-3. Il picco di risposta si ha intorno al punto di risonanza ($\beta = 1$) e tende ad infinito per sistemi non smorzati. Con $\zeta = 0.01$ il picco del fattore di amplificazione dinamico è approssimativamente 50, mentre per $\zeta = 0.20$ è circa 2.5. Una volta ancora lo smorzamento viscoso si evidenzia avere un effetto drastico sulle caratteristiche di risposta di un sistema SDOF.

2.1.4 Risposta con Smorzatore Passivo

Il meccanismo responsabile per la dissipazione in tutti i casi considerati è stato fatto su uno smorzatore a comportamento viscoso lineare. Questo rappresenta il prototipo di dissipatore energetico. Evidentemente, esistono in commercio altri tipi di smorzatori, che sfruttano altri meccanismi di dissipazione. Per esempio, miglioramenti effettivi per dissipare energia si possono ottenere mediante corpi con elevata duttilità, meccanismi con attrito o viscoelastici. Si consideri un generico dispositivo a smorzamento passivo nel modello SDOF, con indicato nella figura 2-4. La risposta del sistema è ora influenzata dalla presenza un altro elemento, che deve essere

caratterizzato in termini macroscopici da un modello forza-spostamento adatto. Tipicamente, questo dispositivo passivo non sarà puramente di natura viscosa, ma invece porterà un aumento di rigidità e probabilmente una massa.

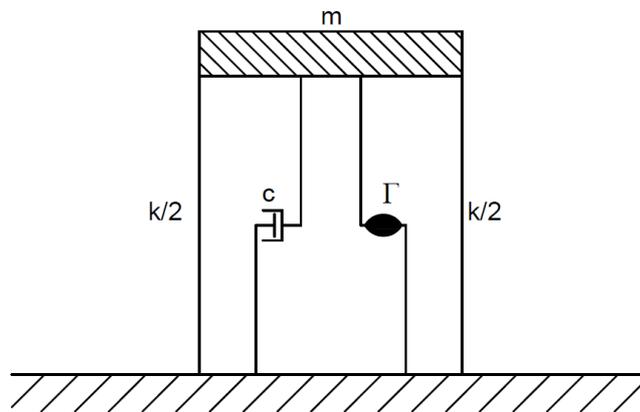


Figura 2-4 Modello con Elemento a Smorzamento Passivo

Il simbolo Γ nella figura 2-4 rappresenta un operatore differenziale integrato, attraverso il quale la forza corrispondente al dispositivo è scritta come Γ_x . Questo permette abbastanza di generalizzare le caratteristiche della risposta. Includendo spostamento, velocità o contributi dipendenti dall'accelerazione, come effetti ereditari. L'equazione del moto per il sistema unificato SDOF con dispositivo diventa:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \Gamma x = -(m + \bar{m})\ddot{x}_g + p$$

con \bar{m} rappresentante la massa del dispositivo.

Si assuma per finalità di studio che la struttura di base abbia un rapporto di smorzamento viscoso $\zeta = 0.05$ e che un semplice dispositivo senza massa sia attaccato al sistema come elemento passivo. La relazione forza/spostamento per questo dispositivo a comportamento elastoplastico perfetto, raffigurato in figura 2-5, è definito in termini di rigidità iniziale \bar{k} e un campo di forza \bar{f}_y .

Il sistema SDOF smorzato passivamente è prima soggetto ad un carico armonico, definito con un segnale sinusoidale, e esaminato sotto le condizioni istantanee dopo che tutte le fasi di transizione abbiano cessato di dissipare. La figura 2-6 illustra l'ampiezza dello spostamento di risposta rispetto alla frequenza della forzante. In ordine per identificare chiaramente l'effetto dello smorzatore

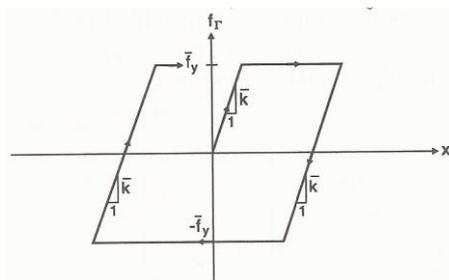


Figura 2-5 Modello forza-spostamento per comportamento elastico-perfettamente plastico

passivo aggiunto, la normalizzazione è realizzata rispetto alla frequenza naturale $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ e la risposta statica $x_{st} = p_0/k$ della struttura di base. Perciò, la curva superiore nella figura 2-6 è una rappresentazione semplificata del rapporto di smorzamento $\zeta = 0.05$.

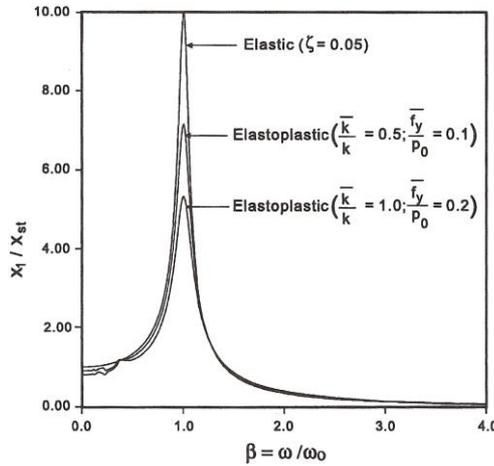


Figura 2-6 Fattori di amplificazione per forzante armonica con smorzamento

Le due restanti curve illustrano l'effetto dell'aggiunta di un dispositivo duttile al sistema. È evidente che il picco di risposta, vicino alla risonanza, è ridotto notevolmente in funzione delle caratteristiche di dissipazione energetica del dispositivo duttile. Si possono fare delle considerazioni energetiche nel punto di risonanza, si può calcolare il rapporto di smorzamento viscoso per un sistema smorzato SDOF. Comunque, l'utilità della linearità supposta è limitata, ad eccezione delle valutazioni preliminari delle performance. In generale, è meglio analizzare il sistema non lineare. I diagrammi Forza-Spostamento per una molla lineare, smorzatore viscoso e smorzatore passivo sono riportati nella figura 2-7, per il caso specifico di $\beta = 0.90$ e $\zeta = 0.05$ per permettere una comparazione con i risultati della struttura di base, i quali erano illustrati precedentemente, con gli stessi parametri, nella figura 2-3. La risposta è notevolmente discesa. L'area contenuta dalla curva presenta nella figura 2-7/b e nella figura 2-7/c, rispettivamente, si misura l'energia dissipata per cicli nello smorzatore viscoso e nello smorzatore passivo. Per l'esempio considerato, sotto le condizioni istantanee, lo smorzatore passivo approssimativamente dissipa il 37% dell'energia in ingresso nel sistema.

Infine, il sistema SDOF smorzato passivamente è analizzato per la risposta per il sisma El centro S00E, del 1940, ad Imperial Valley in California. La rigidità iniziale di un dispositivo a

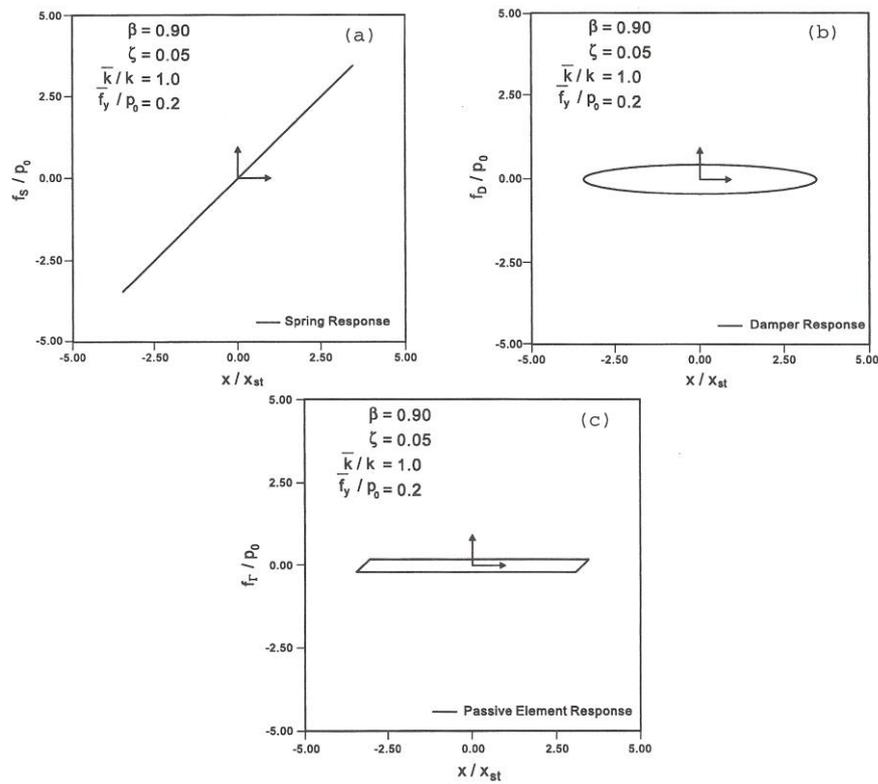


Figura 2-7 Modelli forza-spostamento per forzante armonica con smorzatori di tipo: a) molla; b) viscoso; c) passivo

comportamento elastoplastico è specificato come $\bar{k} = k$, mentre il campo di forze \bar{f}_y è eguale al 20% della forza massima applicata dal terreno. Questa è:

$$\bar{f}_y = 0.20 \text{Max} \{ m |\ddot{x}_g| \}$$

Il risultante spostamento relativo e l'accelerazione totale nel tempo sono presentante nella figura 2-8. Di nuovo, c'è una significativa riduzione nella risposta comparata a quella della struttura di base senza dispositivi dissipanti, come mostrano nella figura 2-9. In questo caso, la dimensione di queste curve indica che una significativa quantità d'energia è stata dissipata passivamente dal

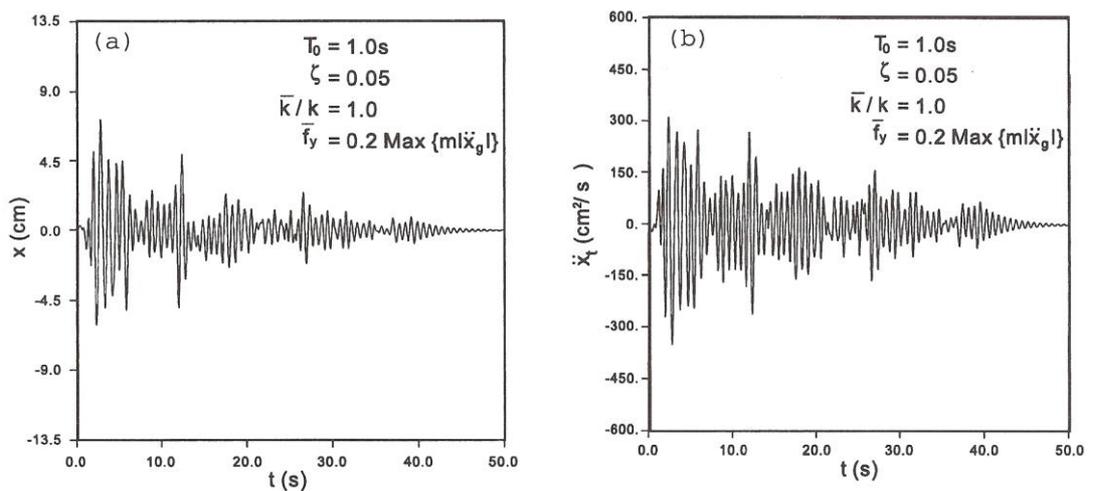


Figura 2-8 Risposta di un modello SDOF per il sisma El Centro, 1940: a) spostamento; b) accelerazione;

dispositivo. Questo tende a ridurre gli sforzi e gli spostamenti negli elementi della struttura principale, che, certamente, è lo scopo di aggiungere in dispositivo del genere.

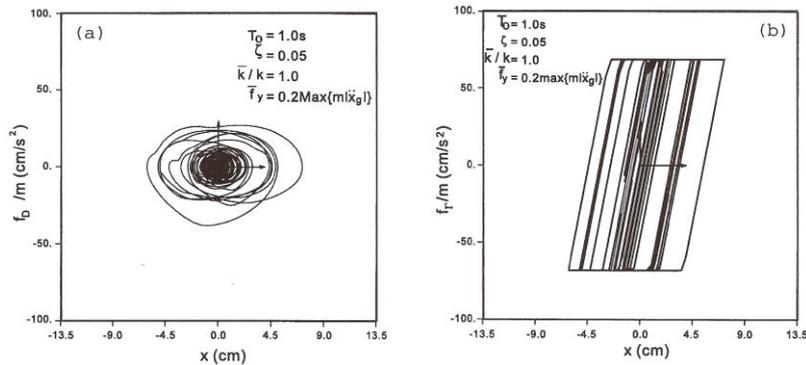


Figura 2-9 Risposta di un modello SDOF con smorzatore: a) viscoso; b) passivo;

Quando lo smorzatore passivo è di natura puramente viscosa, la risposta del modello SDOF è sempre ridotto, da ciò corrisponde precisamente un aumento nel rapporto di smorzamento. Per tutti i tipi di smorzatori passivi, un'analisi chiara deve essere sviluppata per assicurare che gli effetti benefici diano i risultati auspicati. Per esempio, con l'aggiunta di un dispositivo a comportamento elastoplastico, si può evidenziare un significativo incremento nella risposta per il segnale del sisma El Centro. Naturalmente, questo non deve essere l'unico caso da considerare, sotto determinate condizioni, la risposta può anche incrementare, come per il caso riportato precedentemente. La situazione è inoltre molto complicata perché la posizione e l'orientamento dello smorzatore con la struttura possono avere una significativa influenza nella loro efficacia. Come risultato il trattamento più semplice proposto è principalmente concettuale. L'analisi di una struttura reale richiede in definitiva una trattazione generale, cioè un metodo che tenga conto delle molteplici variabili.

2.2 Smorzamento non proporzionale

Si è visto che per un sistema lineare le equazioni del moto si può disaccoppiare per mezzo di una trasformazione di coordinate in cui esse sono espresse nelle coordinate normali del sistema. Questa matrice di trasformazione $[y]$ è derivata dagli auto-valori di un sistema non smorzato, ed è dimostrato essere sufficiente anche per disaccoppiare le equazioni di un sistema, avente come matrice di smorzamento $[c]$, definita nell'equazione differenziale del moto nelle coordinate di sistema ω , nella forma matriciale:

$$[m]\{\ddot{\omega}\} + [c]\{\dot{\omega}\} + [k]\{\omega\} = P_0\{p(x_j)\}f(t)$$

dove lo smorzamento risulta essere proporzionale sia alla matrice delle masse $[m]$, sia a quella delle rigidezze $[k]$, o alla combinazione lineare di entrambe. Per esempio, una matrice di smorzamento proporzionale e quindi disaccoppiabile può essere scritta come:

$$[c] = 2\beta[m] + \alpha[k]$$

dove β e α sono delle costanti reali.

Dall'altra parte, se la matrice di smorzamento non è proporzionale, la trasformazione $[\gamma]$ non può disaccoppiare le equazioni del moto, si deve costruire una nuova trasformazione con un metodo che è ristretto ai sistemi con smorzamento lineare. Sono richiesti i principali modi di vibrare della struttura dati dalla soluzione delle equazioni omogenee e da questa si può costruire la trasformazione disaccoppiante e procedere alla soluzione della risposta applicata una forzante ad un sistema non omogeneo. Prima di discutere di questo procedimento è utile fare un confronto tra modi di vibrare per un sistema con smorzamento proporzionale e non.

2.2.1 Comparazione dei modi di vibrare tra Sistemi smorzati proporzionali e non-proporzionali

Per lo smorzamento proporzionale le equazioni lineari del moto di un sistema ad n -gradi di libertà in forma matriciale, espressa nelle coordinate generalizzate q_1, q_2, \dots, q_n sono scritte come:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} = \{Q\}$$

Questa equazione, come detto precedentemente, si applica ai sistemi con la matrice $[c]$ di smorzamento proporzionale e non a quelle di massa $[m]$ e di rigidità $[k]$. Se essa è proporzionale, la r -esima equazione disaccoppiata espressa in funzione delle coordinate normali può essere scritta:

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r\omega_r\dot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = \frac{N_r}{M_r}$$

dove:

- $\eta_r = r$ -esima componente del vettore di coordinate normali $\{\eta\}$ definita dalla trasformazione $\{q\} = [\gamma]\{\eta\}$;
- $\xi_r = \frac{\beta}{\omega_r} + \frac{1}{2}\alpha\omega_r$ – un fattore di smorzamento corrispondente per l' r -esimo modo.

Eccetto per l'uso del fattore di smorzamento ξ_r , al posto del coefficiente β , questa equazione si applica ai sistemi proporzionali se il membro della parte destra è uguale a zero. Se il moto del sistema è dato con condizioni iniziali aventi spostamento $\eta_r(0)$ al tempo $t = 0$, l'equazione può essere risolta ottenendo lo spostamento modale $\eta_r(t)$ al tempo t in funzione dello spostamento iniziale:

$$\eta_r(t) = \eta_r(0) \frac{e^{-\xi_r\omega_r t}}{\sqrt{1 - \xi_r^2}}$$

con $\sqrt{1 - \xi_r^2}\omega_r t - \psi_r$, dove:

- $\sqrt{1 - \xi_r^2}\omega_r$ – la frequenza di vibrazione per il sistema smorzato;

- ψ_r – la fase angolare data da $\tan \psi_r = \frac{\xi_r}{\sqrt{1-\xi_r^2}}$.

La velocità modale si ottiene derivando η_r rispetto al tempo:

$$\dot{\eta}_r(t) = \eta_r(0) \frac{\omega_r e^{-\xi_r \omega_r t}}{\sqrt{1-\xi_r^2}} \cos\left(\sqrt{1-\xi_r^2} \omega_r t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Per illustrare queste relazioni, i suddetti spostamento e velocità modali sono illustrati come vettori rotazionali in un piano complesso nella figura 2-10.

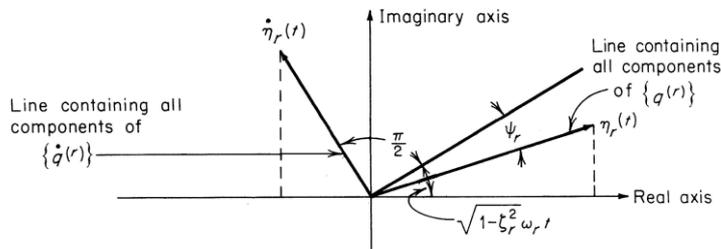


Figura 2-10 Rotazione dei vettori nel sistema polare complesso

Si osserva che il vettore velocità ruota di un angolo pari a $\psi_r + \pi/2$, entrambi diminuiscono esponenzialmente in ampiezza al crescere del tempo. Definito il vettore $\{q^{(r)}\}$ contenente le componenti di spostamento corrispondenti all' r -esimo modo è dato da:

$$\{q^{(r)}\} = \{\gamma^{(r)}\} \eta_r(t)$$

dove $\{\gamma^{(r)}\}$ è l' r -esima colonna della matrice $[\gamma]$. Dato $\{\gamma^{(r)}\}$ una colonna di numeri reali che definisce la forma dell' r -esimo modo di vibrare di un sistema non smorzato, segue che le componenti di $\{q^{(r)}\}$ corrispondono alla stessa forma del rispettivo modo. Perciò tutte queste componenti hanno la stessa fase, cioè $\eta_r(t)$, o sarà fuori fase di 180° dipendente dal segno della componente corrispondente a $\{\gamma^{(r)}\}$. Nella figura 2-10 il vettore $\eta_r(t)$ rappresenta, perciò, la linea di azione di tutte le componenti di $\{q^{(r)}\}$. Similmente, il vettore $\dot{\eta}_r(t)$ rappresenta a sua volta la linea di azione di tutte le componenti del vettore di velocità $\{\dot{q}^{(r)}\}$. Se una vibrazione smorzata è inizialmente in uno dei modi naturali di un sistema non smorzato continuerà con le forme modali non modificate ma con uno decadimento esponenziale in ampiezza in tutti i punti con lo stesso passo. Quindi, in apparenza questo sistema sembra somigliare molto dal punto di vista delle vibrazioni di un sistema non smorzato, eccetto che per il moto che diminuisce in ampiezza progressivamente fino ad arrestarsi.

Per un smorzamento non-proporzionale, al contrario, il moto di un sistema è considerevolmente consistente. Si parte costituendo una trasformazione relativamente alle coordinate $\{q\}$ ad un nuovo set z nelle quali le equazioni del moto sono disaccoppiate:

$$\{q\} = [\Delta]\{z\}$$

Di nuovo, si può riferire a un r -esimo modo disaccoppiato nel quale gli spostamenti $\{q^{(r)}\}$ sono dati come:

$$\{q^{(r)}\} = [\Delta^r]z_r(t)$$

dove $\{\Delta^{(r)}\}$ è l' r -esima colonna di $[\Delta]$.

La funzione $z_r(t)$ è una funzione esponenziale smorzata del coseno (per un sistema con un valore di smorzamento inferiore a quello critico) per il modo di vibrare con partenza dallo spostamento iniziale $z_r(0)$. In questo caso, la matrice di trasformazione $[\Delta]$ è complessa, quindi, le componenti di $\{\Delta^{(r)}\}$ sono numeri complessi, differiscono tanto nella fase quanto nell'ampiezza. Di conseguenza, le componenti $\{q^{(r)}\}$ differiscono sia in fase che in ampiezza. Plottando nel piano le fasi, tutte le componenti ruotano alla stessa velocità β_r e tutte decadono in ampiezza con il

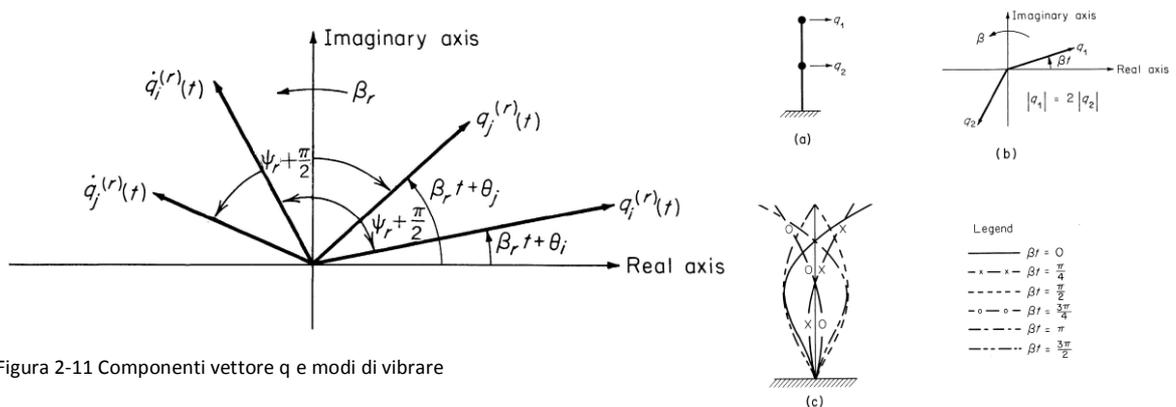


Figura 2-11 Componenti vettore q e modi di vibrare

medesimo passo. Ognuna ha una fase angolare differente in generale. La figura 2-11 mostra in modo chiaro due tipiche componenti $q_i^{(r)}(t)$ e $q_j^{(r)}(t)$ nel piano delle fasi: qui, le due componenti hanno fase angolare θ_i e θ_j , rispettivamente. In ogni caso le componenti di velocità $\dot{q}_i^{(r)}$ e $\dot{q}_j^{(r)}$ ruotano le loro rispettive componenti di spostamento della stessa fase angolare $\psi_r + \pi/2$. Per illustrare l'effetto del caso notevole che modifica il moto di un sistema, si consideri una semplice struttura a due gradi di libertà, in figura 2-11/a, e si identifichino le due componenti q_1 e q_2 le quali descrivono il moto dei due punti in corrispondenza delle rispettive masse. La figura 2-11/b mostra la relazione di fase che deve esistere tra i due spostamenti. Una relazione si evidenzia esserci tra i due spostamenti, cioè q_1 tende a q_2 di un angolo di 135° . La figura 2-11/c mostra gli spostamenti della struttura in definiti istanti nel tempo, come designato dai valori βt . Si vede che il moto non è caratterizzato dall'esistenza di un nodo fisso come potrebbe essere nel caso se i due vettori fossero distanziati di 180° , che si avrebbe nel caso di un sistema non smorzato o con smorzamento proporzionale.

Riassumendo, un sistema con uno smorzamento viscoso lineare nel tempo potrebbe essere fatto vibrare liberamente in un set di modi disaccoppiati che assomigliano, nella forma, a quelli normali

di un sistema non smorzato, con le ampiezze che diminuiscono esponenzialmente con il tempo e uniformemente indipendentemente dal sistema. Questi modi sono distinti da una definita distribuzione spaziale di punti nodali stazionari o con andamento lineare. Al contrario, un sistema con smorzamento non-proporzionale viscoso lineare potrebbe anche essere fatto vibrare liberamente in un set di “modi” disaccoppiati nei quali tutti i punti nel sistema subiscono esponenzialmente il moto smorzato nella stessa frequenza, ma in una differente fase angolare. In questi “modi”, i nodi (se essi possono essere definiti come tali) non sono stazionari.

2.2.2 Equazioni del Moto per Smorzamento Non-Proporzionale

Si è visto che ogni componente per qualsiasi autovettore $\{q^{(r)}\}$ per un sistema non smorzato o per uno nel quale lo smorzamento è proporzionale, è distinto dalle altre componenti solo dall’ampiezza, le fasi sono uguali o distanziate per una rotazione di 180° in funzione del segno. È utile immaginare a n -equazioni del moto (per un sistema a n -gradi di libertà) come un set di equazioni di cui la soluzione genera un set di n ampiezze per ogni modo dato. Questa soluzione non vale per un sistema con smorzamento non proporzionale. Ogni componente di autovettore $\{q^{(r)}\}$ è distinto non solo dall’ampiezza ma anche dalla fase; conseguentemente, due pezzi di informazione sono richiesti per determinare ognuna. Segue che $2n$ equazioni sono richieste per determinare tutte le componenti di un sistema ad n -gradi di libertà per ogni modo. Perciò, alle equazioni del moto si devono aggiungere altre n equazioni che danno un sistema di $2n$ equazioni da risolvere nel caso di smorzamento non-proporzionale. Un ingegnoso metodo di analisi è stato sviluppato nel quale le n equazioni aggiuntive vengono fornite in un modo interessante. Queste equazioni sono fornite dalle seguente matrice d’identità.

$$[m]\{\dot{q}\} - [m]\{\dot{q}\} = 0$$

Le equazioni sono combinate per dare la seguente equazioni in forma matriciale di ordine $2n$:

$$\begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}$$

Questa equazione, spesso riportata come la “ridotta” della classica equazione del moto, è scritta come:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{Y\}$$

dove

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [m] \\ [m] & [c] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[m] & [0] \\ [0] & [k] \end{bmatrix}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\dot{q}\} \end{Bmatrix}$$

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix}$$

Il grande vantaggio di questa formulazione risiede nel fatto che le matrici $[A]$ e $[B]$, entrambe di ordine $2n$, sono reali e simmetriche.

Perciò, per risolvere l'equazione *ridotta* si può lavorare con tecniche risolutive molto simili a quelle usate nel trattamento di sistemi non smorzati.

3 Smorzatori a Massa Accordata: Stato dell'Arte – Metodologie

Tra le principali teorie che stanno alla base del concetto di smorzare una segnale entrante, contrastandolo dall'interno della struttura, si trova quella di porre una piccola massa collegata ad una molla e configurata in modo tale da entrare in risonanza; cioè messa in movimento in controfase rispetto alla forzante.

Questo approccio, come è stato già accennato nel capito precedente, ha origine teoriche poste ancora agli inizi del '900, ma, a differenza dell'isolamento, la ricerca e lo sviluppo, fatti fino ad ora, non hanno portato a basi solide e risultati certi per rendere implementabile questo tipo di progettazione in larga scala.

Questa teoria si è tramutata nella progettazione odierna nello smorzatore a massa accordata, abbreviato in TMD ("Tuned Mass Damper"). Tuttavia la presenza di tale dispositivo è finalizzata a contrastare le sollecitazioni che nascono dalle oscillazioni dovuto al vento, problematica che coinvolgono le strutture di elevata altezza, come i grattacieli, torri, ecc. Questo legame vento-TMD si deve alla natura stessa del primo, riconducibile ad una azione quasi-statica, quindi che permette una configurazione ben definita dello smorzatore, con un tasso di affidabilità elevato per tutta la vita nominale dell'opera.

Gli studi che hanno riguardo lo sviluppo del TMD contro i terremoti si sono protratti per tutto il '900, sono nate due scuole di pensiero contrapposte: da una parte chi afferma che tale tecnologia sia in grado di contrastare efficacemente gli effetti dei sismi; dall'altra coloro che sostengono la parziale o totale incapacità dello smorzatore a massa accordata di attenuare la risposta sismica delle strutture.

La principale problematica che viene riscontrata da coloro che ritengono il TMD influente nella protezione antisismica, è il fenomeno "detuning", letteralmente disaccordare lo smorzatore: è chiaro che se il TMD viene configurato per lavorare con un dato periodo, definito dal segnale forzante, basta una lieve variazione in quest'ultimo o nella struttura su cui è attaccato. Quindi, il passo da fare per ottenere uno smorzatore operativo in un ampio spettro di eventi sismici, è quello di affinare ricerca e sviluppare nuovi metodi che tengano in conto di nuovi parametri, non considerati dalla teoria classica.

Si parte, comunque dalla teoria classica, per poi passare ad una equazione del moto per sistemi che tengano conto dell'installazione di un dispositivo ausiliario, il quale evidentemente andrà a influenzare non solo il comportamento della struttura dal punto di vista della capacità di smorzare le sollecitazioni nate dalle forzanti esterne, ma anche per quanto riguarda i modi di vibrare della struttura stessa, vista ora nel globale (struttura+TMD).

Una volta definiti gli aspetti di questa teoria si analizzano i metodi per ricavare i parametri di ottimo per configurare lo smorzatore a massa accordata; non solo nella configurazione singola, ma anche per quella con più smorzatori, MTMD. Infatti, oltre alla classica idea di affiancare alla strutture un dispositivo che lavora in contro fase, negli ultimi anni si sono sviluppate idee inerenti all'utilizzo di n-dispositivi; ciò, però, porta con sé altri problemi, facilmente immaginabili, vista la difficoltà nel caso MONO-TMD. Ad esempio un aspetto da non sottovalutare è il punto di collocamento di ognuno dei dispositivi, su come tenerne in conto nella fase di configurazione dell'intero sistema.

3.1 Metodo di calcolo classico – Den Hartog

L'idea di applicare un ammortizzatore dinamico di vibrazione fu di Frahm nel 1909. Il principio si basa su una massa m , collegata mediante molla di rigidezza k , alla massa principale M .

La frequenza naturale dell'ammortizzatore è scelta per eguagliare la frequenza della forza di disturbo. Si è dimostrato che la massa principale e il piccolo sistema di massa k, m vibrano in un modo che la forza elastica di quest'ultimo sia in tutti gli istanti uguale ed opposta alla forzante esterna. Perciò non c'è una forza netta che agisce sulla massa principale e questa non vibra.

Dall'equazione del moto si evince che l'ampiezza della massa principale è zero, se la differenza tra uno e il rapporto dei quadrati delle frequenze è zero, e questo accade quando la frequenza della forza è la stessa del modo di vibrare dell'ammortizzatore. Nel caso di un sia ammortizzatore con smorzamento, il modello è rappresentato dal classico dispositivo, accoppiato in parallelo con un pistoncino rappresentante il comportamento viscoso, come in figura 3-1.

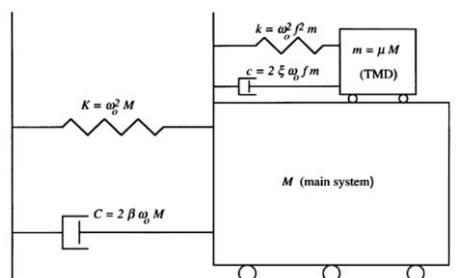


Figura 3-1 Schema teorico struttura-TMD

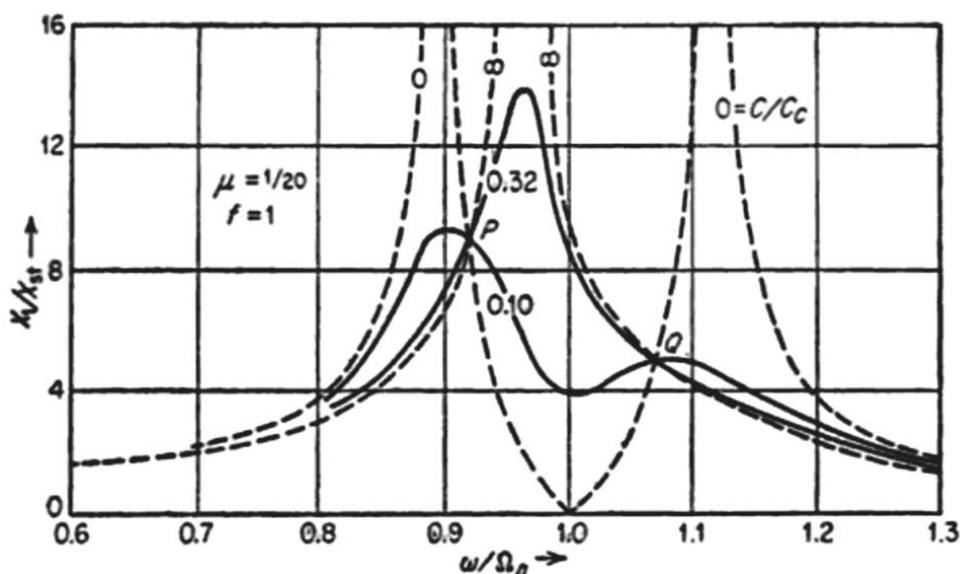


Figura 3-2 Grafico forzante in funzione dello rapporto di smorzamento

L'equazione che governa il moto di tale sistema si presenta con al suo interno le principali variabili del problema: il rapporto tra le masse, il rapporto tra lo smorzamento e lo smorzamento critico, il rapporto tra le frequenze e il rapporto tra la frequenza della forza esterna e quella del sistema.

Osservando la figura 3-2, in cui si ha nell'asse delle ascisse il rapporto delle frequenze e lungo le ordinate il rapporto di ampiezza della massa di sistema, è riportato l'andamento del rapporto tra lo smorzamento e quello critico. Si vede che le due curve di $c = 0$ e $c = \infty$, si incontrano in due punti P e Q. I due criteri per ottenere il miglior caso sono: 1) posizionare i due punti alla stessa altezza; 2) optare per la curva che ha come tangente orizzontale passante per il punto più alto tra i due. Non c'è differenza tra i due criteri, come qualità.

Dopo una serie di passaggi, che vengono omessi, si ottiene la formula corretta di "accordamento per qualsiasi massa smorzante:

$$f = \frac{1}{(1 + \mu)}$$

Per un TMD con massa molto piccola ($\mu = 0$) il rapporto di frequenza è circa pari a 1, o, più semplicemente, la frequenza dello smorzatore è uguale a quella del sistema primario: il caso classico è quello di avere $(1/5)M$ di massa del TMD con uno smorzamento del 17%.

3.2 Metodo di calcolo di Villaverde

Roberto Villaverde introduce nelle sue pubblicazioni un nuovo metodo per ricavare i parametri di ottimo, per il TMD. Evidentemente, vista anche analisi sullo *stato* dell'arte che riporta nelle sue opere, è riuscito ad individuare aspetti notevoli del problema, che lo hanno spinto a ricercare una nuova metodologia.

Fino al momento delle sue pubblicazioni, due forme di controllo strutturale, conformi alle richieste di semplicità, sono presenti: l'aggiunta di smorzatori a comportamento isteretico, o a frizione o ancora secondo meccanismi viscosi; e l'uso di smorzatori a masse accordate. Smorzatori isteretici, a frizione e viscosi rappresentano una via efficace nel ridurre la risposta del sistema strutturale soggetto a eccitazioni sismiche, ma a parte i costi, il loro principale problema è che essi gravano sulla procedura della progettazione. Il processo di progettazione con l'aggiunta di dispositivi di smorzamento è così interconnessa con il resto del progetto delle strutture di collegamento tra parte principale e aggiunta che lo sforzo globale degli ingegneri è drasticamente aumentata.

L'obiettivo prefissato da Villaverde è quello di dimostrare che l'aggiunta di sistemi di smorzatori a massa accordata con una relativamente piccola massa ed un elevato rapporto di smorzamento possono essere effettivamente una via per aumentare le caratteristiche intrinseche di smorzamento delle strutture e ridurre, come risultato, le loro risposte alle sollecitazioni sismiche.

Per raggiungere questo obiettivo, Villaverde si avvale della teoria del moto per un sistema con smorzamento non-proporzionale, introdotta in un precedente paragrafo di questa tesi per mostrare che: il rapporto di smorzamento dei primi due modi di vibrare di un sistema struttura-appendice sono approssimativamente uguali a quelli ottenuti come media tra i modi della struttura e dello smorzatore a se stante. Sulla base di questa formulazione, egli ha evidenziato che un dispositivo con un alto rapporto di smorzamento e accordato al modo fondamentale di vibrare della struttura viene usato per incrementare il rapporto di smorzamento nel primo modo per un valore pari a circa la metà di quello dello smorzatore stesso [4].

3.2.1 Selezione parametri

Come è mostrato nella trattazione del libro Dynamics of Structures [5], un dispositivo a molti gradi di libertà definita da una massa generalizzata m_a , frequenza naturale ω_0 e un rapporto di smorzamento ξ_a in uno dei suoi modi di vibrare, attaccato ad un sistema generale a molti gradi di libertà per il quale sono definiti la frequenza naturale, lo smorzamento, la massa generalizzata in uno dei modi di vibrare, rispettivamente uguali a $\omega_{si} = \omega_0$, ξ_{si} e ξ_{si} , si hanno i parametri del sistema appendice-struttura come:

$$|\xi_{si} - \xi_a| \leq \left| \phi_{ki} \sqrt{m_a / M_{si}} \right|$$

dove ϕ_{ki} denota il valore corrispondente alla massa che connota l'appendice in quel particolare modo strutturale di vibrare con frequenza ω_0 , conta il fattore di partecipazione in questo modo.

La combinazione struttura-dispositivo risulta essere un sistema con i primi due modi di vibrare, definiti da una frequenza naturale che è molto vicina a ω_0 , la frequenza naturale che è in comune a entrambe, struttura e dispositivo, e un rapporto di smorzamento approssimativamente uguale a $(\xi_{si} - \xi_a)/2$; ciò è la media del rapporto di smorzamento di due componenti indipendenti.

Se si riflette dal punto di vista del rapporto di massa γ_{IJ} , la disuguaglianza si può riscrivere come:

$$m_{aj} \geq \frac{|\xi_{bi} - \xi_{aj}|}{\phi_k^2} M_{bi}$$

Dato che uno smorzatore di questo tipo non è nient'altro che una piccola appendice ad un grado di libertà, la possibile riduzione nella risposta strutturale è data, secondo la teoria, come risultato di un incremento nello smorzamento della struttura dal suo originale valore ξ_{si} a un valore più elevato approssimativamente uguale a $(\xi_{si} - \xi_a)/2$, dove ξ_a è il rapporto di smorzamento dello smorzatore.

Dall'equazione precedente, si evince che lo smorzatore effettivamente è attaccato alla struttura primaria nel punto in cui l'ampiezza d'oscillazione è più grande, generalmente, nel modo dominante di vibrare della struttura.

Per configurare il TMD, una volta definito un dato valore ξ_a , otteniamo la massa m_a , la costante di rigidità k_a e il coefficiente di smorzamento c_a : le seguenti formule mettono in relazione i tre parametri:

$$m_a = \frac{(\xi_{si} - \xi_a)^2}{\phi_{si}^2} M_{si};$$

$$k_a = \omega_{si}^2 m_a;$$

$$c_a = 2\xi_a \omega_{si} m_a$$

3.3 Metodo di calcolo di Sadek e Taylor

3.3.1 TMD per modelli SDOF

Il metodo parte dalla formulazione già vista in Villaverde, che si basa sull'equazione del moto per sistema con smorzamento non proporzionale.

Per un sistema ad un solo grado di libertà SDOF con un TMD, vedi fig. 3-1, definite la matrice A del sistema per il modo di vibrare fondamentale - ω_0 - e del rapporto di smorzamento - β - di una struttura, e definiti i rapporti di massa - μ - e del parametro per accordare l'elemento ausiliario - f - e dello smorzamento del TMD:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_0^2 f^2 & \omega_0^2 f^2 & -2\omega_0 f \xi & 2\omega_0 f \xi \\ \omega_0^2 f^2 & -\omega_0^2 (1 + \mu f^2) & 2\omega_0 f \xi & -2\omega_0 (\mu f \xi + \beta) \end{bmatrix}$$

Il problema degli autovalori $|A-\mu I|$ risulta essere un'equazione di quarto grado:

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^4 + [2f\xi(1 + \mu) + 2\beta] \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^3 + [1 + \mu f^2 + f^2 + 4f\xi\beta] \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right)^2 + 2f(\xi + f\beta) \left(\frac{\lambda}{\omega_0}\right) + f^2 = 0$$

La soluzione dell'equazione è una coppia di coniugate complesse con i seguenti autovalori complessi:

$$\lambda_{r,r+1} = -\omega_r \xi_r \pm i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad , \quad r = 1, 3$$

dove λ_r è l'autovalore r -esimo, ω_r e ξ_r sono la frequenza naturale e il rapporto di smorzamento del sistema nel r -esimo modo, e i è la parte immaginaria $-i = \sqrt{-1}$. Villaverde ha mostrato che un TMD per essere efficace, i rapporti di smorzamento nei due modi complessi di vibrare, ξ_1 e ξ_3 dovrebbero essere approssimativamente uguali alla media dei rapporti di smorzamento della struttura e del TMD, cioè:

$$\xi_1 \cong \xi_3 \cong (\xi - \beta)/2$$

Per raggiungere questo criterio, è stato dimostrato analiticamente che il TMD dovrebbe essere in risonanza con il sistema principale ($f = 1$) e il suo rapporto di smorzamento dovrebbe soddisfare l'equazione $\xi = \beta + \phi\sqrt{\mu}$. I risultati numerici, comunque, mostrano come tale formulazione è valida solo per rapporti di massa piccoli rispetto circa al 0.005. Per rapporti di massa maggiori dello 0.005, significative differenze nei due modi di vibrare esistono per una tipica struttura con un rapporto di smorzamento $\beta = 0,05$ (vedi tabelle 3-1). Conseguentemente, un altro modo di procedere per raggiungere l'uguaglianza dello smorzamento nei due modi è stato sviluppato.

Tabella 3-1 - Rapporti di smorzamento dei modi complessi calcolati con il metodo di Villaverde per una struttura con smorzamento =0.05

μ	ξ	$(\xi - \beta)/2$	ξ_1	ξ_3
0.005	0.1207	0.0854	0.0983	0.0727
0.010	0.1500	0.1000	0.1207	0.0801
0.020	0.1914	0.1207	0.1544	0.0888
0.050	0.2736	0.1618	0.2081	0.1019
0.100	0.3662	0.2081	0.3218	0.1111

La procedura proposta cerca numericamente per i valori di ottimo di f e ξ (i valori di ottimo sono quelli per i quali risultano approssimativamente uguali i rapporti di smorzamento $\xi_1 \cong \xi_3$) corrispondenti ad un desiderato rapporto di massa μ . Dato che gli autovalori dell'equazione sono normalizzati al primo modo di vibrare della struttura principale, i parametri di ottimo i e f sono indipendenti dalla frequenza naturale del modo fondamentale (ω_0) del sistema primario. Per determinare i tali valori di ottimo per un dato rapporto μ e di β , il problema degli autovalori complessi $|A - \lambda I|$ è risolto con un processo numerico iterativo:

- Per un dato rapporto di β al variare del rapporto di massa μ , i valori di f e di ξ sono fatti variare;
- Si costituisce la matrice A , ad ogni ciclo, con i nuovi valori di f e ξ ;
- Si calcolano gli autovalori.

I valori di ottimo si ottengono quando la differenza tra i due rapporti di smorzamento ξ_1 e ξ_3 è la più piccola, si può avere un andamento dei valori nella tabella 3-2.

Tabella 3-2 - Rapporti di ottimo di accordamento e di smorzamento di un TMD per tre diversi rapporti di smorzamento della struttura

Mass Ratio μ	$\beta=0$		$\beta=0.02$		$\beta=0.05$	
	f	ξ	f	ξ	f	ξ
0.000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0200	1.0000	0.0500
0.005	0.9950	0.0705	0.9936	0.0904	0.9915	0.1203
0.010	0.9901	0.0995	0.9881	0.1193	0.9852	0.1490
0.015	0.9852	0.1216	0.9828	0.1413	0.9792	0.1708
0.020	0.9804	0.1400	0.9776	0.1596	0.9735	0.1890
0.025	0.9756	0.1562	0.9726	0.1757	0.9680	0.2050
0.030	0.9709	0.1707	0.9676	0.1901	0.9626	0.2192
0.035	0.9662	0.1839	0.9626	0.2032	0.9573	0.2322
0.040	0.9615	0.1961	0.9578	0.2153	0.9521	0.2442
0.045	0.9569	0.2075	0.9530	0.2267	0.9470	0.2554
0.050	0.9524	0.2182	0.9482	0.2373	0.9420	0.2658
0.055	0.9479	0.2283	0.9435	0.2473	0.9370	0.2757
0.060	0.9434	0.2379	0.9389	0.2568	0.9322	0.2851
0.065	0.9390	0.2470	0.9343	0.2658	0.9274	0.2940
0.070	0.9346	0.2558	0.9298	0.2745	0.9226	0.3025
0.075	0.9302	0.2641	0.9253	0.2827	0.9179	0.3106
0.080	0.9259	0.2722	0.9209	0.2907	0.9133	0.3185
0.085	0.9217	0.2799	0.9165	0.2983	0.9088	0.3260

0.090	0.9174	0.2873	0.9122	0.3057	0.9043	0.3332
0.095	0.9132	0.2945	0.9079	0.3128	0.8998	0.3402
0.100	0.9091	0.3015	0.9036	0.3197	0.8954	0.3470
0.105	0.9050	0.3083	0.8994	0.3264	0.8910	0.3535
0.110	0.9009	0.3148	0.8952	0.3328	0.8867	0.3598
0.115	0.8969	0.3212	0.8911	0.3391	0.8825	0.3660
0.120	0.8929	0.3273	0.8870	0.3452	0.8782	0.3720
0.125	0.8889	0.3333	0.8830	0.3511	0.8741	0.3778
0.130	0.8850	0.3392	0.8790	0.3569	0.8699	0.3834
0.135	0.8811	0.3449	0.8750	0.3625	0.8659	0.3889
0.140	0.8772	0.3504	0.8710	0.3680	0.8618	0.3943
0.145	0.8734	0.3559	0.8671	0.3733	0.8578	0.3995
0.150	0.8696	0.3612	0.8633	0.3785	0.8539	0.4046

Si è evidenziato che i parametri di ottimo per un TMD risultano nel caso di uguaglianza approssimativa dei rapporti di smorzamento ($\xi_1 \cong \xi_3$) più grandi rispetto a $(\xi - \beta)/2$ e uguali frequenze modali ($\omega_1 \cong \omega_3$). Nella figura 2 mostra i parametri di ottimo f e ξ per rapporti di massa differenti e tre rapporti di smorzamento strutturali β . La figura mostra che maggiore è il rapporto di smorzamento di una struttura, minore sarà il rapporto di frequenza e maggiore quello di smorzamento del TMD. Dall'osservazione della tabella e della figura si osserva che l'incremento del rapporto delle masse μ richiede una diminuzione nel rapporto di frequenza f e un incremento in quello di smorzamento ξ , ciò risulta in un maggior smorzamento nei due modi di vibrare.

Dall'interpolazione dei valori, si sono ottenute due equazioni, che agevolano il calcolo dei due parametri, rapporti di frequenza f e di smorzamento ξ :

$$f = \frac{1}{1 + \mu} \left[1 - \beta \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \right]$$

e

$$\xi = \frac{\beta}{1 + \mu} + \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}}$$

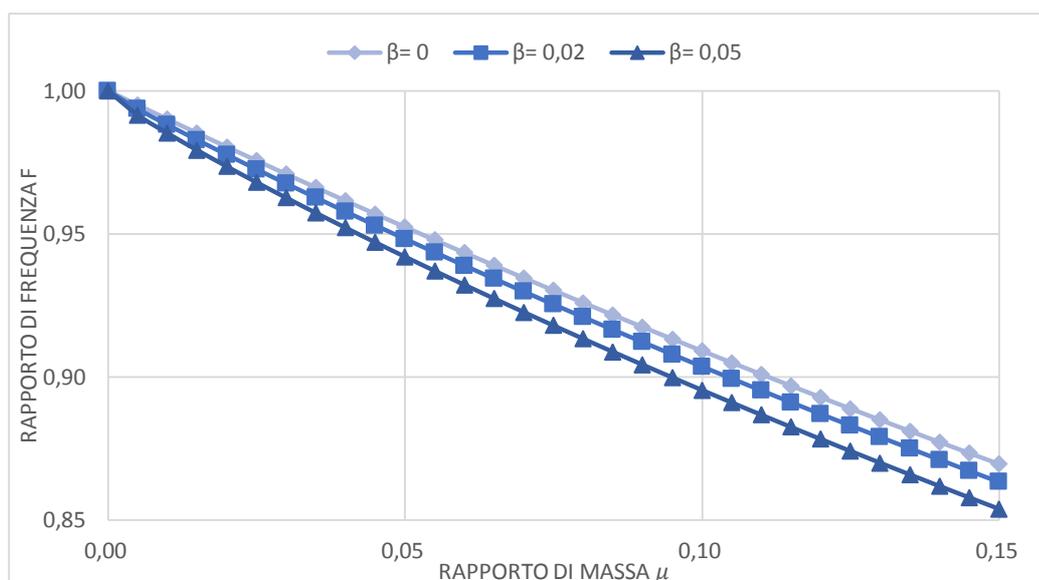


Figura 3-4 Parametri di ottimo al variare del rapporto di smorzamento

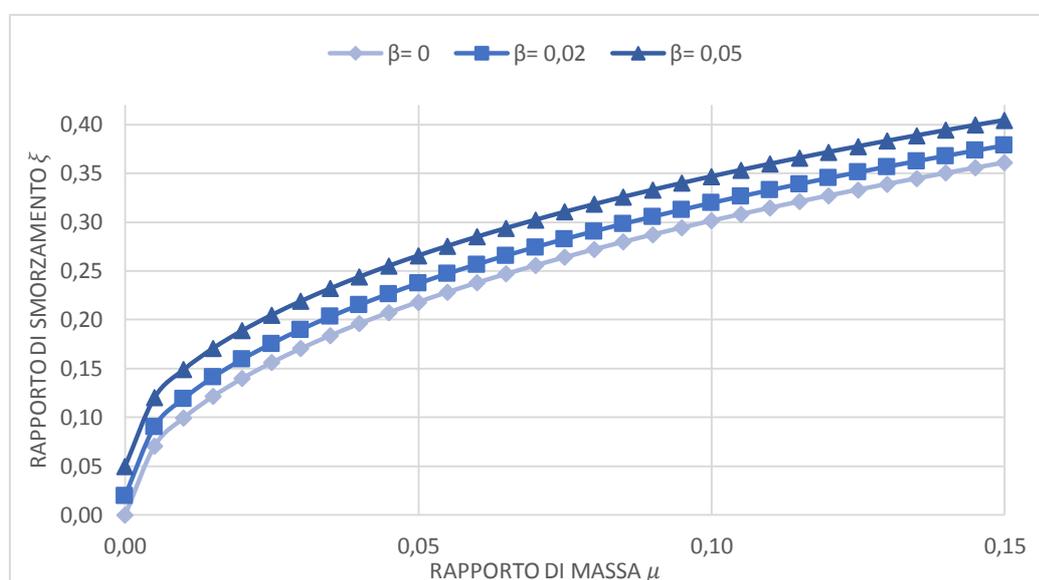


Figura 3-3 Parametri di ottimo al variare del rapporto di massa

Queste equazioni hanno come risultato un errore massimo approssimativamente del 0.2% per f e dello 0.4% per ξ .

Questa formulazione è data per sistemi ad un grado di libertà, SDOF, mentre per strutture a più piani si devono fare ulteriori considerazioni, vista l'esistenza del legame tra i modi di vibrare della struttura principale e i rispettivi rapporti di smorzamento del sistema globale ottenuto, con la presenza del TMD.

3.3.2 MTMD per modelli MDOF

Per una struttura ad n gradi di libertà con uno smorzatore a massa accordata posizionato al piano più elevato, ci saranno $n+1$ coppie di modi coniugato complessi. Il fattore, se vogliamo significativo, in cui si tiene conto della variazione del comportamento in altezza della struttura in

funzione del suo modo fondamentale di vibrare, è designato nel rapporto di massa, definito come: il rapporto tra la massa di un TMD e la massa generalizzata al primo modo di vibrare del sistema per il fattore unitario di partecipazione:

$$\mu = \frac{m}{\phi_1^T [M] \phi_1}$$

dove $[M]$ è la matrice di massa e ϕ_1 è l'auto-vettore del modo fondamentale di vibrare normalizzato per avere un fattore di partecipazione unitario.

Per ottenere i parametri di ottimo con cui andar a configurare il TMD, attaccato alla struttura, si svolge un procedimento simile a quello che si effettua nel caso di uno SDOF. Anche in questo caso, vengono fatte delle considerazioni, basate su casi studio:

- I rapporti di smorzamento sono estremamente vicini l'uno all'altro e sono maggiori della soluzione data da $(\xi + \beta)/2$;
- Lo smorzamento ha effetto solo sui primi due modi di vibrare della struttura globale, quindi i restanti sono considerati con effetto non smorzato.

Hanno individuato che il rapporto di frequenza f per un sistema MDOF è abbastanza uguale a quello per un SDOF, con rapporto di massa $\mu\phi$, dove ϕ è l'ampiezza del primo modo di vibrare per il fattore di partecipazione unitario, ottenuto nella configurazione non smorzata nel punto in cui è collocato il TMD nella struttura, cioè $f_{MDOF}(\mu) = f_{SDOF}(\mu\phi)$. L'equazione si ottiene sostituendo nell'equazione per il parametro di ottimo per il rapporto di frequenza f del sistema SDOF, il rapporto di massa μ con $\mu\phi$, quindi:

$$f = \frac{1}{1 + \mu\phi} \left[1 - \beta \sqrt{\frac{\mu\phi}{1 + \mu\phi}} \right]$$

Il rapporto di smorzamento per il TMD anch'esso ottenuto con una sostituzione analoga, essendo simile a quello del sistema SDOF, cioè $\xi_{MDOF}(\mu) = \phi \xi_{SDOF}(\mu)$. L'equazione per lo smorzamento si ottiene moltiplicando l'equazione per lo SDOF per ϕ :

$$\xi = \phi \left[\frac{\beta}{1 + \mu} + \sqrt{\frac{\mu}{1 + \mu}} \right]$$

Per sistemi MDOF, le equazioni hanno come risultato un errore 0.4-0.5% nel rapporto di frequenza e dello 0.8% per quello di smorzamento. Osservando il parametro di ottimo ξ si evidenzia che la migliore posizione per un TMD è dove ha il rapporto maggiore, cioè nel livello della struttura dove ϕ e, di conseguenza, lo smorzamento nel TMD e nei due primi modi di vibrare del sistema globale son massimi. Evidentemente, nei casi dove il primo modo di vibrare domina la risposta della struttura, è preferibile posizionare sulla sommità dell'edificio dove l'ampiezza di spostamento del primo modo è la più larga.

3.4 Metodo di calcolo di Feng e Mita

Il metodo presentato da questi due studiosi non va a stravolgere, come nei due precedenti, l'approccio con l'equazione del moto classica, ma affrontano il problema andando a sfruttare un tipo di progettazione che riguarda le strutture alte. Dal punto di vista dello studio effettuato in questo lavoro si prende atto dei limiti per questo metodo, dato che i modelli studio non rispecchiano le caratteristiche richieste.

Le caratteristiche strutturali comuni a molte strutture alte o super alte, come l'elevata rigidità o la dominante deformazione flessionale, si presentano come difficoltà tecniche, le quali, per esempio, prevengono l'applicazione di dispositivi di smorzamento comuni. L'elevata rigidità richiede un ampio numero di dispositivi al fine di ottenere un su efficiente rapporto di smorzamento. La maggiore componente di deformazione associata con il modo di vibrare fondamentale è la deformazione flessionale tale per cui i dispositivi che utilizzano la deformazione a taglio non sono efficaci. Sebbene si possa implementare un dispositivo a flessione, il numero richiesto di tali sarebbe estremamente ampio e, perciò, il suo impiego diverrebbe impraticabile. Il sistema a masse accordate è stato applicato a molte strutture attuali nelle quali una massa addizionale è stata aggiunta per sopprimere dinamicamente le vibrazioni.

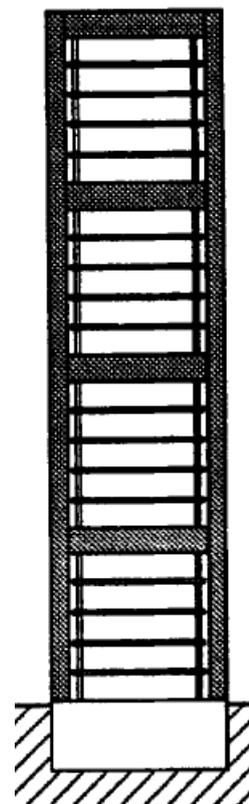


Figura 3-5 Schema mega-sub configurazione

Tali sistemi spesso controllano solo il modo di vibrare fondamentale, quindi, essi non sono necessariamente efficaci per le sollecitazioni sismiche. Inoltre, questi sistemi non sono sicuri per le strutture super alte. Più l'edificio sale in elevazione e massa, maggiore sarà la massa addizionale richiesta e una corsa maggiore del dispositivo; questa corsa solleva preoccupazioni di sicurezza. In alternativa si possono installare dei sistemi "attivi" o "ibridi" di smorzamento per le sollecitazioni ai fini di migliorare il comfort, tuttavia non sono in grado di dare un contributo alla smorzamento degli effetti di forti venti o sismi a causa della ridotta capacità di potenza degli attuatori. Senza contare che le preoccupazioni e gli elevati costi di tali sistemi ne dissuadono i progettisti dall'implementarli. Un nuovo metodo di controllo della vibrazione per edifici alti viene discussa, la quale prende i vantaggi della mega-sub struttura configurazione e non richiede l'aggiunta di massa o di dispositivi di controllo ulteriori o speciali. Il sistema mega sub-configurazione prende i vantaggi della progettazione a megastruttura che è caratterizzata da elementi estremamente rigidi, l'efficienza strutturale di questo sistema permette di ottenere un'elevata rigidità, minimizzando l'uso di materiali. La mega struttura contiene sottostrutture, composte di un numero adeguato di piani.

Sfruttando questa tipologia, è possibile stabilire: l'energia cinetica della mega è trasferita alla sotto, ciò si ottiene accordando le caratteristiche dinamiche della sotto struttura; l'energia trasferita viene dissipata nella sotto, ciò si verifica progettando le sottostrutture a vibrare nella modalità a taglio, così che tutti i convenzionali smorzatori possano essere usati per dissipare l'energia.

I vantaggi che si osservano nell'applicazione della mega sub-configurazione sono:

- Le strutture stesse funzionano come ammortizzatore, il rapporto di massa raggiunto in questo modo è elevato rispetto ai classici meccanismi di smorzamento, che in genere sono dell'ordine di uno su una percentuale significativa;
- Le sottostrutture hanno chiari modi di vibrare, quindi è possibile fargli assorbire una buona quantità di energia; questo metodo di smorzamento non richiede masse aggiuntive.

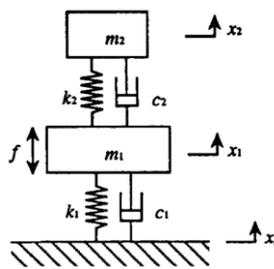


Figura 3-6 Schema del sistema a due gradi di libertà

Nella progettazione sviluppata da questo metodo, lo studio della sotto struttura non è tanto importante, tranne che per la corsa dello smorzatore, quindi hanno cerca di minimizzare l'accelerazione al fine di ottimizzare il comfort. Tale sistema, non solo si propone di ridurre la risposta della Mega struttura, ma anche di minimizzare le vibrazioni della sotto struttura.

3.4.1 Caratteristiche dinamiche

Per semplicità, ma senza perdere di generalità, la mega e la sotto struttura sono modellate come un sistema ad un grado di libertà, rispettivamente nel quale m_1 rappresenta la massa della megastruttura e m_2 rappresenta la massa della sotto struttura. Questo è lo stesso semplice modello che viene utilizzato per il classico smorzatore, dove m_1 è la massa della struttura e m_2 quella dello smorzatore.

Comunque, la differenza nel valore del rapporto delle masse (nella prima dell'ordine dell'1 % e nella seconda del 100%) fa diventare le caratteristiche della mega sub-struttura significativamente vantaggiose, come in figura 3-5.

3.4.2 Frequenza di risposta

L'equazione del moto di un sistema soggetto ad un carico f può essere scritta nella forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove x_1 e x_2 sono gli spostamenti relativi della mega- e della sub- rispetto al terreno.

Nel caso di carichi sismici, il termine della forzante nell'equazione deve essere adattato in modo adeguato. Le frequenze naturali e i rapporti di smorzamento della mega- e della sub- sono definite come:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

$$h_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$$

$$h_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$$

Il rapporto di smorzamento della sub-struttura h_2 è definito con riferimento ω_1 al posto di ω_2 . Il rapporto di massa la frequenza sono rappresentate dai seguenti parametri:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\beta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

I parametri per ottenere la configurazione sono:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}}$$

$$h_2 = \beta \frac{\sqrt{\mu}}{2}$$

Dove il rapporto di frequenza β e quello di smorzamento h_2 sono selezionati come valori di ottimo per minimizzare la risposta rispetto alla velocità della mega-struttura dove la forza di vento è modellata come *rumore bianco*.

3.4.3 Caratteristiche flusso energetico

I due studiosi hanno analizzato il flusso d'energia dalla mega alla sotto struttura. Questa viene assorbita dallo smorzatore in due componenti: una parte dalla molla e una dal pistoncino viscoso. L'ammontare dell'energia che fluisce dalla struttura alla sotto struttura è molto più elevata quanto più elevata è il range di frequenza del sistema con un elevato rapporto di masse. Ecco perché il mega sub-sistema permette di ridurre notevolmente la risposta della mega-struttura essendo dotata di un'elevata massa. Nel caso di un elevato rapporto di masse il flusso viene dissipato principalmente dalla componente viscosa dello smorzatore. Ciò è il motivo per cui le vibrazioni nella sotto-struttura sono ridotti rispetto al tradizionale smorzatore.

3.4.4 Robustezza metodo

La radice quadrata dello spostamento di risposta al quadrato della mega-struttura soggetta ad un carico da vento filtrato come rumore bianco d'intensità spettrale unitaria. Criteri di controllo A seconda dei carichi dinamici ci sono differenti metodi d'analisi. Nel caso la struttura sia soggetta a medio-basso carichi da vento per terremoti il cui epicentro è situato ad una distanza sufficientemente lontana dal sito di costruzione della struttura, l'accelerazione assoluta della struttura si richiede sia minimizzato per incrementare il comfort dell'abitabilità. Viceversa, per strutture soggette a venti forti o a terremoti di elevata intensità la priorità del controllo cambia per ridurre la deformazione della mega per proteggerla. Perciò, l'obiettivo è quello di minimizzare le accelerazione della sotto-struttura e le mega-deformazioni.

Per ottenere la soluzione analitica dei valori ottimali dei parametri, che minimizzano la risposta dinamica della struttura misurata in termini di mega-spostamenti e sub-accelerazioni al quadrato, si è assunto che i carichi da sisma e da vento siano riprodotti da rumore bianco e che la Mega-Struttura non ha smorzamento. Questa ipotesi non è poi così irrealistica perché le strutture alte primariamente vibrano nel primo modo di vibrare sotto condizioni di vento forte per la sua posizione staticamente inflessa sotto le condizione statiche della componente del vento.

3.4.5 Ottimizzazione

Per un sistema a due gradi di libertà la radice media della risposta x , quando è soggetto ad una forzante filtrata come *rumore bianco* della densità spettrale S_0 , è conosciuta come [6]:

$$E[x^2] = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

dove $H(\omega)$ è la funzione trasferimento nella forma:

$$H(\omega) = \frac{-i\omega^3 B_3 + \omega^2 B_2 + i\omega B_1 + B_0}{\omega^4 A_4 - i\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0}$$

I coefficienti A e B sono differenti a seconda del sistema e della forzante, in *Appendice* sono riportati i passaggi per ricavare i rispettivi valori.

Le condizioni di ottimo sono:

$$\frac{\partial E[x^2]}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E[x^2]}{\partial h_2} = 0$$

Applicando queste condizioni, si ottengono i rispettivi valori β e h_2 per differenti eccitazioni. Per disaccoppiare le equazioni per l'ottimizzazione, il rapporto di smorzamento h_1 è assunto nullo.

3.5 Riflessioni sullo Stato dell'Arte

3.5.1 Aspetti notevoli dei metodi analizzati

Lo studio si è concentrato nel ricavare dei fattori notevoli, evidenziati da diversi autori, sia nei testi di riferimento e sia nelle pubblicazioni.

Nella trattazione classica, Den Hartog ha evidenziato un aspetto molto importante sullo smorzamento: il rapporto di smorzamento di uno TMD non può eccedere il valore critico, cioè se il TMD è smorzato nel punto critico dove si attacca alla struttura, non vibrerà e, perciò, non dissiperà energia.

Partendo dalla formula dell'ampiezza del moto della massa principale di un sistema a due gradi di libertà, ipotizzando per esempio il caso del raddoppio della forza esterna P_0 comporti il raddoppio dell'ampiezza x_1 del sistema, si può ottenere una forma adimensionale per mettere in evidenza alcuni legami, come le condizioni di criticità:

$$\frac{x_1}{x_{st}} = \sqrt{\frac{\left(2 \frac{c}{c_c} g f\right)^2 + (g^2 - f^2)^2}{\left(2 \frac{c}{c_c} g f\right)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + [\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)]^2}}$$

Questa è il rapporto di ampiezza della massa principale espressa come funzione di quattro variabili essenziali $\mu, c/c_c, f$ and g . Nella figura 3-7, si può vederlo rappresentato in funzione del rapporto di frequenza g per un sistema ben definito: $f = 1, \mu = 1/20$, al variare dello smorzamento c/c_c . In altre parole la figura descrive il comportamento di un sistema nel quale la massa principale è 20 volte più grande della massa dello smorzatore, mentre la frequenza di quest'ultimo è uguale a quella del sistema ($f = 1$). Quando lo smorzamento diventa infinito, le due masse sono virtualmente bloccate insieme e si ha un sistema ad un grado di libertà con una massa pari a $(21/20)M$; mentre il TMD non compie lavoro se $c = 0$.

L'obiettivo da ottenere nell'applicare un TMD è quello di abbattere il picco di risonanza il più possibile; sia per $c = 0$, sia per $c = \infty$, il picco va ad infinito, quindi, il caso opposto allo scopo ricercato.

Quest'aspetto è possibile intuirlo anche fisicamente, si osservi, nel nostro caso, che lo spostamento è il movimento relativo tra le due masse o anche, dal punto di vista tecnologico, l'estensione della

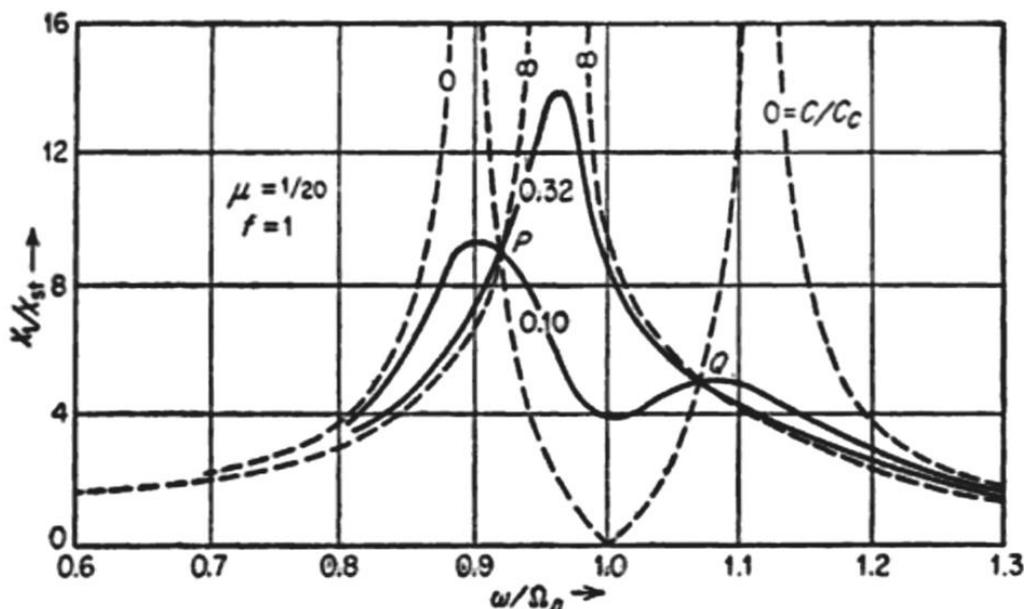


Figura 3-7 Rapporto di ampiezza del sistema principale al variare dello smorzamento

molla dello smorzatore. Ricordando la definizione di coefficiente di smorzamento della struttura - $c = 2m\omega_n$ - e quella dello smorzatore - $c_c = 2m\omega_c$ - se il loro rapporto è nullo, anche la *forza di smorzamento* è nulla, quindi non c'è lavoro da parte del TMD e, di conseguenza, l'ampiezza di risonanza è infinita. Allo stesso modo se il rapporto tende a infinito, le due masse sono "bloccate" insieme l'una all'altra [2] cosicché il loro sposta relativo è nullo, andando di nuovo a rendere vana la presenza del TMD.

Passando a Villaverde, egli sottolinea l'importanza fondamentale di due aspetti per l'efficacia del TMD contro i terremoti: il metodo con cui si ricavano i parametri di configurazione e il modo con cui si va a trattare il segnale per la formulazione stessa dei parametri. Infatti ha analizzato i lavori svolti da altri studiosi e svolto a sua volta prove su modelli in scala ridotta. L'efficacia del TMD per attenuare la risposta degli edifici [7], è stata riscontrata, non solo per il primo modo di vibrare della struttura, ma anche per i modi successivi; quindi lo smorzatore va a lavorare su tutte le frequenze, diminuendo, in generale, gli effetti del sisma per quelle proprie della struttura.

Tre fattori sono stati evidenziati dallo studioso [7], [8]:

1. La dimensione della massa deve essere ben definita, necessaria per attenuare sostanzialmente la risposta della struttura, il guadagno è maggiore, se è maggiore il rapporto di smorzamento, ma ciò richiede una massa di dimensioni maggiori;

$$m_{aj} \geq \frac{|\xi_{bl} - \xi_{aj}|}{\phi_k^2} M_{bi}$$

2. L'importanza dell'accordamento dello smorzatore, cioè i parametri e la metodologia per ottenerli;
3. La dipendenza della quantità di attenuazione è in funzione del segnale sismico che sollecita alla base la struttura.

In altre parole, come ripreso anche in un altro suo lavoro [4]: la formula $m_a^* = [(\xi_b - \xi_a)/\phi_k^2] M_{b1}^2$, dove la massa m_a^* , la costante di rigidità k_a e il coefficiente di smorzamento c_a sono rispettivamente di uno smorzatore efficace, per un dato rapporto di smorzamento ξ_a . Mentre ω_{b1} , ξ_{b1} e M_{b1}^* rispettivamente denotano la frequenza naturale, il rapporto di smorzamento e la massa generalizzata di una struttura per il suo primo modo di vibrare; e ϕ_k è l'ampiezza, sempre nel modo fondamentale, corrispondente al punto in cui viene posizionato l'elemento smorzante, moltiplicata per l'unità di partecipazione modale. Si nota che la massa dello smorzatore incrementa con il quadrato del suo rapporto di smorzamento, quindi un maggior apporto di benefici si ha a scapito però di una sempre maggior massa, che influirà sui costi dell'opera stessa; è opportuno operare un ciclo di verifiche al fine di ottenere il giusto rapporto tra effetto smorzante e massa. Altro aspetto su cui Villaverde si sofferma è che i TMD riescono a abbattere, anche significativamente, la risposta sismica di una struttura, quando il segnale va a sollecitare le frequenze dei primi modi di vibrare, cioè per quelli che avrebbero il maggior impatto distruttivo sulla struttura.

Un altro aspetto molto importante che deve essere sottolineato da Villaverde, è l'effetto di "slittamento" che si ha nei primi periodi della struttura in seguito all'inserimento della massa dell'elemento che va a influire sul comportamento strutturale, anche senza considerare lo smorzamento dell'appendice. Infatti se si analizza la formula presentata da Villaverde sul suo metodo, $\omega_{r,r+1} = \omega_0 \mp \omega_0/2 \sqrt{\phi_k^2 \gamma_{IJ} - (\xi_{bl} - \xi_{aj})^2}$, si nota che il modo principale della struttura originaria viene diviso per due e che nascono due nuovi modi di vibrare con le rispettive frequenze, vicine a quella fondamentale della struttura originale, una maggiore e l'altra minore. Questo aspetto può avere anche carattere negativo inizialmente: ad esempio se una struttura ha come periodo fondamentale di vibrazione $f = 0.5 \text{ Hz}$ e il segnale ha $f = 0.37 \text{ Hz}$, ad un'analisi senza TMD otterremmo che l'edificio viene solo in parte "stimolato" da questa forzante, ma, una volta inserito lo smorzatore configurato con la teoria di Villaverde, si avrebbe che una delle due nuove frequenze avrebbe un valore più piccolo di 0.5 Hz, avvicinandosi a quella di riferimento per il segnale dell'accelerogramma e facendo, quindi, registrare un incremento degli spostamenti in rapporto ad un'analisi senza TMD.

Altro aspetto che si evidenzia è un incremento del taglio tra i piani, al quale Villaverde risponde con un'riflessione sul fatto che l'inserimento di una massa, per quanto piccola, oltre che a far slittare il

periodo, contribuisce ad un aumento della massa partecipante all'inerzia mossa dall'accelerazione al suolo del sisma, che, quindi, fa incrementare il valore del taglio alla base dei pilastri tra i piani.

Sadek e Taylor portano in avanti ulteriormente il lavoro fatto da Villaverde, giungendo spesso alle stesse conclusioni. Ad esempio un aspetto che aveva già evidenziato Villaverde, riportato da Sadek e Taylor, è l'importanza di posizionare il TMD in sommità, dove generalmente il primo modo di vibrare della struttura genera maggiori spostamenti.

I due studiosi si sono poi soffermati sul motivo per cui il modello il metodo di Villaverde non ha le stesse performance del loro, benché partano entrambi dalla stessa teoria sul moto per sistemi con smorzamento non proporzionale. Dalla teoria si è ricavato che i migliori risultati si ottengono quando i rapporti di smorzamento delle due nuove frequenze del sistema globale tendono ad eguagliare il valore medio dato da quelli della struttura originale e dello smorzatore singolo, $|\xi_{b1} - \xi_{a1}| \leq |\phi_k \sqrt{\gamma_{1j}}|$. La ragione del migliore risultato da parte dei due studiosi è dovuto, secondo loro, al fatto che i loro parametri sono ottenuti cercando di uguagliare entrambi i due smorzamenti dei due primi nuovi modi di vibrare, mentre Villaverde li mantiene diversi. Questa differenza tra i due modi smorzanti nel metodo di quest'ultimo tende ad aumentare al crescere del rapporto di massa e, di conseguenza, il modo con la frequenza più piccola tra i due incrementerà la risposta della struttura, diminuendo sempre di più il suo contributo smorzante. Approssimativamente, i risultati numerici mostrano che il metodo di Villaverde è valido per rapporti di massa più piccoli dello 0.5%, per rapporti maggiori sono significative le differenze come si può vedere nella tabella ripresentata qui di seguito.

Tabella 3-3 - Rapporti di smorzamento dei modi complessi calcolati con il metodo di Villaverde per una struttura con smorzamento =0.05

μ	ξ	$(\xi - \beta)/2$	ξ_1	ξ_3
0.005	0.1207	0.0854	0.0983	0.0727
0.010	0.1500	0.1000	0.1207	0.0801
0.020	0.1914	0.1207	0.1544	0.0888
0.050	0.2736	0.1618	0.2081	0.1019
0.100	0.3662	0.2081	0.3218	0.1111

Altri fattori rilevanti per Sadek e Taylor sono: la facilità nel "retrofitting" di strutture storiche, visto che non va a sconvolgere la filosofia di progettazione nella ristrutturazione, quindi facilmente applicabile dagli ingegneri che la vogliono sfruttare per tale scopo. Inoltre, sempre osservando i risultati numerici, una struttura che presenta un valore di smorzamento β molto piccolo, richiede l'inserimento di un TMD caratterizzato da un altrettanto piccola massa, quindi si presenta efficacia anche se, per quanto riguarda gli spostamenti relativi dell'elemento rispetto al punto di attacco alla struttura, siano elevati. Viceversa per una struttura con uno smorzamento β molto elevato, un TMD

dotato di piccola massa, posto in sommità alla struttura non è in grado di influire sul comportamento dei livelli sottostanti e, di conseguenza, rimane ininfluenza nella risposta sismica. Si richiede che lo smorzatore, oltre ad avere una massa elevata, non sia presente solo all'ultimo piano della struttura, perché, come detto, non collaborerebbe con i piano più bassi, ma devono essere disposti ad ogni livello uno smorzatore in modo che le ampiezze di ogni livello siano governate dal sistema di smorzamento.

3.5.2 Ricerche in letteratura

In generale è accettato che i TMD possano essere efficaci per sistemi strutturali soggetti ad una eccitazione armonica o del vento, un fatto che è stato corroborato nella pratica dalla riduzione dell'effetto "vela" nei grattacieli, attraverso l'installazione di uno smorzatore a massa accordata in alcune strutture alte (Ex. Taipei 101).

Non si ha, comunque, un generale consenso circa l'adeguatezza del sistema di assorbimento per ridurre gli effetti dei carichi da sisma. Negli studi su un gruppo di selezionati isolatori a comportamento elastoplastico nella risposta lineare di un sistema ad un grado di libertà soggetto alla componente S21W del Taft, terremoto 1952, Gupta e Chandrasekaran hanno verificato che l'effetto degli ammortizzatori di vibrazione è solo marginale e hanno concluso perciò che i TMDs non sono efficaci per le eccitazioni sismiche, come lo sono, invece, per quelle sinusoidali. D'altra parte, Wirsching e Yao analizzano due modelli di edificio a 5 e 10 piani, soggetti ad una accelerazione artificiale al suolo, con aggiunti smorzatori di vibrazione in risonanza. La massa degli ammortizzatori è considerata uguale a metà di quella di un piano e il loro smorzamento è diversificato. Essi determinarono che gli smorzatori con uno smorzamento del 20 per cento riducono effettivamente il picco relativo di risposta dei piani superiori. Similmente, usando un programma ottimizzato per minimizzare la risposta strutturale, Wirsching and Campbell hanno calcolato i parametri di ottimo e dimostrato la loro efficacia nel ridurre i primi modi di vibrare di strutture ad 1, 5 e 10 piani sotto accelerazione alla base di un'onda Gaussiana di rumore bianco (banca di frequenza costante).

Nello studio di smorzatori nel campo non-lineare, Jagadish et al., hanno studiato il comportamento di una struttura a due piani, eccitati dalla componente del terremoto Taft, 1952; essi hanno osservato che, a dispetto della non-linearità della struttura, un rapporto di frequenza tra il piano superiore e quello inferiore compreso tra 0,80-1,0 ha la capacità di ammortizzare le vibrazioni. Essi hanno concluso che è possibile una riduzione del 50% della duttilità richiesta per il piano inferiore. Più recentemente, procedendo con analisi più sensibili a determinare l'importanza delle caratteristiche di differenti terremoti, di sistema e dell'ammortizzatore, Kaynia et al. [9] hanno

investigato statisticamente per un largo insieme di terremoti reali registrati gli effetti di uno smorzatore a massa accordata per sistemi lineari e non-lineari. Considerando il rapporto di smorzamento dell'ammortizzatore superiore circa al 20%, essi hanno ottenuto staticamente un'ampia variabilità di rapporto del picco di risposta tra casi con e senza un ammortizzatore, e hanno concluso che gli ammortizzatori non sono così efficaci nel ridurre la risposta sismica di strutture alte. Sulla stessa linea, Sladek e Klingner [10] hanno testato la risposta alla componente N-S di El Centro, 1940, terremoto, su una struttura di 25 piani con uno smorzatore a massa accordata progettato accordandolo ai valori di ottimo suggeriti da Den Hartog. Essi hanno trovato che così dimensionato lo smorzatore non dà contributo per ridurre il massimo spostamento della struttura

Altre problematiche riscontrare in letteratura riguardo ai parametri di ottimo, i quali si ottengono, generalmente minimizzando la risposta in spostamento della struttura. Il valore in questione si associa ai minimi spostamenti e, contemporaneamente, a valori contenuti della risposta del TMD. Nel lavoro svolto da C. Adam e T. Furtmüller [11], su questi aspetti appena citati hanno riscontrato la sostanziale ininfluenza del TMD sulla risposta sismica di una struttura ad un sisma. I problemi che hanno evidenziato: il problema del *detuning*, lo smorzatore si disaccorda in seguito a deformazioni della struttura, dovute a forti sismici, ad esempio non previsti nel sito di progetto, che ne modificano il comportamento, quindi il periodo fondamentale, tuttavia all'aumentare del rapporto di massa, il detuning va diminuendo. Un altro aspetto che i due studiosi evidenziano è l'importanza del contenuto della banda di frequenza, maggiore è il contenuto, minor efficacia avrà il TMD nello smorzare la risposta.

Villaverde ha cercato di motivare i risultati negativi, ottenuti da altri studiosi: in particolare, si osserva che i valori suggeriti per configurare gli smorzatori, determinati da Den Hartog, Wirsching e Campbell, Luft e Kaynia e altri.

I valori di ottimo di Den Hartog [2] e Luft sono derivati da un sistema a due gradi di libertà, accordati con eccitazioni di tipo o armonico o filtrate come rumore bianco, agenti solo sulla massa della struttura principale. I due sistemi dinamici non sono sicuramente equivalenti a quelli eccitati da una sollecitazione data dall'accelerazione sismica e perciò i loro valori di ottimo non si possono applicare per carichi sismici. A questo proposito, per gli stessi motivi le ricerche fatte da Gupta e Chandrasekaran, da Sladek e Klingner possono essere interpretate con la conclusione che i parametri degli smorzatori non possono essere quelli ottimali. Altri studiosi, come Wirsching e Campbell si sono interessati al problema, sul loro lavoro si può notare che la loro ottimizzazione è stata ricavata numericamente e, perciò, in essa il rapporto di smorzamento non viene settato in funzione della condizione critica. Inoltre, il loro metodo è basato solo sul primo modo di vibrare

della struttura, assumendo come forzante esterna agente alla base un rumore bianco, che, come evidenziato da Kaynia [9] e altri potrebbe anche sovrastimare l'efficacia dello smorzatore. Quest'ultimo si è interessato al problema, ottenendo risultati, che inducono a sfiduciare il TMD. Tuttavia il più elevato rapporto di smorzamento che viene considerato da Kaynia è circa del 20%, ma, per la teoria sviluppata da Villaverde, un tale valore richiederebbe uno smorzamento da parte della struttura del 10%; evidentemente questo tipo di attenuazione della risposta non è raggiungibile dalla stessa.

3.5.3 Fattori di riferimento

Ricapitolando ci sono aspetti comuni in tutti i lavori che è importante elencare in modo che siano chiari e facilmente riscontrabili al momento di una nuova analisi, quindi:

- Una volta configurato in modo corretto lo smorzatore a massa accordata, questo è in grado di lavorare attenuare la risposta sismica di una struttura soggetta all'azione di un sisma in tutte le frequenze proprie dei modi di vibrare;
- Due motivi possono portare a non far lavorare correttamente il TMD, la prima riguarda una deformazione che modifica il comportamento della struttura, rendendo di conseguenza mal accordato il dispositivo. L'altro motivo è quello che, una volta uniti, struttura e TMD, il sistema globale ha frequenze quasi uguali a quelle della struttura originaria, "slittate", soprattutto nei primi modi. Ciò può portare ad avere un incremento delle sollecitazioni per quei terremoti che, teoricamente parlando, non dovrebbero sollecitare la struttura;
- Per strutture con rapporto di smorzamento piccolo richiedono uno smorzamento piccolo, viceversa se il rapporto è elevato, una singola massa posta in sommità non è in grado di influenzare il comportamento dei piani più bassi;
- Una considerazione legata alla precedente, riguarda il fatto che per strutture molto elevate, per quando possa presentare un rapporto di massa elevato, sembra non riuscire ad attivarsi in tempo per attenuare gli effetti del sisma;
- L'importanza che il metodo usi segnali reali per ricavare i parametri di ottimo, perché i segnali sinusoidali, rumore bianco o con prove empiriche, non contengono i fenomeni che contraddistinguono gli accelerogrammi, come il picco critico o la variazione dell'ampiezza. Mentre possono servire in fase di progettazione o test di una struttura con smorzatore a massa accordata, perché permettono di indagare il comportamento per particolare casi richiesti nell'analisi dal progettista.

4 Descrizione casi studio e calcolo parametri TMD

4.1 Predimensionamento dei modelli

In questo capitolo si andrà a vedere brevemente quelli che sono i modelli ed i rispettivi predimensionamenti, visto che non è scopo di questo elaborato svolgere un accurato dimensionamento statico ma, per quanto riguarda i modelli, utilizzare per le analisi delle strutture che siano riconducibili a quelle generalmente presenti nella realtà.

Nella fase di scelta del numero di modelli si è ritenuto opportuno sviluppare le analisi su tre strutture multipiano, le quali sono state pensate sulla base di alcune considerazioni che torneranno utili in seguito, quando si procederà con il confronto dei risultati nelle simulazioni dinamiche. Verranno messi a confronto due coppie di parametri: gli spostamenti e le accelerazioni, rispettivamente, della struttura globale e dello smorzatore a massa accordata. Per alcuni casi saranno presenti più elementi smorzanti, a seconda del metodo di dissipazione implementato. Il predimensionamento, infine, si concluderà con una utile valutazione dei modi di vibrare delle strutture, messe a confronto.

Gli elementi che si è cercato di mantenere costanti o proporzionali, sono: la massa interpiano e il rapporto di massa per tutti i metodi che vengono implementati; la rigidezza laterale dei pilastri

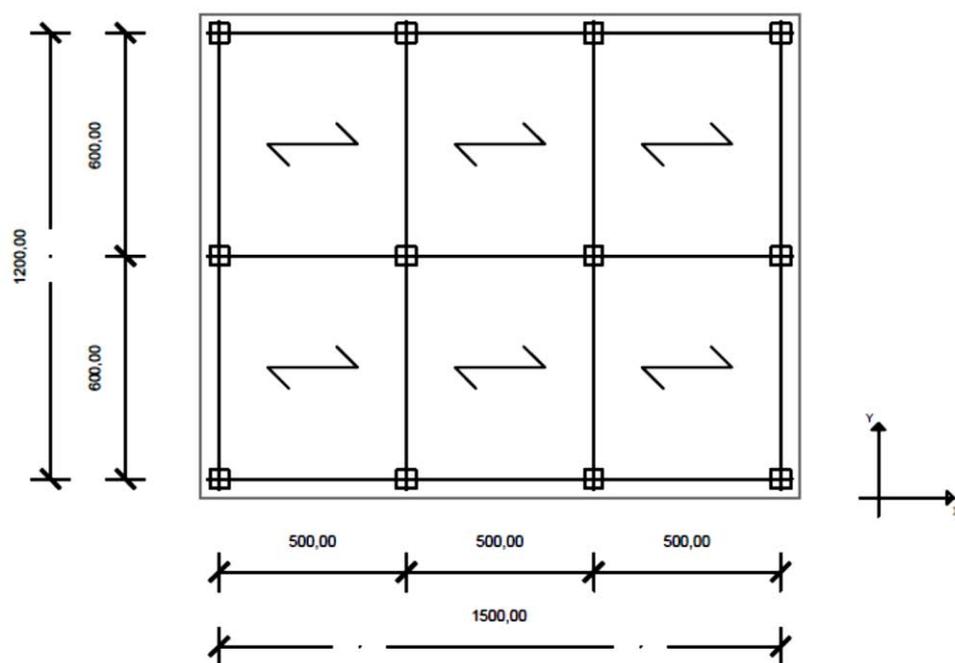


Figura 4-1 Schematizzazione della pianta generale delle strutture

e la rispettiva pianta di ogni struttura. Quest'ultima prevede una maglia tanto regolare nel piano, quanto in elevazione, che presenta dimensioni 15 x 12 m, si veda la figura 4-1.

In ordine abbiamo le seguenti caratteristiche dimensionali per i tre modelli:

Tabella 4-1 - Dimensioni caratteristiche dei tre modelli

	h [m]	H [m]	m [T]	M [T]
3 PIANI	4.5	13.5	100.0	300.0
6 PIANI	4.5	27.0	100.0	600.0
10 PIANI	4.5	45.0	100.0	1000.0

Per tutte e tre le strutture si è ipotizzato che siano costituite in direzione x da tre telai, mentre in y da quattro, privi di qualsiasi elemento irrigidente. Le travi sono disposte in direzione y, lunghe 6 m ciascuna, assumendo la funzione di travi principali, mentre le travi secondarie sono disposte in direzione x e sono di collegamento, vedi figura 4-1.

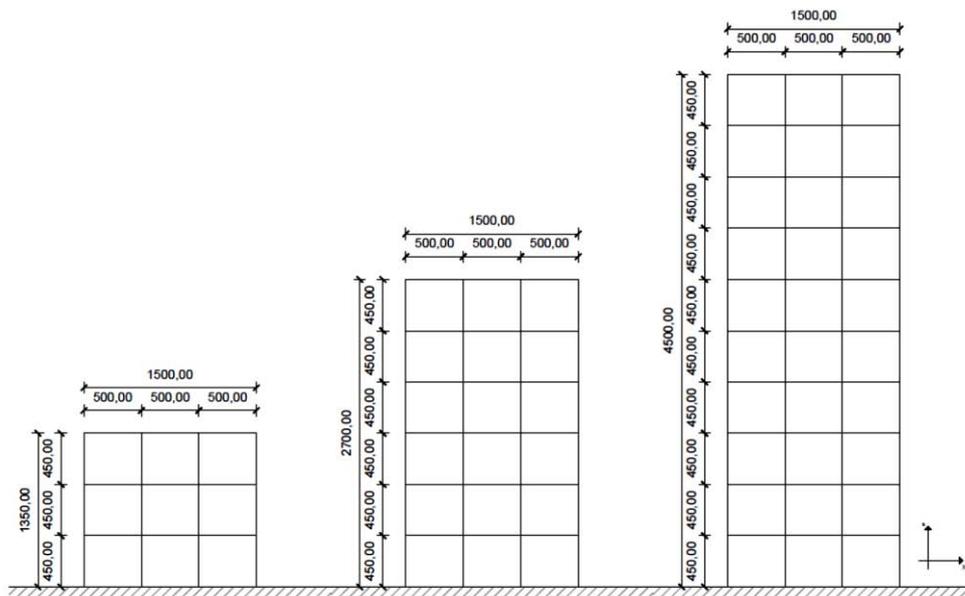


Figura 4-2 Schematizzazione in elevazione delle tre strutture in direzione x

4.1.1 Forze e Rigidezza laterale per un sistema a n gradi di libertà

Per illustrare le relazioni che governano le strutture multipiano si utilizzano di alcuni casi studio e semplificazioni, come ad esempio il *telaio a comportamento a taglio*, vedi la fig. 4-3, sebbene irrealistica, permette di illustrare come le equazioni del moto per un MDOF si sviluppino. La massa è distribuita omogeneamente nella struttura, ma li idealizziamo come concentrata nel rispettivo piano. Questa assunzione è generalmente appropriata per le strutture multipiano perché spesso negli edifici le masse sono localizzate nei piani.

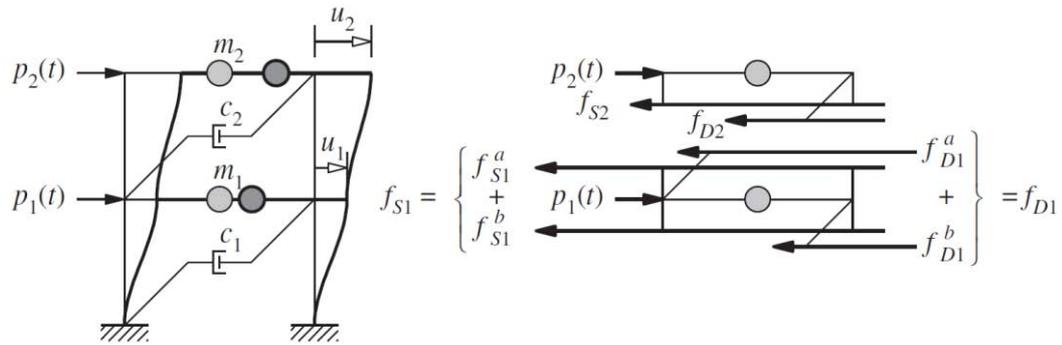


Figura 4-3 Schema telaio deformabile a taglio: a) spostamenti; b) forze esterne ed interne

Il meccanismo che permette alla struttura di dissipare energia è rappresentato dallo smorzamento. Nella fig. 4-3, lo smorzamento è di tipo viscoso, poiché è definito dalla deformazione dei piani. Le forze agenti su ogni massa del piano m_j sono definite come $p_1(t)$ e $p_2(t)$. Queste sono contrastate da quelle che si generano nella struttura, cioè: la forza elastica resistente f_{Sj} e la forza di smorzamento f_{Dj} . Le forze esterne sono considerate agenti lungo l'ascissa x positiva, viceversa le forze interne in direzione opposta perché contrastano quelle esterne.

Dalla seconda legge di Newton per ogni massa:

$$p_j - f_{Sj} - f_{Dj} = m_j \ddot{u}_j$$

o

$$m_j \ddot{u}_j + f_{Sj} + f_{Dj} = p_j(t)$$

L'equazione contiene due equazioni per $j = 1, 2$, e queste possono essere riscritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

L'equazione può essere scritta anche in forma compatta come:

$$m\ddot{u} + f_D + f_S = p(t)$$

Mediante l'introduzione delle seguenti notazioni:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; f_D = \begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix}; f_S = \begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix}; p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

dove m è la matrice delle masse per un sistema a due gradi di libertà.

Assumendo il comportamento lineare, le forze elastiche resistenti f_S sono legate agli spostamenti dei piani u . Per ottenere ciò, si introduce la rigidezza laterale k_j del j -esimo piano; si lega il taglio di piano V_j alla deformazione del piano stesso, $\Delta_j = u_j - u_{j-1}$, così:

$$V_j = k_j \Delta_j$$

Per una struttura multipiano la rigidezza laterale va a contribuire a quella di piano, poiché quest'ultima è data dalla somma delle rispettive rigidezze di tutti i pilastri del piano. Per un piano di altezza h e un pilastro con modulo E ed un modulo d'inerzia I_c , la rigidezza laterale di un pilastro

con le estremità bloccate, implica, mediante la idealizzazione del telaio con comportamento a taglio, è $12EI_c/h^3$. Quindi la rigidezza di piano è:

$$k_j = \sum_{n^{\circ} \text{ pil}} \frac{12EI_c}{h^3}$$

Con la rigidezza di piano definita, possiamo legare le forze di piano f_{S1} e f_{S2} agli spostamenti di piano, u_1 e u_2 . La forza f_{S1} agente sul primo piano è data da due contributi: f_{S1}^a dal piano superiore e f_{S1}^b da quello inferiore. Quindi:

$$f_{S1} = f_{S1}^b + f_{S1}^a$$

il quale, visto che $\Delta_1 = u_1$ e $\Delta_2 = u_2 - u_1$, diventa:

$$f_{S1} = k_1 u_1 + k_2 (u_2 - u_1)$$

La forza f_{S2} per il secondo piano è:

$$f_{S2} = k_2 (u_2 - u_1)$$

Si osserva che f_{S1}^a e f_{S2} sono uguali per intensità e opposti nella direzione perché entrambi rappresentano il taglio nel piano. In forma matriciale sono scritti:

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

o

$$f_S = k \cdot u$$

Quindi il vettore forza resistente elastico f_S e il vettore spostamento u sono legati attraverso la *matrice di rigidezza* per un telaio 2 gradi libertà con comportamento a taglio.

La forza di smorzamento f_{D1} e f_{D2} sono legate alle velocità del piano \dot{u}_1 e \dot{u}_2 . Il coefficiente j -esimo del piano c_j lega il taglio del piano V_j , mediante gli effetti smorzanti alla velocità $\dot{\Delta}_j$ associati con la deformazione del piano da:

$$V_j = c_j \dot{\Delta}_j$$

In una maniera simile, si può derivare:

$$f_{D1} = c_1 \dot{u}_1 + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix}$$

o

$$f_D = c \cdot \dot{u}$$

Il vettore della forza smorzante f_D e il vettore velocità \dot{u} so legati attraverso la *matrice di smorzamento* c per un sistema 2 a due gradi di libertà, con comportamento a taglio.

Le relazione appena ottenute nell'equazione di bilancio delle forze si ottiene:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Questa equazione matriciale rappresenta le equazioni differenziali che governano gli spostamenti $u_1(t)$ e $u_2(t)$ di una struttura a due gradi di libertà soggetta a forze esterne $p_1(t)$ e $p_2(t)$. Ogni equazione contiene entrambe le incognite u_1 e u_2 . Le due equazioni sono perciò accoppiate e nella forma presentata possono essere risolte simultaneamente.

4.1.2 Determinazione dei modi di vibrare della struttura

Vengono riportati i modi di vibrare della struttura in direzione x, con i rispettivi fattori di partecipazione modale. I modi significativi, eccitanti una percentuale maggiore del 5%, sono in funzione dei gradi di libertà associati alla struttura. In particolare. Nello studio che si svolge in questo elaborato si tengono in considerazione anche i modi di vibrare, sulla base di un criterio di “coincidenza”: vista la finalità delle analisi, ricavare informazioni notevoli operando il confronto tra i modelli, si terranno in considerazione i modi che possano presentare la stessa frequenza tra le strutture, anche se appartenenti a modi differenti e con massa partecipante inferiore al 5%. Questo viene fatto proprio per osservare se è possibile effettuare una lettura più chiara, in fase di post-analisi dei dati.

4.1.3 Caratteristiche strutturali

I modelli di studio individuati per effettuare le prove di comparazione dei metodi di configurazione dei dispositivi a massa accordata sono tre: tre, sei e dieci piani. La scelta è ricaduta su questi perché sono una tipologia classica di palazzina, presente nel territorio. Dato che si vuole proporre una metodologia di progettazione efficace da inserire negli studi di ingegneria.

4.1.3.1 Modello 3 Piani

La struttura, come detto nel paragrafo introduttivo, è caratterizzata da una massa interpiano pari a 100 tonnellate, che presenta tre livelli di rigidità laterale dei pilastri:

Tabella 4-2 – Rigidezze pilastri e fattore di partecipazione modale struttura di 3 piani;

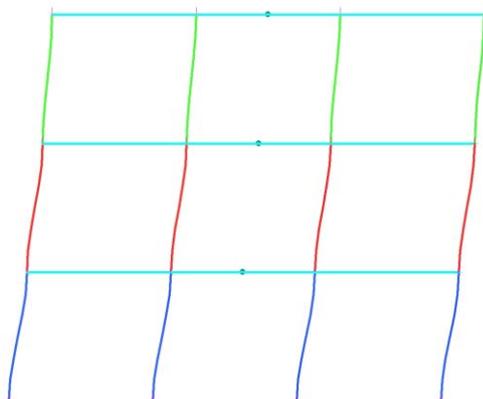
Piano	Rigidezza Laterale del piani [kN/m]	Fattori Partecipazione Modale
Lev. 1	41000,00	0,515
Lev. 2	38000,00	0,964
Lev. 3	36000,00	1,231

Si ricorda che per rimanere nel caso più generale possibile la sezione del pilastro non è stata posta, di conseguenza anche il modulo unitario ha assunto valore unitario.

La rispettiva matrice ridotta di rigidezza laterale è la seguente:

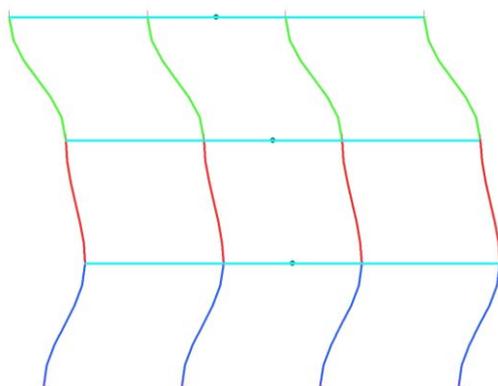
$$k = \begin{vmatrix} 79.000 & -38.000 & 0 \\ -38.000 & 74.000 & -36.000 \\ 0 & -36.000 & 36.000 \end{vmatrix}$$

Per questa struttura sono stati individuati tre modi di vibrare, i cui valori sono riportati in tabella 4-2, di seguito sono illustrati i modi:



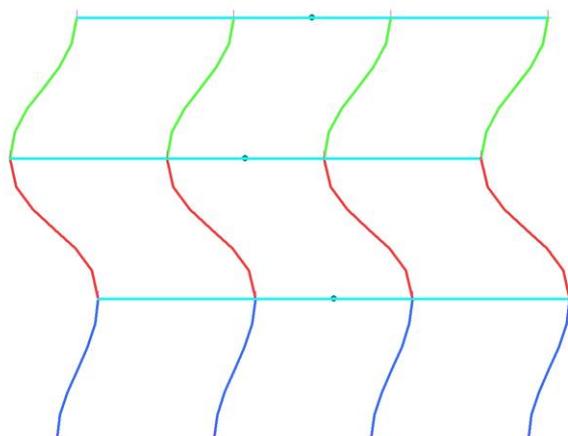
- T = 0.71 sec
- f = 1.408 Hz

Figura 4-4 - Primo modo di vibrare della struttura nella direzione x



- T = 3.86 sec
- f = 0.259 Hz

Figura 4-5 - Secondo modo di vibrare della struttura nella direzione x



- T = 3.86 sec
- f = 0.259 Hz

Figura 4-6 - Terzo modo di vibrare della struttura nella direzione x

Tabella 4-3 Modi di vibrare della struttura 3 piani

Modo di vibrare	Periodo [sec]	Massa Partecipante [%]
1	0,71	90,332
2	3,86	8,186
3	5,57	1,482

Secondo la normativa, i primi due modi sarebbe ritenuti importanti, mentre il terzo con 1,48% di massa partecipante verrebbe scartato.

4.1.3.2 Modello 6 Piani

La seconda struttura costituita da sei piani: è caratterizzata anch'essa da una massa interpiano pari a 100 tonnellate, che presenta gli stessi tre livelli di rigidità laterale dei pilastri.

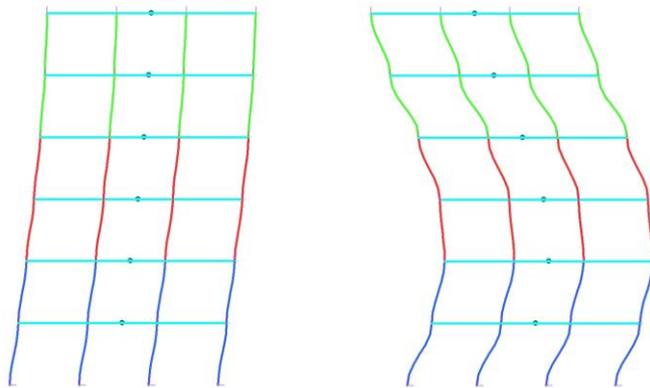
Tabella 4-4 – Rigidezze pilastri e fattore di partecipazione modale struttura a 6 piani;

Piano	Rigidezza Laterale dei piani [kN/m]	Fattori Partecipazione Modale
Lev. 1	41000,00	0,0127
Lev. 2	41000,00	0,0247
Lev. 3	38000,00	0,0362
Lev. 4	38000,00	0,0454
Lev. 5	36000,00	0,0523
Lev. 6	36000,00	0,0559

La rispettiva matrice ridotta di rigidità laterale è la seguente:

$$k = \begin{vmatrix} 82.000 & -41.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41.000 & 79.000 & -38.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -38.000 & 76.000 & -38.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -38.000 & 74.000 & -36.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36.000 & 72.000 & -36.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -36.000 & 36.000 \end{vmatrix}$$

Per questa struttura sono stati individuati 6 modi di vibrare, i cui valori sono riportati in tabella 4-4, di seguito sono illustrati i modi:



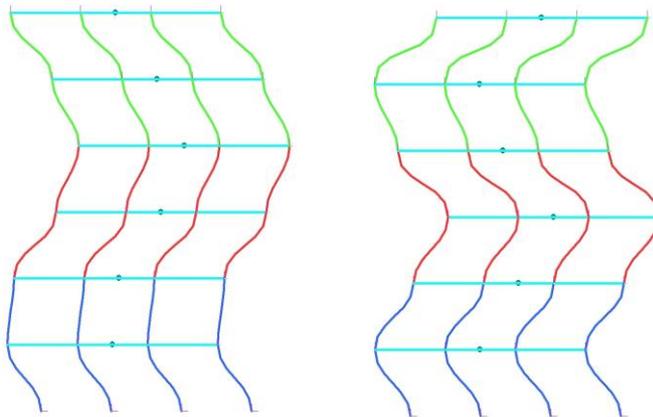
1° Modo:

- $T = 1,312 \text{ sec}$
- $f = 0.762 \text{ Hz}$
- $M_p = 86.01\%$

2° Modo:

- $T = 0,454 \text{ sec}$
- $f = 2.203 \text{ Hz}$
- $M_p = 9.47\%$

Figura 4-7 - Primo e Secondo modi di vibrare delle strutture in direzione x



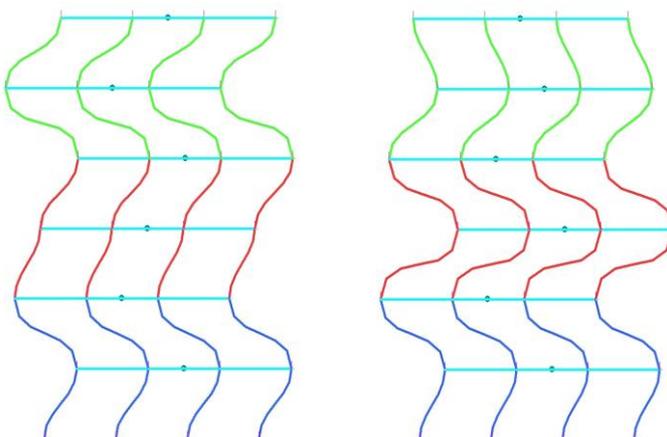
3° Modo:

- $T = 0.284 \text{ sec}$
- $f = 3.52 \text{ Hz}$
- $M_p = 2.91\%$

4° Modo:

- $T = 0.215 \text{ sec}$
- $f = 4.65 \text{ Hz}$
- $M_p = 1.00\%$

Figura 4-8 - Terzo e Quarto modi di vibrare della struttura in direzione x



5° Modo:

- $T = 0.182 \text{ sec}$
- $f = 5.49 \text{ Hz}$
- $M_p = 0.43\%$

6° Modo:

- $T = 0.166 \text{ sec}$
- $f = 6.02 \text{ Hz}$
- $M_p = 0.18\%$

Figura 4-9 - Terzo e Quarto modi di vibrare della struttura in direzione x

Tabella 4-5 Modi di vibrare della struttura di 6 piani

Modo di vibrare	Periodo [sec]	Massa Partecipante [%]
1	1,312	86,007
2	0,454	9,472
3	0,284	2,911
4	0,215	1,002
5	0,182	0,429
6	0,166	0,180

Secondo la normativa, i primi due modi sarebbe ritenuti significativi per il calcolo nell'analisi spettrale, e, osservando i modi di vibrare della struttura, anche per l'aspetto di confronto ai fine della nostra ricerca, saranno i primi due d'interesse.

4.1.3.3 Modello 10 Piani

La struttura del terzo modello, benché presenti la stessa massa per ogni piano come nei modelli precedenti, ha richiesto un aumento della rigidezza, i tre valori di rigidezza laterali utilizzati precedentemente sono stati al fine di far rientrare le resistenze nel predimensionamento.

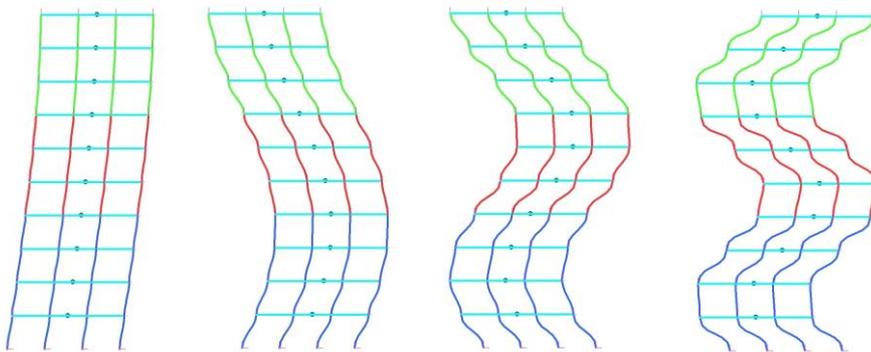
Tabella 4-6 Rigidezze pilastri e fattore di partecipazione modale struttura di 10 piani;

Piano	Rigidezza Laterale del piani [kN/m]	Fattori Partecipazione Modale
Lev. 1	45100,00	0,0063
Lev. 2	45100,00	0,0124
Lev. 3	45100,00	0,0183
Lev. 4	45100,00	0,0238
Lev. 5	41800,00	0,0292
Lev. 6	41800,00	0,0339
Lev. 7	41800,00	0,0377
Lev. 8	39600,00	0,0409
Lev. 9	39600,00	0,0431
Lev. 10	39600,00	0,0442

La rispettiva matrice ridotta di rigidezza laterale è la seguente:

$$k = \begin{pmatrix} 82.000 & -41.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41.000 & 82.000 & -41.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -41.000 & 82.000 & -41.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -41.000 & 79.000 & -38.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -38.000 & 76.000 & -38.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -38.000 & 76.000 & -38.000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -38.000 & 74.000 & -36.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36.000 & 72.000 & -36.000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36.000 & 72.000 & -36.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36.000 & 36.000 \end{pmatrix}$$

Per questa struttura sono stati individuati 6 modi di vibrare, i cui valori sono riportati in tabella 4-6, di seguito sono illustrati solo i primi 4 modi:



- | | | | |
|---|---|--|---|
| <p>1° Modo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • T = 2.00 sec • f = 0.5 Hz • Mp = 83.99% | <p>2° Modo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • T = 0.688 sec • f = 1.453 Hz • Mp = 9.63% | <p>3° Modo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • T = 0.166 sec • f = 6.02 Hz • Mp = 3.17% | <p>4° Modo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • T = 0.166 sec • f = 6.02 Hz • Mp = 1.0% |
|---|---|--|---|

Figura 4-10 - Primi quattro modi di vibrare della struttura in direzione x

Tabella 4-7 Modi di vibrare della struttura di 10 piani

Modo di vibrare	Periodo [sec]	Massa Partecipante [%]
1	2,000	83,997
2	0,688	9,627
3	0,420	3,173
4	0,305	1,497

5	0,246	0,798
6	0,209	0,425
7	0,185	0,252
8	0,171	0,129
9	0,160	0,055
10	0,153	0,047

I primi due modi sono significativi per il calcolo nell'analisi spettrale, e, osservando i modi di vibrare della struttura, anche per l'aspetto di confronto ai fine della nostra ricerca, saranno i primi tre d'interesse.

Tabella 4-8 Uguaglianze periodi dei modi di vibrare dei 3 modelli

3 PIANI	6 PIANI	10 PIANI
0,70	1,31	2,00
0,25	0,45	0,68
0,18	0,28	0,42

In questa tabella 4-8 sono riportati i primi tre modi di vibrare delle tre strutture, al fine di evidenziare i modi che hanno in comune tra di loro. Questa possibilità di confronto nasce dalla scelta iniziale di predimensionare i modelli con massa, e rigidezza parziale proporzionali in modo che il comportamento delle strutture fosse il più possibile messo a confronto. Soprattutto, darà dei risultati notevole in fase di post-processo dei dati.

In ordine si osserva che:

- Un collegamento è tra il primo modo della 3 piani con il secondo della 10;
- Uno è tra il secondo modo della 3 piani e il terzo della 6;
- Uno tra il secondo della 6 piani e il terzo della 10.

Ci si deve aspettare di riscontrare un aumento di intensità anche per segnali che apparentemente non si avvicinano al periodo fondamentale della struttura.

4.2 Configurazione parametri TMD

4.2.1 Metodi di accordamento

L'accordamento dello smorzatore a massa accordata è l'aspetto fondamentale affinché lavori nel modo corretto e dissipi energia. Si andranno a illustrare per i tre modelli di strutture i parametri calcolati con le teorie presentate nel capitolo precedente, infatti si è ritenuto opportuno mettere in relazione i risultati ottenuti dalle analisi dinamiche. Si sono messi a confronto i seguenti metodi con le seguenti ragioni:

- 1) Metodo di Den Hartog, considerato il modello classico di progettare i TMDs, essendo stato il primo a scriverne a riguardo con un'analisi approfondita, riscontrando i casi a cui si può ricondurre il comportamento di uno smorzatore applicato a una struttura a due gradi di libertà;
- 2) Metodo di Villaverde, dopo aver consultato opere e pubblicazioni a riguardo, è stato riscontrato nel suo metodo un approccio radicalmente diverso rispetto a quello che la letteratura presentava fino ad allora. Infatti, andando a impostare i parametri, non più sulla consueta equazione del moto classica, ma sulla legge del moto con smorzamento gli ha permesso di affinare la configurazione dei parametri, rendendo più performante lo smorzatore nel contesto globale della struttura;
- 3) Metodo di Sadek e Taylor, questi due studiosi hanno ripreso in mano il lavoro svolto da Villaverde e hanno evidenziato delle osservazioni notevoli sul suo lavoro, individuando ulteriori casistiche di lavoro del TMD, basate, appunto, sulla teoria dello smorzamento proporzionale. Hanno sviluppato un processo iterativo che gli ha permesso di ottenere migliori risultati, confrontati a quelli di Villaverde;
- 4) Metodo di Feng e Mita, questo metodo si discosta totalmente dai due precedenti. Questo procedimento è esclusivamente dedicato a quelle strutture, di notevole altezza, come grattacieli, torri, etc., perché si basa sulla recente, ma ormai consolidata e impiegata nella realtà, progettazione di edifici alti dividendoli in due parti: la *mega*-struttura, parte globale su cui si fonda la resistenza del manufatto, e la *sub*-struttura, le parti inglobanti blocchi interi di piani dell'edificio, che sono "agganciati" alla *mega*-struttura. Nel loro procedimento si va a sfruttare questa tipologia di progettazione idealizzando i blocchi di piani come masse stesse dello smorzatore, permettendo, quindi, di raggiungere elevati rapporti di massa, conseguentemente, elevati rapporti di smorzamento. Vedremo in fase di analisi dei dati raccolti e nelle conclusioni, riguardo ai possibili vantaggi e svantaggi di questo metodo particolare.

Si è già accennato ai fattori comuni nei tre modelli che sono stati scelti per permettere un confronto il più possibile attendibile e, allo stesso modo, anche per lo smorzatore si è ipotizzato di fissare un parametro che potesse restituire risultati significativi, soprattutto dal punto di vista di una possibile applicabilità futura di questi metodi nella progettazione ordinaria per strutture multipiano.

La scelta è ricaduta sul fissare il rapporto di massa pari al 5%, tale scelta è dipesa da due aspetti, fondamentalmente: la prima riguarda la possibilità di confrontare i risultati con la classica progettazione – Den Hartog – dove generalmente si pone il parametro della ratio tra le masse; il secondo riguarda un aspetto pratico, pensato dal punto di vista di una realizzazione concreta di una struttura in cantiere. Ipotizzare di dover sollevare una massa di elevata densità, senza tener conto di altri aspetti come il trasporto o la sua realizzazione in cantiere, richiede sforzi, tecnologie, etc., da non sottovalutare. Soprattutto nei casi si tratti di una massa che deve essere collocata in una struttura di notevole altezza, come un grattacielo, dove lo stesso rapporto del 5% può corrispondere ad una massa per lo smorzatore. Ad esempio si ha il grattacielo Taipei 101, vedi in figura 3-4 e 3-5, dove la massa è collocata negli ultimi piani in sommità alla struttura.

Tuttavia questa scelta, come si può intuire dalla filosofia di progettazione, non sarà funzionale per tutti i metodi, limitandone le performance, ma riflessioni più accurate verranno fatte nelle conclusioni. Si può ipotizzare che per successivi lavori di approfondimento si potrà far variare questo parametro, dando maggior valore alle potenzialità dei metodi “sacrificati” in questo studio.

I casi studio che si andranno a sviluppare per ogni modello di struttura sono in totale sei, e, di questi, alcuni sono ipotizzati con smorzatore singolo e altri con smorzatori ad ogni piano. Questo elenco riporta l'ordine con cui verranno presentati i parametri di configurazione e, nel capitolo successivo, i risultati delle analisi dinamiche:

- 1) NO TMD - struttura senza dissipazione ausiliaria dello smorzatore a massa accordata;
- 2) D. H. TMD - smorzatore classico;
- 3) VILLAVERDE TMD;
- 4) S&T TMD - smorzatore configurato mediante teoria di Sadek e Taylor;
- 5) S&T MTMD - serie di smorzatori disposti per ogni piano della struttura, secondo il metodo di Sadek e Taylor;
- 6) F&M MTMD - serie di smorzatori disposti per ogni piano della struttura, secondo il metodo di Feng e Mita,

4.2.2 Configurazione Struttura a 3 Piani

4.2.2.1 2) Metodo Den Hartog

Si pone il parametro di riferimento $\mu = 5\%$, che con questo metodo è quello che meglio permette di avvicinare il valore ricercato per ottenere l'unità nel rapporto di frequenza, condizione posta da Den Hartog per avere lo smorzatore oscillante in controfase rispetto alla forzante esterna.

Tabella 4-9 Parametri TMD per Den Hartog

Parametri di configurazione TMD	
$\mu=5\%$	Rapporto delle masse
$m_2 = 15T$	Massa TMD
$f = 0,95 \text{ Hz}$	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\xi = 0,134$	Rapporto di smorzamento del sistema Struttura-TMD
$\xi_2 = 1,338 \text{ Hz}$	Frequenza fondamentale del TMD
$k_2 = 168,61 \text{ N/mm}$	Rigidezza TMD
$c = 33,69 \text{ Ns/mm}$	Coefficiente di smorzamento TMD

4.2.2.2 3) Metodo Villaverde

L'ipotesi alla base di questo metodo è quella di configurare i parametri dello smorzatore e di studiare il sistema nel suo comportamento globale, non distinguendo più la struttura primaria dallo smorzatore. Si parte sempre dall'ipotesi del parametro fisso al 5% del rapporto di massa.

Un aspetto che entra a far parte nella configurazione di ottimo dei parametri del TMD, è il posizionamento corretto del dispositivo che la teoria prevede essere nel punto cui si risentono maggiormente gli effetti del primo modo di vibrare della struttura. Per la struttura, come si verifica in questo tipo di edifici, si trova nella sommità, in corrispondenza dell'ultimo piano.

Tabella 4-10 Parametri struttura principale

Calcolo Parametri e localizzazione di un TMD Efficace	
$M_{tot} = 300,00 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$M_{b1} = 271,03 \text{ T}$	Massa generale del sistema
$\omega_{b1} = 1,404 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\xi_{b1} = 0,02$	Smorzamento del sistema

Tabella 4-11 Parametri TMD per Villaverde

Parametri TMD	
$\xi_{b1} = 0,325$	Rapporto di smorzamento del TMD
$m_a^* = 14,53 \text{ T}$	Massa TMD
$k_a^* = 1131,42 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD
$c_a^* = 78,21 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse

4.2.2.3 4) Metodo Sadek e Taylor per il TMD

Il metodo sfrutta parte della formulazione teorica di Villaverde, ma si pone come obiettivo di ottenere, mediante iterazione, l'uguaglianza dei due rapporti di smorzamento ottenuti dal nuovo sistema globale.

Tabella 4-12 Parametri TMD per Sadek a Taylor

MONO TMD	
$\mu_{ip} = 0,05$	Rapporto delle masse ipotizzato
$\beta = 0,02$	Coefficiente di smorzamento Struttura
$M_{tot} = 300 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$\omega_0 = 1,404 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\phi^T M \phi = 271,03 \text{ T}$	Massa generalizzata per il fattore di partecipazione modale
$m_t = 13,55 \text{ T}$	Massa TMD
$f = 0,94$	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\omega_t = 1,3166 \text{ Hz}$	Frequenza fondamentale del TMD
$T_t = 0,7595 \text{ s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\omega_t = 8,2727 \text{ rad/s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\xi_t = 0,2920$	Rapporto di smorzamento del TMD
$c_t = 65,48 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$K_t = 927,41 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD

4.2.2.4 5) Metodo Sadek e Taylor per il MTMD

Per il metodo in questione, la presenza di più smorzatori significa che ad ognuno di essi corrisponde dei parametri di ottimo ben definiti, influenzati dal punto di attacco, rispetto alla struttura. Nella figura 4-11 si può avere un'idea dello schema statico della struttura con gli smorzatori posti ad ogni livello di essa. Di seguito sono riportati tutti i valori:

Si può osservare che, rispetto al metodo di Feng e Mita per il MTMD, dove i parametri di

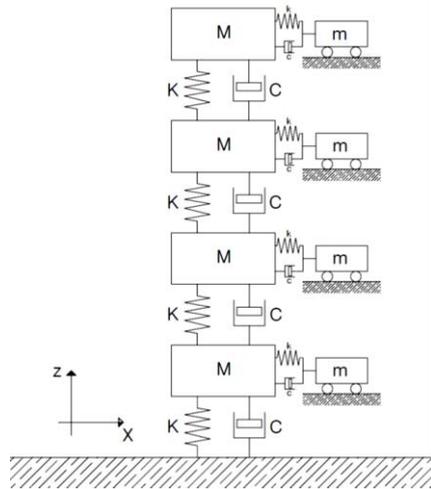


Figura 4-11 Schema struttura-MTMD

smorzamento e rigidezza rimangono costanti per tutti gli smorzatori installati nella struttura, con il metodo di Sadek e Taylor, proprio perché tiene in conto la massa partecipante per ogni piano, si osserva che i parametri calcolati sono differenti.

Si osserva che per i livelli bassi, il valore corrispondente sarà piccolo e, di conseguenza, saranno più grande la rigidezza e più piccolo lo smorzamento e viceversa, salendo il piano, aumenta il fattore di partecipazione modale, che nel modo fondamentale è massimo per il livello più elevato, facendo diminuire la rigidezza e aumentando lo smorzamento del TMD.

Tabella 4-13 Parametri MTMD per Sadek e Taylor

MULTI TMD		
1	2	3
$\mu_{ip} = 0,0167$	$\mu_{ip} = 0,0167$	$\mu_{ip} = 0,0167$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 300 \text{ T}$	$M_{tot} = 300 \text{ T}$	$M_{tot} = 300 \text{ T}$
$\omega_0 = 1,404 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 1,404 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 1,404 \text{ Hz}$
$\phi'M\phi = 271,03 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 271,03 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 271,03 \text{ T}$
$m_t = 4,52 \text{ T}$	$m_t = 4,52 \text{ T}$	$m_t = 4,52 \text{ T}$
$\mu = 0,02$	$\mu = 0,02$	$\mu = 0,02$
$f = 0,99$	$f = 0,9817$	$f = 0,9771$
$\omega_t = 1,3899 \text{ Hz}$	$\omega_t = 1,3787 \text{ Hz}$	$\omega_t = 1,3723 \text{ Hz}$
$T_t = 0,7195 \text{ s}$	$T_t = 0,7253 \text{ s}$	$T_t = 0,7287 \text{ s}$
$\omega_t = 8,7331 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 8,6629 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 8,6224 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,0761$	$\xi_t = 0,1424$	$\xi_t = 0,1818$
$c_t = 6,00 \text{ kNs/m}$	$c_t = 11,15 \text{ kNs/m}$	$c_t = 14,16 \text{ kNs/m}$
$K_t = 344,50 \text{ kN/m}$	$K_t = 338,99 \text{ kN/m}$	$K_t = 335,83 \text{ kN/m}$

4.2.2.5 6) Metodo Feng e Mita per il MTMD

In questo metodo l'ipotesi di fissare al 5% il rapporto delle masse, non porta a sfruttarlo a pieno, tuttavia si potranno osservare alcuni aspetti che questo porta alla struttura.

Tabella 4-14 Parametri struttura per Feng e Mita

METODO DI CALCOLO FENG E MITA $\mu=5\%$	
Parametri modello	
$N_p = 3,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 12,00$	Numero di pilastri per piano
$m_1 = 300,00 \text{ T}$	Massa totale piani
$\omega_1 = 1,404 \text{ Hz}$	Modo di vibrare fondamentale struttura
$\zeta_1 = 0,02$	Rapporto di smorzamento della mega-struttura

Tabella 4-15 Parametri MTMD per Feng e Mita

Calcolo dei parametri di Ottimo per tarare il MTMD	
$N_p = 3,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 1$	Numero TMD per piano
$N_{tot,TMD} = 3$	Numero totale TMD della struttura
$m_p = 5,00$ T	Massa TMD, considerati come un unico sistema TMD
$m_2 = 15,00$ T	Massa totale piani
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse mega-sub struttura
$\beta_{opt} = 0,940$	Rapporto frequenze TMD-Mega-struttura ottimale
$\zeta_{2,opt} = 0,103$	Rapporto di smorzamento ottimale
$\omega_2 = 1,321$ Hz	Periodo fondamentale del TMD
$k_2 = 344,32$ kN/m	Rigidezza laterale del piano
$c = 9,112$ Ns/mm	Coefficiente di smorzamento TMD

4.2.3 Configurazione Struttura a 6 Piani

Di seguito sono riportati le configurazioni con i rispettivi valori ottimali per la struttura a sei piani

4.2.3.1 2) Metodo Den Hartog

Tabella 4-16 Parametri TMD per Den Hartog

Parametri di configurazione TMD	
$\mu=5\%$	Rapporto delle masse
$m_2 = 30$ T	Massa TMD
$f = 0,95$ Hz	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\xi = 0,134$	Rapporto di smorzamento del sistema Struttura-TMD
$\xi_2 = 0,726$ Hz	Frequenza fondamentale del TMD
$k_2 = 99,31$ N/mm	Rigidezza TMD
$c = 36,57$ Ns/mm	Coefficiente di smorzamento TMD

4.2.3.2 3) Metodo Villaverde

Tabella 4-17 Parametri struttura per Villaverde

Calcolo Parametri e localizzazione di un TMD Efficace	
$M_{tot} = 600,00 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$M_{b1} = 516,04 \text{ T}$	Massa generale del sistema
$\omega_{b1} = 0,762 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\xi_{b1} = 0,02$	Smorzamento del sistema

Tabella 4-18 Parametri TMD per Villaverde

Parametri TMD	
$\xi_{b1} = 0,325$	Rapporto di smorzamento del TMD
$m_a^* = 29,78 \text{ T}$	Massa TMD
$k_a^* = 682,89 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD
$c_a^* = 92,69 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse

4.2.3.3 4) Metodo Sadek e Taylor per il TMD

Tabella 4-19 Parametri TMD per Sadek e Taylor

MONO TMD	
$\mu_{ip} = 0,05$	Rapporto delle masse ipotizzato
$\beta = 0,02$	Coefficiente di smorzamento Struttura
$M_{tot} = 600 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\phi^T M \phi = 516,04 \text{ T}$	Massa generalizzata per il fattore di partecipazione modale
$m_t = 25,80 \text{ T}$	Massa TMD
$f = 0,94$	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\omega_t = 0,7132 \text{ Hz}$	Frequenza fondamentale del TMD
$T_t = 1,4022 \text{ s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\omega_t = 4,4809 \text{ rad/s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\xi_t = 0,3012$	Rapporto di smorzamento del TMD
$c_t = 69,66 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$K_t = 518,06 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD

4.2.3.4 5) Metodo Sadek e Taylor per il MTMD

Tabella 4-20 Parametri MTMD per i Sadek e Taylor

MULTI TMD		
1	2	3
$\mu_{ip} = 0,0083$	$\mu_{ip} = 0,0083$	$\mu_{ip} = 0,0083$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 600 \text{ T}$	$M_{tot} = 600 \text{ T}$	$M_{tot} = 600 \text{ T}$
$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$
$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$
$m_t = 4,30 \text{ T}$	$m_t = 4,30 \text{ T}$	$m_t = 4,30 \text{ T}$
$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$
$f = 1,00$	$f = 1,00$	$f = 1,00$
$\omega_t = 0,7596 \text{ Hz}$	$\omega_t = 4,7726 \text{ Hz}$	$\omega_t = 4,7726 \text{ Hz}$
$T_t = 1,3165 \text{ s}$	$T_t = 1,3165 \text{ s}$	$T_t = 1,3165 \text{ s}$
$\omega_t = 4,7726 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 4,7726 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 4,7726 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,0319$	$\xi_t = 0,0621$	$\xi_t = 0,0911$
$c_t = 1,31 \text{ kNs/m}$	$c_t = 2,54 \text{ kNs/m}$	$c_t = 3,72 \text{ kNs/m}$
$K_t = 97,95 \text{ kN/m}$	$K_t = 97,43 \text{ kN/m}$	$K_t = 96,96 \text{ kN/m}$

MULTI TMD		
4	5	6
$\mu_{ip} = 0,0083$	$\mu_{ip} = 0,0083$	$\mu_{ip} = 0,0083$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 600 \text{ T}$	$M_{tot} = 600 \text{ T}$	$M_{tot} = 600 \text{ T}$
$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,762 \text{ Hz}$
$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 516,04 \text{ T}$
$m_t = 4,30 \text{ T}$	$m_t = 4,30 \text{ T}$	$m_t = 4,30 \text{ T}$
$\mu = 0,02$	$\mu = 0,02$	$\mu = 0,02$
$f = 0,99$	$f = 0,9817$	$f = 0,9771$
$\omega_t = 0,7543 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,7532 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,7526 \text{ Hz}$
$T_t = 1,3258 \text{ s}$	$T_t = 1,3277 \text{ s}$	$T_t = 1,3287 \text{ s}$
$\omega_t = 4,7392 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 4,7324 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 4,7289 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,1142$	$\xi_t = 0,1316$	$\xi_t = 0,1406$
$c_t = 4,65 \text{ kNs/m}$	$c_t = 5,35 \text{ kNs/m}$	$c_t = 5,72 \text{ kNs/m}$
$K_t = 96,58 \text{ kN/m}$	$K_t = 96,31 \text{ kN/m}$	$K_t = 96,17 \text{ kN/m}$

4.2.3.5 6) Metodo Feng e Mita per il MTMD

Tabella 4-21 Parametri struttura per Feng e Mita

METODO DI CALCOLO FENG E MITA $\mu=5\%$	
Parametri modello	
$N_p = 6,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 12,00$	Numero di pilastri per piano
$m_1 = 600,00 \text{ T}$	Massa totale piani
$\omega_1 = 0,762 \text{ Hz}$	Modo di vibrare fondamentale struttura
$\zeta_1 = 0,02$	Rapporto di smorzamento della mega-struttura

Tabella 4-22 Parametri MTMD per Feng e Mita

Calcolo dei parametri di Ottimo per tarare il MTMD	
$N_p = 6,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 1$	Numero TMD per piano
$N_{tot,TMD} = 6$	Numero totale TMD della struttura
$m_p = 5,00 \text{ T}$	Massa TMD, considerati come un unico sistema TMD
$m_2 = 30,00 \text{ T}$	Massa totale piani
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse mega-sub struttura
$\beta_{opt} = 0,940$	Rapporto frequenze TMD-Mega-struttura ottimale
$\zeta_{2,opt} = 0,103$	Rapporto di smorzamento ottimale
$\omega_2 = 0,717 \text{ Hz}$	Periodo fondamentale del TMD
$k_2 = 101,40 \text{ kN/m}$	Rigidezza laterale del piano
$c = 4,945 \text{ Ns/mm}$	Coefficiente di smorzamento TMD

4.2.4 Configurazione Struttura a 10 Piani

4.2.4.1 2) Metodo Den Hartog

Tabella 4-23 Parametri TMD per Den Hartog

Parametri di configurazione TMD	
$\mu=5\%$	Rapporto delle masse
$m_2 = 50 \text{ T}$	Massa TMD
$f = 0,95 \text{ Hz}$	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\xi = 0,134$	Rapporto di smorzamento del sistema Struttura-TMD
$\xi_2 = 0,474 \text{ Hz}$	Frequenza fondamentale del TMD
$k_2 = 70,67 \text{ N/mm}$	Rigidezza TMD
$c = 39,82 \text{ Ns/mm}$	Coefficiente di smorzamento TMD

4.2.4.2 3) Metodo Villaverde

Tabella 4-24 Parametri struttura per Villaverde

Calcolo Parametri e localizzazione di un TMD Efficace	
$M_{\text{tot}} = 1000,00 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$M_{b1} = 839,67 \text{ T}$	Massa generale del sistema
$\omega_{b1} = 0,498 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\xi_{b1} = 0,02$	Smorzamento del sistema

Tabella 4-25 Parametri TMD per Villaverde

Parametri TMD	
$\xi_{b1} = 0,305$	Rapporto di smorzamento del TMD
$m_a^* = 41,58 \text{ T}$	Massa TMD
$k_a^* = 839,67 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD
$c_a^* = 79,37 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse

4.2.4.3 4) Metodo Sadek e Taylor per il TMD

Tabella 4-26 Parametri TMD per Sadek e Taylor

MONO TMD	
$\mu_{ip} = 0,05$	Rapporto delle masse ipotizzato
$\beta = 0,02$	Coefficiente di smorzamento Struttura
$M_{tot} = 1000 \text{ T}$	Massa totale del sistema
$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$	1° frequenza naturale
$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$	Massa generalizzata per il fattore di partecipazione modale
$m_t = 41,98 \text{ T}$	Massa TMD
$f = 0,94$	Rapporto delle frequenze naturali TMD-Struttura
$\omega_t = 0,4657 \text{ Hz}$	Frequenza fondamentale del TMD
$T_t = 2,1472 \text{ s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\omega_t = 2,9263 \text{ rad/s}$	Periodo fondamentale del TMD
$\xi_t = 0,3039$	Rapporto di smorzamento del TMD
$c_t = 74,66 \text{ kNs/m}$	Coefficiente di smorzamento TMD
$K_t = 359,51 \text{ kN/m}$	Rigidezza assiale TMD

4.2.4.4 5) Metodo Sadek e Taylor per il MTMD

Tabella 4-27 Parametri MTMD per Sadek e Taylor

MULTI TMD		
1	2	3
$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 1000 \text{ T}$	$M_{tot} = 1000 \text{ T}$	$M_{tot} = 1000 \text{ T}$
$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$
$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$
$m_t = 4,20 \text{ T}$	$m_t = 4,20 \text{ T}$	$m_t = 4,20 \text{ T}$
$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$
$f = 1,00$	$f = 1,00$	$f = 1,00$
$\omega_t = 0,4972 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4967 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4962 \text{ Hz}$
$T_t = 2,0111 \text{ s}$	$T_t = 2,0134 \text{ s}$	$T_t = 2,0154 \text{ s}$
$\omega_t = 3,1243 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1208 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1175 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,0165$	$\xi_t = 0,0325$	$\xi_t = 0,0480$
$c_t = 0,43 \text{ kNs/m}$	$c_t = 0,85 \text{ kNs/m}$	$c_t = 1,26 \text{ kNs/m}$
$K_t = 40,98 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,89 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,80 \text{ kN/m}$

Tabella 4-28 Parametri MTMD per Sadek e Taylor

MULTI TMD		
4	5	6
$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 1000 \text{ T}$	$M_{tot} = 1000 \text{ T}$	$M_{tot} = 1000 \text{ T}$
$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$	$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$
$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$	$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$
$m_t = 4,20 \text{ T}$	$m_t = 4,20 \text{ T}$	$m_t = 4,20 \text{ T}$
$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$
$f = 1,00$	$f = 1,00$	$f = 1,00$
$\omega_t = 0,4957 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4953 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4949 \text{ Hz}$
$T_t = 2,0173 \text{ s}$	$T_t = 2,0192 \text{ s}$	$T_t = 2,0207 \text{ s}$
$\omega_t = 3,1146 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1118 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1094 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,0624$	$\xi_t = 0,0765$	$\xi_t = 0,0888$
$c_t = 1,63 \text{ kNs/m}$	$c_t = 2,00 \text{ kNs/m}$	$c_t = 2,32 \text{ kNs/m}$
$K_t = 40,73 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,65 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,59 \text{ kN/m}$

MULTI TMD			
7	8	9	10
$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$	$\mu_{ip} = 0,005$
$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$	$B = 0,02$
$M_{tot} = 1000 \text{ T}$			
$\omega_0 = 0,498 \text{ Hz}$			
$\phi'M\phi = 839,67 \text{ T}$			
$m_t = 4,20 \text{ T}$			
$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$	$\mu = 0,01$
$f = 1,00$	$f = 1,00$	$f = 1,00$	$f = 1,00$
$\omega_t = 0,4946 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4943 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4941 \text{ Hz}$	$\omega_t = 0,4940 \text{ Hz}$
$T_t = 2,0220 \text{ s}$	$T_t = 2,0230 \text{ s}$	$T_t = 2,0238 \text{ s}$	$T_t = 2,0241 \text{ s}$
$\omega_t = 3,1074 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1058 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1047 \text{ rad/s}$	$\omega_t = 3,1041 \text{ rad/s}$
$\xi_t = 0,0988$	$\xi_t = 0,1072$	$\xi_t = 0,1129$	$\xi_t = 0,1158$
$c_t = 2,58 \text{ kNs/m}$	$c_t = 2,79 \text{ kNs/m}$	$c_t = 2,94 \text{ kNs/m}$	$c_t = 3,02 \text{ kNs/m}$
$K_t = 40,54 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,50 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,47 \text{ kN/m}$	$K_t = 40,45 \text{ kN/m}$

4.2.4.5 6) Metodo Feng e Mita per il MTMD

Tabella 4-29 Parametri strutture per Feng e Mita

METODO DI CALCOLO FENG E MITA $\mu=5\%$	
Parametri modello	
$N_p = 10,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 12,00$	Numero di pilastri per piano
$m_1 = 1000,00 \text{ T}$	Massa totale piani
$\omega_1 = 0,498 \text{ Hz}$	Modo di vibrare fondamentale struttura
$\zeta_1 = 0,02$	Rapporto di smorzamento della mega-struttura

Tabella 4-30 Parametri MTMD per Feng e Mita

Calcolo dei parametri di Ottimo per tarare il MTMD	
$N_p = 10,00$	Numero di piani della struttura, fuori terra
$N_{pil} = 1$	Numero TMD per piano
$N_{tot,TMD} = 10$	Numero totale TMD della struttura
$m_p = 10,00 \text{ T}$	Massa TMD, considerati come un unico sistema TMD
$m_2 = 50,00 \text{ T}$	Massa totale piani
$\mu = 0,05$	Rapporto delle masse mega-sub struttura
$\beta_{opt} = 0,940$	Rapporto frequenze TMD-Mega-struttura ottimale
$\zeta_{2,opt} = 0,103$	Rapporto di smorzamento ottimale
$\omega_2 = 0,468 \text{ Hz}$	Periodo fondamentale del TMD
$k_2 = 43,29 \text{ kN/m}$	Rigidità laterale del piano
$c = 3,231 \text{ Ns/mm}$	Coefficiente di smorzamento TMD

4.3 Modellazione Numerica

I modelli e le rispettive analisi dinamiche sono state create mediante l'utilizzo del programma di calcolo agli Elementi Finiti (FEM), Straus7. Gli elementi che sono stati utilizzati sono:

- **Beam:** corpo trave, che segue la legge di Bernoulli, con sei gradi di libertà per ogni nodo: tre traslazionali e tre rotazionali,
- **Spring-Damper:** elemento costituito da una molla e da uno smorzatore (un pistoncino) collegati in parallelo, mostrato in figura 4-31; la molla e lo smorzatore possono avere rigidità assiale, laterale torsionale; per definire una molla senza lo smorzamento, semplicemente basta impostare tutti i parametri di smorzamento a zero, e viceversa. Lo smorzatore viene implementato solo nell'analisi dinamica, mentre non lavora in tutte le altre; contrariamente alla molla che viene riconosciuta in tutte le analisi statiche e dinamiche;
- **Rigid link:** elemento caratterizzato da una rigidità infinita connesso tra due nodi; inoltre, impone sulla rotazione del nodo che non ci sia rotazione relativa tra i due elementi connessi. Esso può agire in tutte le direzioni del piano cartesiano o nella direzione interessata (XY, YZ, ZX, XYZ).

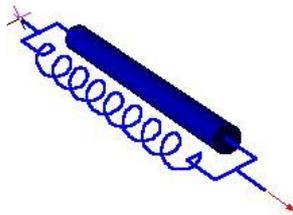


Figura 4-12 Schematizzazione elemento Smorzatore in Straus7

Gli elementi sono stati utilizzati nei seguenti modi per creare i modelli ideali da analizzare:

- I pilastri delle strutture sono tutti identificati con elementi *beam*, ai quali non è stata data la geometria, per rimanere nel caso più generale possibile, attribuendo tutto il computo al momento d'inerzia del pilastro, inoltre anche il modulo elastico è stato poco con valore unitario per lo stesso motivo;
- I solai dei vari piani, visto che nei metodi è richiesto il "piano *rigido*", sono rappresentati da un reticolo di *rigid link*, vista anche la conformazione geometria in pianta, regolare e con una maglia sufficientemente fitta di pilastri, oltre a non essere di interesse nello studio un confronto sulle sollecitazioni che nascono nelle travi;
- Per rappresentare le masse dei piani si sono utilizzate le *masse traslazionali*, assegnabili ai nodi appartenenti al piano, modellate come masse concentrate, facilitando la redistribuzione delle sollecitazioni in maniera uguale su tutti i pilastri e riducendo l'onere computazionale in fase di analisi dinamica.

Per quanto riguarda le analisi dinamiche, sono state svolte tutte nel campo del transitorio lineare, non presentando gli smorzatori a massa accordata elementi con comportamento non-lineare, come ad esempio accade negli smorzatori metalli che lavorando dissipando energia, grazie allo snervamento del materiale che lavora in campo plastico, sotto forma di calore

5 Analisi Dinamiche su Modelli FE

In questo capitolo vengono raccolte tutte le analisi svolte al fine di operare il confronto tra i metodi per calcolare i parametri di ottimo per lo smorzatore a massa accordata, oggetto di questo studio.

Prima di iniziare a illustrare i risultati, per ricavare opportune considerazioni, di carattere notevole, si richiede di approfondire l'altro aspetto fondamentale nel sistema di dissipazione dei TMDs, i segnali forzanti agenti sul sistema. Fin dalle prime ricerche si è capito che lo smorzatore lavora sulla frequenza del segnale di input: infatti il lavoro di dissipazione che attua lo smorzatore, funziona con tutte le frequenze eccitanti, ma dà i risultati più significativi con quelli che sollecitano quella corrispondente al modo di vibrare fondamentale della struttura.

Nella prima fase si è ipotizzato di svolgere le analisi su range di frequenze, intervallate di 0,5 secondi, raccogliendo i segnali da database di enti governativi, universitari, ecc. Naturalmente i segnali raccolti, anche se catalogati, presentano intensità differenti che, quindi, vanno a coprire i segnali con periodi di riferimento piccoli.

Per prima cosa va spiegato la modalità di classificazione dei segnali in base al periodo e per quale motivo.

Per chiudere, si definiscono i parametri temporali dell'analisi dinamica (si veda la tabella dei segnali in appendice C):

- Passo segnale accelerogramma: $\Delta t = 0,01$ secondi;
- Durata totale analisi: $T_{tot} = 60,00$ secondi;
- Passo d'integrazione nell'analisi: $\Delta T = 0,01$ secondi;
- Step totali = 3000.

5.1 Classificazione del segnale forzante

I segnali vengono raccolti grazie ad attrezzature, gli accelerogrammi o sismografi, che registrano per la durata dell'evento l'accelerazione al suolo, provocata dalla scossa di terremoto. L'accelerogramma viene, essendo un segnale vero e proprio, analizzato in tutti gli aspetti che lo contraddistinguono, mediante la *Trasformata di Fourier*, come l'accelerazione o lo spostamento spettrale. Quando si effettua un'analisi spettrale si utilizza proprio lo spettro in accelerazione per poter calcolare gli spostamenti della struttura, soggetta ad una forzante esterna, ma per il tipo di classificazione si utilizza lo spettro in spostamento. Il motivo di questa scelta è dovuto al fatto che un picco di intensità, avente un plateau di durata maggiore nel tempo, nell'accelerazione spettrale,

crea uno slittamento del picco stesso d'intensità nello spettro in spostamento. Ciò fa riflettere sulla maggior utilità di quest'ultimo, per identificare i segnale che sollecitano una determinata

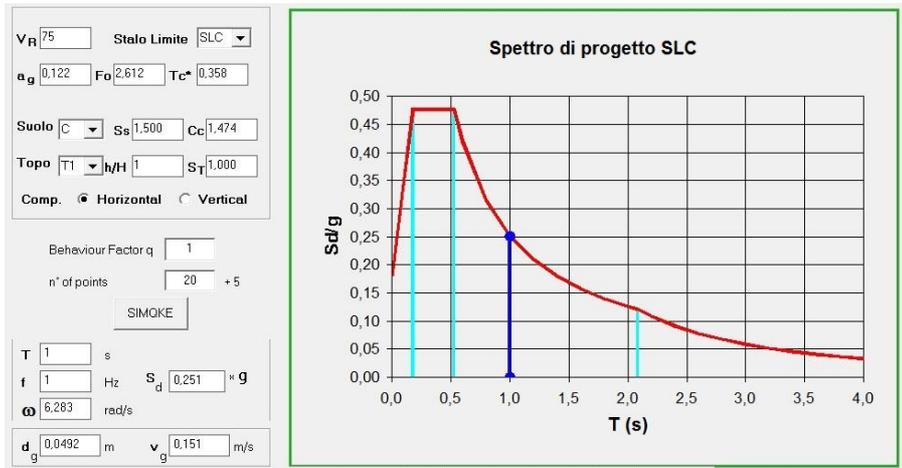


Figura 5-1 Accelerazione spettrale zona Padova, suolo tipo C

frequenza. Quindi, ad esempio, prendendo due segnali apparentemente identici nello spettro in accelerazioni, generano picchi differenti nello spostamento, poiché picchi d'intensità minore a quella massimo, ma posizionati successivamente nel periodo, traslano quelli nello spostamento; questo si vede come un plateau di maggior durata nella spettro-compatibilità per un dato segnale.

Successivamente, si è ipotizzato, quindi, di operare un'azione di "scala", per adattare i picchi, ad un segnale di riferimento. In questo studio è stato scelto il sito di riferimento a Padova, si può vedere lo spettro i, con suolo tipo C e, sulla base di un accelerogramma spettro compatibile si è operata la scala dei segnali, mediante un programma, *SeismicMatch*, per l'adattamento di accelerogrammi rispetto ad uno spettro in accelerazione di riferimento. Tuttavia, anche una volta

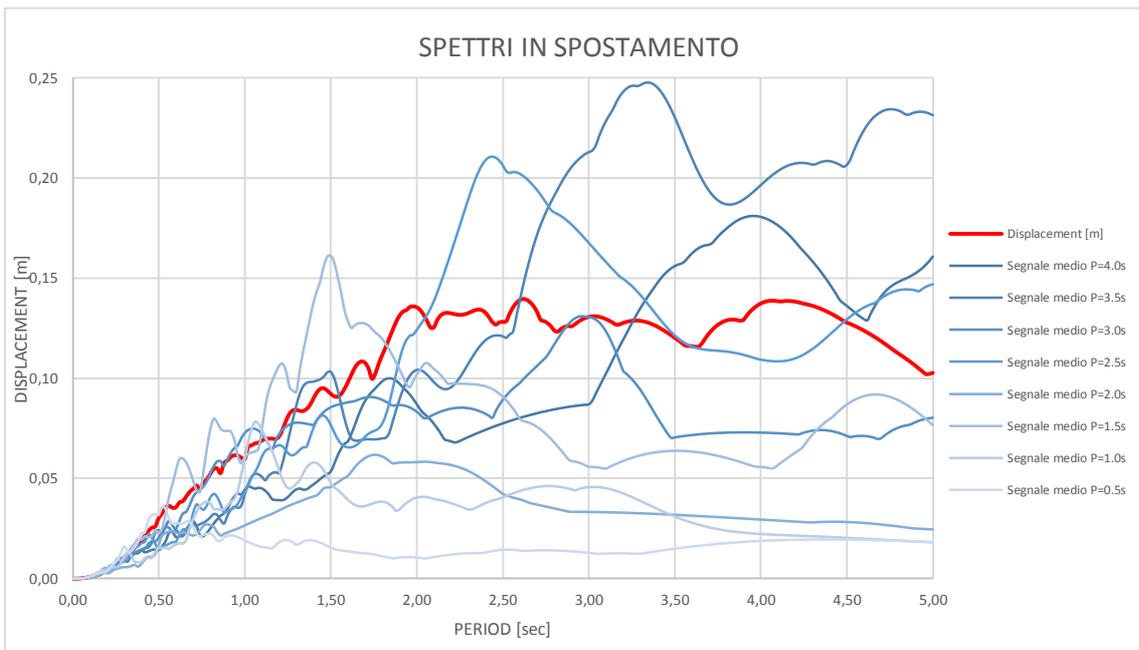


Figura 5-2 Spostamenti spettrale segnali reali - segnale di riferimento Padova

scalati i segnali, non si è riusciti a togliere le cosiddette “code” di segnali con periodo di riferimento elevato vadano a coprire i segnali di quelli più piccoli.

Si è scelto di operare, quindi, un’analisi con diversi gruppi di segnali, ognuno dei quali per verificare in modo corretto il comportamento dello smorzatore a masse accordate, al variare del modello di struttura. I gruppi sono di seguito definiti, per capire l’approccio seguito:

- 1) Studio numerico dei modelli con segnali sinusoidali:
 - a. Basati su una risposta di ampiezza $\omega = \omega_n$ definita sulle tre forzanti principali dei rispettivi modelli studiati;
 - b. Basati su una risposta con ampiezza, variabile nell’intervallo di periodo, da 0,5 a 4,0 secondi, con passo di 0,5;
- 2) Studio numerico dei modelli con segnali artificiali, scalati sullo spettro in accelerazione di Padova come riferimento;
- 3) Studio numerico dei modelli con segnali reali.

5.2 Studio della risposta sismica per segnali sinusoidali

La definizione del segnale sinusoidale ha coinvolto un paio di passaggi che vengono spiegati brevemente ora, in modo da chiarire come siano state ottenute le forzanti per operare l’analisi dinamica nel tempo. Il primo passo è stato quello di individuare le ampiezze nello spettro per lo spostamento dell’accelerogramma di Padova, riferite ai tre periodi fondamentali di vibrazione delle strutture da confrontare. Una volta ottenuti i dati, si è passati a ricavare la derivata seconda dell’espressione, che viene di seguito riportata [12], cioè la regola di smorzamento nel caso di una risposta attenuata e limitata in intensità quando la frequenza del segnale forzante è la stessa di quella naturale della struttura su cui agisce. Per $\omega = \omega_0$ e ipotizzati $C = 0$ e $D = -(u_{st})/2\xi$; e per condizioni iniziali nulle, le costanti A e B possono essere determinate:

$$A = (u_{st})/2\xi$$

$$B = (u_{st})/2\sqrt{1 - \xi^2}$$

Con queste soluzioni, l’equazione:

$$u(t) = \underbrace{\frac{e^{-\xi\omega_n t}(A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)}{\text{transitorio}}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{C \sin \omega t + D \cos \omega t}{\text{stato di fatto}}}_{\text{stato di fatto}}$$

diventa:

$$u(t) = (u_{st})_0 \frac{1}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D t \right) - \cos \omega_n t \right]$$

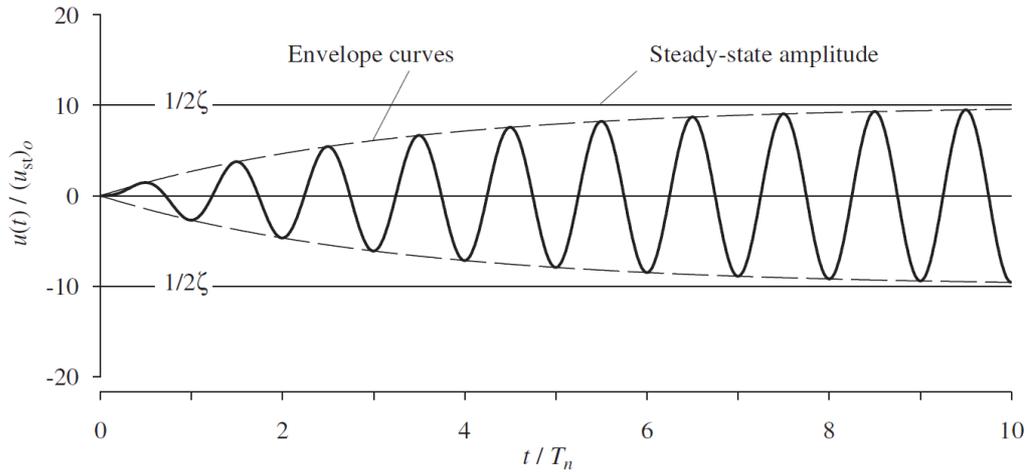


Figura 5-3 Risposta di sistema SDOF per un segnale sinusoidale smorzato con ampiezza predefinita

Questo risultato è illustrato nella figura 5-3. Per un sistema con $\xi = 0.05$.

5.2.1 Segnali con ampiezza definita su forzanti su periodi fondamentali strutture

Si inizia riportando nella tabella 5-1 le ampiezze riferite ai rispettivi periodi di vibrazione fondamentali dei modelli in esame.

Tabella 5-1 Periodo e ampiezza per le tre forzanti sinusoidali, impostate sui tre periodi fondamentali dei modelli

Struttura	PERIODO [sec]	AMPIEZZA [m]
3 PIANI	0,71	0,0448
6 PIANI	1,40	0,08422
10 PIANI	2,00	0,13550

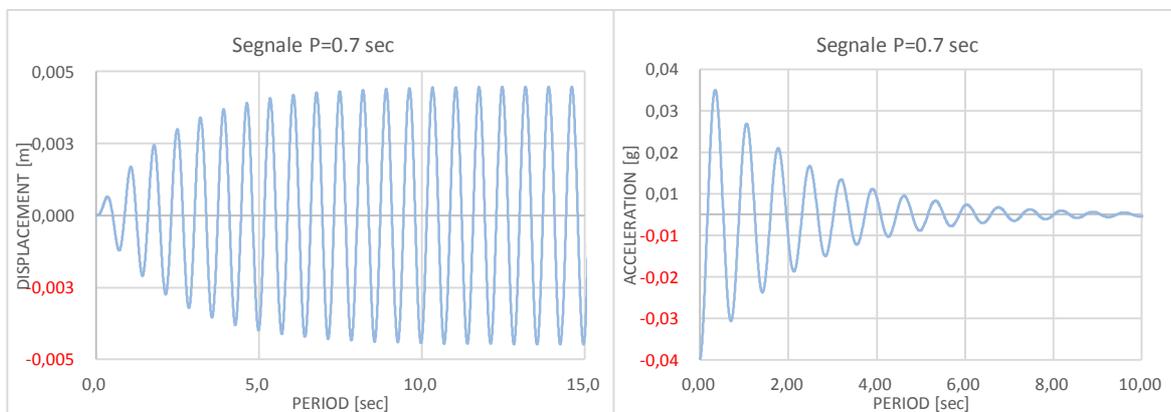


Figura 5-4 Segnale sinusoidale di ampiezza per il periodo P=0.70 sec: a) spostamento; b) accelerazione;

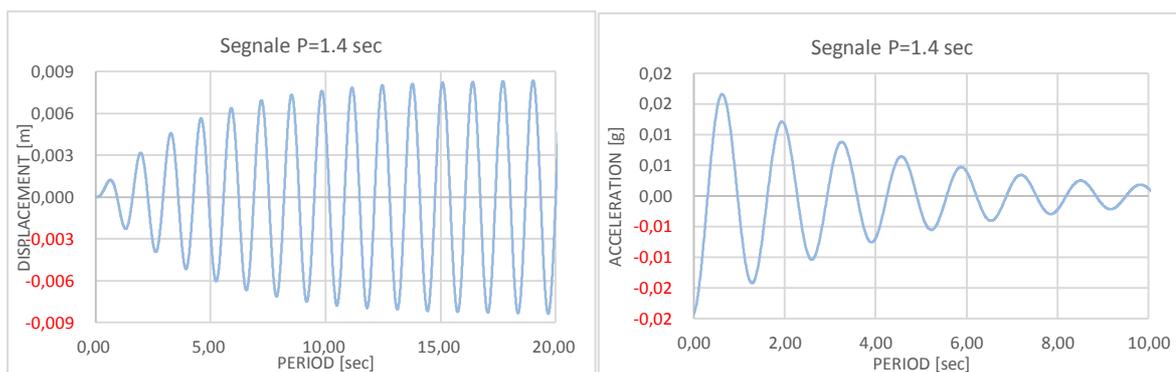


Figura 5-5 Segnale sinusoidale di ampiezza per il periodo $P=1.40$ sec: a) spostamento; b) accelerazione;

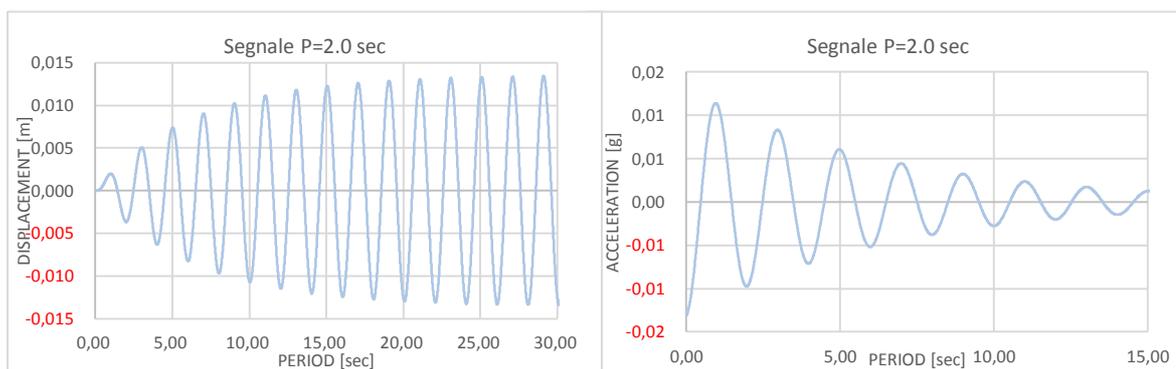


Figura 5-6 Segnale sinusoidale di ampiezza per il periodo $P=2.00$ sec: a) spostamento; b) accelerazione;

Ora, è possibile impostare con facilità la funzione spostamento per ogni forzante di struttura, le quali vengono illustrate nelle figure 5-4, 5-5 e 5-6:

Osservando i grafici sulle sinusoidi, si nota l'aumento dell'ampiezza di oscillazione, che cresce fino ad attenuarsi ad un valore costante pari all'ampiezza impostata. Inoltre, partendo da zero e crescendo di intensità fino al plateau nello spettro di spostamento dell'accelerogramma di Padova, si avranno conseguentemente valori crescenti nelle tre ampiezze, essendo anch'esse crescenti.

Lo studio, come detto in precedenza, si focalizza sul confronto tra i veri metodi per due coppie di parametri, lo spostamento del nodo centrale del piano (qualsiasi nodo del piano può essere scelto visto l'ipotesi di piano rigido) e l'accelerazione, rispettivamente, della struttura principale e del dissipatore di energia. In genere, di seguito del capitolo si potranno vedere grafici che riportano i dati, avendo come termini di confronto:

- I metodi in funzione dell'intervallo temporale, per una singola struttura;
- I metodi raggruppati per ogni struttura, al variare dell'intervallo temporale;
- I metodi al variare dei piani in funzione di un singolo segnale, per una sola struttura.
- I metodi al variare della struttura, per un singolo segnale.

I primi due grafici riportano l'andamento degli spostamenti massimi ottenuti nelle tre strutture, eccitate mediante il segnale con periodo di riferimento quello coincidente con il primo modo di vibrare della struttura a tre piani, pari a $P=0.70$ secondi.

5.2.1.1 Forzante con Periodo $P=0.70$ sec

Come si vede chiaramente il più piccolo dei tre modelli presenta i picchi d'intensità maggiori: dal caso non smorzato si vede una bassa riduzione degli spostamenti per Den Hartog, dell'ordine del 9%, mentre per gli altri metodi si inizia a vedere un considerevole vantaggio in termini di spostamento della struttura, dal 20 al 40%.

Anche in accelerazione, Den Hartog risulta essere quello meno performante, inoltre i benefici sono ridotti. Tuttavia emerge un aspetto notevole, l'accelerazione evidenzia come anche nella struttura a 10 piani vi sia un risentimento di per tale forzante.

Il motivo è da ricercarsi nel fatto sottolineare nel capitolo precedente nel paragrafo in cui sono riportati i modi di vibrare: infatti il secondo modo si avvicina molto al periodo della forzante.

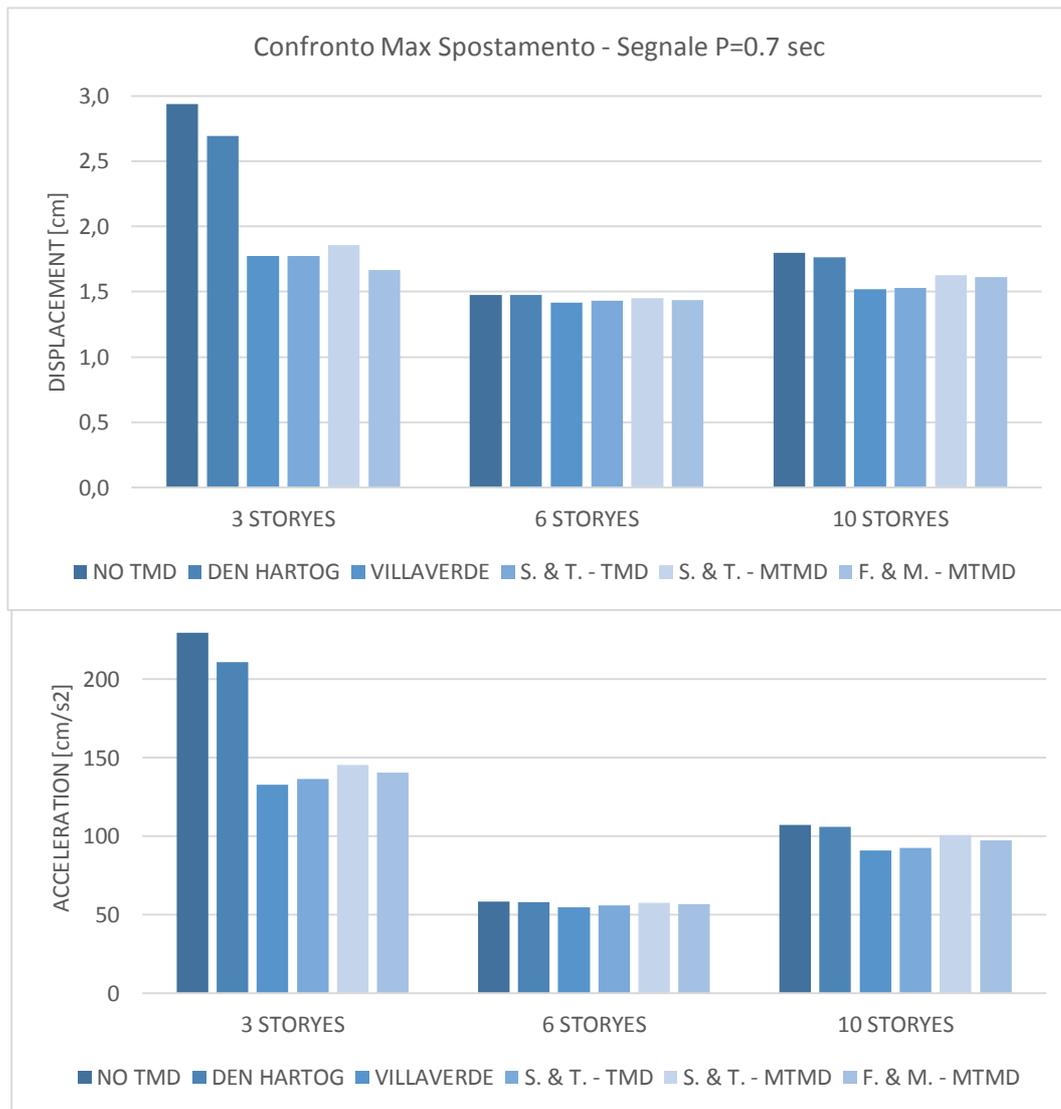


Figura 5-7 Confronto tre strutture per il segnale sinusoidale di periodo $P=0.700$ sec: a) spostamento; b) accelerazione;

In tutti e tre le strutture si può notare come i metodi MTMD paghi in termini di spostamento e accelerazione per quello che riguarda il dispositivo smorzante.

Tabella 5-2 Dati confronto tre strutture per segnale sinusoidale di periodo P=0.70 sec

STRUT.	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	2,94	229,54	2,69	210,79	1,77	162,38	1,77	132,56	1,86	145,5	1,67	140,29
6 PIANI	1,48	58,18	1,48	57,71	1,42	57,39	1,43	54,75	1,45	57,31	1,44	56,77
10 PIANI	1,80	106,92	1,76	105,90	1,52	102,19	1,53	90,99	1,63	100,4	1,61	97,36

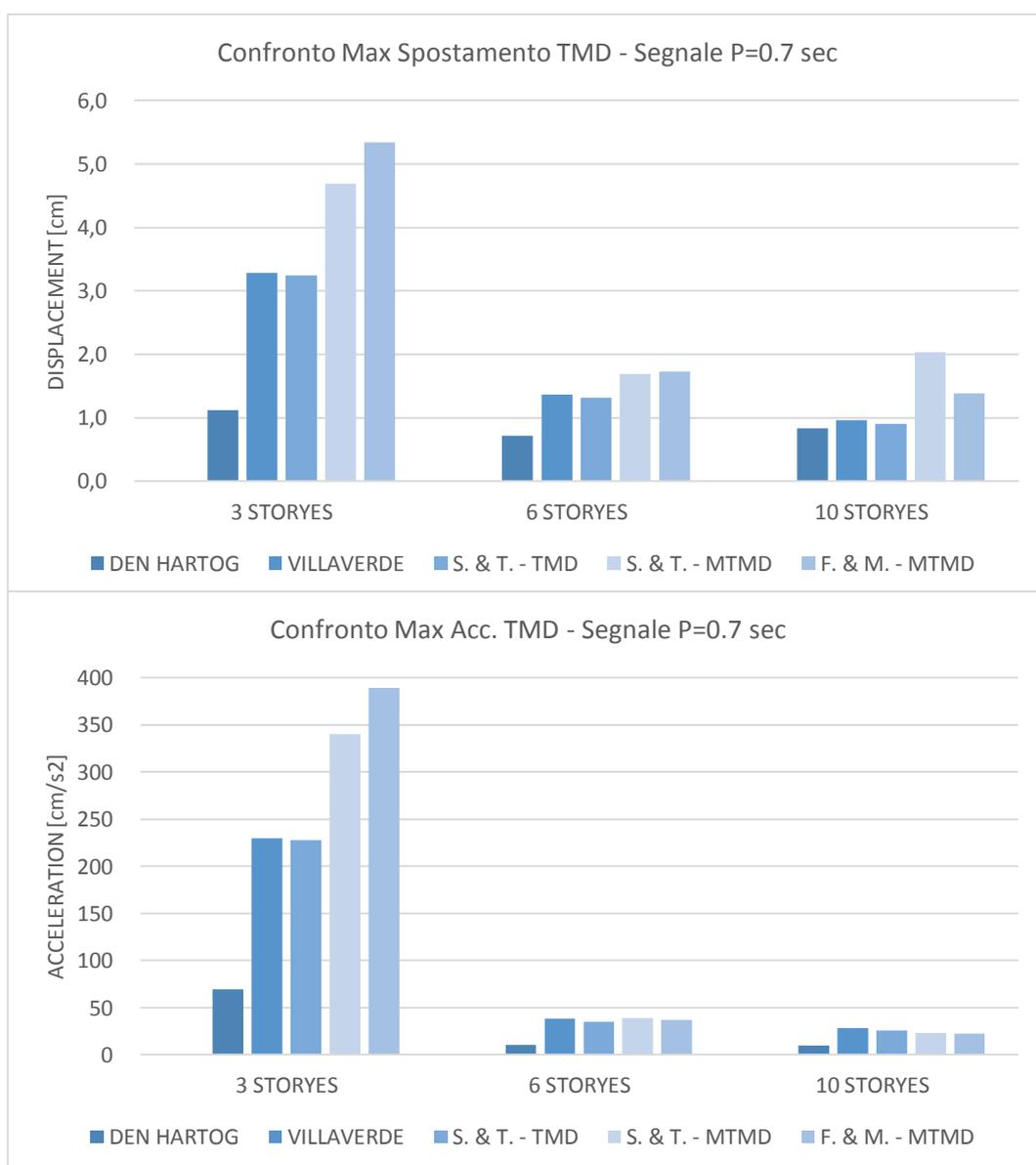


Figura 5-8 Confronto TMD per il segnale sinusoidale di periodo P=0.700 sec: a) spostamento; b) accelerazione;

Nel grafico 5-9 sono riportate le accelerazioni al variare dei piani del modello a 10 piani, come si vede, in corrispondenza dei periodi propri della struttura queste tornano a crescere con elevata intensità; stessa cosa si ha per il modello a 6 piani, nella figura 5-10.

Tabella 5-3 Dati confronto TMD per segnale sinusoidale di periodo P=0.70 sec

TMD	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	-	-	1,12	69,39	3,28	229,9	3,25	227,9	4,69	340,1	5,34	389,5
6 PIANI	-	-	0,71	10,51	1,37	38,33	1,32	35,12	1,69	38,73	1,72	36,90
10 PIANI	-	-	0,83	9,87	0,96	28,19	0,90	25,88	2,03	23,45	1,38	22,72

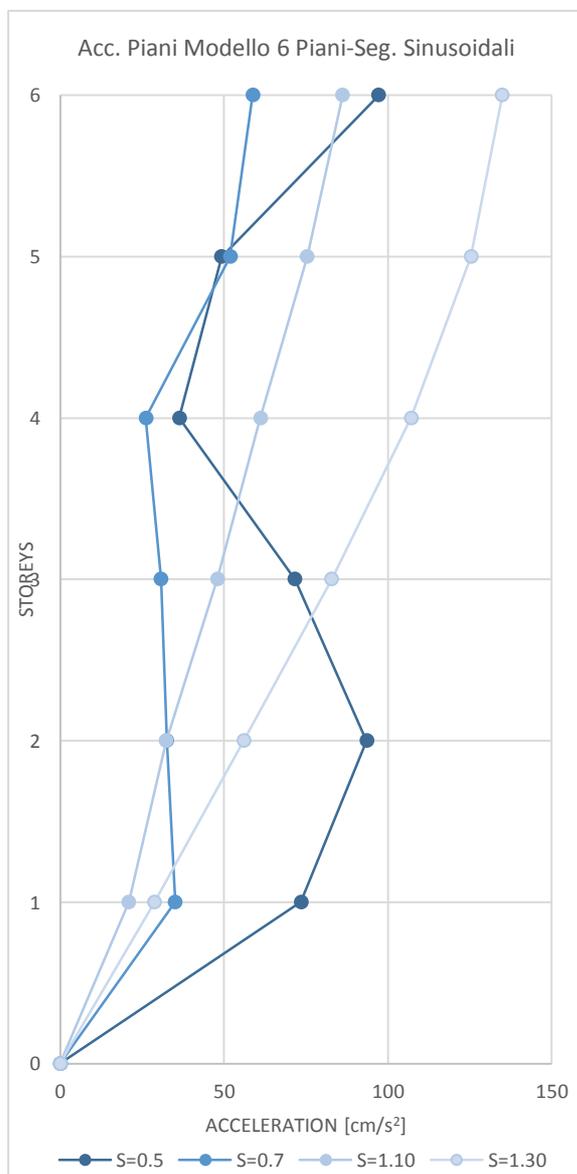
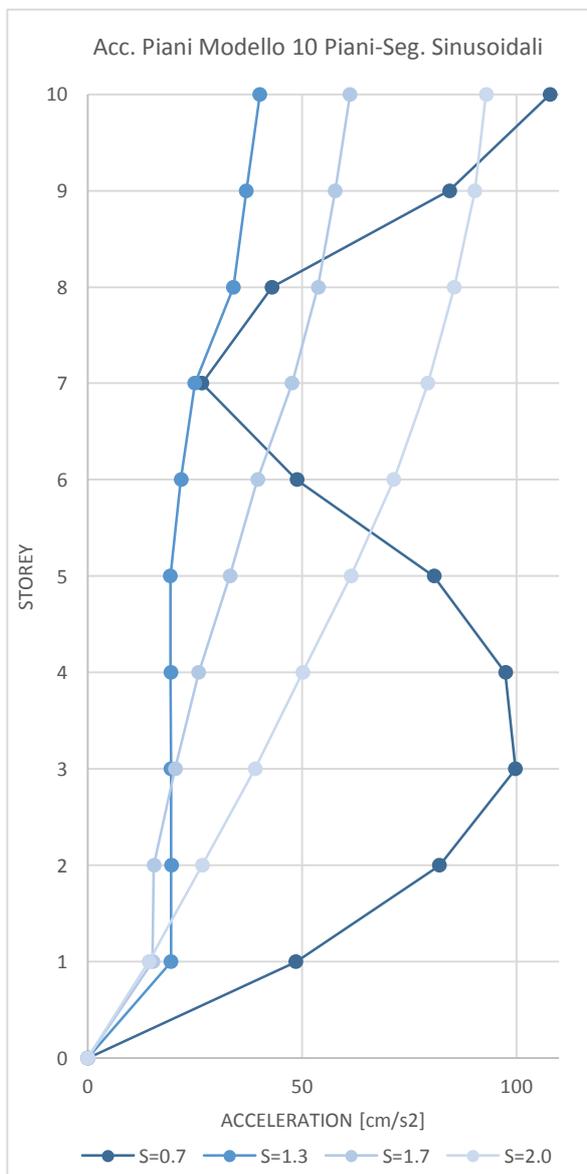


Figura 5-9 Andamento dell'accelerazione al variare dei piani per forzanti significative del modello 10 piani

Figura 5-10 Andamento dell'accelerazione al variare dei piani per forzanti significative del modello 6 piani

5.2.1.2 Forzante con Periodo $P=1.40$ sec

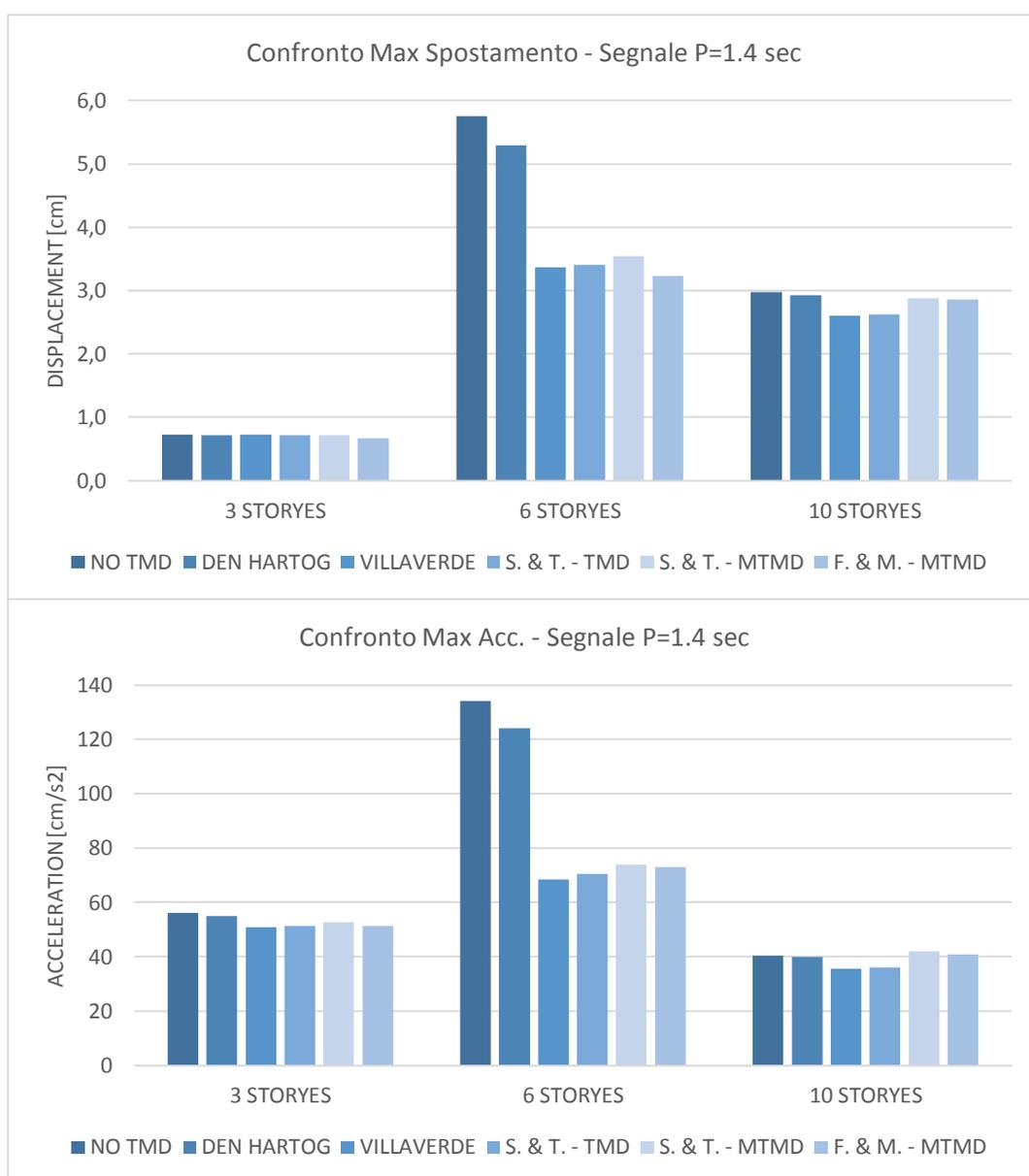


Figura 5-11 Confronto tre strutture per il segnale sinusoidale di periodo $P=1.40$ sec: a) spostamento; b) accelerazione;

I due grafici riportano l'andamento degli spostamenti massimi ottenuti nelle tre strutture, eccitate mediante il segnale con periodo di riferimento coincidente con il primo modo di vibrare della struttura a sei piani, pari a $P=1.40$ secondi.

I picchi d'intensità maggiori sono nel secondo modello: dal caso non smorzato si vede una riduzione lieve degli spostamenti per Den Hartog, dell'ordine del 7-8%, mentre per gli altri metodi si ha un considerevole vantaggio, dal 20 al 40%.

Anche in accelerazione, Den Hartog risulta essere quello meno performante, inoltre, in generale, i benefici sono ridotti.

Si riportano di seguito gli andamenti di spostamento e accelerazioni per la forzante con periodo 1.40 secondi, si nota un sviluppo lineare lungo tutti i senza punto di discontinuità.

Studio della Risposta Sismica di Strutture con Smorzatori a Massa Accordata

Tabella 5-4 Dati confronto tre strutture per segnale sinusoidale di periodo P=1.40 sec

STRUT.	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	0,72	56,05	0,72	55,07	0,72	50,97	0,72	51,37	0,72	52,69	0,67	51,40
6 PIANI	5,75	134,17	5,30	123,96	3,37	68,43	3,41	70,56	3,54	73,99	3,23	72,96
10 PIANI	2,98	40,30	2,93	40,00	2,60	35,61	2,63	36,13	2,88	42,09	2,86	40,87

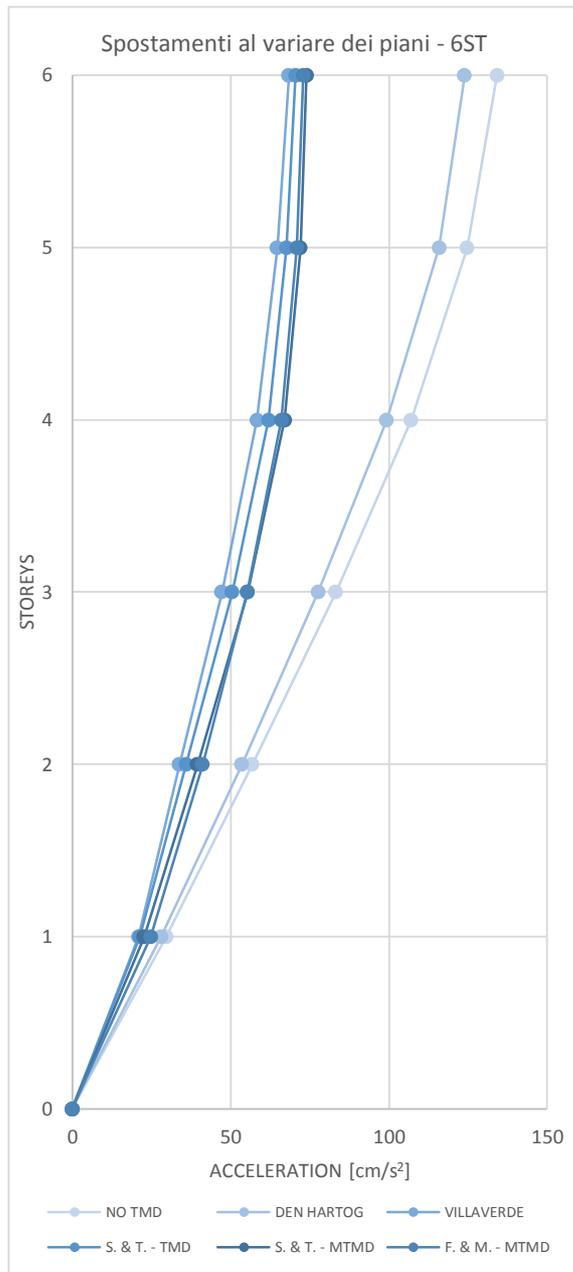
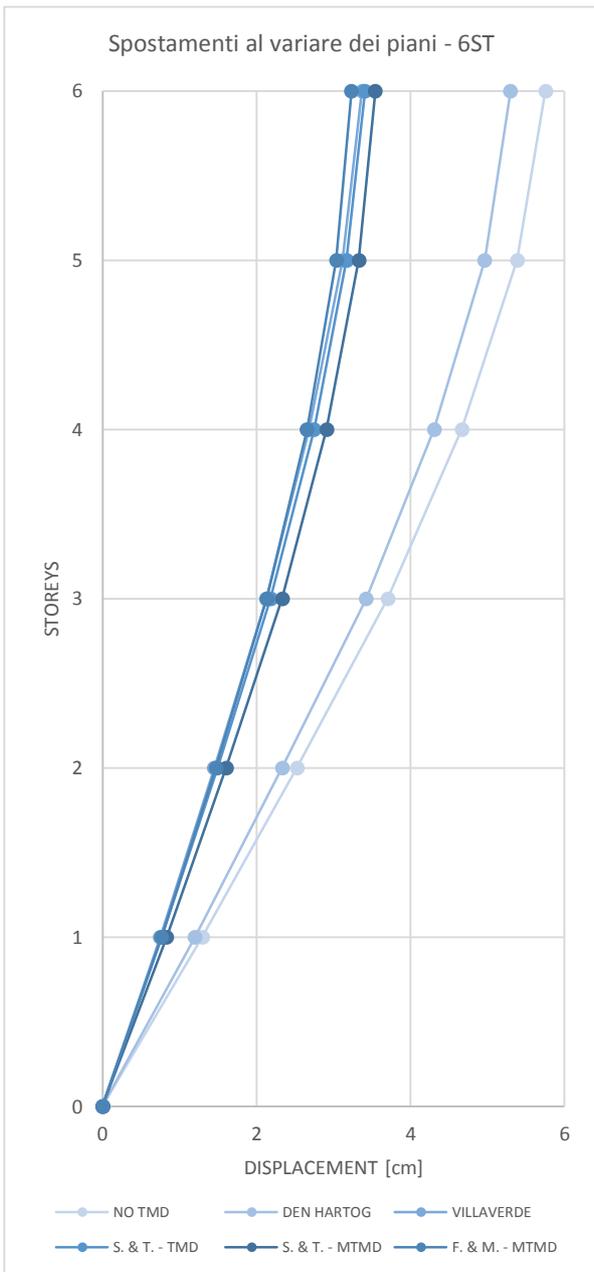


Figura 5-13 Spostamento al variare del piano del modello 6 piani per la forzante con periodo P=1.40 sec

Figura 5-12 Accelerazione al variare del piano del modello 6 piani per la forzante con periodo P=1.40 sec

Tabella 5-5 Dati confronto TMD per segnale sinusoidale di periodo P=1.40 sec

TMD	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	-	-	1,45	210,79	1,35	72,29	1,40	136,37	1,55	145,5	1,78	140,29
6 PIANI	-	-	2,12	57,71	6,02	122,24	6,14	55,67	10,61	57,31	10,46	56,77
10 PIANI	-	-	1,56	105,90	3,01	36,53	2,92	92,39	5,35	100,4	3,80	97,36

Per quanto riguarda i dati del TMD, si evidenzia, come per il caso precedente, che i metodi con MTMD fanno lavorare maggiormente gli smorzatori rispetto al modello con uno solo.

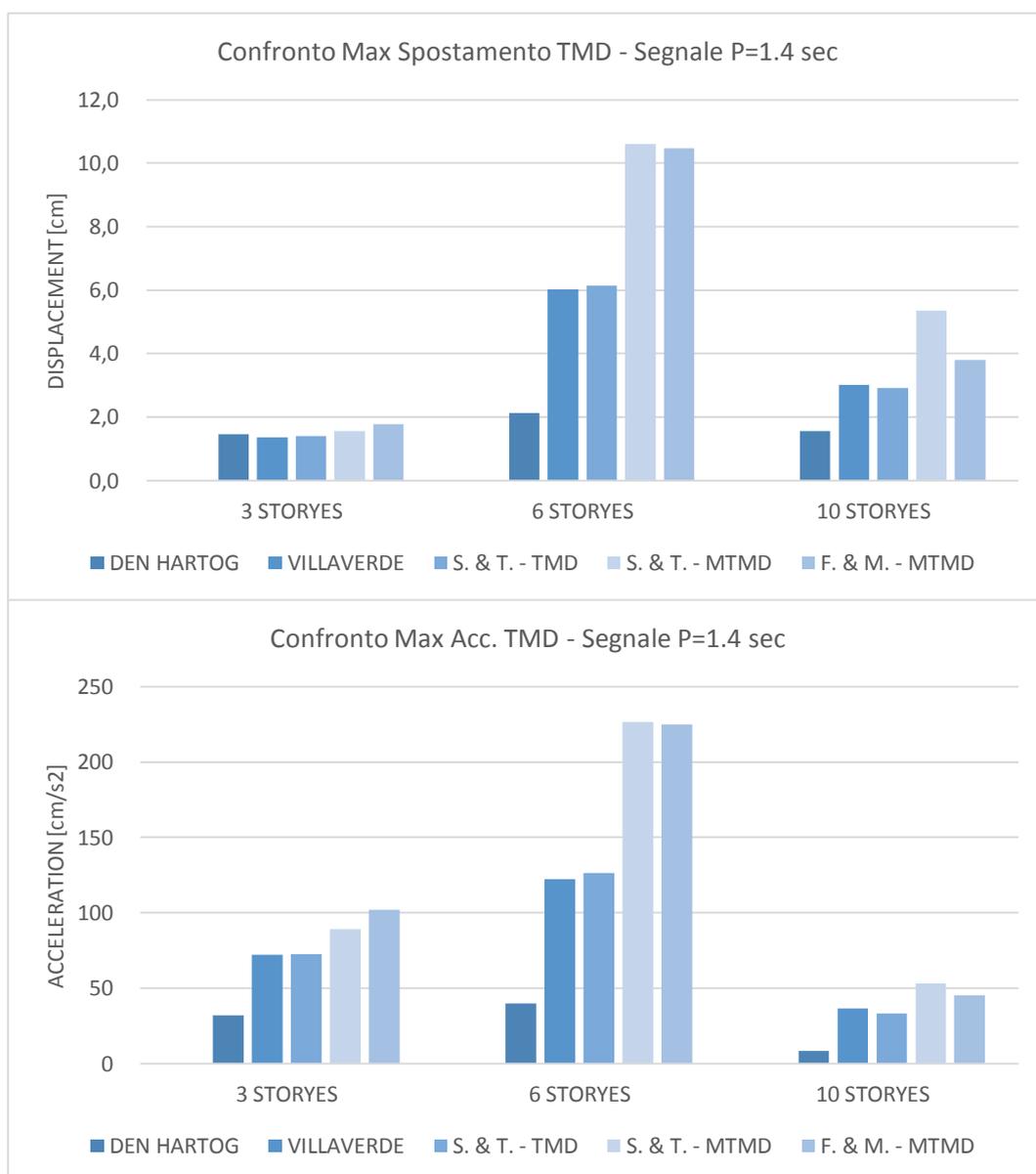


Figura 5-14 Confronto TMD per il segnale sinusoidale di periodo P=1.40 sec: a) spostamento; b) accelerazione;

5.2.1.3 Forzante con Periodo $P=2.00$ sec

I due grafici riportano l'andamento degli spostamenti massimi ottenuti nelle tre strutture,

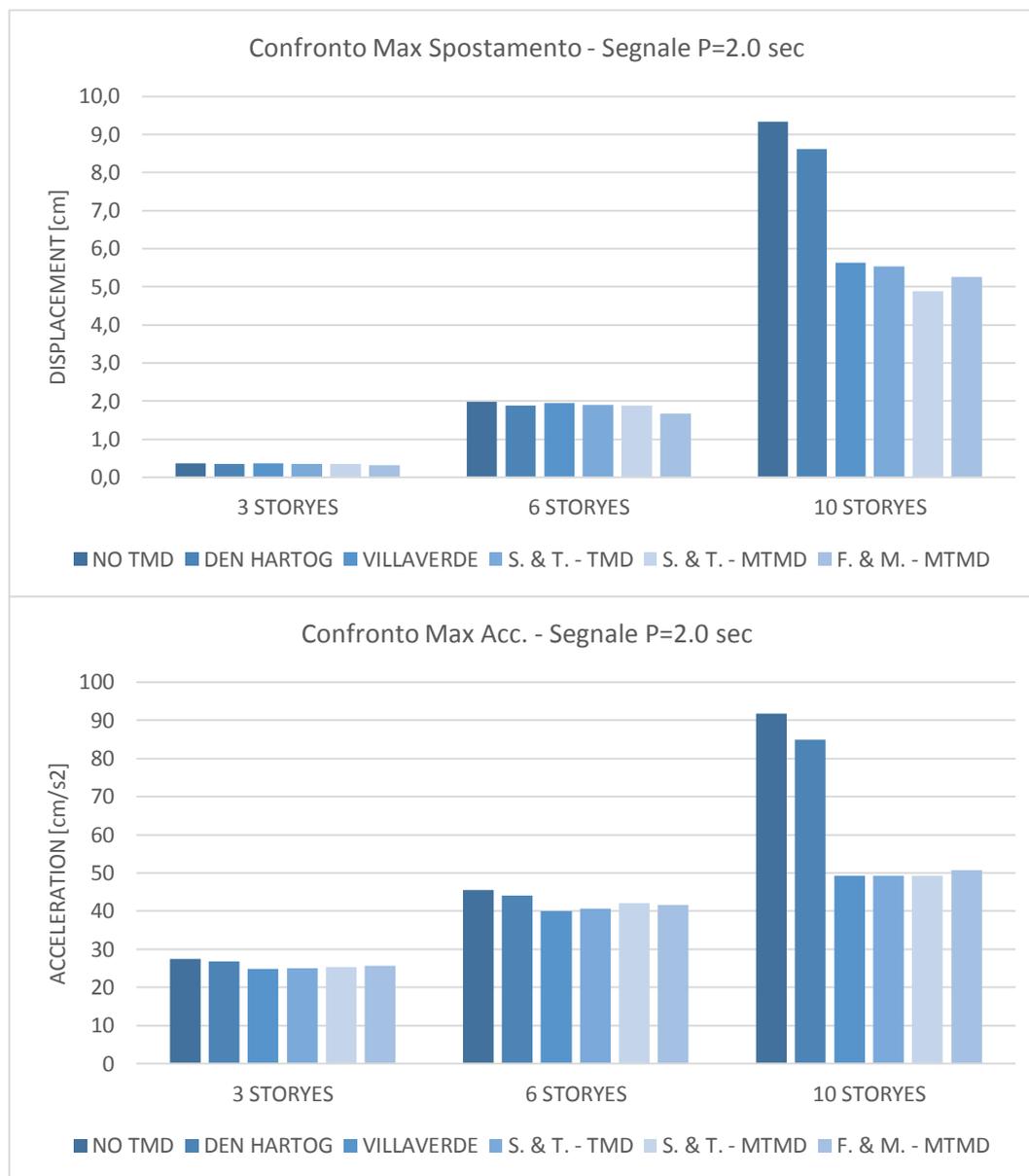


Figura 5-15 Confronto tre strutture per il segnale sinusoidale di periodo $P=2.00$ sec: a) spostamento; b) accelerazione;

eccitate mediante il segnale con periodo di riferimento coincidente con il primo modo di vibrare della struttura a dieci piani, pari a $P=2.00$ secondi.

I picchi d'intensità maggiori sono nel terzo modello: dal caso non smorzato si vede una riduzione lieve degli spostamenti per Den Hartog, dell'ordine del 7-8%, mentre per gli altri metodi si ha un considerevole vantaggio, dal 20 al 40-45%. Anche in accelerazione, Den Hartog risulta essere quello meno performante, inoltre, in generale, i benefici sono ridotti.

Tabella 5-6 Dati confronto tre strutture per segnale sinusoidale di periodo P=2.00 sec

STRUT.	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	0,36	27,51	0,35	26,76	0,36	24,90	0,36	25,05	0,36	25,38	0,32	25,58
6 PIANI	1,98	45,53	1,89	43,97	1,96	39,91	1,90	40,68	1,88	42,15	1,67	41,63
10 PIANI	9,33	91,83	8,62	84,86	5,63	49,25	5,54	49,24	4,88	49,21	5,26	50,80

Per quanto riguarda i dati del TMD, si evidenzia, come per il caso precedente, che i metodi con MTMD fanno lavorare maggiormente gli smorzatori rispetto al modello con uno solo.

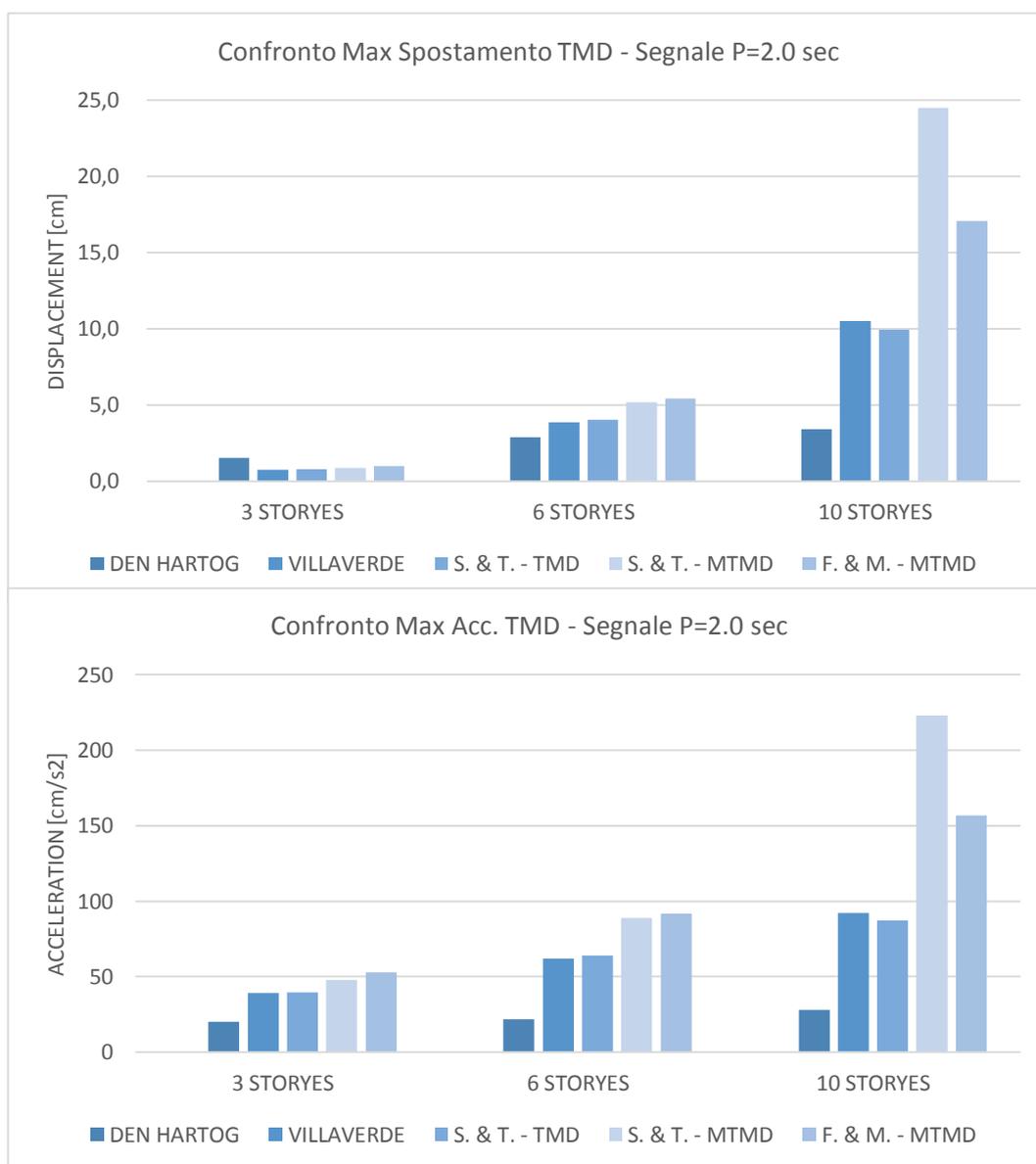


Figura 5-16 Confronto TMD per il segnale sinusoidale di periodo P=2.00 sec: a) spostamento; b) accelerazione;

Studio della Risposta Sismica di Strutture con Smorzatori a Massa Accordata

Tabella 5-7 Dati confronto TMD per segnale sinusoidale di periodo P=2.00 sec

STRUT.	NO TMD		D.H.-TMD		VILLA-TMD		S&T-TMD		S&T-MTMD		F&M-MTMD	
	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]	Dx [cm]	Ax [cm/s ²]
3 PIANI	-	-	1,52	20,33	0,75	39,20	0,79	39,69	0,88	47,81	0,98	52,91
6 PIANI	-	-	2,87	21,85	3,84	61,85	4,03	63,89	5,18	88,77	5,41	91,63
10 PIANI	-	-	3,41	27,92	10,50	92,18	9,91	87,28	24,48	222,91	17,05	156,83

Si riportano di seguito gli andamenti di spostamento e accelerazioni per la forzante con periodo 2.00 secondi, si nota un sviluppo lineare lungo tutti i senza punto di discontinuità.

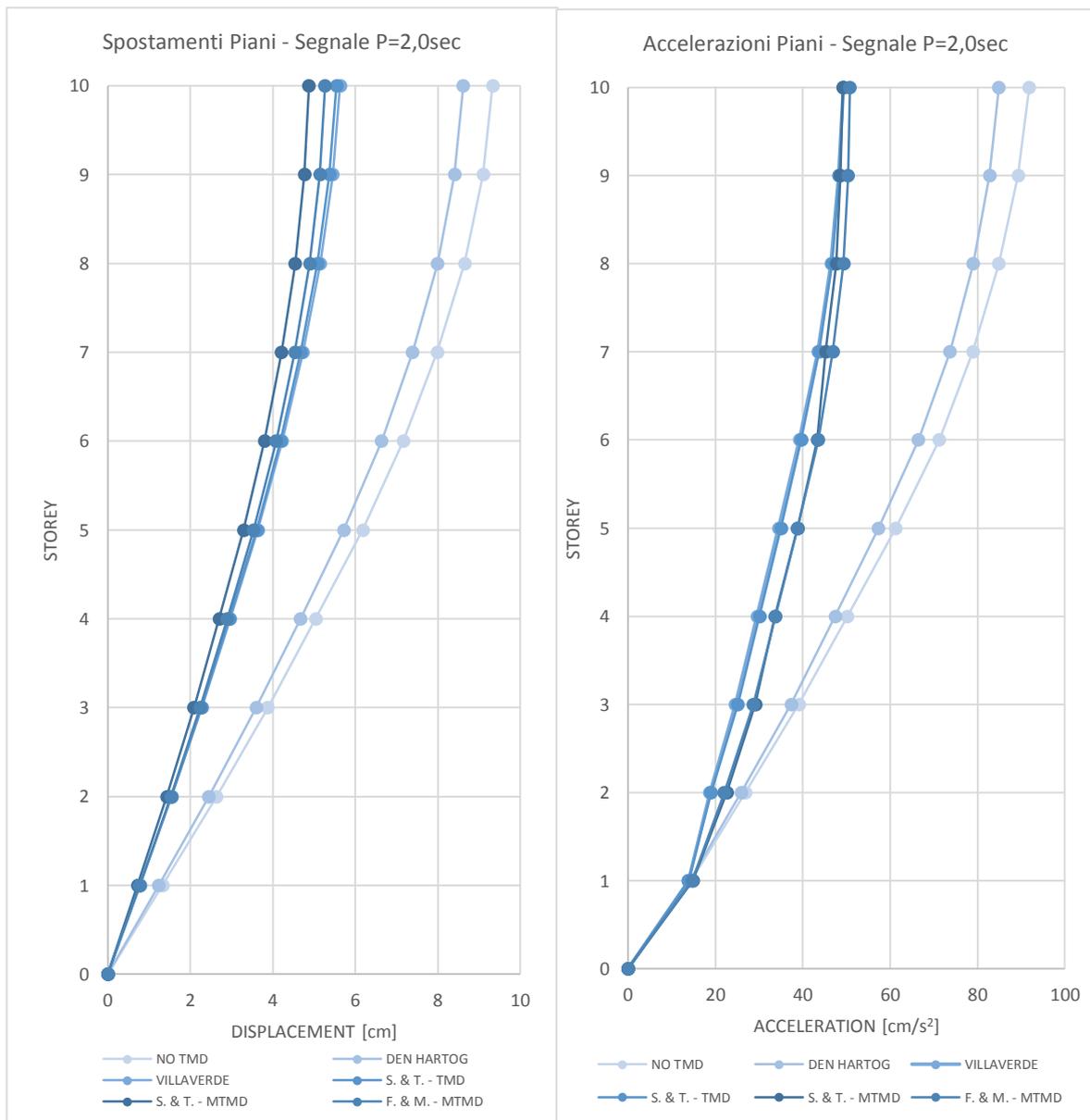


Figura 5-18 Spostamento dei metodi al variare del piano del modello 10 piani per la forzante con periodo P=2.00 sec

Figura 5-17 Accelerazione dei metodi al variare del piano del modello 10 piani per la forzante con periodo P=2.00 sec

5.2.2 Forzanti con periodo intervallato

Si inizia, allo stesso modo visto per i casi delle forzanti “settate” sui periodi fondamentali dei tre modelli, elencando in una tabella i valori delle ampiezze in funzione del passo temporale, nell’intervallo di tempo che va da 0.5 a 4.0 secondi, con un $\Delta t = 0.5 \text{ sec}$.

Tabella 5-8 Dati ampiezze per segnali sinusoidali

Tabella Ampiezze per le forzanti sinusoidali									
PERIODO	0,50	0,70	0,90	1,10	1,30	1,50	1,70	2,00	2,20
AMPIEZZA	0,026	0,043	0,057	0,067	0,084	0,093	0,108	0,135	0,132

In questo gruppo di analisi il confronto verrà fatto tra i modelli, al variare del periodo per ogni singola struttura.

5.2.2.1 Modello 3 Piani

I due grafici riportano l’andamento degli spostamenti e delle accelerazioni massime, ottenute per la struttura a tre piani, eccitata mediante il range di segnali sinusoidali, intervallati di 0.20 secondi. I picchi d’intensità maggiori sono in corrispondenza del periodo pari a 0.70 secondi. Osservando gli spostamenti, i valori decrescono con andamento parabolico, fino a 2.20 sec. Per ogni intervallo, dal caso non smorzato si vede una riduzione lieve degli spostamenti per Den Hartog, dell’ordine del 7-8%, mentre per gli altri metodi si ha un considerevole vantaggio, dal 20 al 40-45%. Anche in accelerazione, Den Hartog risulta essere quello meno performante, inoltre, in generale, i benefici sono ridotti.

Tabella 5-9 Dati strutture per confronto metodi al variare sinusoidale

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	0,93	2,85	1,55	0,94	0,74	0,58	0,47	0,37	0,26
D.H. TMD	0,91	2,62	1,48	0,90	0,73	0,57	0,47	0,35	0,27
VILLA TMD	0,82	1,72	1,44	0,93	0,74	0,58	0,48	0,37	0,27
S&T TMD	0,83	1,73	1,40	0,91	0,73	0,58	0,47	0,36	0,27
S&T MTMD	0,86	1,82	1,41	0,90	0,73	0,58	0,47	0,36	0,27
F&M MTMD	0,88	1,65	1,22	0,79	0,68	0,53	0,43	0,33	0,26

Osservando i grafici, si evidenzia andamento con il picco in corrispondenza del periodo di vibrazione fondamentale, soprattutto si nota che i metodi con smorzatori, allontanandosi dal valore massimo, perdono la loro efficacia.

Il metodo più performante è quello di Villaverde con lo smorzatore singolo.

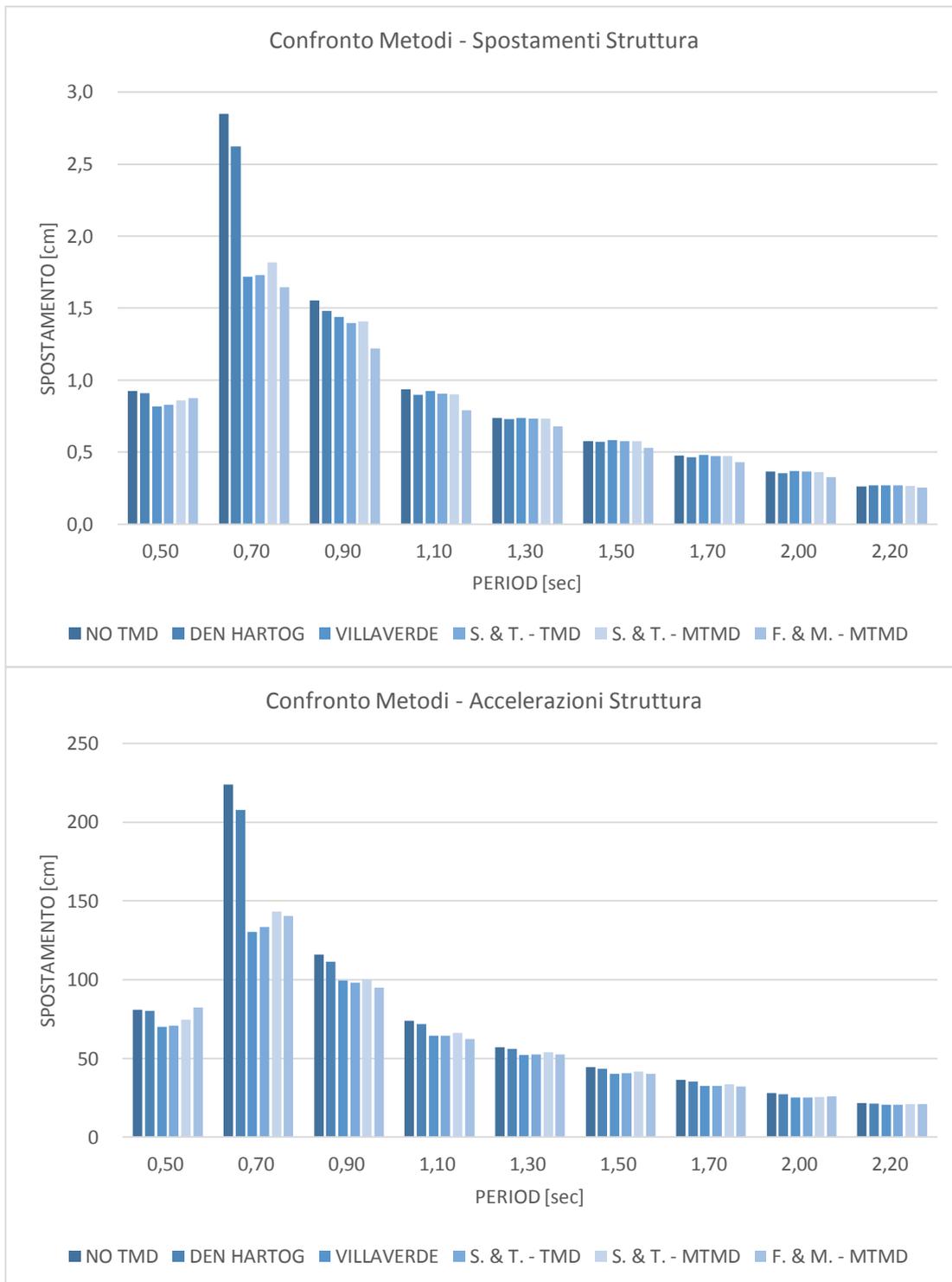


Figura 5-19 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Tabella 5-10 Confronto dati struttura metodi per segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	80,97	224,00	115,8	74,02	57,18	44,36	36,25	27,94	21,57
D.H. TMD	80,15	207,68	111,4	71,65	56,19	43,50	35,43	27,18	21,39
VILLA TMD	70,01	130,31	99,56	64,61	52,04	40,24	32,42	25,14	20,64
S&T TMD	70,87	133,55	98,04	64,34	52,44	40,50	32,67	25,29	20,76
S&T MTMD	74,64	143,20	100,13	66,26	53,78	41,50	33,61	25,62	21,03
F&M MTMD	82,28	140,37	94,84	62,40	52,51	40,24	32,31	25,82	21,12

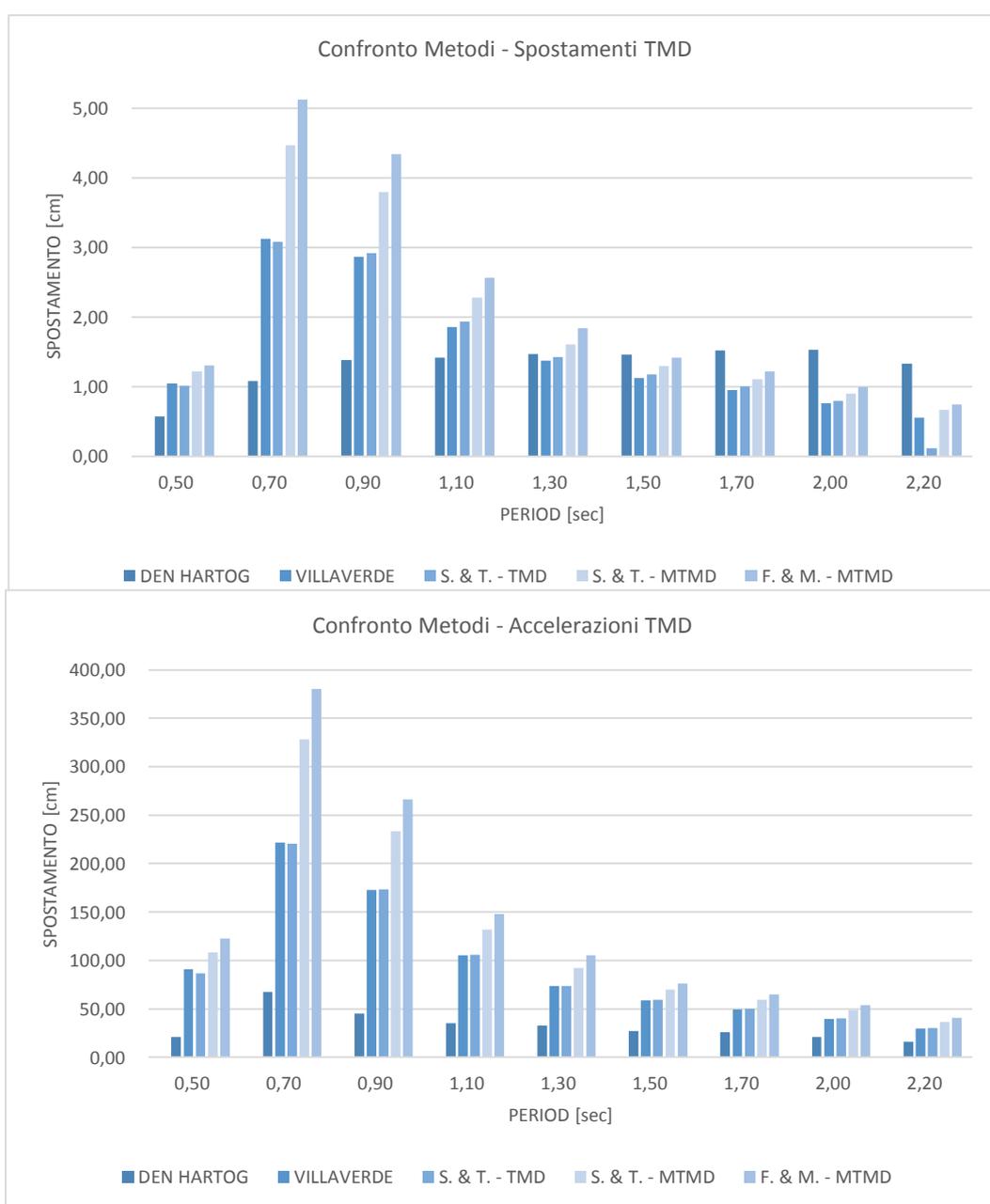


Figura 5-20 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Tabella 5-11 Dati confronto dello spostamento per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,57	1,08	1,38	1,41	1,47	1,46	1,52	1,53	1,33
VILLA TMD	1,05	3,13	2,86	1,86	1,37	1,12	0,95	0,76	0,55
S&T TMD	1,01	3,08	2,92	1,94	1,43	1,17	1,00	0,80	0,12
S&T MTMD	1,31	5,13	4,34	2,57	1,84	1,42	1,22	0,99	0,74
F&M MTMD	1,22	4,47	3,80	2,28	1,61	1,30	1,11	0,90	0,66

Tabella 5-12 Dati confronto dell'accelerazione per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	21,06	67,10	45,25	35,43	32,59	26,80	25,98	20,73	16,00
VILLA TMD	91,00	221,85	172,80	104,91	73,53	58,90	49,51	39,78	29,50
S&T TMD	86,76	220,22	173,06	105,90	73,74	59,28	49,97	40,28	29,94
S&T MTMD	108,14	328,41	233,37	131,84	92,20	69,66	59,28	48,49	36,46
F&M MTMD	122,72	379,94	265,98	147,90	105,01	76,08	65,08	53,64	40,64

Un dato notevole, che è più evidente negli altri due modelli per via dell'intensità, è quello che il TMD di Den Hartog, quando esce dalla frequenza con cui è configurato, non riduce il suo lavoro, ma continua a muoversi. Tuttavia, questo comportamento non genera, apparentemente risolti negativi, a fine di protezione sismica, nei confronti della struttura principale.

5.2.2.2 Modello 6 Piani

In questo modello, con periodo $P=1.40$ sec, si può osservare, per quanto riguarda le accelerazioni, che si evidenzia un ulteriore picco del parametro, oltre a quello del periodo proprio fondamentale, ma anche in corrispondenza della forzante con periodo pari al secondo modo di vibrare.

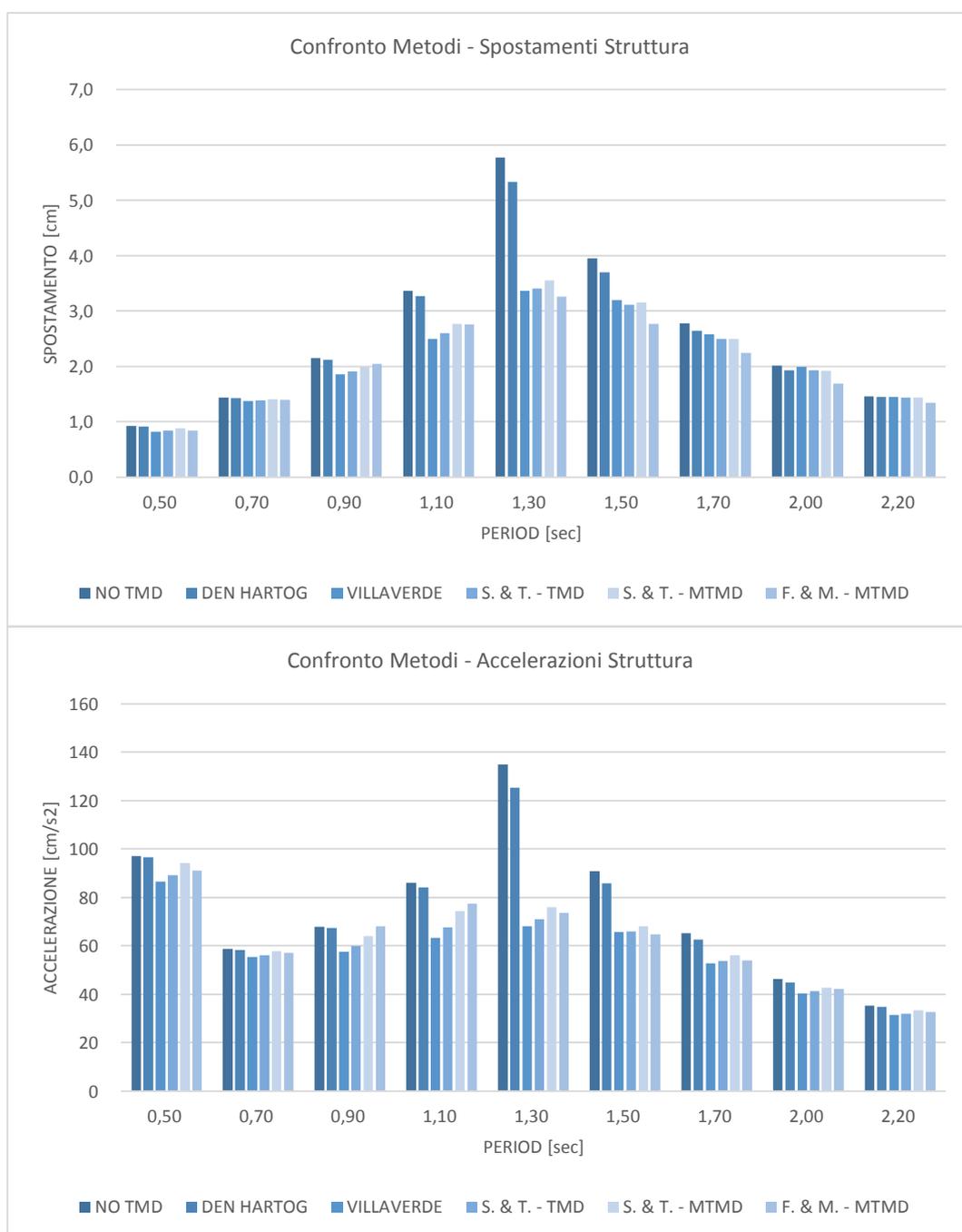


Figura 5-21 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Tabella 5-13 Dati confronto degli spostamenti per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	0,93	1,43	2,15	3,36	5,77	3,95	2,78	2,01	1,46
D.H. TMD	0,91	1,43	2,12	3,27	5,33	3,70	2,64	1,92	1,45
VILLA TMD	0,82	1,37	1,86	2,50	3,36	3,20	2,58	1,99	1,45
S&T TMD	0,84	1,39	1,91	2,60	3,41	3,11	2,49	1,93	1,44
S&T MTMD	0,88	1,41	2,00	2,76	3,55	3,16	2,50	1,92	1,43
F&M MTMD	0,84	1,39	2,04	2,76	3,26	2,76	2,25	1,69	1,34

Tabella 5-14 Dati confronto delle accelerazioni per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	97,17	58,75	67,94	86,12	134,92	90,91	65,30	46,39	35,33
D.H. TMD	96,59	58,33	67,38	84,19	125,24	85,82	62,70	44,80	34,73
VILLA TMD	86,49	55,28	57,47	63,37	68,07	65,58	52,74	40,37	31,36
S&T TMD	89,09	56,21	59,84	67,61	70,89	65,82	53,68	41,15	32,03
S&T MTMD	94,13	57,86	63,98	74,20	75,94	68,15	56,04	42,63	33,28
F&M MTMD	91,09	57,14	68,02	77,39	73,56	64,65	53,90	42,13	32,59

Il comportamento dello smorzatore si evidenzia maggiormente nelle forzanti vicine a quella con periodo pari al primo della struttura e si attenua gradualmente, allontanandosi da questo. I metodi più performanti sono quelli di Villaverde e di Sadek e Taylor, mentre minore è il vantaggio espresso dagli altri.

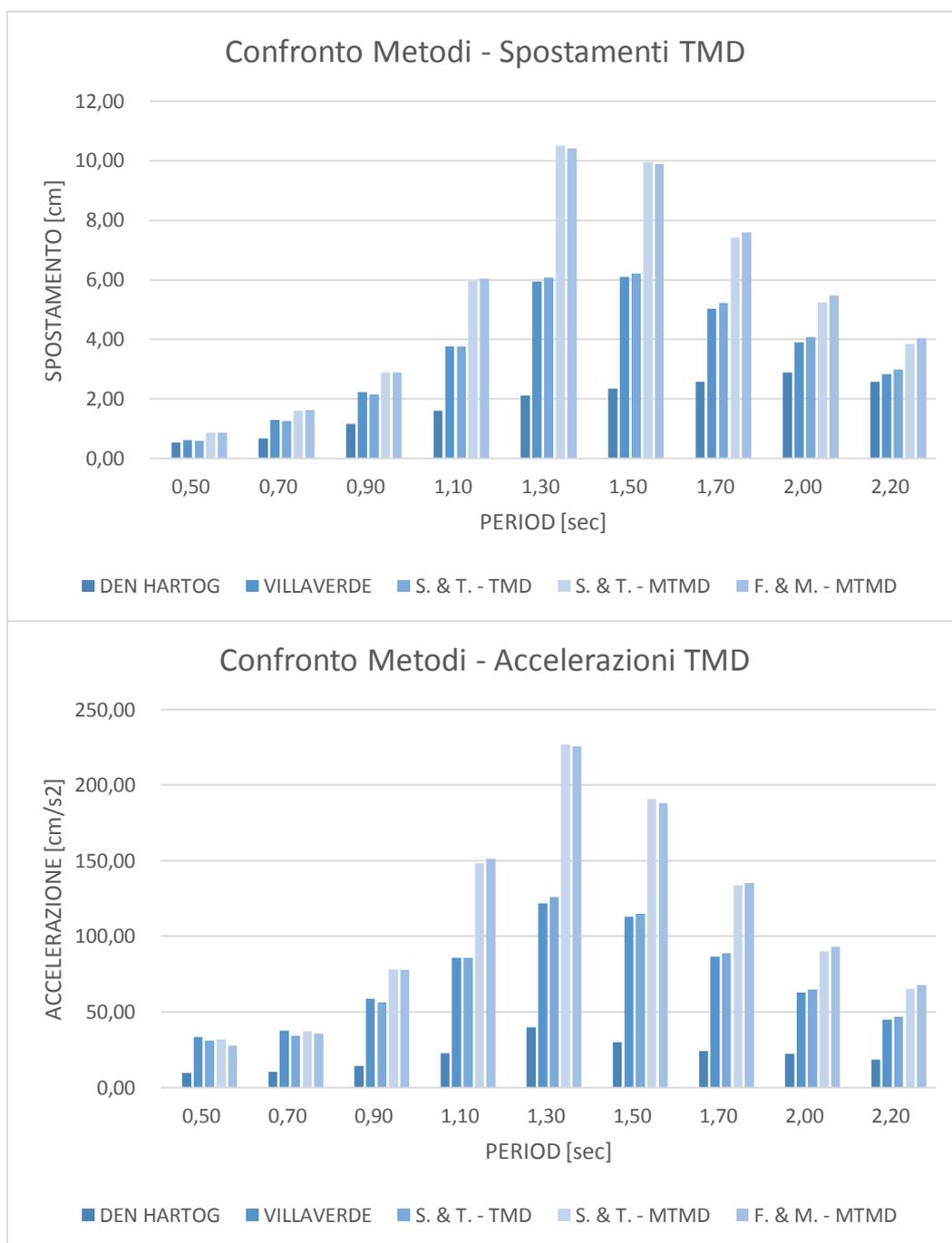


Figura 5-22 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Per quanto riguarda il TMD, come già visto, seguono l'andamento mostrato nel modello a 3 piani, i metodi MTMD fanno lavorare maggiormente gli smorzatori, ma ottengono prestazioni inferiori ai metodi con smorzatore singolo.

Tabella 5-15 Dati confronto dello spostamento per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,53	0,6761	1,16	1,61	2,12	2,35	2,59	2,89	2,57
VILLA TMD	0,61	1,2958	2,23	3,77	5,95	6,09	5,03	3,90	2,83
S&T TMD	0,59	1,2501	2,15	3,76	6,08	6,21	5,22	4,09	2,98
S&T MTMD	0,87	1,6053	2,89	5,97	10,51	9,94	7,43	5,25	3,84
F&M MTMD	0,86	1,6263	2,88	6,04	10,41	9,89	7,60	5,48	4,03

Tabella 5-16 Dati confronto dell'accelerazione per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	9,56	10,24	14,02	22,54	39,79	29,96	24,26	22,05	18,41
VILLA TMD	33,35	37,40	58,77	85,92	121,76	112,84	86,46	62,82	44,98
S&T TMD	30,97	34,22	56,29	85,92	125,90	114,75	88,74	64,84	46,72
S&T MTMD	31,91	37,33	78,31	148,21	226,61	190,86	133,81	90,09	65,23
F&M MTMD	27,72	35,83	77,90	151,32	225,77	187,97	135,29	92,96	67,66

5.2.2.3 Modello 10 Piani

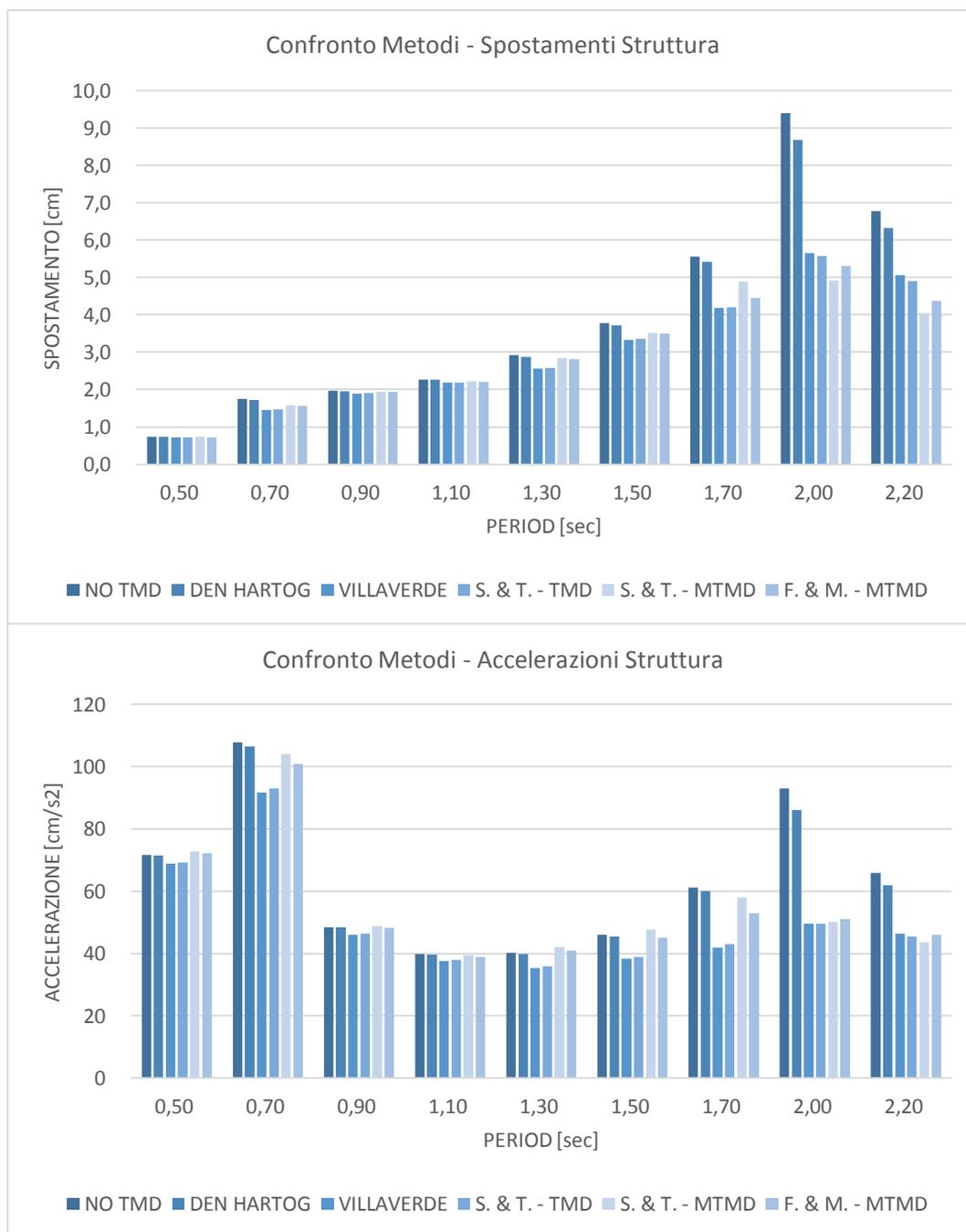


Figura 5-23 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Per il modello a 10 piani i risultati, nella figura 5-23, iniziano ad evidenziare un nuovo dato notevole, le configurazioni con smorzatori ad ogni piano iniziano ad essere i più performanti tra tutti i casi configurati. In particolare, il metodo di Sadek e Taylor mostra il assoluto il miglior risultato per la forzante, che sollecita il modello nel suo periodo di vibrazione fondamentale, come si vede

nella figura 5-23/a. Questo trend positivo si assottiglia allontanandosi dal periodo fondamentale della struttura.

Tabella 5-17 Dati confronto dello spostamento per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	0,74	1,75	1,96	2,27	2,92	3,78	5,55	9,40	6,78
D.H. TMD	0,74	1,71	1,96	2,27	2,88	3,71	5,42	8,68	6,32
VILLA TMD	0,71	1,46	1,89	2,18	2,56	3,33	4,18	5,66	5,06
S&T TMD	0,72	1,47	1,90	2,19	2,58	3,35	4,20	5,57	4,90
S&T MTMD	0,73	1,57	1,94	2,21	2,84	3,51	4,89	4,92	4,04
F&M MTMD	0,73	1,56	1,94	2,21	2,82	3,50	4,45	5,31	4,37

Tabella 5-18 Dati confronto dell'accelerazione per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	71,71	107,89	48,48	39,86	40,14	45,96	61,15	92,93	65,93
D.H. TMD	71,54	106,47	48,50	39,61	39,87	45,46	60,00	86,02	61,86
VILLA TMD	68,94	91,73	46,09	37,69	35,40	38,40	41,92	49,51	46,42
S&T TMD	69,21	93,11	46,35	37,91	35,92	38,96	43,05	49,65	45,53
S&T MTMD	72,85	104,00	48,78	39,39	42,10	47,68	57,96	50,14	43,58
F&M MTMD	72,18	100,82	48,27	38,95	40,88	45,14	53,00	51,10	45,95

Anche in questo caso, si riscontra, come per il modello a 6 piani, un aumento d'intensità nel grafico delle accelerazioni della struttura, dove la forzante ha periodo pari al secondo modo di vibrare. Per questo modello si è riportato che la seconda forma di vibrazione ha periodo P=0.70 secondi, proprio dove, nel figura 5-23/b.

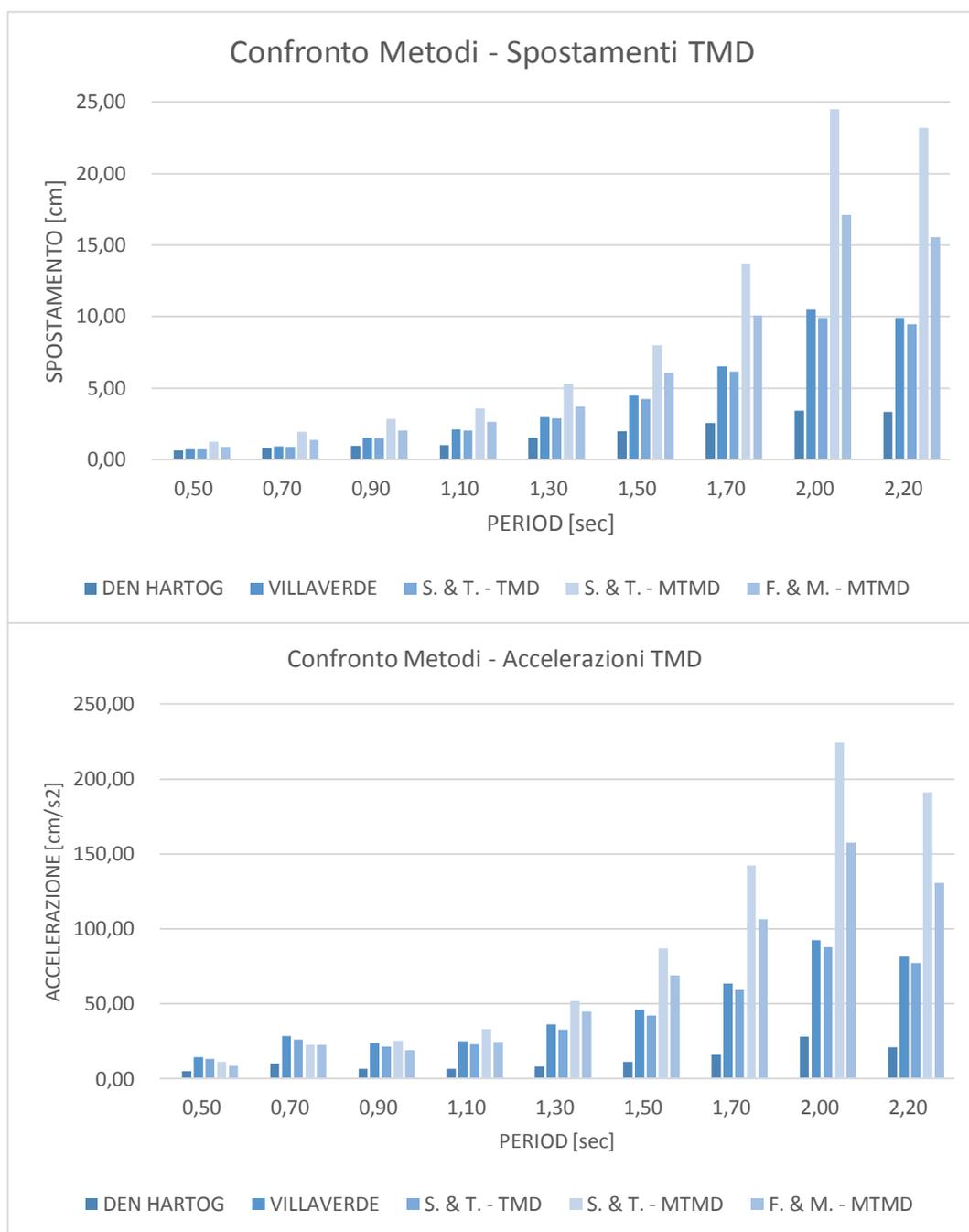


Figura 5-24 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Come per modelli precedenti, anche in questo caso, i metodi MTMD, anche se sono i più performanti a livello globale nel comportamento della struttura, sviluppano i maggiori spostamenti e accelerazioni per quello che riguarda gli smorzatori, soprattutto in corrispondenza dei periodi vicini al periodo proprio fondamentale della struttura primaria, come si può vedere nella figura 5-24.

Tabella 5-19 Dati confronto dello spostamento per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Dx [cm]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,65	0,8039	0,98	1,03	1,55	2,01	2,56	3,42	3,35
VILLA TMD	0,74	0,9409	1,55	2,11	2,99	4,47	6,54	10,50	9,93
S&T TMD	0,72	0,8840	1,51	2,02	2,89	4,23	6,16	9,92	9,46
S&T MTMD	1,26	1,9714	2,83	3,60	5,28	7,99	13,72	24,50	23,20
F&M MTMD	0,89	1,3613	2,05	2,63	3,71	6,06	10,06	17,09	15,54

Tabella 5-20 Dati confronto dell'accelerazione per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	0.70	0.90	1.10	1.30	1.50	1.70	2.00	2.20
METODO	Ax [cm/s ²]								
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	5,07	10,09	6,52	6,63	8,30	11,26	15,93	28,06	21,17
VILLA TMD	14,53	28,28	23,60	25,09	36,02	45,87	63,34	92,47	81,65
S&T TMD	13,27	25,92	21,36	22,86	32,73	42,18	59,25	87,55	77,15
S&T MTMD	11,34	22,62	25,29	33,07	51,97	87,02	142,30	224,06	190,93
F&M MTMD	8,52	22,38	19,12	24,67	44,64	69,02	106,44	157,72	130,74

Nella figura 5-25, si può vedere l'insieme generale dei casi, tutti metodi a confronto per ogni struttura, al variare del periodo: si evidenzia il passaggio da TMD a MTMD all'aumentare del numero di piani. Leggendo da sinistra verso destra, si può notare che le forme dei picchi, per la struttura a 3 piani, hanno forma a "V", dove nella punta inferiore si trova il caso smorzatore singolo; passando per il 6 piani con la "V" che si rimpicciolisce, c'è abbastanza equilibrio tra TMD e MTMD, finendo per la struttura a 10 piani in cui la punta della "V" si è spostata nel caso del MTMD.

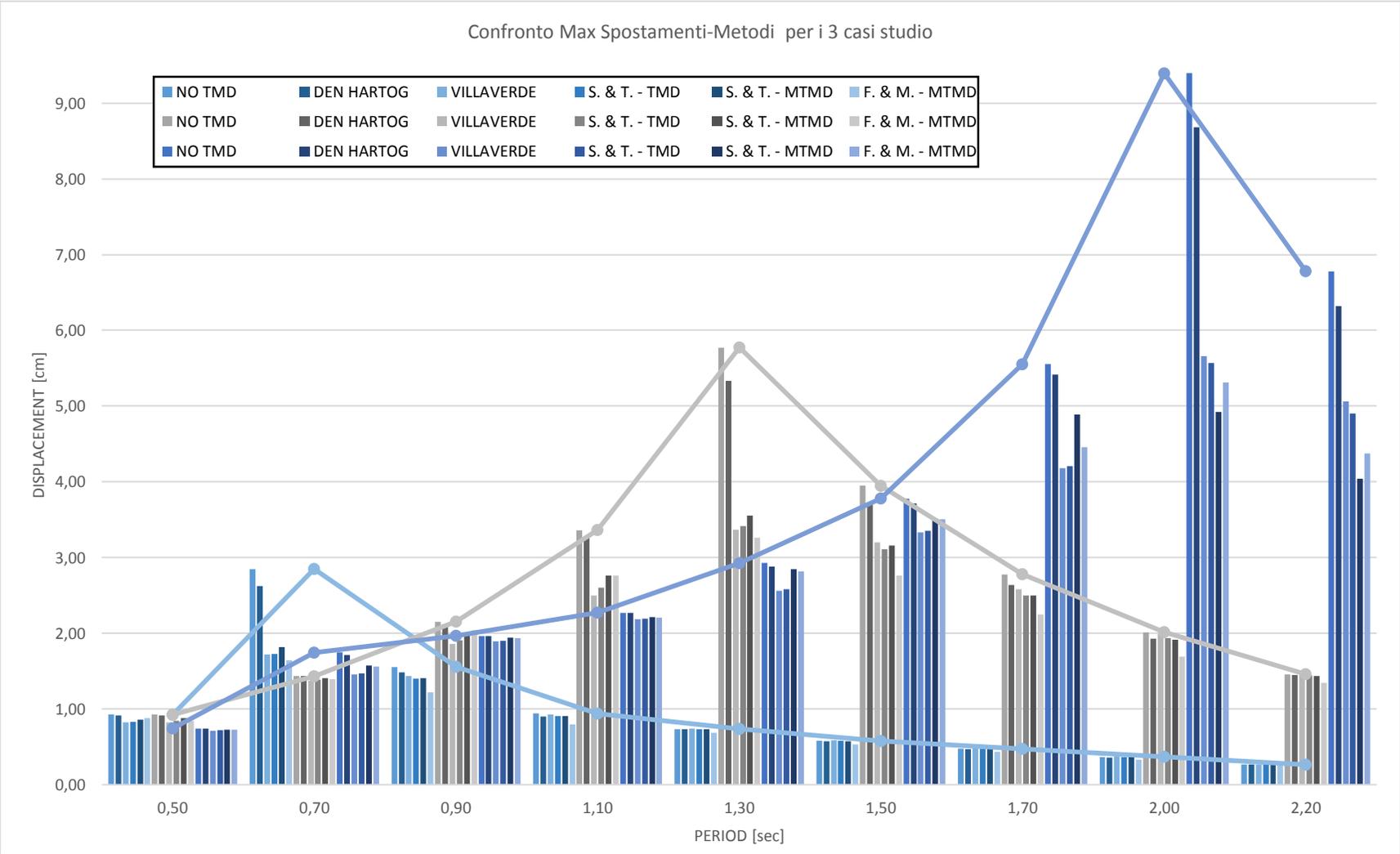


Figura 5-25 Schema riassuntivo che raggruppa tutti i metodi di ogni struttura al variare del periodo, per segnali sinusoidali

5.3 Studio della risposta sismica per accelerogrammi artificiali

Il gruppo di analisi che segue si basa su l'utilizzo di segnali artificiali, spettro compatibili con l'accelerogramma del sito di riferimento di Padova. Questi accelerogrammi sono stati creati, mediante il programma Simqke, vedi figura 5-26, della Suite del Prof. Gelfi: il programma genera accelerogrammi compatibili con assegnati spettri di risposta essendo interfacciato con il codice di calcolo SIMQKE-1 (SIMulation of earthQuAKE ground motions - <http://nisee.berkeley.edu/software/simqke1/>). I dati degli spettri di risposta e degli accelerogrammi possono essere esportati in files di testo o copiati in Excel.

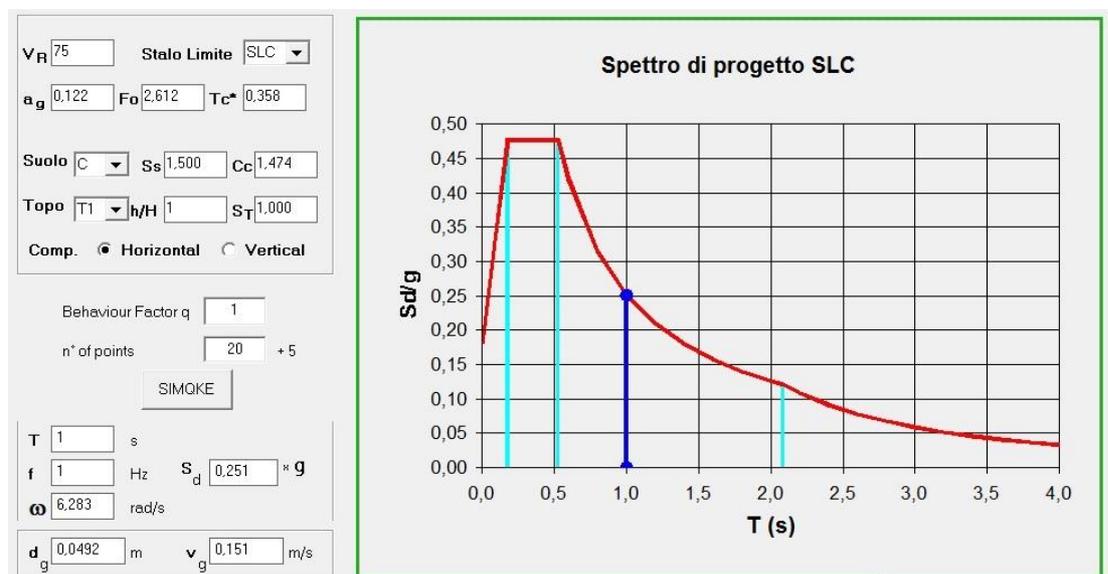


Figura 5-26 Schermata dello spettro in accelerazione del programma Simqke

Il programma calcola automaticamente gli spettri di risposta secondo le indicazioni delle Norme Tecniche per le Costruzioni (D.M. 14-1-2008), nel seguito abbreviate in NTC, e dell'Ordinanza del Presidente del Consiglio dei Ministri n° 3274 (OPCM 3274), nel seguito abbreviata in OPCM.

Il primo punto che si evidenzia guardando l'andamento grafico degli accelerogrammi artificiali è l'andamento generale, paragonabile a quello sinusoidale, che molto probabilmente è la causa della forma a "campagna", tipica del seno, nello spettro di risposta per gli spostamenti. Ciò, chiaramente, fa sì che i segnali con picchi nel range di periodo più grande non vadano a coprire quelli con il medesimo più piccolo.

Il confronto, come per i segnali sinusoidali, verrà fatto al variare del periodo del

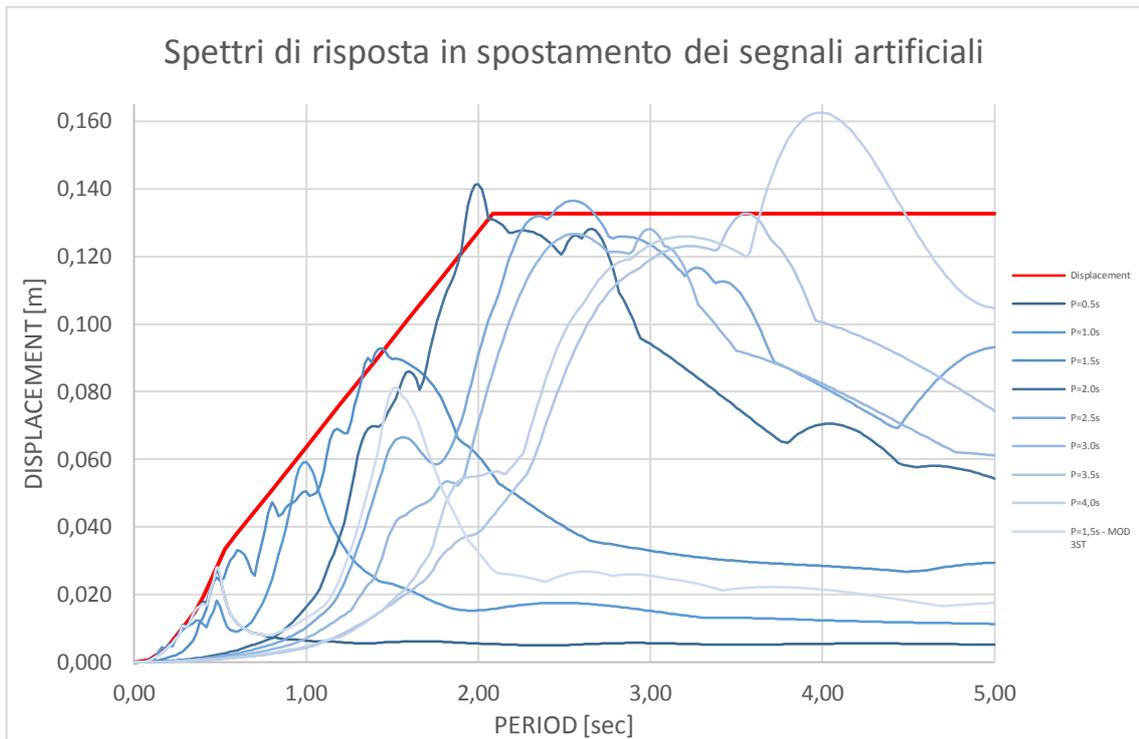


Figura 5-27 Spettri di risposta in spostamento per i segnali artificiali

segnale forzante, per ogni struttura. Questo, allo scopo di ottenere una lettura chiara del comportamento del TMD singolo e della struttura globale.

Nella figura 5-27, sono riportati gli spettri di risposta in spostamento di tutti e otto i segnali artificiali, ottenuti con Simqke, che hanno un periodo che dà va da $P=0.50$ a $P=4.00$ secondi. Viene riportato anche lo spettro di riferimento del sito di Padova, ottenuto mediante formula, presente nella normativa NTC-08 [13]. Come si può vedere tutti i picchi sono conformi all'andamento dello spettro rosso, tranne per il segnale con periodo $P=4.00$; si ipotizza che, visto il lungo plateau nello spettro in spostamento, il programma non riesca in modo sempre corretto a generare accelerogrammi spettro-compatibili, per la presenza di maggiori picchi in accelerazione in quella zona del periodo.

5.3.1.1 Modello 3 Piani

Il primo modello riprende il trend già osservato per l'analisi con segnali sinusoidali: i metodi di Villaverde e di Sadek e Taylor svolgono un buon lavoro sia in termini comportamento generale della struttura, sia per quello che riguarda lo smorzatore, figura 5-28.

Di seguito sono riportate le tabelle con i valori massimi di ogni modelli al variare della forzante.

Tabella 5-21 Dati confronto dello spostamento per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	1,23	1,82	1,22	0,68	0,49	0,35	0,24	0,27
D.H. TMD	1,22	1,77	1,24	0,71	0,52	0,39	0,26	0,30
VILLA TMD	1,20	2,26	1,19	0,74	0,54	0,39	0,25	0,29
S&T TMD	1,21	2,20	1,19	0,74	0,54	0,39	0,25	0,29
S&T MTMD	1,22	2,14	1,20	0,71	0,52	0,37	0,24	0,28
F&M MTMD	1,28	2,01	1,25	0,68	0,49	0,35	0,23	0,26

Tabella 5-22 Dati confronto dell'accelerazione per i metodi al variare dei segnali sinusoidali

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	272,64	289,72	269,43	45,93	33,20	23,69	15,64	18,18
D.H. TMD	264,08	287,50	261,42	46,17	33,53	23,74	15,73	18,16
VILLA TMD	237,17	312,96	235,59	45,80	33,38	23,94	15,37	17,59
S&T TMD	240,40	310,54	237,12	46,03	33,41	23,87	15,40	17,56
S&T MTMD	248,19	308,98	236,41	45,53	33,11	23,72	15,35	17,47
F&M MTMD	246,02	295,71	246,41	45,49	32,70	23,20	15,37	17,36

Nei grafici presenti nelle figura 5-28, si nota un sostanziale distacco, soprattutto per quanto riguarda le accelerazioni, del comportamento della struttura tra le forzanti con periodo prossimo a quello del primo modo di vibrare e i restanti, che sollecitano minimamente, circa il 50% in meno.

In questo caso, si nota in modo chiaro, l'aspetto già riportato in precedenza, che evidenzia il mal funzionamento del metodo Den Hartog al di fuori del periodo del primo modo di vibrare della struttura, in termini di spostamento del TMD, vedi figura 5-29.

Mentre gli altri metodi lavorano quasi tutti allo stesso modo.

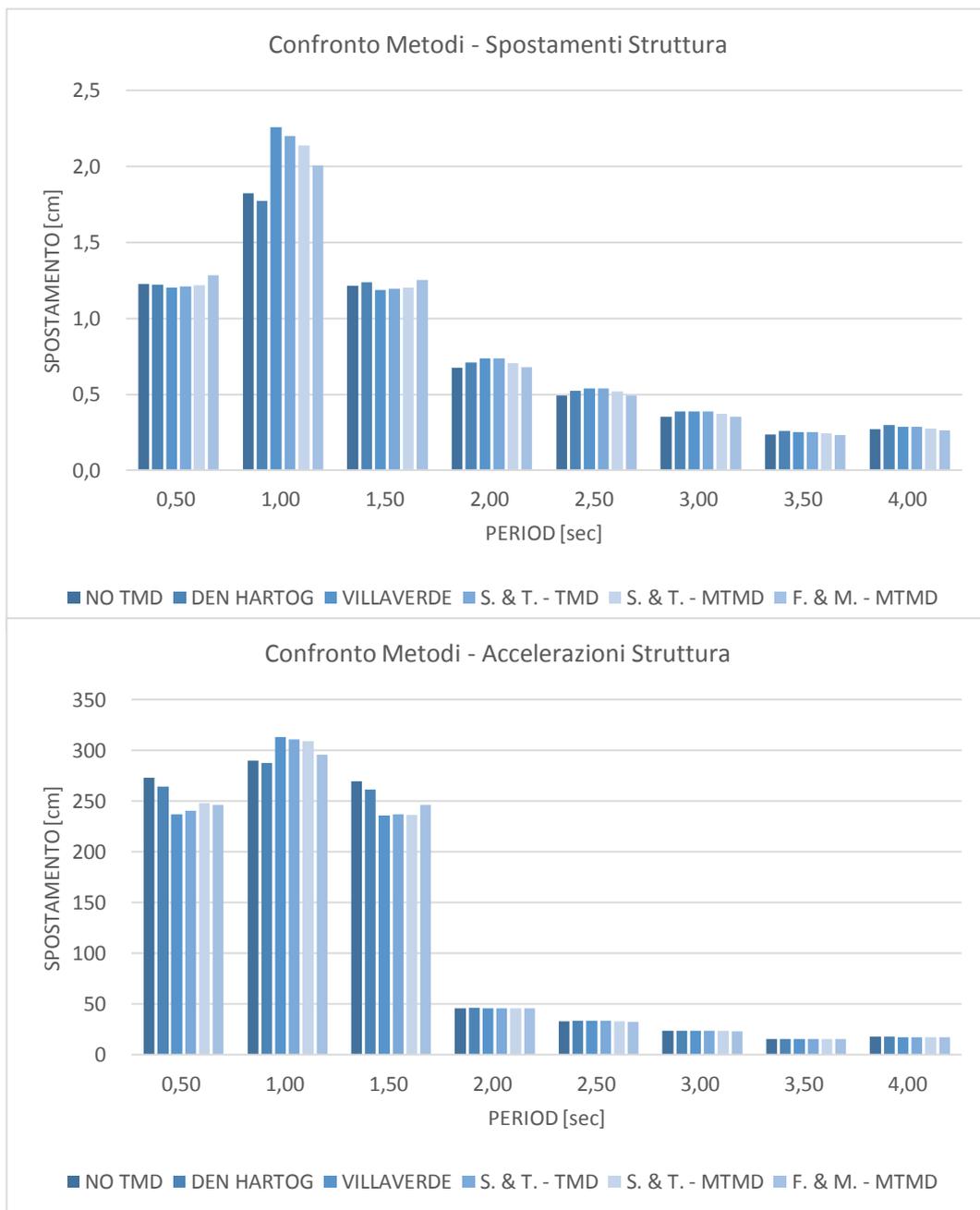


Figura 5-28 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

Tabella 5-23 Confronto dati per gli spostamenti e le accelerazioni del TMD al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,50	2,01	2,67	4,23	3,53	2,85	2,09	2,19
VILLA TMD	0,67	4,31	1,40	1,39	1,02	0,73	0,47	0,52
S&T TMD	0,61	4,53	1,45	1,51	1,10	0,78	0,51	0,56
S&T MTMD	0,65	4,98	1,34	1,42	1,05	0,75	0,48	0,53
F&M MTMD	0,61	5,72	1,34	1,47	1,08	0,77	0,50	0,54

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	31,21	62,80	52,35	57,72	50,22	36,17	24,33	24,76
VILLA TMD	105,31	249,66	97,05	53,53	40,47	29,23	17,87	18,78
S&T TMD	102,46	243,18	95,83	56,95	41,29	28,97	18,06	19,05
S&T MTMD	94,40	272,66	91,03	54,59	41,02	29,25	18,15	18,80
F&M MTMD	81,26	314,78	86,84	55,47	41,91	29,59	18,42	19,27

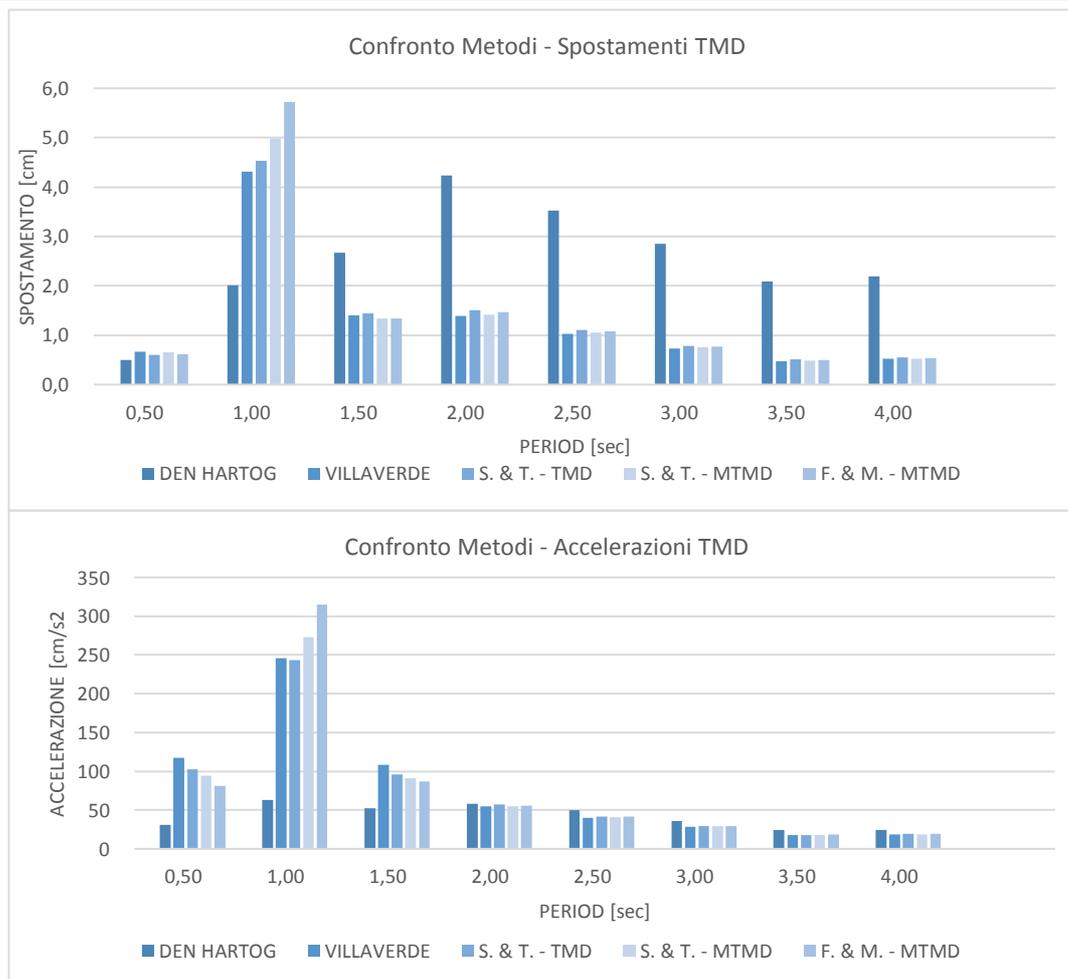


Figura 5-29 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

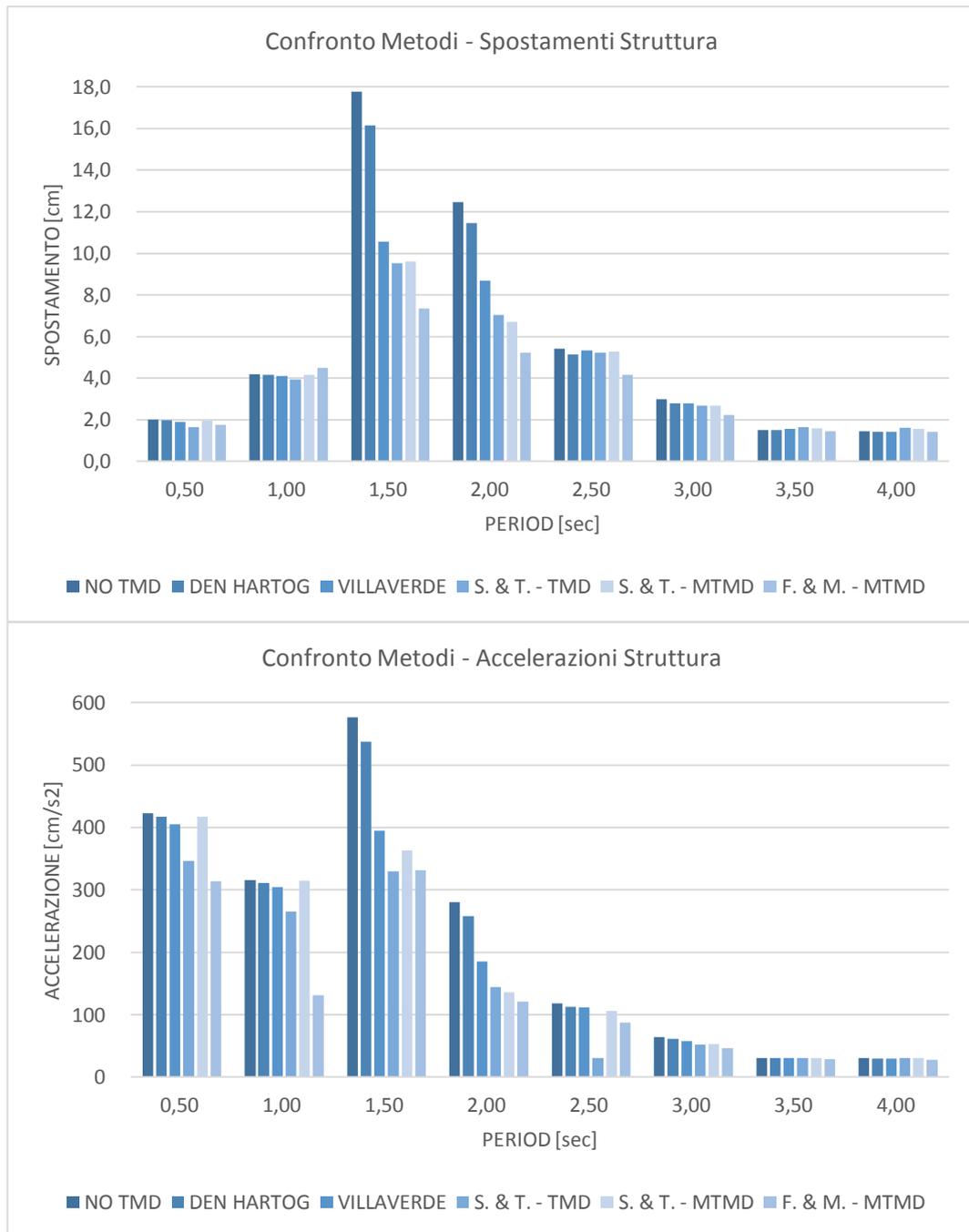


Figura 5-30 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione;

5.3.1.2 Modello 6 Piani

In questo caso, il metodo più performante sembra essere quello di Feng e Mita che dà buoni risultati sia per gli spostamenti della struttura nel complesso, sia degli stessi smorzatori, visto la configurazione multipla. Anche per il modello a 6 piani, in accelerazione nella figura 5-30, si evidenzia il picco, oltre al periodo fondamentale, del secondo modo di vibrare della struttura. Quest'ultimo ha un periodo pari $P=0.50$ secondi.

Tabella 5-24 Confronto dati spostamento al variare del segnale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	2,00	4,18	17,76	12,46	5,42	2,99	1,50	1,46
D.H. TMD	1,97	4,17	16,15	11,46	5,13	2,80	1,50	1,43
VILLA TMD	1,52	3,82	10,18	7,26	5,58	2,77	1,69	1,43
S&T TMD	1,64	3,93	9,54	7,05	5,21	2,67	1,65	1,62
S&T MTMD	1,96	4,17	9,61	6,69	5,27	2,67	1,59	1,56
F&M MTMD	1,77	4,50	7,35	5,23	4,17	2,23	1,46	1,41

Tabella 5-25 Confronto dati accelerazioni struttura al variare del segnale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	422,67	315,43	576,60	280,11	118,25	64,29	31,03	30,40
D.H. TMD	417,38	311,41	537,15	258,22	112,63	60,98	30,51	29,74
VILLA TMD	323,05	247,06	336,69	144,49	109,65	53,76	31,30	29,74
S&T TMD	346,46	265,11	329,60	144,52	30,93	52,02	30,93	30,55
S&T MTMD	417,32	314,24	363,33	135,81	106,52	53,14	30,77	30,31
F&M MTMD	313,91	131,40	331,45	121,01	87,27	46,36	29,05	28,23

Molto probabilmente questo modello presenta il giusto rapporto di altezza-massa con cui il metodo di Feng e Mita lavora correttamente, rispetto agli altri, poiché nei casi a 3 e 10 piani non risulta mai il più performante. Si può ipotizzare che in quest'ultimi due si abbia: per 3 piani una snella poco rilevante rispetto alla massa, viceversa accade per il 10 piani.

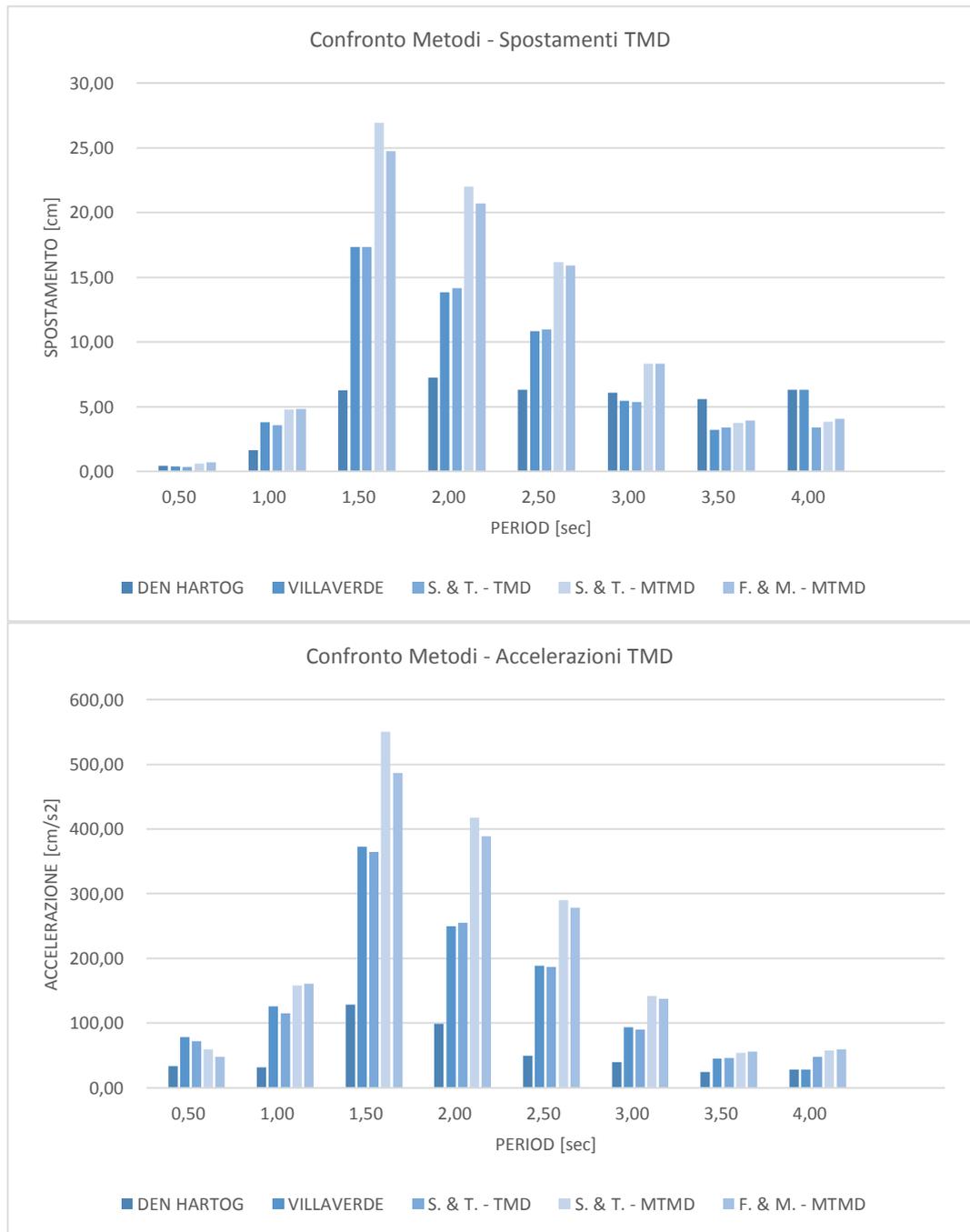


Figura 5-31 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Gli spostamenti e le accelerazioni degli smorzatori sono sempre elevati rispetto a caso singolo, però Feng e Mita hanno un comportamento più contenuto rispetto a Sadek e Taylor. Infatti i due risultano essere sempre con valori elevati, ma in questo vi è un netto distacco, principalmente, nei periodi vicini al quello fondamentale della struttura.

Tabella 5-26 Confronto dati spostamenti TMD al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,45	1,66	6,26	7,24	6,30	6,11	5,62	6,32
VILLA TMD	0,38	3,83	17,34	13,85	10,83	5,48	3,21	6,32
S&T TMD	0,37	3,60	17,34	14,18	10,99	5,37	3,40	3,40
S&T MTMD	0,69	4,85	24,74	20,73	15,92	8,34	3,93	4,06
F&M MTMD	0,64	4,80	26,94	22,03	16,18	8,34	3,75	3,86

Tabella 5-27 Confronto dati accelerazioni TMD al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	33,29	31,40	128,24	98,61	49,26	39,83	24,86	27,78
VILLA TMD	77,99	125,82	372,88	249,62	188,79	93,51	45,13	27,78
S&T TMD	72,24	114,88	364,92	255,52	187,15	89,95	46,30	48,12
S&T MTMD	48,10	161,13	486,49	388,79	278,68	137,60	56,02	59,89
F&M MTMD	59,67	157,92	549,89	417,61	289,91	142,30	54,51	58,10

Inoltre si riscontra una tendenza di valori elevati per entrambi, spostamenti ed accelerazioni, nelle forzanti che sono caratterizzate da periodi alti, probabilmente per che quest'ultimo hanno un contenuto in frequenza significativo in periodi al di fuori del loro rispettivo picco d'intensità nello spettro in spostamento. Questa situazione è già stata fatta presente al momento dell'esposizione degli spettri in risposta dei segnali artificiali, generati con Simqke, quando si è accennato al fatto della perdita di precisione del programma in corrispondenza del plateau del segnale di riferimento per ottenere gli accelerogrammi spettro compatibili.

5.3.1.3 Modello 10 Piani

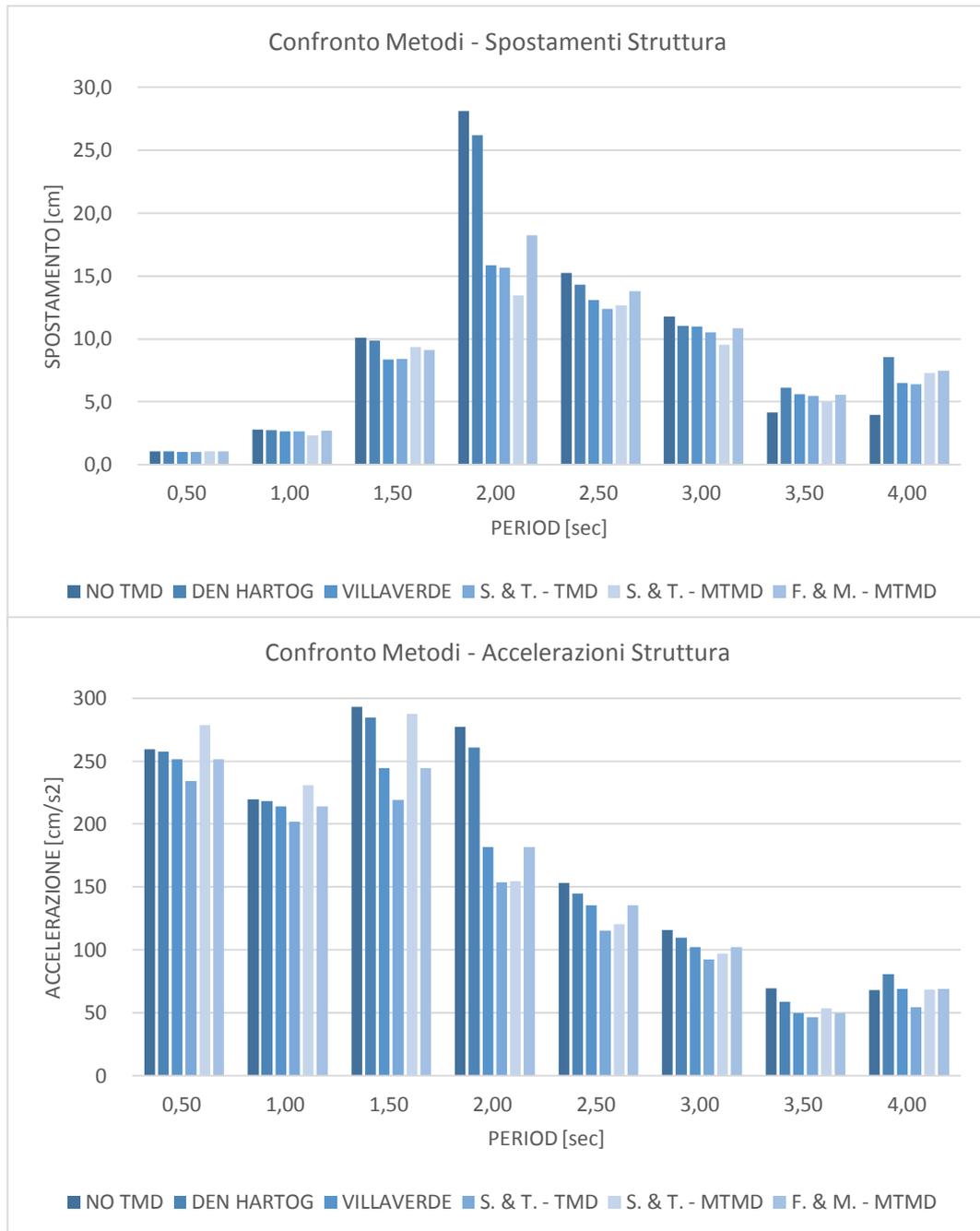


Figura 5-32 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Finalmente, per il modello a 10 piani, si riscontra la migliore performance del metodo di Sadek e Taylor con il MTMD, dove, evidentemente, il fatto di considerare i fattori di partecipazione modale al variare dell'altezza per la configurazione degli smorzatori, mostra i vantaggi. Soprattutto, nel confronto diretto con l'altro modello con più smorzatori, si nota che aumenta il vantaggio del primo sul secondo, allontanandosi dal segnale con periodo fondamentale.

Tabella 5-28 Confronto dati spostamenti struttura al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	1,08	2,78	10,10	28,10	15,23	11,77	4,16	3,95
D.H. TMD	1,07	2,75	9,87	26,18	14,29	11,03	6,10	8,53
VILLA TMD	1,00	2,65	8,35	15,84	13,09	10,99	5,58	6,50
S&T TMD	1,01	2,63	8,42	15,65	12,39	10,51	5,47	6,38
S&T MTMD	1,07	2,34	9,35	13,44	12,66	9,51	5,00	7,28
F&M MTMD	1,06	2,72	9,09	18,25	13,78	10,86	5,58	7,47

Tabella 5-29 Confronto dati accelerazioni struttura al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	259,22	219,48	293,07	277,07	153,05	115,88	69,43	67,93
D.H. TMD	257,47	218,38	284,90	260,82	144,64	109,62	58,46	80,53
VILLA TMD	232,06	200,61	217,58	152,47	120,22	95,73	46,73	54,92
S&T TMD	234,35	201,99	219,31	153,46	115,32	92,24	46,21	54,48
S&T MTMD	278,72	230,98	287,48	154,45	120,17	96,76	53,34	68,18
F&M MTMD	251,63	214,12	244,56	181,86	135,28	102,05	49,78	68,89

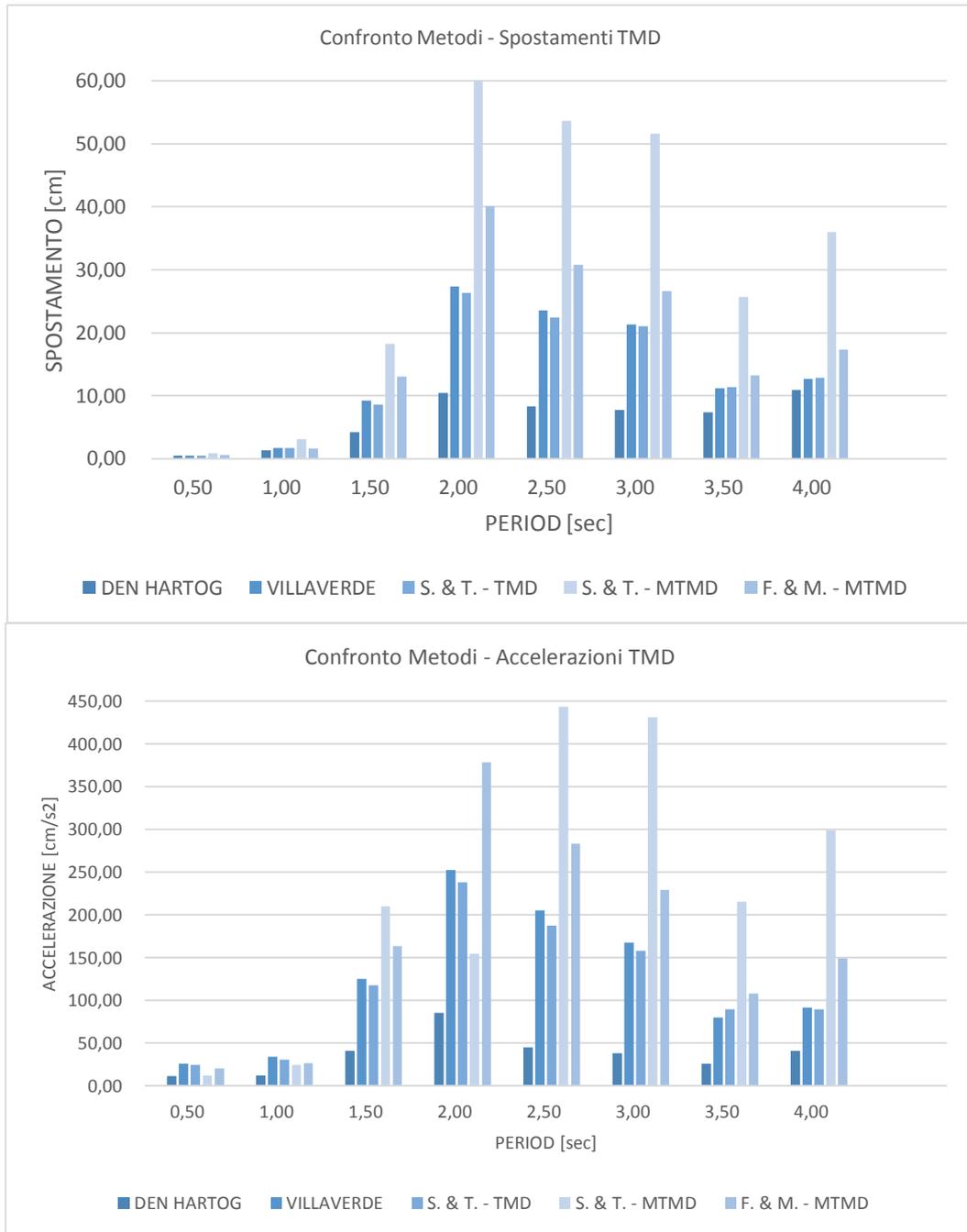


Figura 5-33 Confronto metodi per i TMD al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Tabella 5-30 Confronto dati spostamenti TMD al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	0,51	1,34	4,23	10,42	8,27	7,73	7,34	10,94
VILLA TMD	0,50	1,69	9,21	27,39	23,51	21,31	11,14	12,69
S&T TMD	0,49	1,72	8,55	26,34	22,42	21,02	11,35	12,83
S&T MTMD	0,55	1,57	13,06	40,06	30,83	26,58	13,18	17,31
F&M MTMD	0,82	3,14	18,28	59,99	53,61	51,55	25,69	35,94

Tabella 5-31 Confronti dati accelerazioni TMD al variare del segnale artificiale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	-	-	-	-	-	-	-	-
D.H. TMD	11,82	12,44	40,66	85,23	45,29	38,30	25,71	40,63
VILLA TMD	26,15	33,96	125,13	252,23	205,04	167,52	79,93	91,46
S&T TMD	24,60	30,64	117,54	238,16	187,63	157,62	89,60	89,60
S&T MTMD	11,89	24,34	210,05	154,45	443,01	430,64	215,24	298,62
F&M MTMD	20,20	26,33	163,34	377,92	282,84	229,12	108,20	149,26

Viene proposto anche per questo gruppo di segnali, in figura 5-34, l'insieme dei metodi per ogni struttura, al variare del periodo, per mettere in evidenza il graduale passaggio in termini di minor spostamento globale da TMD a MTMD all'aumentare del numero di piani.

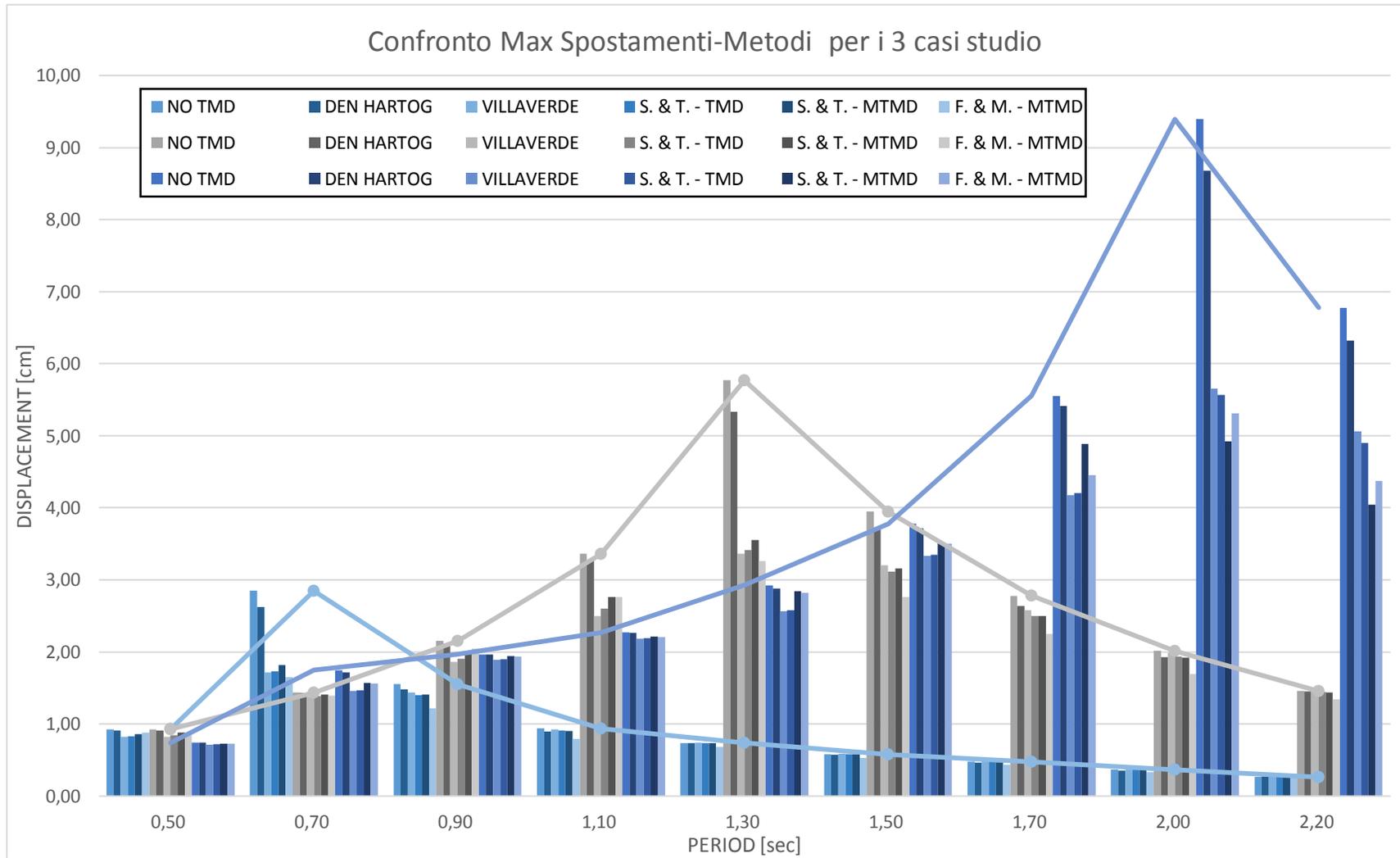


Figura 5-34 Schema riassuntivo che raggruppa tutti i metodi di ogni struttura al variare del periodo, per segnali artificiali

5.4 Studio della risposta sismica per accelerogrammi reali

In questo paragrafo si riportano i risultati ottenuti con i segnali reali, anche se non leggibili a livello d'intensità, proprio per le problematiche che vengono esposte ad inizio del capitolo. Infatti, le caratteristiche si possono evidenziare in un segnale reale, è l'elevata variabilità del segnale stesso per quanto riguarda l'intensità. Ciò porta ad avere accelerogrammi con contenuti in frequenza elevati, non solo in corrispondenza del periodo con il picco di riferimento, ma anche in altre zone interessate dalla forbice del periodo di studio.

I segnali reali sono stati raccolti principalmente da due database, uno europeo – The European Strong-Motion Database¹, e uno statunitense - Pacific Earthquake Engineering Research Center², con lo scopo di poter catalogare un numero significativo di segnali non solo per poter aver un ampio range temporale per l'analisi, ma anche per avere per ogni intervallo un numero sufficiente di segnali per ottenere un valore medio caratterizzato da:

- Da una durata sufficientemente lunga dell'accelerogramma;
- Un'intensità del segnale che sia confrontabile con gli segnali definiti da un periodo specifico.

Per poter catalogare i segnali si è utilizzato una serie di programmi per lo studio dei segnali: il primo è SeismoSignal, si veda la figura 5-35, con il quale è possibile ottenere informazioni caratteristiche del segnale (grafico accelerogramma, spettri di risposta in accelerazione e spostamento, ecc.); il secondo è SeismoMatch per operare la scala d'intensità del segnale registrato con lo spettro di riferimento di Padova. Infatti, come abbiamo detto non è semplice trovare segnali puliti, anzi quelli reali sono

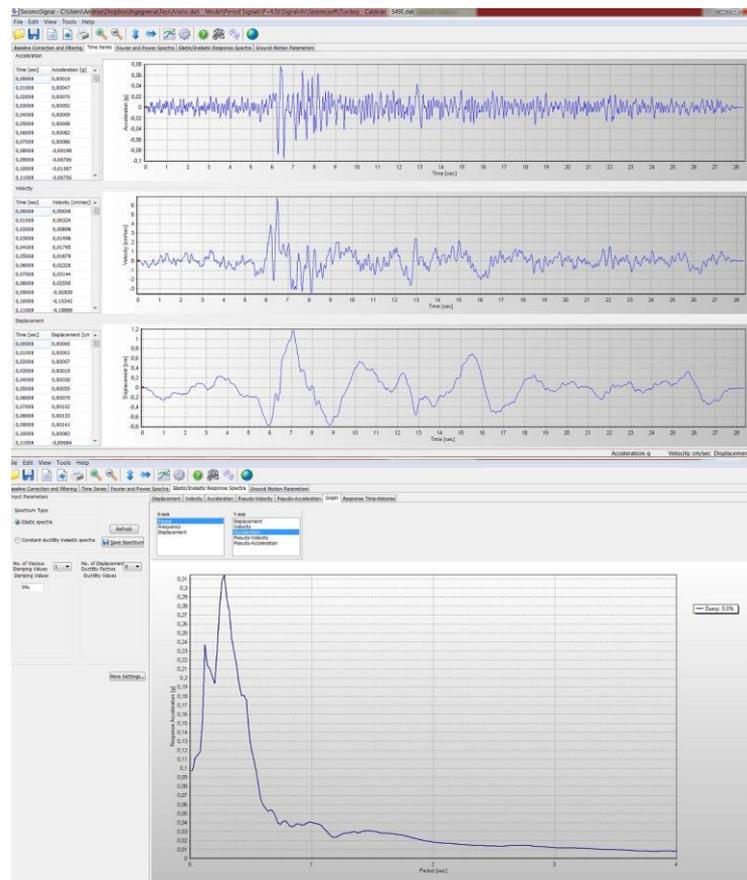


Figura 5-35 Screenshot dati segnale fornita SeismoSignal

¹ http://www.isesd.hi.is/ESD_Local/frameset.htm

² <http://ngawest2.berkeley.edu/>

caratterizzati da una notevole discontinuità.

SeismoMatch permette di confrontare più aspetti di un segnale con uno scelto come riferimento, in questo studio quello di Padova, e offre la possibilità di andare a modificare il segnale stesso, dando come parametri il periodo in cui si vuole la modifica. Naturalmente, si nota che maggiore è la modifica da effettuare, maggiore sarà la differenza tra il segnale originale e il nuovo ottenuto dal processo di "matching". Di seguito è riportata una schermata del programma, dove si può vedere il confronto dello spettro con il riferimento, figura 5-36.

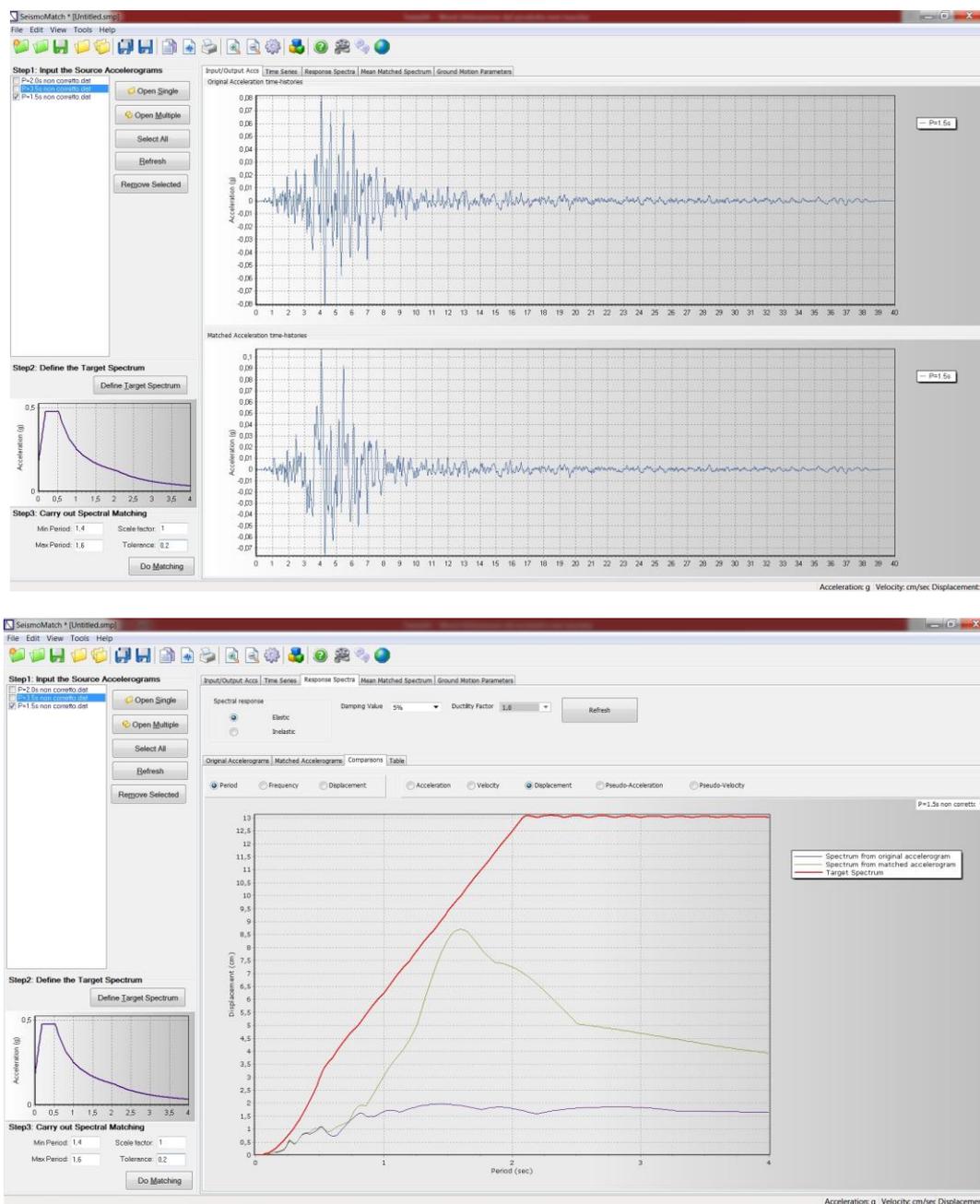


Figura 5-36 Screenshot SeismoMatch: a) dati segnale studio; b) Confronto spettri

Il risultato del programma sui segnali si possono osservare andando a confrontare i grafici degli spettri di risposta in spostamento pre- e post- processamento del programma, nella figura 5-37

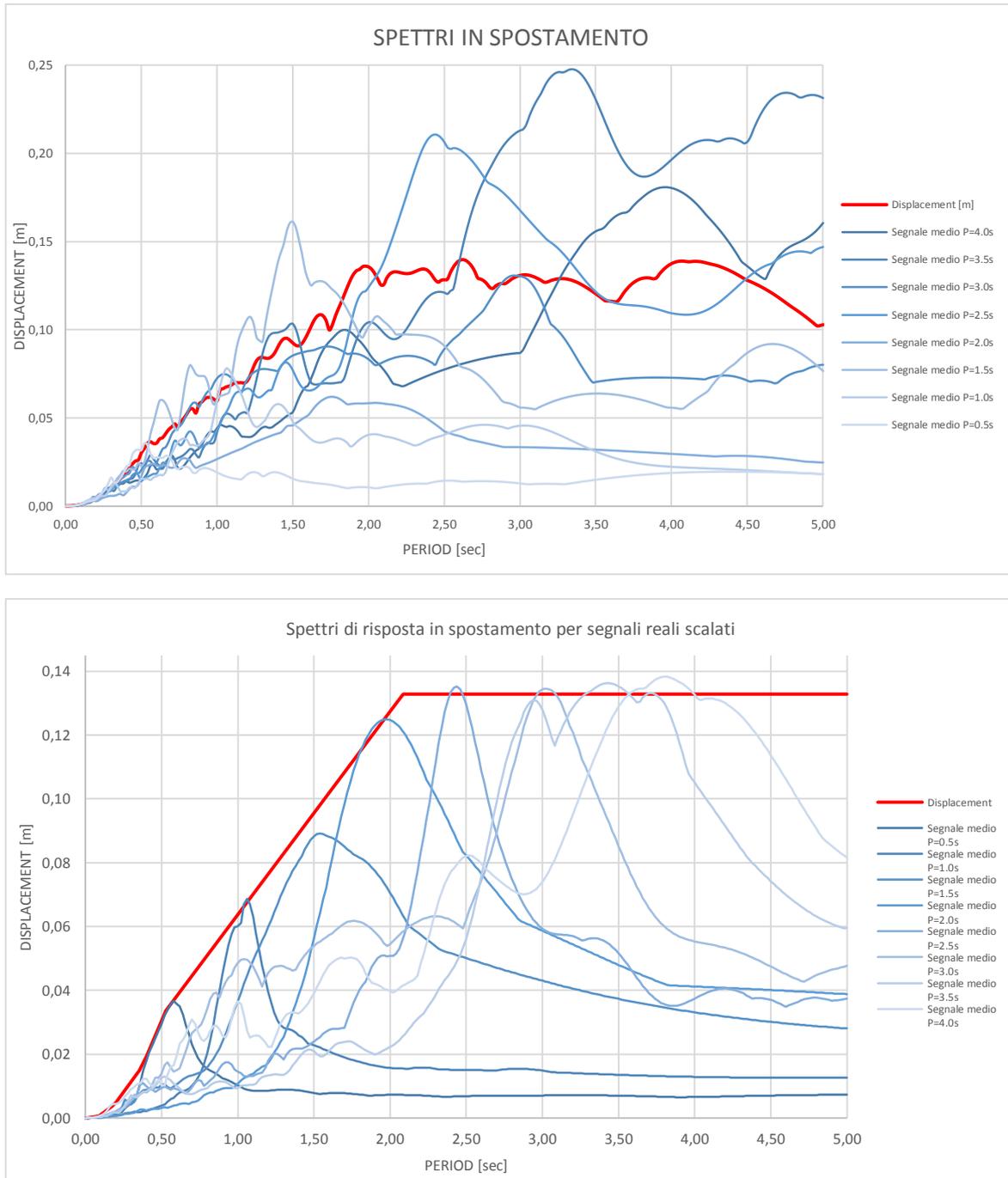


Figura 5-37 Confronto due gruppi di spettri pre e post processo con il programma SeismoMatch

5.4.1.1 Modello 3 Piani

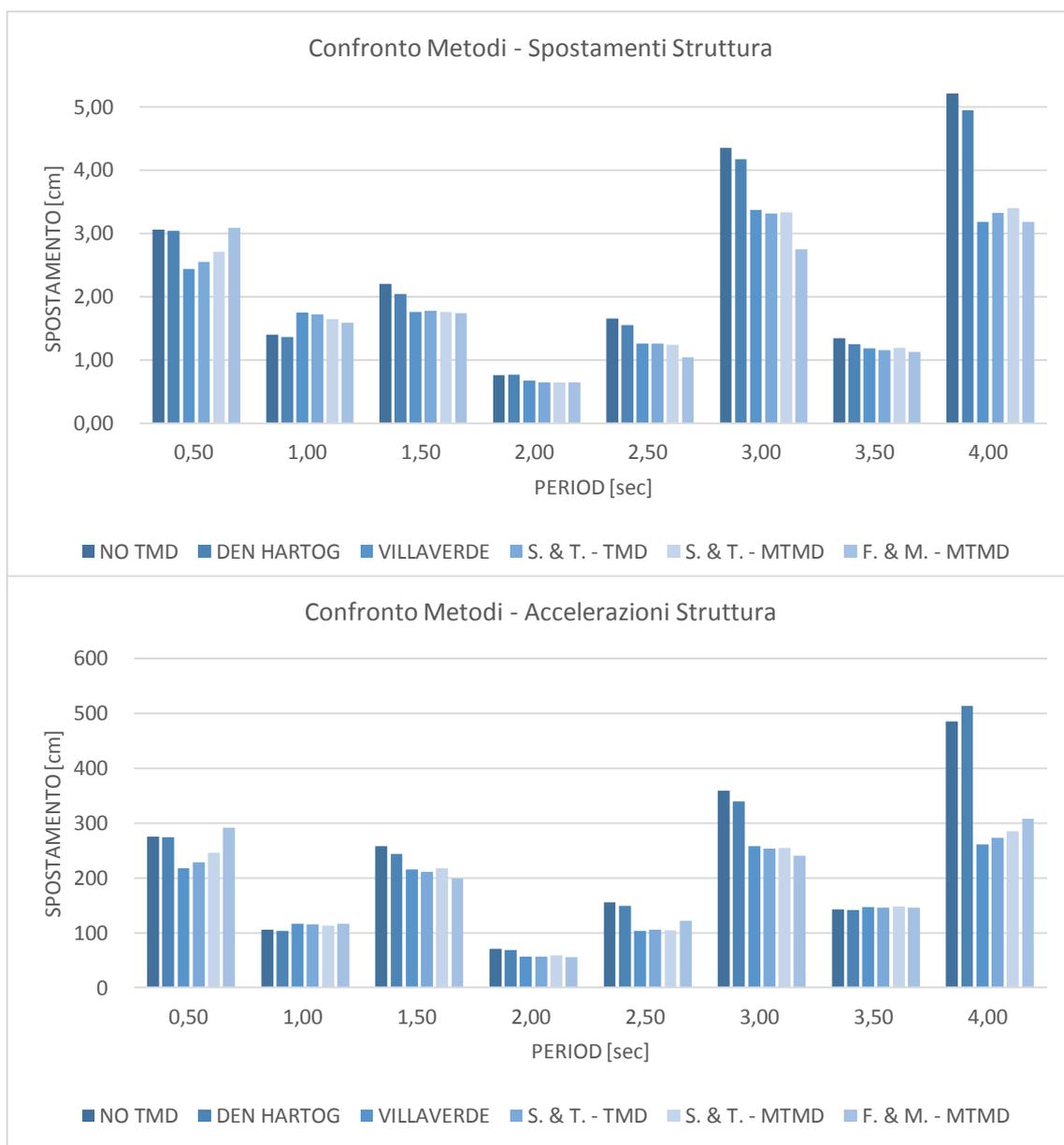


Figura 5-38 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Tabella 5-32 Confronto dati spostamenti struttura al variare del segnale reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	3,06	1,41	2,20	0,76	1,66	4,36	1,35	5,23
D.H. TMD	3,04	1,37	2,04	0,77	1,55	4,18	1,25	4,94
VILLA TMD	2,44	1,75	1,76	0,68	1,26	3,37	1,19	3,18
S&T TMD	2,55	1,72	1,78	0,64	1,26	3,31	1,16	3,32
S&T MTMD	2,71	1,65	1,76	0,64	1,24	3,33	1,19	3,40
F&M MTMD	3,09	1,59	1,75	0,65	1,05	2,75	1,13	3,18

Tabella 5-33 Confronto dati artificiali struttura al variare del segnale reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	275,01	105,12	257,72	70,93	155,34	359,50	142,56	485,85
D.H. TMD	274,05	103,22	243,40	69,01	148,55	339,78	141,34	513,40
VILLA TMD	217,14	116,66	215,19	56,29	103,37	257,73	147,36	261,35
S&T TMD	228,97	115,19	211,38	56,91	105,68	253,88	146,16	272,85
S&T MTMD	246,17	112,75	217,69	58,96	104,11	254,47	148,16	285,22
F&M MTMD	291,90	116,05	199,40	55,70	122,22	240,22	145,46	307,97

5.4.1.2 Modello 6 Piani

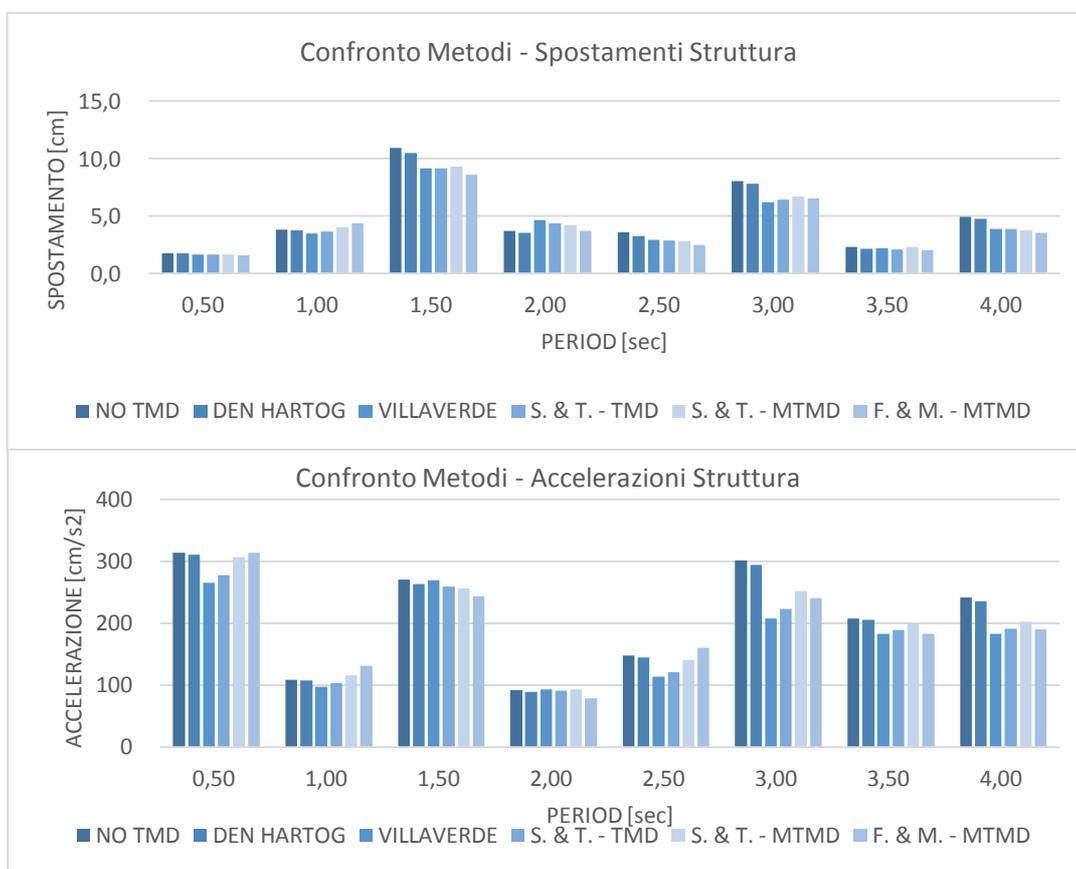


Figura 5-39 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Tabella 5-34 Confronto dati spostamenti struttura al variare del segnale reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	1,78	3,83	10,92	3,70	3,60	8,07	2,31	4,94
D.H. TMD	1,75	3,78	10,49	3,57	3,28	7,82	2,16	4,75
VILLA TMD	1,65	3,51	9,17	4,63	2,91	6,23	2,21	3,87
S&T TMD	1,66	3,67	9,14	4,38	2,90	6,44	2,10	3,89
S&T MTMD	1,68	4,03	9,34	4,24	2,84	6,72	2,30	3,78
F&M MTMD	1,58	4,37	8,63	3,70	2,49	6,57	2,06	3,53

Tabella 5-35 Confronto dati accelerazioni struttura al variare del segnale reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	313,40	108,68	270,42	91,94	147,56	300,84	206,88	240,88
D.H. TMD	310,32	107,80	262,48	88,80	144,54	294,01	205,55	235,43
VILLA TMD	265,28	97,29	268,75	92,62	113,93	207,60	182,17	182,23
S&T TMD	277,92	103,13	259,03	90,62	120,34	223,18	188,43	190,42
S&T MTMD	306,43	115,12	256,26	93,24	140,58	251,37	200,05	201,67
F&M MTMD	313,91	131,40	243,77	78,69	159,57	240,45	182,80	189,83

5.4.1.3 Modello 10 Piani

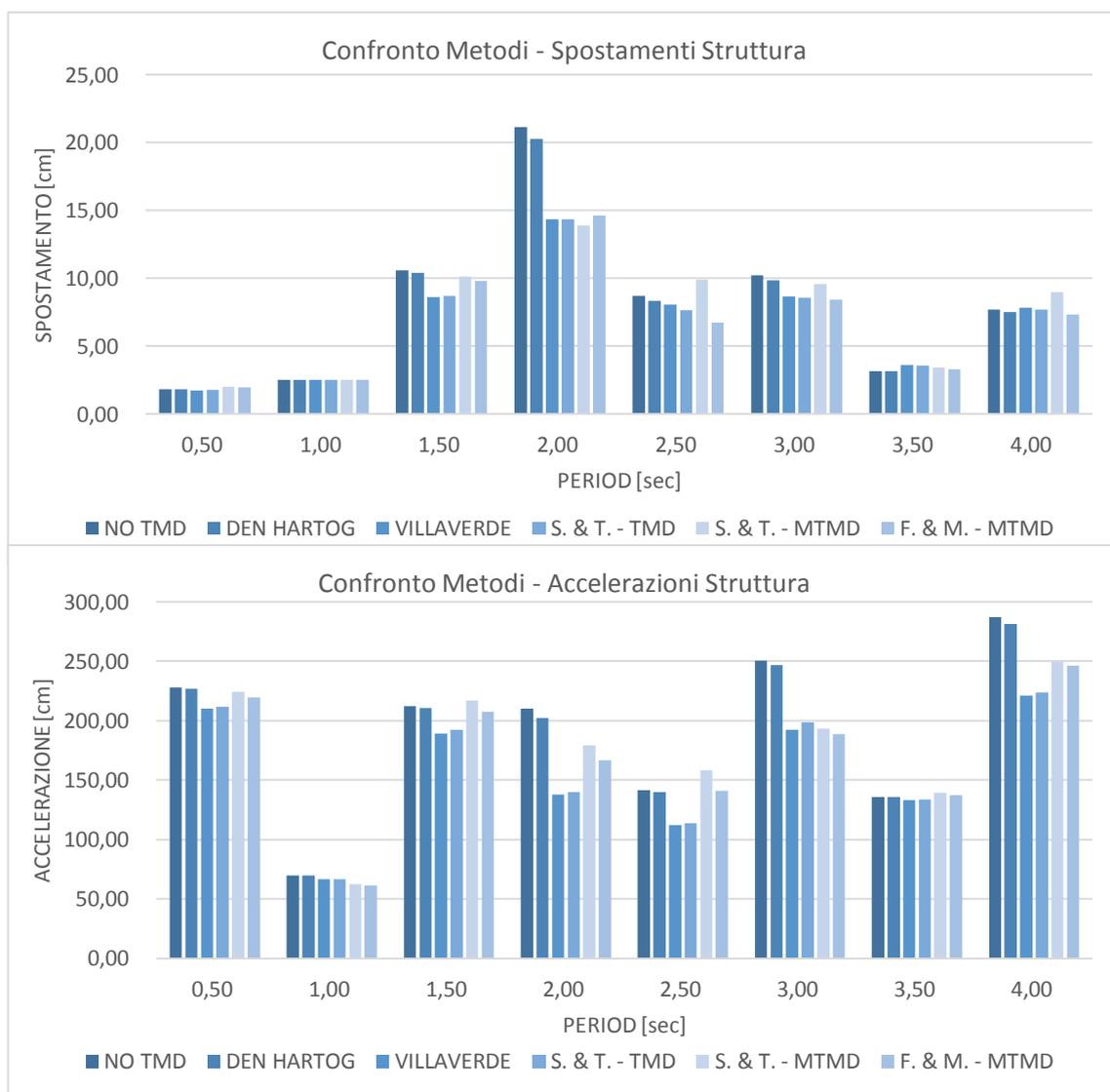


Figura 5-40 Confronto metodi per le strutture al variare del segnale sinusoidale: a) spostamento; b) accelerazione

Tabella 5-36 Confronti dati struttura 10 piani al variare del segnale reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Dx [cm]							
NO TMD	1,82	2,53	10,59	21,16	8,72	10,24	3,16	7,68
D.H. TMD	1,82	2,54	10,44	20,26	8,36	9,85	3,19	7,52
VILLA TMD	1,76	2,52	8,61	14,37	8,08	8,68	3,63	7,83
S&T TMD	1,77	2,52	8,69	14,37	7,68	8,59	3,59	7,72
S&T MTMD	2,01	2,51	10,14	13,91	9,92	9,59	3,44	8,97
F&M MTMD	1,97	2,50	9,82	14,61	6,74	8,44	3,29	7,34

Tabella 5-37 Confronto dati accelerazioni struttura 10 piani al variare del periodo della forzante reale

PERIODO	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00
METODO	Ax [cm/s ²]							
NO TMD	227,86	69,97	211,94	209,95	141,66	250,29	135,51	286,85
D.H. TMD	226,94	69,85	210,51	202,10	140,03	246,61	135,68	281,56
VILLA TMD	209,87	66,41	189,15	137,95	112,13	192,28	133,24	221,22
S&T TMD	211,67	66,74	192,48	140,16	113,47	198,39	133,68	223,82
S&T MTMD	224,00	62,43	217,17	178,94	158,18	193,13	139,38	249,46
F&M MTMD	219,77	61,56	207,66	166,52	140,89	188,61	137,26	246,12

6 Conclusioni

La diffusione delle tecniche di protezione sismica passiva, come lo smorzamento mediante massa messa in controfase, dovrebbe essere supportata dallo sviluppo di criteri semplificati per la progettazione, che permettano di controllare in maniera diretta ed efficace i parametri che controllano la fattibilità di tali interventi e questo studio si pone alla base per lo sviluppo di ciò.

Questo lavoro si è articolato in più fasi, che si possono riunire in due gruppi: il primo in ricerca e analisi dei metodi di configurazione dello smorzatore a massa accordata, sia nella configurazione singola che multi, cercando inoltre di individuare quale fosse la più performante sotto due punti di vista, spostamenti e accelerazioni, rispettivamente, della struttura e del dispositivo. Per il secondo la catalogazione dei segnali reali, ottenuti per ricerca in database istituzionali, al fine di ottenere un pacchetto di segnali che permettesse di effettuare una serie di analisi al variare del periodo, in cui questi presentino il picco di risposta nello spettro in spostamento.

Nella fase di analisi, dai risultati ottenuti non si può affermare che un metodo sia migliore degli altri, ma ognuno mostra un particolare vantaggio al variare del caso studio. Infatti l'andamento riscontrato individua per ogni configurazione un paio di metodi funzionanti ragguardevolmente: si parte dalla struttura più bassa in cui il metodo sviluppato da Villaverde dà i migliori risultati in termini di spostamento e accelerazione globali, mantenendo contenuti quelli corrispondenti allo smorzatore; salendo di livello troviamo nel secondo modello un'attenuazione della risposta strutturale, comparabile tra configurazioni TMD e MTMD, anche se per quanto riguarda i risultati dello smorzatore, si è portati a scegliere ancora i metodi con singolo. Nel terzo ed ultimo modello le analisi evidenziano come i metodi MTMD iniziano a prevalere, anche se ancora con una piccola percentuale, su quelli con uno solo smorzatore, tuttavia rimangono notevolmente elevati i dati su spostamenti e accelerazioni dei dispositivi.

Per quanto riguarda lo studio per raccogliere i segnali e catalogarli, si possono evidenziare due aspetti notevoli: il primo riguarda lo slittamento nel periodo del picco del segnale nello spettro di risposta per lo spostamento, quando l'accelerogramma presenta numerosi picchi di intensità nello spettro in accelerazione, poco inferiore al massimo, posti dopo di questo, che tendono ad allargare il plateau dello stesso spettro. L'altro riguarda

impossibilità di poter usare più segnali reali, intervallati nel periodo per ottenere un'analisi ottimale dal punto di vista della lettura dei risultati; ciò ha portato a sviluppare una serie di analisi aventi come segnali: un gruppo di forzanti sinusoidali con ampiezza imposta, ricavata da uno spettro di riferimento e un altro gruppo di accelerogrammi artificiali, con i quali si possono ottenere dei risultati già più vicini ai reali e, soprattutto, confrontabili tra di loro.

Quindi, si ritiene opportuno per una progettazione con smorzatori a massa accordata la verifica o "test" di quest'ultimo, mediante set di segnali sinusoidali con caratteristiche predefinite dal progettista in modo da controllare il sistema. Successivamente, si può passare all'analisi con gruppi di accelerogrammi artificiali o con l'imposizione di un singolo segnale reale, possibilmente con picco dello spettro di risposta coincidente con quello del primo modo di vibrare della struttura.

I TMDs, ricapitolando, sono relativamente semplici da inserire e hanno dimostrato di essere in grado di ridurre sensibilmente la risposta ad azioni dinamiche di varia intensità. Si possono considerare tanto per la progettazione del nuovo, quanto per la ristrutturazione degli edifici storici; inoltre, scegliendo correttamente i parametri degli smorzatori si possono riuscire a ridurre sia gli effetti dovuti al vento che ai terremoti ed è importante sottolineare che ciò non richiede variazione d'approccio alla progettazione classica. Altro aspetto importante è quello che non dipendono da risorse energetiche esterne, orientandosi verso le linee guida europee per una progettazione eco-sostenibile. Oltretutto, se richiesto, gli smorzatori a massa accordata possono essere combinati con sofisticati schemi: o come meccanismi di controllo attivo al funzionamento generale, o come parte di un sistema semi-attivo, o come sistema di riserva o supporto in caso di fallimento del sistema attivo. In confronto ad altre tecniche per il controllo delle azioni vibranti, essi offrono ulteriori vantaggi importanti:

- Non dipendono da fonti di energia esterne per lavorare;
- Non interferiscono nel modo di lavorare dei carichi tradizionali verticali e orizzontali;
- Possono lavorare già con piccole sollecitazioni;
- Le loro caratteristiche possono essere affinate in fase finale, durante l'installazione;
- Una singola unità può essere in grado di soddisfare la richiesta di riduzione dell'azione di differenti azioni dinamiche;
- La manodopera per la manutenzione richiesta è minima;
- Il costo di questa tecnologia è valido rispetto ad altre classiche implementazioni.

Si vuole sottolineare che nello studio l'analisi si è fermata al confronto di solo due parametri, spostamento e accelerazione dei modelli, ma si ritiene opportuno lo svolgimento di altre prove per convalidare gli aspetti notevoli emersi qui. Ad esempio in questo lavoro si è scelto di tenere come parametro vincolato per tutti i metodi il rapporto di massa, tuttavia altri parametri, come il rapporto di smorzamento, se fissato, può portare a nuove considerazioni. Inoltre allagare il numero di modelli a quattro, con l'inserimento di una struttura a 20 piani o oltre, gioverebbe nella conferma

del passaggio da TMD a MTMD al crescere in altezza della struttura. Inoltre, si è ipotizzata lo sviluppo a livello tecnologico di uno smorzatore inglobato nel piano stesso, quindi avente massa proprio ricavata da quella del piano stesso. Ciò dovrebbe permettere di ridurre gli effetti di slittamento nel periodo dei modi di vibrare della struttura stessa; di seguito, nella figura 6-1 viene riportato un semplice schema del "piano mobile", avete come supporti per isolarlo dalla struttura principale degli isolatori a scorrimento a doppia curvatura. Questi permettono di fissare il periodo in base alle caratteristiche progettuali definite per lo smorzatore.

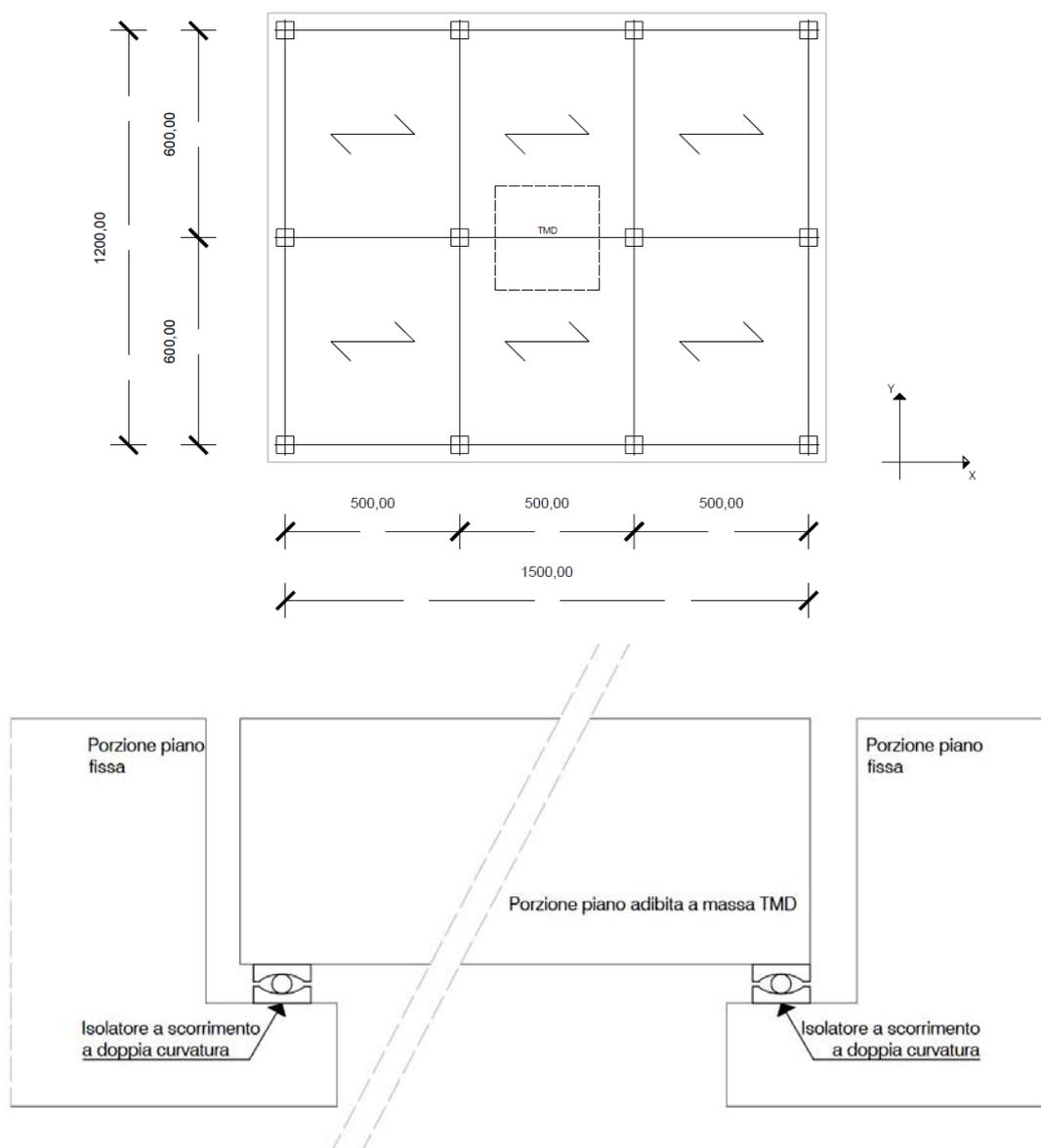


Figura 6-1 Schema "geoide": a) posizione nel piano del TMD; b) posizione piano come massa TMD, appoggiata su isolatori a scorrimento a doppia curvatura

7 Bibliografia

- [1] F. P. M. Dolce, Progetto di Edifici con Isolamento Sismico, IUSS Press, 2004.
- [2] J. P. D. Hartog, Mechanical Vibrations, McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [3] S. P. a. A. R. Maurizio De Angelis, «Dynamic response and optimal design of structures,» *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, vol. 41, pp. 41-60, 2012.
- [4] L. A. K. Roberto Villaverde, «Damped Resonant Appendages To Increase Inherent Damping In Buildings,» *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, pp. Vol. 22, 491-507, 1993.
- [5] M. F. R. Walter C. Hurty, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Inc, 1964.
- [6] Stephen H. Crandall, Random vibration in mechanical systems, 1963.
- [7] R. Villaverde, "Seismic Control Of Structures With Damped Resonant Appendages".
- [8] R. Villaverde, "Reduction In Seismic Response With Heavily-Damped Vibration Absorbers," *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, pp. Vol. 13, 33-42, 1985.
- [9] D. V. a. J. M. B. Amir M. Kaynia, «Seismic Effectiveness of Tuned Mass Dampers,» *Journal of the Structural Division*, vol. 107, n. 8, pp. 1465-1484, 1981.
- [10] J. R. S. a. R. E. Klingner, «Effect Of Tuned Mass Dampers On Seismic Response,» *Journal of Structural Engineering*, vol. 109, pp. 2004-2009, 1983.
- [11] C. A. e. T. Furtmüller, «Seismic Performance of Tuned Mass Dampers».
- [12] A. K. Chopra, Dynamics of Structures (4th Edition), Prentice-Hall, 2011.
- [13] «DM 14/01/2008, Norme tecniche per le costruzioni,» 2008.
- [14] A. M. M. Q. Feng, «Vibration Control Of Tall Buildingd Using Mega SubConfiguration,» *Journal Of Engineering Mechanics*, pp. Vol. 121, 1082-1088, 1995.
- [15] G. F. D. T. T. Soong, Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering, Wiley, Aprile 1997.
- [16] B. M. A. W. T. a. R. M. C. Fahim sadek, «A Method Of Estimating The Parameters Of Tuned Mass Dampers For Seismic Applications,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 26, pp. 617-635, 1997.

- [17] C. Li, «Optimum multiple tuned mass dampers for structures,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 31, pp. 897-919, 2002.
- [18] G. C. a. J. Wu, «Optima Placement Of Multiple Tuned Mass Dampers For Seismic Structures,» *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 127, pp. 1054-1062, 2001.

Appendice

Appendice A Sviluppo Equazione del moto con smorzamento non proporzionale

A.1 Soluzione della Equazione Omogenea

Si consideri un'equazione ottenuta uguagliando a zero il membro a destra dell'equazione ridotta:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = 0$$

Le soluzioni a questa equazione lineare permettono di trovare gli spostamenti e le velocità, le quali sono espresse come e^{pt} , quindi:

$$\{\dot{y}\} = p\{y\}$$

O

$$\{\ddot{q}\} = p\{\dot{q}\}$$

$$\{\dot{q}\} = p\{q\}$$

L'equazione lineare è poi riscritta come segue in termini di un numero p e di un vettore $\{y\}$ non conosciuti:

$$p[A]\{y\} = -[B]\{y\}$$

In generale $[B]$ avrà un'inversa eccetto sotto condizioni per le quali la matrice di rigidità $[k]$ è singolare. Se la matrice di rigidità è singolare come lo sarà nel caso che il sistema sia non vincolato e soggetto a uno o più spostamenti del corpo rigido, poi i modi di quest'ultimo dovranno essere rimossi dal sistema. Un esempio può essere il caso in cui l'equazione con le due incognite è pre-moltiplicata dall'inversa di $[B]$, si ottiene:

$$[D]\{y\} = \lambda\{y\}$$

dove

$$[D] = -[B]^{-1}[A]$$

$$\lambda = \frac{1}{p}$$

Si nota immediatamente che questa equazione è identica nella forma alla equazione $[D]\{q\} = \frac{1}{\omega^2}\{q\}$ per un sistema non smorzato dove $[D]$ è di nuovo chiamata *matrice dinamica*. In questo caso questa matrice è di ordine $2n$ ed esistono importanti differenze nelle soluzioni di queste due equazioni. Si noti che l'inversa di $[B]$ ha la forma:

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} [-m]^{-1} & [0] \\ [0] & [k]^{-1} \end{bmatrix}$$

Quindi, la matrice dinamica potrebbe essere espressa in una forma partizionata che tende a seguire la forma partizionata:

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[k]^{-1}[m] & -[k]^{-1}[c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}$$

dove

$[I]$ = matrice d'identità di ordine n ;

$-[k]^{-1}[m]$ = matrice dinamica di ordine n per un sistema non smorzato.

Si può risolvere nel modo seguente:

$$[L(\lambda)]\{y\} = 0$$

dove

$$[L(\lambda)] = [D] - \lambda[I]$$

Per una soluzione non banale di questa equazione, il determinante deve essere nullo:

$$|L(\lambda)| = 0$$

Questa porta a un set di $2n$ radici o autovettori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$. Per un sistema stabile, ognuna di queste radici sarà reale e negativa (per sistemi smorzati sul valore critico o nel caso di sovrasmorzamento). Se ci sono autovalori complessi, essi verranno presentati come una coppia coniugata. Per esempio, se un k -esimo e un l -esimo autovalori sono coniugate complesse, essi si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \mu_k + i\nu_k \\ \lambda_l &= \bar{\lambda}_k = \mu_l - i\nu_k \end{aligned}$$

dove μ_k e ν_k sono due parti, reale e immaginaria, rispettivamente, e "i" è il numero immaginario unitario.

Corrispondente a ogni autovalore λ_k c'è un autovettore $\{y^{(k)}\}$ avente $2n$ componenti. Ci sono $2n$ di questi autovettori, $k = 1, 2, 3, \dots, 2n$. Questi autovettori potrebbero essere mostrati come proporzionali alle colonne della matrice aggiunta $|L(\lambda)|$, per quei autovettori corrispondenti a autovalori distinti. Sarebbe $[J_{ji}(\lambda)]$ la matrice aggiunta di $[L(\lambda)]$. Poi:

$$\{y^{(k)}\} = \epsilon_k \{J_{ij}(\lambda_k)\} = \epsilon_k \{J_{ji}^{(k)}\}$$

dove

$\{J_{ji}^{(k)}\}$ = qualsiasi colonna della matrice aggiunta $[J_{ji}(\lambda_k)]$ ottenuta dall'inserimento degli autovalori λ_k in $[J_{ji}(\lambda)]$;

ϵ_k = una costante di proporzionalità.

Per autovalori complessi si può vedere che la forma della matrice complessa $[L(\lambda)]$ è quella che i numeri complessi appaiono solo nella diagonale principale. I cofattori di questa matrice hanno proprietà che i cofattori coniugati complessi risultano da gli inserimenti in $[L(\lambda)]$ di autovalori coniugati complessi. Segue che per un paio di autovalori coniugati complessi, come mostrato precedentemente, i corrispondenti autovettori siano anch'essi costituiti da coniugate complesse, cioè:

$$\{y^{(l)}\} = \{\bar{y}^{(k)}\}$$

Perciò, se tutti gli autovalori di un sistema sono complessi, nel qual caso essi si presentino in coppie coniugate complesse, tutti gli autovettori saranno complessi e in coppie coniugate:

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$$

Ciò soddisfa l'equazione della matrice diagonale o la forma partizionata dalla quale si può vedere che ogni componente velocità $\{y^{(k)}\}$ è collegata agli spostamenti corrispondenti da:

$$\dot{q}_i^{(k)} = p_k q_i^{(k)}$$

dove

$$p_k = \frac{1}{\lambda_k} = \alpha_k + i\beta_k$$

Si nota che

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \\ \beta_k = -\frac{\nu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \end{cases}$$

Dato che la soluzione è in funzione del tempo:

$$e^{p_k t} = e^{\alpha_k t} e^{i\beta_k t}$$

si nota che nel k -esimo modo α_k sarà negativo per un sistema smorzato, e β_k rappresenta la frequenza delle vibrazioni libere. Se gli spostamenti q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) sono plottate come vettori ruotanti sul piano complesso, le loro velocità angolari tendono ai corrispondenti spostamenti con una fase angolare ψ_k la quale è l'argomento del vettore p_k dove esso è espresso nella forma polare:

$$p_k = (\alpha_k^2 + i\beta_k^2)^{1/2} e^{i\psi_k}$$

dove

$$\tan \psi_k = \frac{\beta_k}{\alpha_k}$$

Esempi, in generale, mostrano che le varie componenti di spostamento q_i hanno differenti fasi angolari θ_i . Si richiama quella soluzione del problema degli autovalori che genera ampiezze di spostamento relative, non assolute, quindi, solo le intensità relative degli spostamenti complessi si potranno determinare. Allo stesso modo, La fasi angolari assolute θ_i non sono determinabili, ma piuttosto, le differenze nelle fasi stesse. Questo può essere visto considerando $\{y^{(k)}\} =$

$\epsilon_k \{J_{ij}(\lambda_k)\} = \epsilon_k \{J_{ji}^{(k)}\}$ in cui la costante di proporzionalità è un numero complesso. Quindi, la normalizzazione di un autovettore complesso $\{y^{(k)}\}$ consiste non solo nello scalare tutte le intensità proporzionalmente, ma anche nel ruotare tutte le componenti mediante lo stesso angolo nel piano complesso.

A.2 Ortogonalità dei Modi Disaccoppiati

Gli autovettori di un sistema smorzato sono ortogonali già come lo sono quelli per uno non-smorzato. Si consideri r -esimo e s -esimo gli autovettori $\{y^{(r)}\}$ e $\{y^{(s)}\}$, che soddisfano ambedue la $p[A]\{y\} = -[B]\{y\}$. Prima si scrive quella equazione per r -esimo modo e si pre-moltiplica entrambi i lati per il vettore trasposto $\{y^{(r)}\}^T$, mediante:

$$p_r \{y^{(s)}\}^T [A] \{y^{(r)}\} = -\{y^{(s)}\}^T [B] \{y^{(r)}\}$$

Usando la legge di reversibilità per i prodotti di matrici trasposte e ricordando che $[A]$ e $[B]$ sono matrici simmetriche, si traspongono entrambi i lati, mediante:

$$p_r \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = -\{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\}$$

Si ripetono gli stessi passaggi per s -esimo modo:

$$p_s \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = -\{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\}$$

Se quest'ultima equazione è sottratta dalla precedente, il risultato è

$$(p_r - p_s) \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = 0$$

Se gli autovalori p_r e p_s sono differenti, la seguente proprietà di ortogonalità lega i due autovettori:

$$\{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = 0$$

Dalle equazioni ottenute dalla legge di reversibilità segue che questi vettori sono anche ortogonali rispetto alla matrice $[B]$:

$$\{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\} = 0$$

Per i modi non-smorzati nei quali gli autovettori sono complessi, il criterio generale lega i modi avente differenti frequenze di vibrazione. Inoltre, si enfatizza che la relazione si applica anche a due autovettori coniugati complessi che sono associati con il singolo modo, con l'unica condizione, dovuta alla proprietà di ortogonalità, impone che i due autovalori coniugati complessi associati con quel modo siano differenti. Il fatto che essi siano differenti si vede come segue. Se:

$$p_r = \alpha_r + i\beta_r$$

e

$$p_s = \alpha_r - i\beta_r$$

poi

$$p_r - p_s = (\alpha_r + i\beta_r) - (\alpha_r - i\beta_r) = 2i\beta_r \neq 0$$

Per un sistema non-smorzato è utile derivare le relazioni di ortogonalità per le parti, reale e immaginaria, degli autovettori, cioè:

$$\begin{aligned}\{y^{(r)}\} &= \{\xi^{(r)}\} + i\{\eta^{(r)}\} \\ \{y^{(s)}\} &= \{\xi^{(s)}\} + i\{\eta^{(s)}\}\end{aligned}$$

Si può, allora, riscrivere l'equazione data dalla proprietà di ortogonalità:

$$\left(\{\xi^{(r)}\}^T + i\{\eta^{(r)}\}^T\right) [A] (\{\xi^{(s)}\} + i\{\eta^{(s)}\}) = 0$$

Espandendo i prodotti e facendo annullare separatamente la parte reale da quella immaginaria, si ottengono le due equazioni seguenti:

$$\begin{cases} \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(s)}\} - \{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} = 0 \\ \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} + \{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(s)}\} = 0 \end{cases}$$

Si consideri un autovettore $\{y^{(s)}\}$ che è ortogonale non solo a $\{y^{(r)}\}$ che risulta dal sistema qui sopra, ma anche all'autovettore coniugato $\{\bar{y}^{(r)}\}$. Mediante:

$$\left(\{\xi^{(r)}\}^T - i\{\eta^{(r)}\}^T\right) [A] (\{\xi^{(s)}\} + i\{\eta^{(s)}\}) = 0$$

Questo genera il sistema di due equazioni:

$$\begin{cases} \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(s)}\} - \{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} = 0 \\ \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} + \{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(s)}\} = 0 \end{cases}$$

Considerando le prime equazioni dei due sistemi si tende a ottenere i seguenti risultati:

$$\begin{cases} \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(s)}\} = 0 \\ \{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} = 0 \end{cases}$$

Mentre per le seconde equazioni:

$$\begin{cases} \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} = 0 \\ \{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(s)}\} = 0 \end{cases}$$

È utile introdurre un'ulteriore relazione, se si deriva l'equazione dal primo sistema $\{y^{(s)}\}$ come una coniugata di $\{y^{(r)}\}$, cioè:

$$\{\xi^{(s)}\} = \{\xi^{(r)}\}$$

e

$$\{\eta^{(s)}\} = \{\eta^{(r)}\}.$$

In questo caso la prima equazione del sistema genera la seguente soluzione:

$$\{\xi^{(r)}\}^T [A] \{\xi^{(r)}\} = -\{\eta^{(r)}\}^T [A] \{\eta^{(r)}\}$$

I risultati ottenuti unendo le prime e le seconde equazioni dei sistemi e l'ulteriore relazione esprimono l'ortogonalità degli autovettori in funzione delle loro parti reale e immaginaria. Queste relazioni sono sviluppate con la matrice $[A]$ vista come la matrice peso iniziale con $\{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = 0$. È facile vedere che se si inizia con l'equazione $\{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\} = 0$ si può

mostrare che la stessa relazione impone $[B]$ come matrice peso iniziale. Queste relazioni di ortogonalità saranno utili nel considerare la procedura di iterazione per determinare il sistema degli autovalori e degli autovettori. Saranno utili anche nella soluzione dell'equazione non-omogenea $[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{Y\}$ per essere considerata nel determinare la risposta di un sistema soggetto a forze dipendenti dal tempo.

A.3 Determinazione di Autovalori e Autovettori dalla Matrice d'Iterazione

L'equazione omogenea ridotta $[D]\{y\} = \lambda\{y\}$ potrebbe essere risolta per generare gli autovalori e autovettori di un sistema smorzato dal metodo iterativo simile a quello dei sistemi non-smorzati. Per autovettori complessi, la convergenza non è così facile da riconoscere, comunque, e uno studio aggiuntivo deve esser fatto per verificare la convergenza sia degli autovettori complessi sia degli autovalori complessi. È possibile supporre che il processo iterativo inizi con l'utilizzo di un vettore prova $\{y\}$ che è complesso, nel qual caso si potrebbe avere la selezione di un vettore avente componenti arbitrariamente distribuite sia per quanto riguarda la fase che l'intensità. La normalizzazione di ogni iterazione potrebbe, poi, richiedere la normalizzazione delle ampiezza e, in aggiunta, la rotazione dei gruppi di componenti complesse nel piano complesso, come accennato precedentemente. Si può mostrare che se un vettore prova viene introdotto, risultante in successivi vettori anch'essi reali, la procedura d'iterazione, tuttavia, converge ad autovettori complessi e autovalori per sistemi che sono smorzati per valori inferiori a quello critico.

Se il vettore prova $\{\xi\}$, è considerato essere la parte reale di un vettore complesso $\{y\}$,

$$\{y\} = \{\xi\} + i\{\eta\}$$

poi l'iterazione procede con segue: da $[D]\{y\} = \lambda\{y\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [D]^1\{\xi\} = {}^2\{\xi\} \\ [D]^2\{\xi\} = {}^3\{\xi\} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ [D]^n\{\xi\} = {}^{n+1}\{\xi\} \end{array} \right.$$

Dove l'indice superiore e a sinistra del vettore rappresenta il numero dell'iterazione. Si suppone che il numero n sia grande abbastanza da raggiungere con esso la convergenza con un piccolo errore. Analisi dei vettori ottenuti da successive iterazioni dopo la convergenza mostrerà nessuna apparente evidenza di convergenza. Questo fatto è vero chiaramente esaminando l'effetto di una iterazione nell'attuale vettore complesso. Quindi, dopo convergenza, si ha:

$$[D]^n\{y\} = \lambda^n\{y\} = {}^{(n+1)}\{y\}$$

Dato che $\lambda = 1/p$ l'ultima eguaglianza può essere espressa come:

$${}^n\{y\} = p^{(n+1)}\{y\}$$

Questo dimostra che ogni iterazione ha l'effetto di diminuire l'ampiezza di ogni componente del vettore attraverso la divisione per intensità dell'autovalore p . Inoltre, si ha l'effetto di diminuire la fase angolare per ogni componente attraverso la fase angolare di valore ψ di p dove p [espresso in coordinate polari, come visto nel paragrafo precedente. In particolare, la rotazione del gruppo di componenti complesse nel piano complesso attraverso un angolo costante ψ con ogni iterazione, ha l'effetto di cambiare le parti, reali, di queste componenti in un modo che potrebbe sembrare non esserci un ordine ben stabilito. Il fatto che i successivi vettori ${}^n\{\xi\}$, ${}^{n+1}\{\xi\}$, ${}^{n+2}\{\xi\}$, etc., ottenuti dopo convergenza generino informazioni riguardanti l'autovalore e l'autovettore verrà illustrato adesso.

Si scriva $[D] {}^n\{y\} = \lambda {}^n\{y\} = {}^{(n+1)}\{y\}$ in funzione delle parti, reale e immaginaria, di $\{y\}$ e λ attraverso la sostituzione delle equazioni viste in precedenza:

$$[D]({}^n\{\xi\} + i {}^n\{\eta\}) = (\mu + iv)({}^n\{\xi\} + i {}^n\{\eta\})$$

Separando le parti reale e immaginaria di questa equazione che deve essere separatamente allo stesso modo, si ottengono le seguenti parti reali:

$$\begin{aligned} [D] {}^n\{\xi\} &= \mu {}^n\{\xi\} - \nu {}^n\{\eta\} = {}^{n+1}\{\xi\} \\ [D] {}^n\{\eta\} &= \nu {}^n\{\xi\} - \mu {}^n\{\eta\} = {}^{n+1}\{\eta\} \end{aligned}$$

La prima delle due uguaglianze viene dall'ultimo sistema di iterazioni, mentre la seconda segue da un ragionamento simile applicato all'iterazione sulla parte immaginaria di $\{y\}$. Da queste equazioni si risolve per il vettore ${}^n\{\eta\}$:

$$\begin{aligned} {}^n\{\eta\} &= \frac{\mu}{\nu} {}^n\{\xi\} - \frac{1}{\nu} {}^{n+1}\{\xi\} \\ {}^n\{\eta\} &= \frac{1}{\mu} {}^{n+1}\{\eta\} - \frac{\nu}{\mu} {}^n\{\xi\} \end{aligned}$$

Eliminando ${}^n\{\eta\}$ da queste due equazioni, si trova la seguente relazione:

$$\left(\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{\mu}\right) {}^n\{\xi\} - \frac{1}{\nu} {}^{n+1}\{\xi\} - \frac{1}{\mu} {}^{n+1}\{\eta\} = \{0\}$$

Adesso, sostituendo n con $n+1$, l'equazione potrebbe essere riscritta per dare un'espressione per il vettore ${}^{n+1}\{\eta\}$:

$${}^{n+1}\{\eta\} = \frac{\mu}{\nu} {}^{n+1}\{\xi\} - \frac{1}{\nu} {}^{n+2}\{\xi\}$$

Sostituendo questa nella relazione precedente, porta ad avere la seguente equazione tra le successive colonne $\{\xi\}$:

$$(\mu^2 + \nu^2) {}^n\{\xi\} - 2\mu {}^{n+1}\{\xi\} + {}^{n+2}\{\xi\} = \{0\}$$

Di nuovo, sostituendo n con $n+1$ in questa equazione, si può vedere che la seguente anche impone:

$$(\mu^2 + \nu^2) {}^{n+1}\{\xi\} - 2\mu {}^{n+2}\{\xi\} + {}^{n+3}\{\xi\} = \{0\}$$

Dalle equazioni appena scritte, relative ai successivi vettori ${}^n\{\xi\}, \dots, {}^{n+1}\{\xi\}$, essi si riferiscono anche alle componenti separate di questi vettori, si possono scrivere due equazioni corrispondenti:

$$\begin{cases} (\mu^2 + \nu^2) {}^n\xi_i - 2\mu {}^{n+1}\xi_i + {}^{n+1}\xi_i = 0 \\ (\mu^2 + \nu^2) {}^{n+1}\xi_i - 2\mu {}^{n+2}\xi_i + {}^{n+2}\xi_i = 0 \end{cases}$$

Eliminando i secondi termini da queste equazioni si ottiene la seguente equazione che dà la radice dell'ampiezza di un autovalore λ :

$$(\mu^2 + \nu^2) = \frac{{}^{(n+1)}\xi_i {}^{(n+3)}\xi_i - {}^{(n+2)}\xi_i^2}{{}^{(n)}\xi_i {}^{(n+2)}\xi_i - {}^{(n+1)}\xi_i^2}$$

Dall'eliminazione del primo termine nelle equazioni del sistema appena scritto, si trova la parte reale dell'autovalore λ :

$$2\mu = \frac{{}^{(n)}\xi_i {}^{(n+3)}\xi_i - {}^{(n+1)}\xi_i {}^{(n+2)}\xi_i}{{}^{(n)}\xi_i {}^{(n+2)}\xi_i - {}^{(n+1)}\xi_i^2}$$

Quindi, si può vedere che è possibile ottenere l'autovalore λ , insieme con l'autovalore associato p attraverso il sistema, qui riportato:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{\mu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \\ \beta_k = -\frac{\nu_k}{\mu_k^2 + \nu_k^2} \end{cases}$$

usando le colonne successive di $\{\xi\}$ ottenute per iterazione sull'equazione $[D]\{y\} = \lambda\{y\}$, con una colonna di prova di numeri reali come effettuato nel sistema delle iterazioni. Ad ogni step di iterazione si effettuano i calcoli associate date dalle ultime due relazioni sull'autovalore λ . Il processo d'iterazione contiene finché queste, secondo i calcoli generano autovalori λ ripetitivi. A questo punto la parte reale dell'autovettore $\{y\}$ è data dalla colonna ${}^n\{\xi\}$. Per ottenere la parte immaginaria dell'autovettore si ritorna alla relazione ${}^n\{\eta\} = (\mu/\nu) {}^n\{\xi\} - (1/\nu) {}^{n+1}\{\xi\}$ e inserire i valori di μ e di ν come determinato precedentemente.

A.4 Sweeping

Seguendo la dimostrazione per la convergenza, è possibile dimostrare che l'iterazione sull'equazione $[D]\{y\} = \lambda\{y\}$ come descritto nel precedente paragrafo, convergerà ad un modo avente l'autovalore λ con il valore assoluto più grande. Per convergere per iterazione al modo avente autovalore con valore maggiore sarà necessario rimuovere il primo modo attraverso una procedura di "pulizia" simile a quella per sistemi non-smorzati. In funzione di autovettori complessi questa procedura si basa sulla richiesta che il vettore complesso di prova $\{\bar{y}^{(1)}\}$. Quindi, due equazioni sono scritte così:

$$\{\bar{y}^{(1)}\}^T [A]\{y\} = 0$$

$$\{\bar{y}^{(1)}\}^T [A]\{y\} = 0$$

Seguendo la procedura sull'ortogonalità del paragrafo dedicato, queste ortogonalità possono essere scritte in funzione della parte reale e di quella immaginaria, che tendono alle seguenti equazioni, comparabili a quelle viste in precedenza:

$$\begin{cases} \{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \\ \{\eta^{(1)}\}^T [A]\{\eta\} = 0 \\ \{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\eta\} = 0 \\ \{\eta^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \end{cases}$$

dove $\{\xi\}$ e $\{\eta\}$ sono le parti reali e immaginarie, rispettivamente, di un vettore di prova $\{y\}$. Visto la procedura iterativa discussa nel paragrafo precedente che coinvolge solo parte reale del vettore, la prima e l'ultima equazioni del sistema appena visto servono. Questa è una parte delle equazioni reali che assicurano la convergenza dell'iterazione per il vettore di prova $\{\xi\}$, così definito, per il secondo modo. La procedura numerica per la costruzione della matrice di pulizia $[S]$ è la stessa dei sistemi non-smorzati. Si vede che l'uso di queste due equazioni porterà alla matrice di pulizia che, quando è pre-moltiplicata per a matrice dinamica $[D]$, darà una matrice dinamica limitata nella quale appaiono due righe e colonne nulle. Quindi, ogni processo di pulizia toglie via due righe e due colonne nella matrice dinamica. Dato che questa è una matrice di ordine $2n$, per un sistema con n gradi di libertà, solo n di questi procedimenti di pulizia sono richiesti per generare tutti i $2n$ autovettori del sistema. Non sorprende che appaiono in coppie coniugate da questi processi.

Come suggerito precedentemente, La prima e la quarta equazioni potrebbero essere usate per costruire la matrice di pulizia. La quarta equazione richiede di calcolare la parte immaginaria dell'autovettore che potrebbe essere fatta attraverso ${}^n\{\eta\} = (\mu/\nu) {}^n\{\xi\} - (1/\nu)^{n+1}\{\xi\}$. Questo passo potrebbe essere evitato, se si desidera, attraverso l'uso alternativo di un paio di equazioni ortogonali. Per costruire questa alternativa si scrive le prima e quarta equazioni usando le parti reale e immaginaria del primo autovettore come fosse ottenuto dopo n iterazioni:

$$\begin{cases} {}^n\{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \\ {}^n\{\eta^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \end{cases}$$

Dalla equazione ${}^n\{\eta\} = (\mu/\nu) {}^n\{\xi\} - (1/\nu)^{n+1}\{\xi\}$, si determina la parte immaginaria:

$${}^n\{\eta^{(1)}\} = \frac{\mu_1}{\nu_1} {}^n\{\xi^{(1)}\} - \frac{1}{\nu_1} {}^{n+1}\{\xi^{(1)}\}$$

Sostituendo questa nella seconda equazione del precedente sistema si ottiene:

$$\frac{\mu_1}{\nu_1} {}^n\{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} - \frac{1}{\nu_1} {}^{n+1}\{\xi^{(1)}\} [A]\{\xi\} = 0$$

Dato che il primo termine di questa equazione è nullo in virtù della prima equazione del sistema soprastante, segue che il secondo termine sarà anch'esso nullo. Quindi, le due equazioni ortogonali a cui si riferisce sono:

$$\begin{cases} {}^{(n)}\{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \\ {}^{(n+1)}\{\xi^{(1)}\}^T [A]\{\xi\} = 0 \end{cases}$$

Qui, i due vettori $\{\xi^{(1)}\}$ ottenuti in successive iterazioni dopo convergenza sono usati per costruire la matrice di pulizia.

A.5 Disaccoppiamento delle Equazioni Non-Omogenee

Gli autovettori che definiscono i modi di vibrare di un sistema sono usati per costruire una trasformazione di coordinate nella quale le equazioni del moto sono disaccoppiate. La trasformazione è data da:

$$\{y\} = [\Delta]\{z\}$$

La matrice di trasformazione $[\Delta]$ è costruita colonna per colonna usando i $2n$ autovettori; $\{y^{(1)}\}, \{\bar{y}^{(1)}\}, \dots, \{y^{(r)}\}, \{\bar{y}^{(r)}\}, \dots, \{y^{(n)}\}, \{\bar{y}^{(n)}\}$. Quindi, la matrice è di ordine $2n$. Dove esistono autovettori complessi, si usano sia il vettore che il suo coniugato.

$$\begin{aligned} [\Delta] &= [\{y^{(1)}\}, \{\bar{y}^{(1)}\}, \dots, \{y^{(r)}\}, \{\bar{y}^{(r)}\}, \dots, \{y^{(n)}\}, \{\bar{y}^{(n)}\}] = \\ &= [\{\Delta^{(1)}\}, \{\Delta^{(2)}\}, \dots, \{\Delta^{(2n)}\}] \end{aligned}$$

Quando questa matrice di trasformazione è applicata ad un'equazione non omogenea, si ottiene il seguente risultato:

$$[\Delta][A][\Delta]\{\dot{z}\} + [\Delta]^T[A][\Delta]\{z\} = [\Delta]^T\{Y\}$$

I prodotti matriciali sono calcolati e l'equazione risultante è scritta come:

$$\langle A \rangle \{\dot{z}\} + \langle B \rangle \{z\} = \{Z\}$$

dove

$$\langle A \rangle = [\Delta][A][\Delta]$$

$$\langle B \rangle = [\Delta]^T[A][\Delta]$$

$$\{Z\} = [\Delta]^T\{Y\}$$

Le matrici $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ sono diagonali come risultato delle condizioni di ortogonalità espresse nelle equazioni $\{y^{(r)}\}^T [A]\{y^{(s)}\} = 0$ e $\{y^{(r)}\}^T [B]\{y^{(s)}\} = 0$. Gli elementi A_{rs} e B_{rs} si possono scrivere nella forma:

$$A_{rs} = \{\Delta^{(r)}\}^T [A]\{\Delta^{(s)}\}$$

$$B_{rs} = \{\Delta^{(r)}\}^T [B]\{\Delta^{(s)}\}$$

Dato che le colonne $\{\Delta\}$ si possono identificare con gli autovettori $\{y\}$, in accordo all'espressione della matrice di trasformazione, queste equazioni si scrivono come:

$$A_{rs} = \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\}$$

$$B_{rs} = \{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\}$$

Entrambi sono nulle per $s \neq r$, visto precedentemente, e hanno i valori seguenti per $s = r$:

$$A_r = \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(r)}\}$$

$$B_r = \{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(r)}\}$$

Se nell'equazione $p_r \{y^{(r)}\}^T [A] \{y^{(s)}\} = -\{y^{(r)}\}^T [B] \{y^{(s)}\}$, si pone $s = r$, risulta la seguente relazione:

$$B_r = -p_r A_r$$

La r -esima equazione del set disaccoppiato possono adesso essere scritte come:

$$\langle A \rangle_r \dot{z}_r + \langle B \rangle_r z_r = Z_r$$

o, sostituendola precedente relazione, quest'ultima diventa:

$$\dot{z}_r - p_r z_r = \frac{Z_r}{A_r}$$

dove

$$Z_r = \{y^{(r)}\}^T \{Y\}$$

Se $\{y^{(r)}\}$ è complesso e perciò ha una coniugata complessa $\{\bar{y}^{(r)}\}$, poi si otterrà un'espressione da accompagnare la relazione precedente, cioè:

$$\bar{A}_r = \{\bar{y}^{(r)}\}^T [A] \{\bar{y}^{(r)}\}$$

$$\bar{B}_r = \{\bar{y}^{(r)}\}^T [B] \{\bar{y}^{(r)}\}$$

dove \bar{A}_r e \bar{B}_r sono coniugate complesse di A_r e di B_r , rispettivamente. Si può anche mostrare che:

$$\bar{B}_r = -\bar{p}_r \bar{A}_r$$

Allo stesso modo, come si è visto, segue:

$$\bar{Z}_r = \{\bar{y}^{(r)}\}^T \{Y\}$$

Da questi risultati l'equazione che accompagna l'espressione per il campo complesso si potrà scrivere come:

$$\dot{z}_r^* - \bar{p}_r z_r^* = \frac{\bar{Z}_r}{\bar{A}_r}$$

Qui si l'asterico per distinguere la variabili z_r associate con l'equazione che accompagna l'espressione della complessa. Le due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{z}_r - p_r z_r = \frac{Z_r}{A_r} \\ \dot{z}_r^* - \bar{p}_r z_r^* = \frac{\bar{Z}_r}{A_r} \end{cases}$$

sono entrambe svolte per determinare la risposta di un sistema smorzato non-omogeneo nell' r -esimo modo disaccoppiato.

A.6 Soluzione delle Equazioni Disaccoppiate

Le soluzioni appena trovate alla fine del paragrafo precedente si scrivono nella forma generale attraverso l'uso delle trasformate di Laplace. Si usi le seguenti trasformate:

$$\mathcal{L}z_r(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} z_r(t) dt = z_r(s)$$

$$\mathcal{L}\dot{z}_r(t) = s z_r(s) - z_r(t=0)$$

$$\mathcal{L}z_r(t) = Z_r(s)$$

Si deve considerare lo spostamento iniziale $z_r(t=0)$ essere nullo, di conseguenza, la trasformata di Laplace della prima equazione dell'ultimo sistema è:

$$z_r(s) = \frac{1}{A_r} \frac{Z_r(s)}{s - p_r}$$

La trasformata inversa può essere scritta immediatamente in funzione dell'integrale di convoluzione come:

$$z_r(t) = \frac{1}{A_r} \int_0^{\infty} e^{p_r(t-\tau)} Z_r(\tau) d\tau$$

Allo stesso modo, la soluzione all'equazione che accompagna la seconda del sistema è:

$$z_r^*(t) = \bar{z}_r(t)$$

Avendo adesso la soluzione che dà la risposta del r -esimo modo disaccoppiato alla forza dipendente dal tempo per $Z_r(t)$, si procede attraverso le trasformazioni di coordinate per trovare la risposta alla forza generalizzata $\{Q(t)\}$ in funzione del vettore generalizzato dello spostamento $\{q(t)\}$. La trasformazione $\{y\} = [\Delta]\{z\}$, per questo scopo, si scrive nella forma convenzionale:

$$\{y(t)\} = \sum_{r=1}^n \left(\{y^{(r)}\} z_r(t) + \{\bar{y}^{(r)}\} \bar{z}^{(r)}(t) \right)$$

È possibile vedere che $\{y(t)\}$ è reale e si scrive come due volte la parte reale di un numero complesso nel lato destro di quest'equazione.

Quindi, si scrive:

$$\{y(t)\} = 2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R}\{y^{(r)}\} z_r(t)$$

dove \mathcal{R} sta per "la parte reale di". Si usi la trasformazione connessa con $[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{Y\}$ che lega $\{y\}$ e $\{q\}$, la quale è riscritta per convenienza:

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{q\} \end{Bmatrix}$$

Applicando l'equazione $\{\dot{y}\} = p\{y\}$ si vede che il vettore r -esimo si scrive nella forma:

$$\{y^{(r)}\} = \begin{Bmatrix} p_r\{q^{(r)}\} \\ \{q^{(r)}\} \end{Bmatrix}$$

Se si sostituiscono le equazioni le ultime due equazioni nella relazione dato da due volte la parte reale precedentemente scritta, si può scrivere la parte di spostamento del vettore $\{y\}$ in funzione dell'autovettore:

$$\{q^{(r)}\} = 2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R}\{q^{(r)}\} z_r(t)$$

Operando la sostituzione dell'equazione $z_r(t) = (1/A_r) \int_0^\infty e^{p_r(t-\tau)} Z_r(\tau) d\tau$, la soluzione ha la forma:

$$\{q^{(r)}\} = 2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R} \frac{\{q^{(r)}\}}{A_r} \int_0^\infty e^{p_r(t-\tau)} Z_r(\tau) d\tau$$

La forza Z_r è espressa in funzione del vettore forza $\{Q\}$ mediante l'uso della definizione associata con le equazioni

$$\begin{aligned} Z_r &= \begin{Bmatrix} p_r\{q^{(r)}\} \\ \{q^{(r)}\} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \{q^{(r)}\}^T \{Q\} = \\ &= \sum_{r=1}^n q_k^{(r)} Q_k(\tau) \end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultima nella relazione $\{q^{(r)}\}$, si ottiene:

$$\{q^{(r)}\} = 2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R} \frac{\{q^{(r)}\}}{A_r} \sum_{r=1}^n q_k^{(r)} \int_0^\infty e^{p_r(t-\tau)} Q_k(\tau) d\tau$$

Per effettuare la soluzione ulteriormente sarà convertita per introdurre le seguenti fasi angolari. Si ha:

$$\begin{aligned} A_r &= |A_r| e^{i\theta^{(r)}} \\ q_j^{(r)} &= |q_j^{(r)}| e^{i\theta_j^{(r)}} \\ q_k^{(r)} &= |q_k^{(r)}| e^{i\theta_k^{(r)}} \end{aligned}$$

Usando queste espressioni e l'equazione $p_k = (1/\lambda_k) = \alpha_k + i\beta_k$ il j -esimo componente del vettore $\{q_j(t)\}$ nell'equazione precedente si esprime nella seguente forma:

$$q_j(t) = 2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R} \frac{|q_j(t)|}{|A_r|} e^{i\theta_j^{(r)}} e^{-i\theta^{(r)}} \sum_{r=1}^n |q_k^{(r)}| e^{i\theta_k^{(r)}} \int_0^\infty e^{\alpha_r(t-\tau)} e^{\beta_r(t-\tau)} Q_k(\tau) d\tau$$

Collegando le fasi angolari e esprimendo solo la parte reale del risultato complesso si ottiene:

$$2 \sum_{r=1}^n \mathcal{R} \frac{|q_j(t)|}{|A_r|} \sum_{r=1}^n |q_k^{(r)}| \int_0^\infty e^{\alpha_r(t-\tau)} \cos[\beta_r(t-\tau) - \theta^{(r)} + \theta_j^{(r)} + \theta_k^{(r)}] Q_k(\tau) d\tau$$

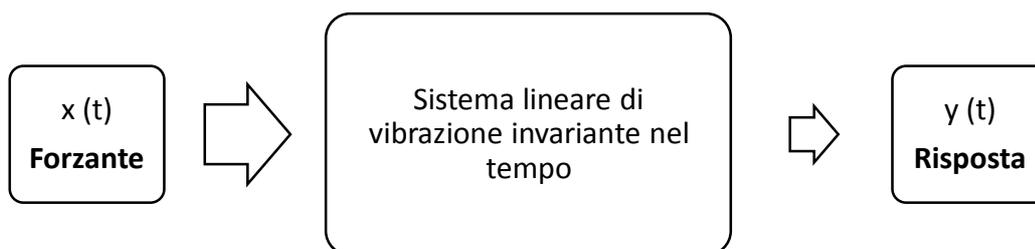
Questa equazione esprime, nella forma reale, lo spostamento in risposta a forze generalizzate dipendenti dal tempo.

Appendice B Funzione di trasferimento di Fourier

Un sistema è definito lineare e indipendente dal tempo se le sue equazioni del moto prendono la forma di equazioni differenziali lineari con coefficienti costanti. Un sistema ad un grado di libertà può essere descritto da una singola equazione differenziale di secondo grado. Uno a due gradi di libertà può essere descritto con una coppia di equazioni differenziali di secondo grado, ecc.

B.1 Relazioni Forzante-Risposta

Il problema generale è mostrato schematicamente dalla figura. L'eccitazione temporale è $x(t)$ e la risposta temporale è $y(t)$.



Se $x(t)$ è una cronologia temporale determinata, è possibile poi ottenere una specifica risposta per $y(t)$ attraverso l'integrazione le equazioni differenziali del moto, soggette alle condizioni iniziali. Molte tecniche esistono per ottenere le soluzioni per linearizzare equazioni differenziali con coefficienti costanti. Due procedure sono descritte:

- 1- L'uso della risposta in frequenza complessa assieme all'integrale di Fourier;
- 2- L'uso della risposta impulsiva assieme alla sovrapposizione o alla convoluzione integrale.

Questi due metodi sono legati dal fatto che sono essenzialmente delle trasformate di Fourier.

B.2 Risposta Complessa in Frequenza

È una priorità di un sistema lineare indipendente dal tempo che, quando l'eccitazione è un semplice moto armonico (senza inizio e fine), poi la risposta è anche un semplice moto armonico alla stessa frequenza. L'ampiezza e la fase della risposta generalmente dipendono dalla frequenza. Un metodo conciso di descrivere la dipendenza dalla frequenza dell'ampiezza e dalla fase è quello di dare la risposta complessa della frequenza $H(\omega)$. Questa proprietà che quando l'eccitazione è la parte reale di " $e^{i\omega t}$ ", poi la risposta è la parte reale di $H(\omega)e^{i\omega t}$. La risposta complessa della frequenza $H(\omega)$ è ottenuta analiticamente sostituendo:

$$\begin{aligned}x &= e^{i\omega t} \\y &= H(\omega)e^{i\omega t}\end{aligned}$$

nell'equazione del moto, cancellando il termine $e^{i\omega t}$, e risolvendo algebricamente per $H(\omega)$. Sperimentalmente è necessario ottenere il rapporto delle ampiezze e la differenza di fase tra output e input per l'operazione dello stato sinusoidale come frequenza ω è slittata oltre il range desiderato.

Da $H(\omega)$ è essenziale una misura di output per unità di input la sua dimensione avrà la dimensione del quoziente y/x . Perciò se $x(t)$ è un'accelerazione e $y(t)$ è una tensione $H(\omega)$ sarà libbre per pollice quadrato per g. Nelle strutture complesse dove molte più risposte rispetto alla singola (o molte più eccitazioni rispetto ad una singola) è d'interesse, sarà necessario usare pedici alle adeguate identità che la risposta complessa sta considerando.

La conoscenza di una risposta complessa delle frequenze $H(\omega)$ per tutte le frequenze contiene tutte l'informazione necessaria per ottenere la risposta $y(t)$ ad una eccitazione $x(t)$ arbitraria conosciuta. La base per questa osservazione è il "principio della sovrapposizione", che si applica a sistemi lineari. La sovrapposizione qui è sviluppata nel dominio della frequenza usando il metodo di Fourier. Quando $x(t)$ ha un periodo, può essere decomposto in sinusoidi che formano le serie di Fourier. La risposta per ogni sinusoidale, separatamente, è fornita dalla $H(\omega)$ e queste risposte formano le nuove serie di Fourier che rappresentano la risposta $y(t)$. Quando $x(t)$ non è periodica ma ha una "Trasformata di Fourier":

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

Poi un'analogia sovrapposizione è valida. Per ogni componente della frequenza separatamente $y = H(\omega)e^{i\omega t}$ porta a produrre:

$$Y(\omega) = y = H(\omega)X(\omega)$$

Come la trasformata di Fourier della risposta $y(t)$. La stessa risposta è data attraverso la rappresentazione dell'integrale di Fourier:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Fornisce una generale relazione tra input-output per un'ampia classe di input:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{i\omega\tau} d\omega$$

In principio, la conoscenza di $H(\omega)$ permette valutazioni di equazione per dare la risposta esplicita $y(t)$ per eccitazione arbitraria $x(t)$. Una generale relazione input-output è applicabile alle vibrazioni random. Una relazione come questa vale per ogni corrispondente paio di esempi nell'input e output processi random. Mentre gli integrali coinvolte sono spesso molto difficile per esempi di funzioni

individuali, qualche volta è abbastanza semplice per ottenere le medie statistiche di output attraverso le medie di input e poi si sviluppa il solo integrale del singolo caso.

B.3 Risposta Impulsiva

Una soluzione generale per la risposta di un sistema lineare indipendente dal tempo può essere ottenuto dalla sovrapposizione le soluzioni unitarie nel dominio del tempo. Sebbene altre eccitazioni unitarie possono essere usate, noi votiamo per impiegare l'impulso unitario; si prende $x(t)$ per avere la forma:

$$x(t) = \Delta(t - \tau)$$

dove $(t - \tau)$ è la delta di Dirac, la quale è nulla, eccetto per $t = \tau$ dove si chiude l'area unitaria. L'ordinata per $t = \tau$ è infinita. Nel caso $x(t)$ rappresenti una forza nel tempo, poi $\Delta(t - \tau)$ rappresenta un picco d'impulso nel senso della meccanica classica.

Quando $x(t)$ rappresenta un'accelerazione nel tempo, $\Delta(t - \tau)$ rappresenta l'accelerazione che accompagna un istantaneo cambiamento di velocità.

Mentre la parola impulso applicata strettamente solo quando $x(t)$ è una forza nel tempo è comunemente usata per indicare il comportamento alla Delta di Dirac di $x(t)$, nessun'altra entità fisica è rappresentata.

Si andrà a definire funzione a "Risposta impulsiva" "h (t - tau)". Anche in questo caso l'impulso contiene tutte le info per conoscere la risposta $y(t)$ di un'arbitraria eccitazione $x(t)$. Sempre grazie al "principio della sovrapposizione", che adesso è applicato al dominio del tempo. Per la linearità la risposta $y(t)$ è data dalla seguente sovrapposizione o convoluzione integrale.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

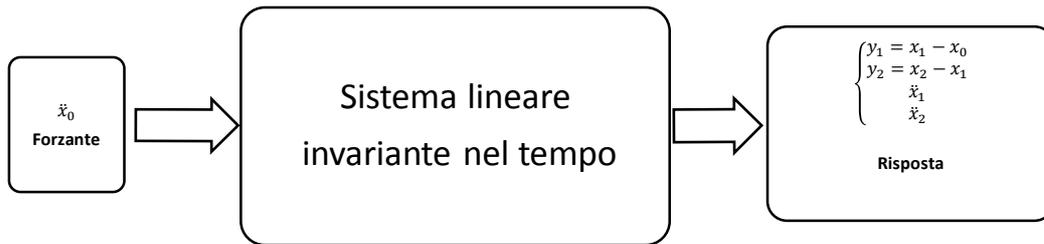
Se osserviamo i due metodi per ricavare la risposta $y(t)$ di un' eccitazione random $x(t)$ sono relazionati.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt$$

B.4 Sistema a due gradi di libertà

L'accelerazione del supporto è definita da x derivata due volte. Sono 4 le risposte che possiamo ottenere dal sistema: i due spostamenti relativi y_1 e y_2 e le accelerazioni assolute x_1 e x_2 . Le equazioni differenziali del moto in termini di spostamenti relativi sono, rispetto allo schema in figura 0-1:



$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 = -m_1 \ddot{x}_0$$

$$m_2 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = -m_2 \ddot{x}_0$$

che connettono le risposte y_1 e y_2 all'accelerazione x . Semplicemente sostituendo, si ottengono le accelerazioni assolute, $x_1 = x_0 + y_1$ e $x_2 = x_0 + y_1 + y_2$:

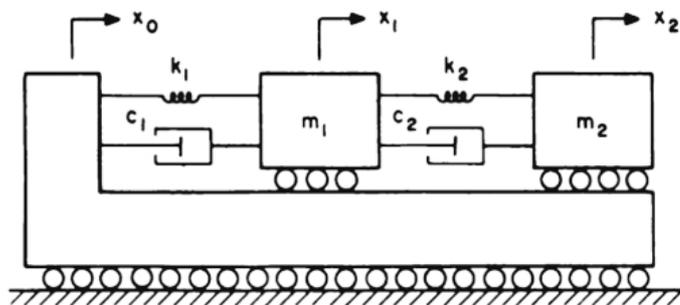


Figura 0-1 Sistema a due gradi di libertà

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 \dot{y}_1 - k_1 y_1 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 \end{aligned}$$

Perciò ci sono quattro risposte complesse delle frequenze.

$$\ddot{x}_0 = e^{i\omega t} \begin{cases} y_1 = H_{y_1}(\omega) e^{i\omega t} \\ y_2 = H_{y_2}(\omega) e^{i\omega t} \end{cases}$$

Il primo paio delle risposte complesse è:

$$\begin{aligned} H_{y_1}(\omega) &= \frac{\omega^2 - i\omega(1 + \mu)2\xi_2\omega_2 - (1 + \mu)\omega_2^2}{\Delta} \\ H_{y_2}(\omega) &= \frac{-i\omega 2\xi_1\omega_1 - \omega_1^2}{\Delta} \end{aligned}$$

dove il denominatore vale:

$$\begin{aligned} \Delta = & \omega^4 - i\omega^3[2\xi_1\omega_1 + 2(1 + \mu)\xi_2\omega_2] \\ & - \omega^2[\omega_1^2 + (1 + \mu)\omega_2^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2] \\ & + i\omega[2\xi_1\omega_1\omega_2^2 + 2\xi_2\omega_2\omega_1^2] + \omega_1^2\omega_2^2 \end{aligned}$$

Il secondo paio di equazioni delle frequenze sono:

$$\begin{aligned} H_{\ddot{x}_1}(\omega) &= \frac{[-i\omega^3 2\xi_1\omega_1 - \omega^2(\omega_1^2 + 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2) + i\omega(2\xi_1\omega_2\omega_1^2) + \omega_1^2\omega_2^2]}{\Delta} \\ H_{\ddot{x}_2}(\omega) &= \frac{-\omega^2 4\xi_1\xi_2\omega_1\omega_2 - i\omega(2\xi_1\omega_1\omega_2^2 + 2\xi_2\omega_2\omega_1^2) + \omega_1^2\omega_2^2}{\Delta} \end{aligned}$$

B.5 Relazioni Forzante-Risposta per Processi Stazionari Random

In questo paragrafo si affronta il problema della presenza di più forzanti dipendenti dal tempo, cioè i processi random. Quando la forzante che eccita il sistema è data da un processo stazionario random, poi la risposta è anch'essa un processo stazionario random. Si può mostrare come le più importanti proprietà statistiche di un processo di risposta può essere dedotto dalla conoscenza del sistema e dalle proprietà statistiche della forzante.

Il principale valore della risposta, per il problema illustrato inizialmente, è lo scopo iniziale. Per ogni semplice forzante e risposta si ha la relazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Theta) h(\Theta) d\Theta$$

Usando $E[\]$ per definire l'insieme medio si può immaginare che la relazione soprastante si possa scrivere per ogni coppia di x, y nell'insieme e poi mediare:

$$E[y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \Theta) h(\Theta) d\Theta \right]$$

Dato che integrazione e insieme medio sono entrambi operatori lineari il loro scambio è possibile in questo caso:

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[x(t - \Theta)h(\Theta)]d\Theta$$

Adesso $E[x(\tau)]$ è una costante indipendente di τ quando x è un processo random *stazionario*, così che finalmente:

$$E[y(t)] = E[x(t)] \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta) d\Theta$$

che dà il valore medio del processo in output in funzione di quello medio di input. L'integrale dell'equazione precedente è un sistema costante che può essere dato alternativamente impostando $\omega = 0$, nell'equazione $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt$ per ottenere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta) d\Theta = H(0)$$

Attraverso la conoscenza dell'impulso di risposta $h(t)$ p della frequenza di risposta $H(\omega)$ permette di trovare il rapporto tra i valori medi di output e di input. Si noti che $E[y(t)]$. È attualmente indipendente dal tempo.

In particolare, se il valore di input medio è zero poi lo sarà anche l'output. In molte applicazioni è conveniente definire i processi coinvolgendo questa metodologia in modo da avere il valore finale medio nullo. Questo semplifica il trattamento snellendolo e permette di concentrarsi sulle essenziali proprietà del secondo ordine di una funzione autocorrelante e sulla radice quadrata della densità spettrale del segnale della forzante.

La tecnica appena illustrata può essere applicata a insieme complessi agevolmente: la *funzione di autocorrelazione*. Per una particolare coppia di funzioni input e output si può usare la prima relazione due volte per scrivere:

$$(y)^t y(t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta_1) h(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau - \theta_2) h(\theta_2) d\theta_2$$

Ogni volta che gli integrali coinvolti son convergenti è possibile scrivere il prodotto di uno dei due integrali come un doppio integrale. Poi si sviluppa l'insieme medio di tutte queste relazioni:

$$E[(y)^t y(t + \tau)] = E \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta_1) x(t + \tau - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \right]$$

Successivamente, scambiando l'ordine di integrazione e mediando e usando il fatto che per un processo stazionario $x(t)$ la media $E[(t - \theta_1) x(t + \tau - \theta_2)]$ è già la funzione di autocorrelazione per $x(t)$ con un ritardo di $\tau - \theta_2 + \theta_1$; cioè $R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2)$, si ha:

$$E[(y)^t y(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

Finalmente, il fatto che la parte destra è indipendente dal tempo prova che la parte sinistra è una funzione solo di τ , cosicché sia giustificato scrivere la funzione di autocorrelazione di una risposta come $R_y(\tau)$. Quindi si ottiene:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

Cioè la relazione desiderata tra la funzione di autocorrelazione di input $R_x(\tau)$ e quella di output $R_y(\tau)$.

Una lieve estensione dell'argomento già visto può essere usata per mostrare che tutte le medie statistiche di output di un sistema stabile sono invarianti sotto una traslazione di scala temporale ogni volta che il processo di input è stazionario. Questa è sufficientemente indicativa per affermare che anche il processo di output sia stazionario.

La relazione appena vista tra funzioni input e output di autocorrelazioni è stata ottenuta dalla costruzione di una media statistica per mezzo dell'integrale di sovrapposizione o di convoluzione. È anche possibile iniziare con l'integrale di Fourier per input-output che afferma e costruisce una media statistica, che coinvolge la densità spettrale. Una poco complessa procedura per ottenere una relazione input-output per le densità spettrali è di iniziare dalle relazioni tra funzioni di autocorrelazione e usare la relazione di Wiener-Khintchine per trasformarle in densità spettrali.

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Il tentativo è quello, quindi, di moltiplicare entrambi i lati della relazione per $e^{-i\omega\tau}/2\pi$ e di integrare da $-\infty$ a $+\infty$. Il lato sinistro è $S_y(\omega)$ e quello destro è tre volte l'integrale che può essere manipolato nella forma dove la relazione Wiener-Khintchine può essere usata di nuovo per trasformare la funzione input di autocorrelazione $R_x(\tau)$ nella densità spettrale di input $S_x(\omega)$. Inizialmente si prova a:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \Theta_1 - \Theta_2) h(\Theta_1) h(\Theta_2) d\Theta_1 d\Theta_2$$

Poi l'ordine di integrazione è invertito e i fattori esponenziali $e^{-i\omega\Theta_1}$, $e^{-i\omega\Theta_2}$, $e^{[-i\omega(\Theta_1-\Theta_2)]}$ (che il prodotto dà l'unità), sono invertiti:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta_1) e^{-i\omega\Theta_1} d\Theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\Theta_2) e^{-i\omega\Theta_2} d\Theta_2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau + \Theta_1 - \Theta_2) e^{[-i\omega(\tau + \Theta_1 - \Theta_2)]} d\tau$$

Nel terzo integrale su Θ_1 e Θ_2 sono imposti costanti cosicché la variabile di integrazione possa essere presa per essere $\xi = \tau + \Theta_1 - \Theta_2$. Poi si riconosce la relazione di Wiener-Khintchine:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi$$

Il secondo integrale è ricondotto alla funzione di trasferimento di Fourier $H(\omega)$ di una risposta impulsiva $h(\Theta_2)$. Il primo integrale ha la forma identica eccetto per il segno nell-esponente. Può essere scritto come $H(-\omega)$ e si deve vedere che la parte coniugata complessa di $H(\omega)$. Con queste interpretazioni la relazione precedente si semplifica:

$$S_y(\omega) = H(-\omega)H(\omega)S_x(\omega)$$

Una lieve più compatta forma si raggiunge notando che il prodotto di $H(\omega)$ e il suo coniugato complesso si deve scrivere come il quadrato dell'intensità di $H(\omega)$; cioè:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Questa è la relazione tra la densità spettrale di una forzante $x(t)$ e quella della risposta $y(t)$. Si noti che questa è una relazione algebrica in contrasto al doppio integrale nella funzione di

autocorrelazione. Si noti anche che l'informazione sulla *fase* nella frequenza della risposta complessa non è usata. Solo l'intensità $|H(\omega)|$ della quantità complessa $H(\omega)$ è richiesta.

La radice media $E[y^2]$ di un processo di risposta $y(t)$ può essere ottenuta quando si conosce o la funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$ o la densità spettrale $S_y(\omega)$ di risposta. Queste si devono riproporre in funzione del processo di input $x(t)$ usando i risultati delle funzioni di autocorrelazione. Quindi se tale funzione $R_x(\tau)$ è conosciuta ha:

$$E[y^2] = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\theta_1 - \theta_2) h(\theta_1) h(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

Mentre se come input ci si avvale della radice media della densità spettrale:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

Negli studi analitici lo spettro di input è spesso assunto come rumore bianco; cioè $S_x(\omega) = S_0$, una costante per tutte le frequenze. L'integrale della densità spettrale si riduce a:

$$E[y^2] = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

Per agevolare questo calcolo si riportano gli integrali delle forme più semplici di $H(\omega)$.

$$H(\omega) = \frac{B_0}{i\omega A_1 + A_0} ; \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi \frac{B_0^2}{A_0 A_1}$$

$$H(\omega) = \frac{i\omega B_1 + A_0}{-i\omega A_2 + i\omega A_1 + A_0} ; \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi \frac{(B_0^2/A_0)A_2 + B_1^2}{A_1 A_2}$$

$$H(\omega) = \frac{-\omega^2 B_2 + i\omega B_1 + B_0}{-i\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0} ; \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi \frac{(B_0^2/A_0)A_2 A_3 + A_3(B_1^2 - 2B_0 B_2) + A_2 B_2^2}{A_1 A_2 A_3 - A_0 A_3^2}$$

$$H(\omega) = \frac{-i\omega^3 B_3 + \omega^2 B_2 + i\omega B_1 + B_0}{\omega^4 A_4 - i\omega^3 A_3 - \omega^2 A_2 + i\omega A_1 + A_0} ; \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \pi \frac{[(B_0^2/A_0)(A_2 A_3 - A_1 A_4) + A_3(B_1^2 - 2B_0 B_2) + A_2(B_2^2 - 2B_1 B_3) + (B_3^2/A_4)(A_1 A_2 - A_0 A_3)]}{A_1(A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2}$$

B.6 Risposta di un Sistema a due gradi di libertà ad una Forzante Stazionaria Random: Rumore Bianco

Nel caso d'interesse per il procedimento sviluppato dagli studiosi Feng e Mita [14], è opportuna dedicare del tempo alla forzante idealizzata a rumore bianco. I valori medi delle radici dei processi di risposta sono ottenute dall'integrazione della densità spettrale in accordo alla relazione generale:

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

Dato che la forzante è un rumore bianco, si riduce e la formula può essere applicata direttamente alle risposte complesse delle frequenze $H(\omega)$ per ottenere le radici medie delle risposte. Quindi, in tutti i quattro casi il denominatore $\Delta(\omega)$ dato precedentemente rende:

$$\begin{aligned} A_0 &= \omega_1^2 \omega_2^2 \\ A_1 &= 2\xi_1 \omega_1^2 \omega_2^2 + 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2 \\ A_2 &= \omega_1^2 + (1 + \mu) \omega_2^2 + 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 \\ A_3 &= 2\xi_1 \omega_1 + 2(1 + \mu) \xi_2 \omega_2 \\ A_4 &= 1 \end{aligned}$$

Dal numeratore di $H_{y_1}(\omega)$, per esempio si ha:

$$\begin{aligned} B_0 &= -(1 + \mu) \omega_2^2 \\ B_1 &= -(1 + \mu) 2\xi_2 \omega_2 \\ B_2 &= -1 \\ B_3 &= 0 \end{aligned}$$

La sostituzione di questi coefficienti porta ad avere il valore medio della radice di uno spostamento relativo $y_1(t)$:

$$E[y_1^2] = \pi S_0 \frac{\left[\begin{aligned} &2\xi_1 \omega_1 \omega_2^2 [\mu(1 + \mu)^2 (\omega_2/\omega_1)^2] \\ &+ 2\xi_2 \omega_2 \omega_1^2 \{ [1 - \mu(1 + \mu)^2 (\omega_2/\omega_1)^2]^2 + \mu(1 + \mu)^2 (\omega_2/\omega_1)^2 \} \\ &+ 8\xi_1 \xi_2^2 \omega_1 \omega_2^2 (1 + \mu)^2 [1 - (1 + \mu) (\omega_2/\omega_1)^2] \\ &+ 8\xi_2^3 \omega_2^3 (1 + \mu)^2 [(1 + \mu) + (\xi_1/\xi_2)^2] \end{aligned} \right]}{D}$$

Dove il denominatore D è:

$$D = 4\omega_1 \omega_2 \left\{ \begin{aligned} &\mu \omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 + \xi_2 \omega_1)^2 + \xi_1 \xi_2 [\omega_1^2 - (1 + \mu) \omega_2^2]^2 \\ &+ 4\xi_1 \xi_2 \omega_1 \omega_2 [\omega_1 \omega_2 (\xi_1^2 + (1 + \mu) \xi_2^2) + \xi_1 \xi_2 (\omega_1^2 + (1 + \mu) \omega_2^2)] \end{aligned} \right\}$$

Lo stesso trattamento per le altre tre quantità di risposta che dà:

$$E[y_2^2] = \pi S_0 \frac{\left[\begin{aligned} &2\xi_1 \omega_1 [\mu(\omega_1/\omega_2)^2] + 2\xi_2 \omega_2 [(1 + \mu)^2 + \mu(\omega_1/\omega_2)^2] \\ &+ 8\xi_1 \xi_2 \{ \xi_1 \omega_2 [1 + \mu + (\omega_1/\omega_2)^2] + \xi_2 \omega_1 [1 + \mu + (\xi_1/\xi_2)^2] \} \end{aligned} \right]}{D}$$

$$E[\ddot{x}_1^2] = 2\pi \omega_1^2 \omega_2 S_0 \frac{\left[\begin{aligned} &\mu \xi_1 \omega_1 \omega_2^3 + [\mu(1 + \mu)^2 (\omega_2/\omega_1)^2] \\ &+ 4 \left\{ \begin{aligned} &\xi_1^3 \mu \omega_1 \omega_2^3 + \xi_1^2 \xi_2 [(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 + \mu \omega_2^3] \\ &+ \xi_1 \xi_2^2 [\omega_1^2 \omega_2 + (1 + \mu) \omega_1 \omega_2^3] + \xi_2^3 (1 + \mu) \omega_1^2 \omega_2^2 \end{aligned} \right\} \\ &+ 16\omega_1 \omega_2 \xi_1^2 \xi_2 [(\xi_1^2 + \xi_2^2) \omega_1 \omega_2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \xi_1 \xi_2] \end{aligned} \right]}{D}$$

$$E[\ddot{x}_2^2] = 2\pi\omega_1^2\omega_2^2S_0 \frac{\left[\begin{array}{l} \xi_1\omega_1(\omega_1^2 + \mu\omega_2^2) + \xi_2\omega_2[\mu\omega_1^2 + (1 + \mu)^2\omega_2^2] \\ +4 \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^3\omega_1\omega_2^3 + \xi_1^2\xi_2[\omega_1^2\omega_2^2 + (1 + \mu)\omega_2^3] \\ +\xi_1\xi_2^2[\omega_1^2 + (1 + \mu)\omega_1\omega_2^2] + \xi_2^3(1 + \mu)\omega_1^2\omega_2 \end{array} \right\} \\ +16\xi_1^2\xi_2^2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 + \xi_2\omega_1) \end{array} \right]}{D}$$

dove in ogni caso il denominatore è dato dalla relazione precedente.

Appendice C Records segnali sismici usati nello studio

Tabella 0-1 Raccolta sismi utilizzati nello studio

Periodo picco spettro spostamento	Sisma	Data	Stazione registrazione	Componente
0.50 sec	Kavala	11/09/85	Kavala	N90E
	Lytle Creek	12/09/1970	Wrightwood	S25W
	Roermond	13/04/1992	Roermond	NS
	South Taupo	03/05/1984	Turangi Telephone Exchange	
1.00 sec	Almiros	8/11/1980	Almiros	NS
	Chi Chi	09/20/1999	Chi-Chi aftershock	071-N
	Lazio-Abruzzo	05/07/1984	Atina	WE
	Near E. Coast of Honshu, Japan	17/06/1973	Kushiro Central	N00E
1.50 sec	Chi Chi	20/09/1999	Chi-Chi aftershock	085-N
	Dinar	01/10/1995	Izmir	NS
	Friuli	05/06/1976	Tolmezzo	
	Northwest California	10/08/1951	Ferndale	S44W
2.00 sec	Big Bear	28/06/1992	Silent Valley-Poppet Flat	
	Borah Peak	29/10/1983	Borah Peak	
	Helena Montana	31/10/1838	Carroll College	S00W
	Santa Barbara	13/08/1978	Cachuma Dam Toe	
2.50 sec	Aqaba	22/11/1995	Eliat	EW
	Big Bear	28/06/1992	Rancho Cucamonga-Deer Canyon	E90W
	Managua	23/12/1972	Esso	EW
	Parkfield	28/06/1966	Cholame #5	N05W
3.00 sec	Jiashi	15/04/1997	Northwest China	
	Corinth	24/02/1981	Corinth	NS
	Imperial Valley	18/05/1940	El Centro	EW
	Taiwan	14/11/1986	Smart	NS
3.50 sec	Parkfield	28/06/1966	Chalome Shandon	N05W
	Hector	16/10/1999	Pinyon Flat	NS
	Helena Montana	31/10/1931	Helena Federal BLDG	
	Turkey	24/11/1976	Calidran	N41E
4.00 sec	Kozani	17/08/1999	Kocaeli	EW
	Manjil	20/06/1990	Abbar	NS
	Parkfield	28/06/1966	Tembler	N65W
	Turkey	24/11/1976	Caldiran	S49E

Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto il Professor Vitaliani per la disponibilità. Inoltre ringrazio sentitamente l'ing. De Stefani per le numerose ore dedicate durante lo studio e la stesura della tesi, per la pazienza dimostrata nei miei confronti, di fronte ai miei dubbi, e per l'ottima collaborazione instaurata durante il lavoro.

Ringrazio tutte le innumerevoli persone che ho avuto il piacere di conoscere in questi anni all'interno dell'ambiente universitario, in particolar modo coloro i quali mi hanno sostenuto per raggiungere questo traguardo.

Per concludere desidero ringraziare con affetto i miei genitori per il loro incrollabile sostegno morale ed economico e per la loro infinita pazienza, i miei familiari, i miei amici più cari, in modo speciale coloro che mi hanno accompagnato in questi anni e con i quali ho vissuto bellissime esperienze, i compagni di sala ed il mio maestro per i suoi consigli e per il percorso nella carriera magistrale che mi ha aiutato ad intraprendere nella scherma.