

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN  
ASTRONOMIA

INFLUENZA DELLE MAREE  
NELL'EVOLUZIONE ORBITALE  
DI SISTEMI BINARI STRETTI

RELATORE

Prof.ssa Marigo Paola

CORRELATORI

Prof.ssa Mapelli Michela

Dott. Trani Alessandro Alberto

LAUREANDO

Gaspari Nicola

ANNO ACCADEMICO 2017/2018



*A Paolo, Enrica ed Elisabetta*

"Nel regno della fantasia il romanzo giallo perfetto esiste.

Tale romanzo fornisce tutti gli indizi voluti e c'induce a costruire per conto nostro una teoria sul mistero che ne costituisce il soggetto. Seguendo gli indizi con la dovuta attenzione, giungiamo a una soluzione completa prima ancora che l'autore ce la riveli alla fine del volume. E, contrariamente a quanto accade con i gialli di classe inferiore, la soluzione non ci delude e ci si presenta come e quando ce l'attendevamo."

Einstein A., Infeld L.  
*L'evoluzione della fisica*



# Indice

Sommario	1
<b>1 Sistemi Binari Newtoniani</b>	<b>3</b>
1.1 Principi Primi	3
1.2 Problema dei Due Corpi	4
1.2.1 Moto di un Corpo	5
1.2.2 Moto di Due Corpi	7
1.3 Studio della Stabilità	8
1.3.1 Costanti del Moto	9
1.3.2 Conservazione del Momento Angolare	9
1.3.3 Conservazione dell'Energia	10
1.3.4 Equilibri	11
1.3.5 Stabilità	12
<b>2 Interazione Mareale</b>	<b>15</b>
2.1 Maree	15
2.1.1 Osservatori non inerziali	15
2.1.2 Forza mareale	16
2.1.3 Marea statica	17
2.1.4 Forza centrifuga	17
2.2 Weak Friction Approximation	18
2.2.1 Accoppiamento spin-orbita	19
2.3 Evoluzione Orbitale	20
2.3.1 Pseudo-Sincronizzazione	21
2.3.2 Evoluzione globale	22
<b>3 Effetti delle Maree sulle Stelle Binarie</b>	<b>25</b>
3.1 Simulazione di Binarie	25
3.1.1 SEVN	25
3.1.2 Obiettivo della tesi	26
3.1.3 Risultati	26
3.2 Conclusioni	27
<b>A Tabella degli input per SEVN</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>



## *Sommario*

Nell'universo locale un'alta frazione di stelle fa parte di sistemi binari e l'evoluzione delle singole stelle può essere influenzata profondamente dalle interazioni con la compagna, al punto che si usa distinguere tra evoluzione singola ed evoluzione binaria. Nei codici di sintesi di popolazione, usati per simulare l'evoluzione delle popolazioni stellari, è quindi fondamentale includere i fenomeni fisici legati alle stelle binarie.

L'interazione dovuta alle maree è uno dei fenomeni fisici che può influenzare l'evoluzione del sistema, dissipandone l'energia e accoppiando il momento angolare di rivoluzione con quello di rotazione. Il codice SEVN (Spera et al. 2015) permette la simulazione di stelle binarie e include l'interazione mareale attraverso l'implementazione del modello di Hut (1981). Tuttavia il modulo di codice relativo alle maree non è ancora stato testato: lo scopo di questa tesi è testare e verificare che il modello di Hut sia implementato correttamente. Per fare ciò partirò dallo studio del modello di Hut, basandolo su principi primi. Successivamente analizzerò le simulazioni di un set di binarie e confronterò i risultati ottenuti con quelli previsti dal modello.





## CAPITOLO 1

# *Sistemi Binari Newtoniani*

Per comprendere il soggetto della tesi, le maree nei sistemi binari, dobbiamo anzitutto comprendere cosa sono i sistemi binari e come si comportano. Con *sistema binario* ci si riferisce a una coppia di corpi che hanno massa, che interagiscono attraverso la gravità e che si muovono di conseguenza. Il problema posto dal loro moto viene chiamato *Problema dei Due Corpi*.

In questo capitolo verrà derivato un modello semplice per i sistemi binari coinvolgendo solo due masse puntiformi e la gravità Newtoniana. Nella sezione 1.1 verranno esposti le evidenze osservative e i postulati con cui Newton (1846) risolse il Problema. Nella sezione 1.2 verrà risolto il Problema seguendo la trattazione che ne danno Murray e Dermott (1999). Nella sezione 1.3 verranno studiate le condizioni di equilibrio verso cui il sistema può evolvere, seguendo la trattazione di Hut (1980).

### 1.1 PRINCÌPI PRIMI

All'inizio del XVII secolo, durante la Rivoluzione Copernicana, Keplero studiò il moto dei pianeti sulla volta celeste e ne derivò tre leggi empiriche (Murray 1999, §1.3). Keplero trovò che:

- i*) i pianeti orbitano il Sole in ellissi, e il Sole sta su un fuoco;
- ii*) il raggio vettore dal Sole a un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali;
- iii*) il quadrato del periodo di un pianeta è proporzionale al cubo del semi-asse maggiore.

Circa 70 anni dopo Newton pubblicò i *Principia Mathematica* (Murray 1999, §1.4), scoprendo la fisica nascosta sotto il lavoro induttivo di Keplero. Nelle premesse del suo trattato, Newton enunciò i seguenti tre assiomi detti *leggi del moto*:

- i*) un corpo mantiene il suo stato di quiete, o si muove con moto rettilineo uniforme, fintanto che non è soggetto a forze;
- ii*) la forza esercitata su di un corpo è pari alla variazione della sua quantità di moto;
- iii*) per ogni azione esiste una reazione uguale ed opposta.

Con questi assiomi caratterizzò la nozione fondamentale di forza, postulando le conseguenze della presenza o dell'assenza di forze agenti, e dimostrò che il

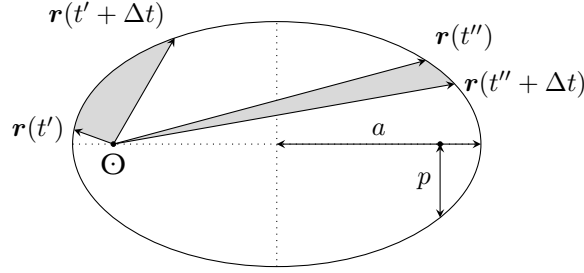


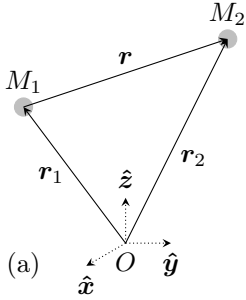
Figura 1.1: L'ellisse rappresenta l'orbita del pianeta, il Sole (☉) risiede su di un fuoco, il raggio vettore  $\mathbf{r}(t)$  individua la posizione del pianeta all'istante  $t$ ,  $a$  è il semi-asse maggiore e  $p$  è il semi-lato retto. Affinché l'area spazzata da  $\mathbf{r}(t)$  durante un intervallo  $\Delta t$  (l'area grigia) sia indipendente dalla posizione iniziale sull'orbita, occorre che il tratto di orbita percorso in  $\Delta t$  diminuisca all'aumentare della distanza del Sole, quindi che la velocità del pianeta sia minore quando il pianeta è più lontano da Sole

moto dei pianeti può essere prodotto da una forza attrattiva, riconosciuta come gravità, che ha modulo

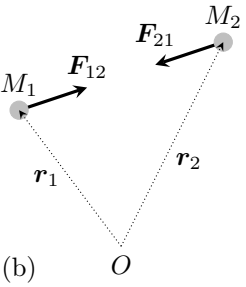
$$F_g = \mathcal{G} \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (1.1)$$

dove  $\mathcal{G}$  è la costante di gravitazione universale,  $M_j$  la massa di un corpo e  $r$  il modulo del raggio vettore (Murray 1999, §1.4). Tale risultato viene chiamato *legge di gravitazione universale* e le leggi di Keplero sono una naturale conseguenza di questa legge.

La teoria Newtoniana non solo diede vita allo studio contemporaneo dei fenomeni meccanici, ma contribuì profondamente alla comprensione dell'Universo. Infatti, con la sua generalità può dar conto del moto di un pianeta così come di un intero sistema planetario, o di un'intera galassia. Per noi sarà un principio primo sufficiente per modellare realisticamente i fenomeni mareali.



(a)



(b)

Figura 1.2: In (a) sono riportati i vettori posizione  $\mathbf{r}_j$  rispetto  $O$  e la posizione relativa  $\mathbf{r}$ . In (b) sono riportate le forze gravitazionali tra le due masse.

## 1.2 PROBLEMA DEI DUE CORPI

Consideriamo uno spazio tridimensionale ed euclideo, ed un tempo universale. Arnol'd (1989, §1) definisce un osservatore *inerziale* quando possiede queste due proprietà:

- 1) tutte le leggi della natura sono in ogni istante uguali per tutti gli osservatori inerziali,
- 2) tutti gli osservatori in moto rettilineo uniforme rispetto ad uno inerziale sono inerziali.

Tale definizione viene anche detta *principio di relatività Galileiana*. Dalle leggi del moto di Newton sappiamo che per un osservatore inerziale  $O$

(*Dyn1*) una particella non soggetta a forze si muove con  $\dot{\mathbf{r}}$  costante,

(*Dyn2*)  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ ,

(*Dyn3*)  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ .

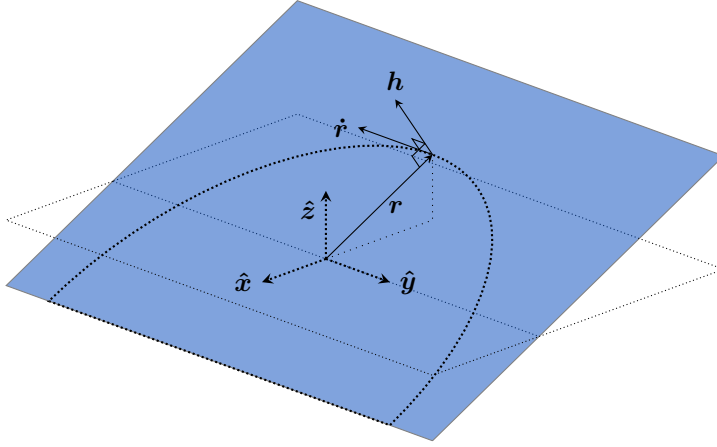


Figura 1.4: Il vettore  $\mathbf{h}$  è in ogni istante perpendicolare a  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$ . Dato che verso e direzione di  $\mathbf{h}$  sono costanti deduciamo che il moto è confinato nel piano blu, detto piano orbitale. La curva tratteggiata rappresenta la traiettoria del punto.

Inoltre, due masse costanti  $M_1$  e  $M_2$  sono mutuamente attratte secondo la legge di gravitazione universale (1.1) per cui vale

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\lambda}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{12} . \quad (1.2)$$

Iniziamo la risoluzione del Problema studiando come si muove un solo corpo sottoposto all'attrazione gravitazionale.

### 1.2.1 Moto di un Corpo

Poniamo un osservatore inerziale  $O$  nella posizione di  $M_1$ , e consideriamo solo la massa  $M_2$  e la forza  $\mathbf{F}_{21}$  agente su di essa (vedi Fig. 1.3). Finché la forza è diretta verso  $O$  avremo  $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{0}$  da cui, per integrazione diretta,

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{h} \quad (1.3)$$

dove  $\mathbf{h}$  è un vettore costante e perpendicolare a entrambi  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$ . Dalla conservazione di  $\mathbf{h}$  deduciamo che il moto è ristretto al piano generato da  $\mathbf{r}$  e  $\dot{\mathbf{r}}$ , detto *piano orbitale* (vedi Fig. 1.4). Per rappresentare il problema ci bastano quindi solo due coordinate nel piano orbitale: scegliendo le coordinate polari vale  $\mathbf{r} = (r, \varphi)$ . Notando che

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} = \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad e \quad \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\dot{\varphi} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.4)$$

possiamo ottenere la velocità derivando  $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (1.5)$$

e l'accelerazione derivando  $\dot{\mathbf{r}}$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \hat{\boldsymbol{\varphi}} . \quad (1.6)$$

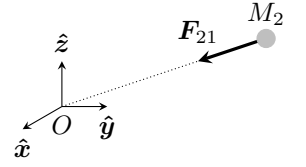


Figura 1.3: Problema di 1-Corpo sottoposto a una forza centrale.

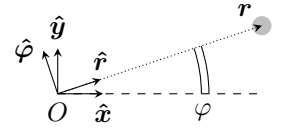


Figura 1.5: Versori per le coordinate cartesiane e per le polari.

Attraverso la forza di gravità (1.1) e (Dyn1) otteniamo l'equazione del moto

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21} = -\frac{\lambda}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.7)$$

la quale è un sistema di due equazioni differenziali, date dalla componente radiale e da quella tangenziale di (1.6):

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0 & (*) \\ \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{\lambda}{\mu r^2} & (**) \end{cases} \quad (1.8)$$

dove  $\mu$  è la massa del corpo orbitante. Per 1-Corpo vale  $\mu = M_2$ , mentre per 2-Corpi  $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  detta massa ridotta (vedi §1.2.2).

Dalla prima equazione (\*) deduciamo che  $r^2 \dot{\varphi}$  è una quantità che rimane costante nel tempo, e si può verificare che una soluzione dell'equazione è data da

$$r^2 \dot{\varphi} = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = h \equiv \dot{\mathcal{A}} \quad (Kep2)$$

dove  $\mathcal{A}$  è l'area spazzata dal raggio vettore (Murray 1999, §2.2). Quindi la conservazione di  $r^2 \dot{\varphi}$  equivale alla seconda legge di Keplero.

Per risolvere l'equazione non lineare (\*\*) possiamo disaccoppiare le variabili con (Kep2)

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\lambda}{\mu r^2} \quad (1.9)$$

e usare il cambio di variabile<sup>1</sup> (Murray 1999, §2.3)

$$r = \frac{1}{u} \quad \dot{r} = -h \frac{d}{d\varphi} u \quad \ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2}{d\varphi^2} u \quad (1.10)$$

per ottenere l'equazione lineare

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u + u = \frac{\lambda}{\mu h^2} \quad (1.11)$$

detta *equazione di Binet*. Una soluzione di questa equazione è data da

$$u(\theta) = \frac{\lambda}{\mu h^2} (1 + e \cos \theta) \quad (1.12)$$

dove  $e$  è una costante e  $\theta = \varphi - \varphi_0$  viene chiamata *anomalia vera*. Risostituendo  $r$  otteniamo

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (Kep1)$$

dove  $p = \mu h^2 / \lambda$ . Riconosciamo che  $r(\theta)$  è una parametrizzazione della famiglia di curve dette *coniche*, con  $p$ : semi-lato retto,  $e$ : eccentricità, e deduciamo che se  $r(\theta)$  descrive un'orbita chiusa allora l'equazione precedente equivale alla prima legge di Keplero. Nel seguito assumeremo che le orbite siano chiuse, o Kepleriane.

Supponendo che l'orbita sia un'ellisse, l'area  $\mathcal{A}$  racchiusa da  $r$  vale  $\mathcal{A} = \pi ab =$

<sup>1</sup>La sostituzione non è triviale e andrebbe eseguita con maggiore attenzione. In generale, notiamo che se  $h > 0 \Rightarrow \dot{\varphi} > 0$  quindi  $\varphi : t \rightarrow \varphi(t)$  è invertibile. Usando  $t(\varphi)$  possiamo rimuovere la dipendenza dal tempo:  $r(t) = r(t(\varphi)) = r(\varphi)$ . Le relazioni in (1.10) si ottengono applicando la regola della catena a  $r(t(\varphi))$ .

$\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$  dove  $a$  è il semi-asse maggiore e  $b$  è il semi-asse minore. Detto  $\mathcal{P}$  il periodo di rivoluzione vale anche  $\mathcal{A} = \dot{\mathcal{A}}\mathcal{P} = \frac{1}{2}h\mathcal{P}$ , da cui

$$\mathcal{A} = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\mathcal{P} \sqrt{\frac{p\lambda}{\mu}} \quad (1.13)$$

Dalla geometria analitica abbiamo la relazione  $p = a(1-e^2)$ , la quale ci permette di ricavare da (1.13) la terza legge di Keplero

$$\mathcal{P}^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{\lambda} a^3 \quad (\text{Kep3})$$

che può essere riarrangiata in

$$n^2 a^3 = \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.14)$$

dove  $n = 2\pi/\mathcal{P}$  è la *velocità media*.

La risoluzione del Problema di 1-Corpo si completa trovando  $r$  in funzione di  $t$ . Tuttavia non siamo interessati a risolvere l'evoluzione orbitale in tempi inferiori a  $\mathcal{P}$  quindi rimandiamo il Lettore interessato al Capitolo 2.4 del libro "Solar System Dynamics" (Murray, 1999).

### 1.2.2 Moto di Due Corpi

È facile scegliere l'osservatore nel Problema di 1-Corpo (basta considerare la geometria centrale del campo di forze), ma come sceglierlo nel caso a 2-Corpi? Iniziamo osservando che da (Dyn2) e (Dyn3) abbiamo

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (1.15)$$

la quale integrata ci da

$$M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{P}_{\text{tot}} . \quad (1.16)$$

Definendo il vettore  $\mathbf{P}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$  detto *momento lineare*, la relazione (1.15) prescrive che il momento lineare totale del sistema resti costante nel tempo. Dalla definizione di  $\mathbf{P}$  vien naturale cercare un vettore  $\mathbf{R}$  t.c.  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = (M_1 + M_2) \dot{\mathbf{R}}$ , cioè un vettore che descriva il sistema nel suo intero e non come somma delle parti: dall'integrazione dell'uguaglianza  $M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = (M_1 + M_2) \dot{\mathbf{R}}$  segue

$$\mathbf{R} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2} . \quad (1.17)$$

Il vettore  $\mathbf{R}$  identifica il *baricentro*  $G$  del sistema, il quale si comporta come una particella che ha massa pari alla massa totale del sistema ed è soggetta a  $\mathbf{F}_{\text{tot}}$ <sup>2</sup>. L'approccio euristico alla conservazione di  $\mathbf{P}$  risulta fruttuoso, infatti da (1.15) e (Dyn1) deduciamo che  $G$  può ospitare un osservatore inerziale.

Ponendoci nel sistema di riferimento  $G$  i vettori posizione sono  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ , e dato che la distanza di  $G$  rispetto sé stesso è nulla la (1.17) diventa

$$M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2 = 0 . \quad (1.18)$$

<sup>2</sup>Per un sistema di  $N$  corpi, individuati dall'indice  $j = 1, 2, \dots, N$ , rispetto a  $O$  si ha  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = \sum_j m_j \dot{\mathbf{r}}_j = \sum_j m_j (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}_j) = m_{\text{tot}} \dot{\mathbf{R}} + \sum_j m_j \dot{\mathbf{R}}_j$ . Dalla definizione di baricentro abbiamo che  $\sum_j m_j \mathbf{R}_j = m_{\text{tot}} \tilde{\mathbf{R}} = 0$  in quanto  $\tilde{\mathbf{R}}$  è la posizione del baricentro rispetto sé stesso. Quindi  $\sum_j m_j \dot{\mathbf{R}}_j = 0$  da cui concludiamo che  $\mathbf{P}_{\text{tot}} = m_{\text{tot}} \dot{\mathbf{R}}$ .

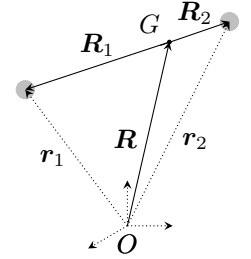


Figura 1.6: La posizione del baricentro  $G$  rispetto a  $O$  viene individuata da  $\mathbf{R}$ . Le posizioni delle masse rispetto a  $G$  sono individuate da  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ .

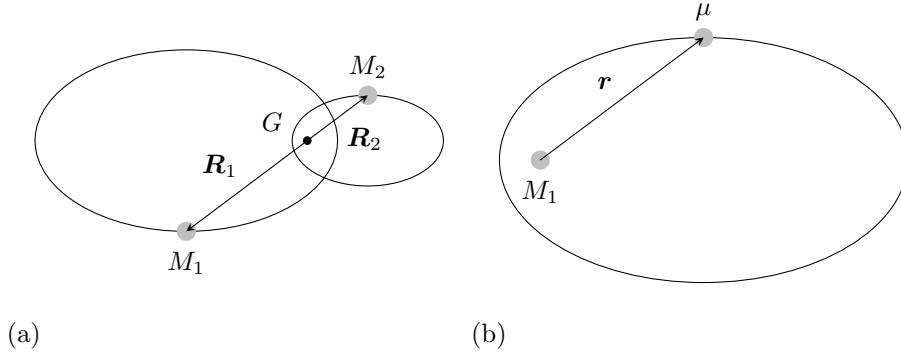


Figura 1.7: Nel Problema dei 2-Corpi le masse orbitano  $G$  in coniche con eccentricità  $e$  (a). Il problema è equivalente al Problema di 1-Corpo con massa  $\mu$  soggetto a una forza centrale diretta verso  $M_1$  (b).

Da questa deduciamo che  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  sono opposti, e quindi che  $G$  giace sul segmento congiungente le masse. Per l'osservatore in  $G$  le equazioni del moto delle due masse sono

$$\begin{cases} M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{\lambda}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2} \hat{\mathbf{R}}_1 \\ M_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{\lambda}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2} \hat{\mathbf{R}}_2 \end{cases} \quad (1.19)$$

la cui differenza, notando che  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ ,

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{M_2} - \frac{\mathbf{F}_{12}}{M_1} = \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \mathbf{F}_{21} \quad (1.20)$$

restituisce

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\lambda}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.21)$$

dove  $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$  è la massa ridotta. Deduciamo che per un osservatore in  $G$  il moto delle due masse può essere ridotto al Problema di 1-Corpo in cui il corpo orbitante ha massa ridotta. I risultati della sezione precedente sono ancora validi, quindi l'orbita è una conica,  $\mathbf{h}$  è conservato e il moto è planare. Inoltre da

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2 = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

otteniamo la relazione

$$\mu \mathbf{r} = M_2 \mathbf{R}_2 = -M_1 \mathbf{R}_1 \quad (1.23)$$

la quale dimostra non solo che le orbite dei due corpi attorno a  $G$  sono ancora coniche, ma anche che hanno la stessa eccentricità (vedi Fig. 1.7).

### 1.3 STUDIO DELLA STABILITÀ

Per ora nel nostro sistema le uniche variabili che possono evolvere nel tempo sono le posizioni dei due corpi; se però complichiamo la trattazione può emergere che anche altre variabili possono evolvere nel tempo. In generale durante l'evoluzione di queste variabili il sistema può assumere configurazioni che sono più vantaggiose rispetto ad altre, i.e. quelle che minimizzano l'energia; tali

configurazioni sono dette *stati di equilibrio*. Se esistono degli stati di equilibrio allora l'evoluzione temporale del sistema tenderà naturalmente ad essi.

Ricerca e caratterizzazione degli equilibri sono riprese dalla trattazione di Hut (1980); per fare ciò assumeremo che le masse puntiformi possiedano una rotazione intrinseca, ipotesi che sarà giustificata quando attribuiremo delle dimensioni ai nostri corpi.

### 1.3.1 Costanti del Moto

Esistono delle quantità legate al moto che restano costanti nel tempo, dette *costanti del moto*, e che per questo sono adatte a porre dei vincoli all'evoluzione temporale. Per un sistema di  $N$  corpi si dimostra che dall'omogeneità dello spazio deriva la conservazione del momento lineare  $\mathbf{P}$  (Landau 1976, §7)

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{r}}_j \quad (1.24)$$

che dall'isotropia dello spazio deriva la conservazione del momento angolare  $\mathbf{L}$  (Landau 1976, §9)

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^N \mathbf{r} \times m_j \dot{\mathbf{r}}_j \quad (1.25)$$

e che dall'omogeneità del tempo deriva la conservazione dell'energia  $E$  (Landau 1976, §6)

$$E = T + \mathcal{U} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{\mathbf{r}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \sum_{j=1}^N \mathcal{U}(\mathbf{r}_j) \quad (1.26)$$

dove  $T$  è l'energia cinetica e  $\mathcal{U}$  l'energia potenziale. Queste tre quantità sono conservate fintantoché il sistema non è perturbato da forze o momenti meccanici esterni e non coinvolge fenomeni dissipativi.

### 1.3.2 Conservazione del Momento Angolare

Si può verificare che il momento angolare dovuto alla rivoluzione è

$$\mathbf{L}_{\text{orb}} = \mu \mathbf{h} \quad (1.27)$$

dove  $\mathbf{h}$  è definito dalla (1.3), e che vale

$$L_{\text{orb}}^2 = \mu^2 h^2 = \mu \lambda p = \mathcal{G} \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2} a(1 - e^2). \quad (1.28)$$

Se ipotizziamo che i corpi ruotino su sé stessi, allora nella conservazione del momento angolare totale bisogna aggiungere il contributo del momento angolare dovuto alla rotazione

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_{\text{spin}} = \mu \mathbf{h} + I_1 \boldsymbol{\Omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\Omega}_2 \quad (1.29)$$

dove  $I_j$  è il momento d'inerzia e  $\boldsymbol{\Omega}_j$  il vettore velocità angolare<sup>3</sup>.

La conservazione di  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  definisce un piano invariante, inclinato di un an-

<sup>3</sup>Consideriamo un punto con moto circolare uniforme, e siano  $\mathbf{v}$  la velocità tangenziale e  $\boldsymbol{\rho}$  il vettore posizione rispetto all'asse di rotazione: il vettore  $\boldsymbol{\Omega}$  è definito da  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}$ .

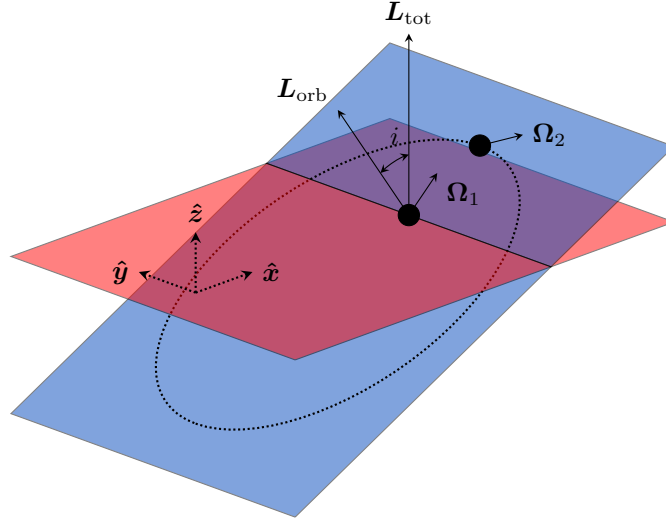


Figura 1.8: Nell'immagine sono raffigurati i due corpi, l'orbita e tutti i vettori coinvolti nella conservazione del momento angolare (1.29). Il piano orbitale è in blu e il piano invariante è in rosso.

golo  $i$  rispetto al piano orbitale (vedi Fig. 1.8). Per semplificare il problema scegliamo un sistema di riferimento tale per cui  $\mathbf{L}_{\text{tot}} = (0, 0, L_{\text{tot}})$  e  $\mathbf{L}_{\text{orb}} = (\mu h \sin i, 0, \mu h \cos i)$ .

### 1.3.3 Conservazione dell'Energia

L'equazione (\*\*) in (1.8) può essere riscritta come

$$\mu \ddot{r} = \frac{\mu h^2}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{d}{dr} \mathcal{U}_{\text{eff}} \quad (1.30)$$

dove

$$\mathcal{U}_{\text{eff}} = \frac{\mu h^2}{2r^2} - \frac{\lambda}{r} \quad (1.31)$$

è detto *potenziale efficace*. L'energia dell'orbita è quindi

$$E_{\text{orb}} = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathcal{U}_{\text{eff}} \quad (1.32)$$

Usando  $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E_{\text{orb}} - \mathcal{U}_{\text{eff}})}$  nella risoluzione dell'equazione di Binet (1.11) si può verificare che la costante  $e$ , a cui abbiamo attribuito un significato strettamente geometrico, vale

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{p}{\lambda} E_{\text{orb}}} \quad (1.33)$$

da cui, usando  $p = a(1 - e^2) = \mu h^2 \lambda^{-1}$ , otteniamo

$$E_{\text{orb}} = -\frac{\lambda}{2a} . \quad (1.34)$$



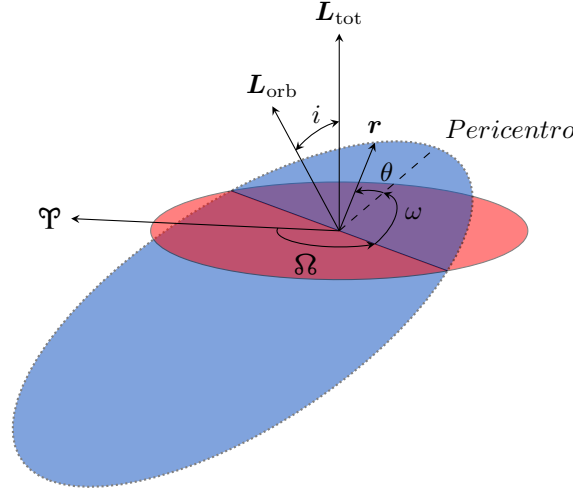


Figura 1.9: Il moto su orbite kepleriane è caratterizzato dai 6 parametri orbitali:  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\varnothing$ ,  $\omega$  e  $\theta$ . Per descrivere il moto dei pianeti del sistema solare si usa come piano invariante il piano dell'eclittica e come punto di riferimento  $\Psi$  il punto vernale.

Se ipotizziamo che i corpi ruotino su sé stessi allora dobbiamo tenere conto del contributo cinetico per la rotazione, quindi la conservazione dell'energia viene espressa con

$$E = -\frac{\lambda}{2a} + \frac{1}{2}I_1\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 + \frac{1}{2}I_2\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2 . \quad (1.35)$$

#### 1.3.4 Equilibri

Il Problema a 2-Corpi ha 6 gradi di libertà dati da  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , ai quali dobbiamo aggiungere altri 6 gradi dati da  $\boldsymbol{\Omega}_1$  e  $\boldsymbol{\Omega}_2$  se assumiamo che i corpi abbiano una rotazione intrinseca. Al posto delle coordinate di  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  useremo i 6 elementi orbitali: semi-asse maggiore  $a$ , eccentricità  $e$ , inclinazione  $i$ , longitudine del nodo ascendente  $\varnothing$ , argomento del pericentro  $\omega$  e l'anomalia vera  $\theta$  (vedi Fig. 1.9).

Per la nostra trattazione solo  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_1$  e  $\boldsymbol{\Omega}_2$  sono rilevanti<sup>4</sup>. Questi 9 parametri generano uno spazio 9-D i cui elementi  $\mathbf{q} = (a, e, i, \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2)$  rappresentano la configurazione del sistema binario a un dato istante. La conservazione di  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  non permette però al sistema di assumere una configurazione qualsiasi: la funzione  $\mathbf{L}_{\text{tot}} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $U \in \mathbb{R}^9$  aperto dello spazio delle configurazioni, definisce una varietà 6-D regolare<sup>5</sup>  $\mathcal{M}$  sul quale è vincolata l'evoluzione temporale, cioè definisce il sottoinsieme di configurazioni che possono essere assunte dal sistema per un dato  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  iniziale.

Definiamo *equilibrio* una  $\mathbf{q}$  che renda stazionaria l'energia  $E$ , massimizzandola o minimizzandola. La ricerca degli equilibri si riduce quindi alla determinazione degli estremanti locali per  $E$  su  $\mathcal{M}$ , la quale può essere svolta usando il metodo

<sup>4</sup>I tempiscala con cui evolvono  $\varnothing$ ,  $\omega$  e  $\theta$  sono più brevi dei tempiscala di  $a$ ,  $e$ ,  $i$ , quindi si può usare un valore medio anziché risolverne l'evoluzione (Hut 1980).

<sup>5</sup>Lo jacobiano  $J(\mathbf{L}_{\text{tot}})$  ha rango massimo ovunque, ma non è definito nei punti con  $a = 0$  e  $e = \pm 1$ . Notiamo comunque che le orbite Kepleriane hanno  $e < 1$ , e  $a = 0$  corrisponde alla collisione dei due corpi.

dei moltiplicatori di Lagrange: una  $\mathbf{q}$  è estremante se e solo se esistono dei moltiplicatori di Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  t.c.  $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})$  soddisfi

$$\begin{cases} \nabla E = \lambda_1 \nabla L_x + \lambda_2 \nabla L_y + \lambda_3 \nabla L_z \\ \mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (1.36)$$

dove  $\mathbf{L}_{\text{tot}} = (L_x, L_y, L_z)$ . Si trova (Hut 1980) che gli equilibri sono

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (a, e, i, \Omega_{1,x}, \Omega_{1,y}, \Omega_{1,z}, \Omega_{2,x}, \Omega_{2,y}, \Omega_{2,z}) \\ &= (a, 0, 0, 0, 0, n, 0, 0, n) \end{aligned} \quad (1.37)$$

dove  $n$  e  $a$  sono legati dalla terza legge di Keplero (1.14). In altre parole, all'equilibrio le orbite sono caratterizzate da

- a) circolarità ( $e = 0$ ),
- b) coplanarità ( $i = 0$ ),
- c) sincronicità ( $n = \Omega_{1,z} = \Omega_{2,z}$ ).

Dalla coplanarità segue che il momento angolare all'equilibrio vale

$$L = \left( \frac{\lambda^2 \mu}{n} \right)^{\frac{1}{3}} + (I_1 + I_2)n \quad (1.38)$$

il quale ha un minimo a

$$n_{\text{crit}} = \left( \frac{1}{3} \frac{\lambda^2 \mu}{I_1 + I_2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.39)$$

con valore

$$L_{\text{crit}} = 4 \left( \frac{I_1 + I_2}{27} \lambda^2 \mu \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (1.40)$$

Dal grafico di  $L$  (Fig. 1.10) possiamo distinguere tre casi

- i) per  $L < L_{\text{crit}}$  non esistono equilibri,
- ii) per  $L = L_{\text{crit}}$  esiste un solo equilibrio,
- iii) per  $L > L_{\text{crit}}$  esistono due equilibri.

### 1.3.5 Stabilità

Definiamo un equilibrio *stabile* se è un minimo locale per l'energia  $E$ . Per determinare la natura di un equilibrio possiamo usare il criterio dell'Hessiano: se la matrice Hessiana di  $E$  è definita positiva in  $\mathbf{q}$  allora  $\mathbf{q}$  è un minimo locale di  $E$ . Per ottenere 6 coordinate di  $\mathcal{M}$  esplicitiamo  $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1(a, e, i, \mathbf{L}_{\text{tot}}, \boldsymbol{\Omega}_2)$  da  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$  e lo restringiamo ad un valore di  $L$ . L'energia è quindi esprimibile come

$$E = E(a, e, i, \boldsymbol{\Omega}_1|_L, \boldsymbol{\Omega}_2) = E(a, e, i, \boldsymbol{\Omega}_2)|_L \quad (1.41)$$

e le componenti dell'Hessiano si possono calcolare con

$$H_{jk}(E) = \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} E \quad (1.42)$$

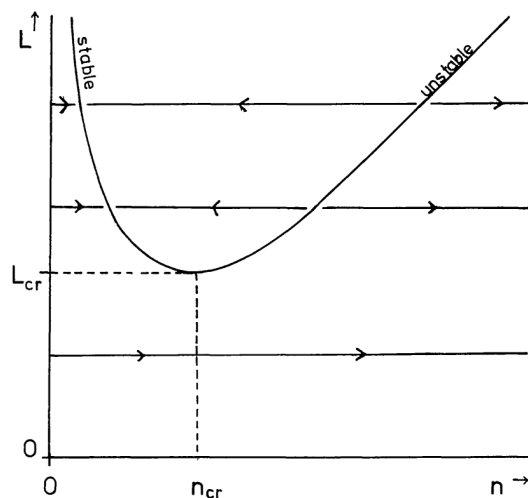


Figura 1.10: Il grafico della funzione (1.38) rappresenta le configurazioni di equilibrio sul piano  $(n, L)$ . Le frecce indicano la direzione per cui l'energia di un'orbita coplanare circolare diminuisce. Il grafico è ripreso dall'articolo di Hut (1980).

dove  $q_j$  è una delle 6 coordinate di  $\mathcal{M}$ . Dall'analisi degli autovalori<sup>6</sup> dell'Hessiano, Hut (1980) deriva che gli equilibri stabili sono caratterizzati da

$$\alpha := \frac{L_{\text{orb}}}{L_{\text{spin}}} = \frac{\mu h}{(I_1 + I_2)n} = \frac{\mu a^2}{I_1 + I_2} > 3 \quad (1.43)$$

cioè sono stabili quando il momento angolare orbitale è più di  $3/4$  di quello totale<sup>7</sup>. Nella Figura 1.10 sono indicati quali equilibri sono stabili, e notiamo che quando esistono due equilibri quello stabile ha l'orbita più larga.

#### Nota.

In questo capitolo abbiamo descritto un sistema conservativo, quindi  $a$  ed  $e$  sono quantità costanti determinate dai valori di  $L_{\text{orb}}$  ed  $E$ . Il sistema può evolvere verso gli equilibri solo se  $L_{\text{orb}}$  ed  $E$  variano nel tempo, ad esempio a causa di un meccanismo dissipativo o un accoppiamento spin-orbita.

<sup>6</sup>Data una matrice reale simmetrica, se tutti gli autovalori sono strettamente positivi allora è definita positiva.

<sup>7</sup>Questo risultato era già stato derivato da autori precedenti (Hut 1980).



## CAPITOLO 2

# Interazione Mareale

Nel capitolo precedente abbiamo risolto il Problema dei Due Corpi con delle masse puntiformi, tuttavia dall'analisi non è emerso nulla oltre al moto. Per far emergere i fenomeni mareali dovremo dare delle dimensioni a queste masse, viz. usare corpi estesi.

In questo capitolo vedremo come la gravità non solo dà movimento ma dà anche forma a due corpi estesi. Nella sezione 2.1 cercheremo di capire quali forze causano le maree e le loro caratteristiche. Nella sezione 2.2 verrà esposto il modello per l'interazione mareale di Hut (1981), che rivisita in modo semplice la *weak friction approximation*. Nella sezione 2.3 verranno esposti i risultati di Hut (1981) sull'evoluzione orbitale di un sistema binario indotta dal modello esposto. Il sistema verrà assunto coplanare quando non specificato diversamente.

### 2.1 MAREE

Quando il primario è un corpo esteso la forza attrattiva esercitata dal secondario non è uguale in ogni punto: i punti più vicini al secondario saranno attratti di più, quelli più lontani invece di meno. Se il corpo non è rigido questa differenza ne provoca la deformazione.

Si può facilmente immaginare che la deformazione sia prominente sul lato esposto al corpo secondario (Fig. 2.1.a), tuttavia questa intuizione non è corretta. Prendiamo come esempio il sistema binario composto da Terra e Luna, dove l'attrazione lunare deforma lo strato d'acqua superficiale, che chiameremo per semplicità oceano. Se la deformazione fosse asimmetrica dovremmo osservare una sola marea al giorno, ma già sappiamo che a Venezia l'acqua alta arriva ogni 12 ore. Quindi la Luna innalza una marea non solo sul lato a lei esposto ma anche su quello opposto (Fig. 2.1.c). Una spiegazione naive di questo fenomeno è che sulla faccia esposta alla Luna l'acqua venga attratta più della Terra e che per questo si alzi, mentre che sulla faccia opposta la Terra venga attratta più dell'acqua, la quale resta "indietro". Una spiegazione più precisa necessita un'introduzione agli osservatori non inerziali.

#### 2.1.1 Osservatori non inerziali

Un osservatore non inerziale è in generale un osservatore su cui agisce una forza, cioè un osservatore  $O_*$  che ha  $\dot{\mathbf{R}}_* \neq \mathbf{0}$  rispetto ad uno inerziale  $O$  (vedi Fig. 2.2); escludiamo per ora gli osservatori che ruotano su sé stessi.

Consideriamo una particella  $m$  con massa infinitesima, la cui posizione è  $\mathbf{r}$  rispetto a  $O$  e  $\mathbf{R}$  rispetto a  $O_*$ . Vale l'addittività delle accelerazioni (Landau

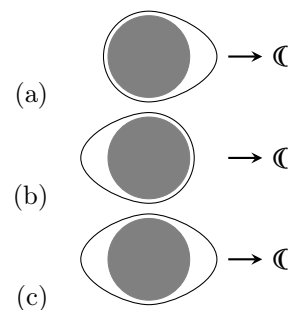


Figura 2.1: Le spiegazioni naive delle maree, cioè che l'oceano sia più attratto della Terra (a) o che la Terra sia più attratta dell'oceano (b), non possono dar conto della deformazione osservata (c).

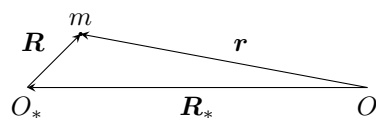


Figura 2.2: Vettori posizione della particella  $m$  rispetto a  $O$  e  $O_*$ .

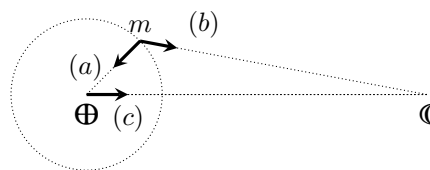


Figura 2.3: Su un volumetto di oceano  $m$  agisce sia la gravità terrestre (a) che l'attrazione lunare (b). La Terra ( $\oplus$ ) non può essere un osservatore inerziale a causa dell'attrazione (c) della Luna ( $\mathbb{C}$ ).

1976, §39)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{R}}_* \quad (2.1)$$

per cui se su  $m$  agisce una qualsiasi forza  $\mathbf{F}$  allora da  $O$  osserveremo la solita legge di Newton  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$  ma da  $O_*$  osserveremo

$$m\ddot{\mathbf{R}} = m(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}}_*) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_* \quad (2.2)$$

dove la correzione  $\mathbf{F}_*$  viene detta *forza inerziale*. Tali forze sono fittizie, perché dovute al moto dell'osservatore non inerziale e non proprie del fenomeno meccanico.

### 2.1.2 Forza mareale

Supponiamo che  $m$  sia un piccolo volume dell'oceano terrestre (di cui trascureremo la spinta di Archimede) e che  $O_*$  sia un osservatore solidale al baricentro terrestre (di cui trascureremo la rotazione). Le forze agenti su  $m$  sono (vedi Fig. 2.3)

(a) la gravità terrestre  $\mathbf{g}$

(b) l'attrazione lunare

quindi rispetto ad  $O$  vale

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\mathbf{g} - m\frac{\mathcal{G}M_{\mathbb{C}}}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.3)$$

Passando ad  $O_*$ , dobbiamo tenere conto dell'attrazione lunare sulla Terra (vedi (c) in Fig. 2.3) perciò

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{R}} &= m\ddot{\mathbf{r}} - m\left(-\frac{\mathcal{G}M_{\mathbb{C}}}{R_*^2}\hat{\mathbf{R}}_*\right) \\ &= -m\mathbf{g} - m\mathcal{G}M_{\mathbb{C}}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \frac{\hat{\mathbf{R}}_*}{R_*^2}\right) \\ &= -m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{tidal}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove abbiamo raccolto in  $\mathbf{F}_{\text{tidal}}$  le forze che una particella solidale alla Terra sente oltre alla forza di gravità; il campo della forza mareale  $\mathbf{F}_{\text{tidal}}$  è rappresentato in Fig. 2.4.

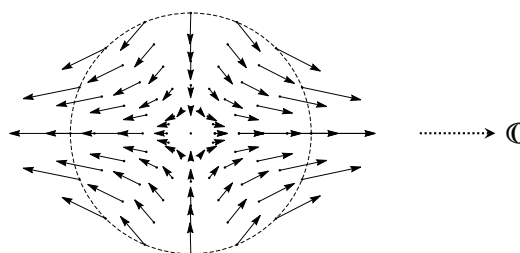


Figura 2.4: Campo della forza mareale generato dall'attrazione lunare sulla Terra.

### 2.1.3 Marea statica

Quale forma può avere un corpo esteso soggetto alla forza mareale? Consideriamo una situazione ideale in cui il corpo è un fluido in equilibrio statico. Assumendo che tutta la massa sia concentrata al baricentro, detto modello di Roche (Maeder 2009, §2.1), l'equilibrio idrostatico si ha quando le forze di volume sono controbilanciate dalla pressione  $P$

$$\nabla P = -\rho \nabla \Psi \quad (2.5)$$

dove  $\rho$  è la densità e  $\Psi$  è un potenziale che deve dar conto almeno della forza gravitazionale e della forza mareale (Eggleton et al. 1998). All'equilibrio la superficie esterna del corpo è una superficie equipotenziale di  $\Psi$  con  $P$  e  $\rho$  costanti, rappresentata in Fig. 2.5. In generale ci si riferisce a questo tipo di marea con *marea statica*, o *equilibrium tide*, dato che per un osservatore solidale al primario la superficie equipotenziale è statica.

Si distingue un secondo tipo di marea dovuto alla possibilità del corpo fluido di comportarsi come un oscillatore. Le sollecitazioni date delle forze mareali possono forzare alcuni modi di oscillazione creando una deformazione dinamica detta *marea dinamica*, o *dynamical tide*. Nel seguito ci occuperemo solo delle maree statiche, le quali sono sufficienti almeno per una descrizione qualitativa, mentre il Lettore interessato in un'introduzione alle maree dinamiche è rimandato al Capitolo 8 del libro "Tides in Astronomy and Astrophysics" (Souchay et al., 2013).

### 2.1.4 Forza centrifuga

Esiste un'altra importante deformazione, che è dovuta alla rotazione del corpo: se l'osservatore  $O_*$  ruota su sé stesso con velocità angolare  $\Omega$  allora tra le forze inerziali appaiono contributi dovuti alla rotazione. Si dimostra dalla cinematica del corpo rigido (Arnol'd 1989, §27) che su una particella in quiete rispetto a  $O_*$  agisce la forza

$$\mathbf{F}_{cf} = -m[\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})] = m\Omega^2 R \sin \varphi \hat{\mathbf{F}}_{cf} \quad (2.6)$$

detta *forza centrifuga*, dove  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = \mathbf{v}$  è la velocità tangenziale della particella rispetto ad un osservatore inerziale. Assumendo che  $\Omega$  sia costante per ogni  $\mathbf{R}$  e che il corpo sia in equilibrio idrostatico (2.5), tale forza deforma il corpo allargandolo all'equatore (vedi Fig. 2.7).

Notiamo che la particella resta vincolata in  $\mathbf{R}$  fintantoché  $\mathbf{F}_{cf}$  è bilanciata da

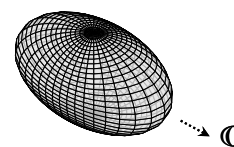


Figura 2.5: Superficie equipotenziale di  $\Psi = \Phi + \mathcal{U}_{\text{tidal}}$ , dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale e  $\mathcal{U}_{\text{tidal}}$  quello mareale.

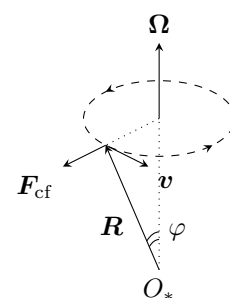


Figura 2.6: Il vettore  $\boldsymbol{\Omega}$  individua l'asse di rotazione di  $O_*$ , e con la sua magnitudine la velocità angolare  $\Omega$ . Una particella solidale a  $O_*$  ruota lungo la traiettoria tratteggiata con velocità tangenziale  $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ , ed è sottoposta alla forza inerziale  $\mathbf{F}_{cf}$ .

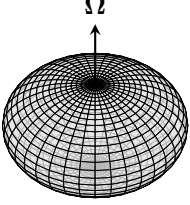


Figura 2.7: Superficie equipotenziale di  $\Psi = \Phi + \mathcal{U}_{cf}$ , dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale e  $\mathcal{U}_{cf}$  quello centrifugo.

una forza uguale ma opposta, detta centripeta. Se la forza centripeta è data dalla gravità allora esiste una  $\Omega_{crit}$  tale che per  $\Omega > \Omega_{crit}$  si ha  $\mathbf{F}_{cf} > -\mathbf{F}_g$ , cioè esiste un parametro critico oltre il quale la forza centrifuga prevale su quella di gravità.

Consideriamo una particella di prova con massa nulla che orbita sull'equatore di un corpo con massa  $M$  e raggio  $\mathcal{R}$ . Per (1.14) la particella ha velocità angolare  $n = \sqrt{\mathcal{G}M\mathcal{R}^{-3}}$  e vale  $n = \Omega_{crit}$ , poichè all'equatore per  $\Omega > n$  si avrebbe  $\mathbf{F}_{cf} > -\mathbf{F}_g$ . Nel seguito ci riferiremo a  $\Omega_{crit} = \sqrt{\mathcal{G}M\mathcal{R}^{-3}}$  con *limite kepleriano*. Posto che i contributi a  $\Psi$  siano gravità e forza centrifuga

$$\Psi(R) = \Phi + \mathcal{U}_{cf} = \frac{\mathcal{G}M}{R} + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \varphi \quad (2.7)$$

se la superficie esterna è equipotenziale allora, posto  $\mathcal{R}_e$  il raggio equatoriale e  $\mathcal{R}_p$  quello polare, vale (Maeder 2009, §2.1)

$$\frac{\mathcal{G}M}{\mathcal{R}_e} + \frac{1}{2}\Omega^2 \mathcal{R}_e^2 \sin^2 \varphi = \frac{\mathcal{G}M}{\mathcal{R}_p}. \quad (2.8)$$

Sappiamo che il corpo non può ruotare con  $\Omega > \Omega_{crit}$  senza perdere materia, quindi dall'equazione precedente possiamo ricavare

$$\mathcal{R}_{e,crit} = \frac{3}{2}\mathcal{R}_{p,crit} \quad (2.9)$$

che è la deformazione massima sostenibile dal corpo senza uscire dalla condizione di equilibrio.

## 2.2 WEAK FRICTION APPROXIMATION

Concentriamoci sul corpo primario, assumendo che il secondario sia una massa puntiforme: per ottenere una descrizione complessiva del sistema basterà invertire i ruoli dei corpi e sommare gli effetti (Hut 1981).

Abbiamo visto che l'attrazione differenziale del secondario deforma il primario alzando due maree. Nel caso di un'orbita circolare se il moto rotazionale è sincronizzato col moto orbitale allora i rigonfiamenti mareali sono allineati col secondario e riempiono un'equipotenziale di  $\Psi$ . Tuttavia nel caso in cui l'orbita non sia sincrona, cioè se  $\Omega \neq \dot{\theta}$  dove  $\dot{\theta}$  è la derivata temporale dell'anomalia vera (vedi Fig. 2.8), la presenza di un qualsiasi fenomeno dissipativo fa sì che il moto rotazionale trascini i rigonfiamenti mareali disallineandoli dal corpo secondario.

Per descrivere il disallineamento usiamo la *weak friction approximation* (Hut 1981, Souchay 2013 §8.3.1), con la quale si assume che l'angolo di disallineamento  $\phi$  (vedi Fig. 2.8) sia proporzionale alla mancanza di sincronicità e che la risposta mareale all'istante  $t$  corrisponda esattamente al potenziale perturbativo all'istante  $t - \tau$ , cioè che le maree all'istante  $t$  riempiono esattamente l'equipotenziale all'istante  $t - \tau$ . Supponendo che le maree siano in ritardo di un tempo costante  $\tau$ , detto *constant time lag*, l'angolo  $\phi$  è quindi una funzione lineare della frequenza mareale  $\Omega - \dot{\theta}$

$$\phi = (\Omega - \dot{\theta})\tau. \quad (2.10)$$

Notiamo che se  $\Omega > \dot{\theta}$  allora le maree sono in anticipo sull'equipotenziale ( $\phi > 0$ ), mentre se  $\Omega < \dot{\theta}$  allora sono in ritardo ( $\phi < 0$ ). Questa approssimazione è applicabile a corpi fluidi soggetti a dissipazioni di natura viscosa indipendenti dalla frequenza mareale  $\Omega - \dot{\theta}$  (Souchay 2013 §8.3.1).



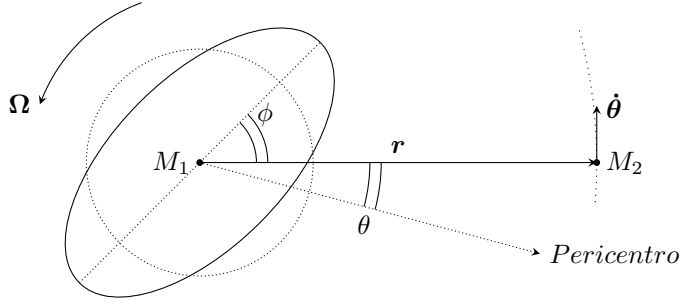


Figura 2.8: Se l'orbita non è sincrona la presenza di dissipazioni fa sì che le maree siano trascinate dalla rotazione del corpo, disallineandole di  $\phi$  rispetto al secondario.

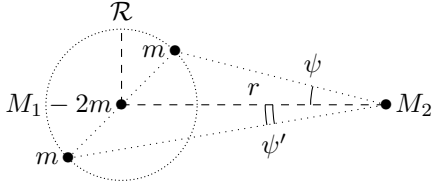


Figura 2.9: Le maree possono essere rappresentate da un quadrupolo, che è il termine dominante nello sviluppo in multipoli del potenziale gravitazionale perturbato (Hut 1981).

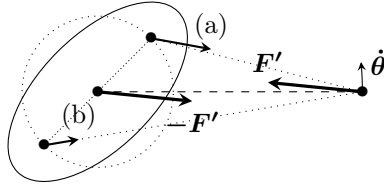


Figura 2.10: I rigonfiamenti esercitano sul secondario la coppia di forze (a) e (b), le quali generano un momento meccanico sul secondario e causano l'accoppiamento spin-orbita.

### 2.2.1 Accoppiamento spin-orbita

Il potenziale gravitazionale del corpo deformato può essere approssimato sostituendo al rigonfiamento mareale una massa  $m$  (vedi Fig. 2.9) di valore

$$m = \frac{1}{2} M_2 k \left( \frac{\mathcal{R}}{r} \right)^3 \quad (2.11)$$

dove  $\mathcal{R}$  è il raggio del corpo e  $k$  è una costante strutturale, detta *apsidal motion constant*, legata alla concentrazione centrale del corpo (Hut 1981). Dobbiamo porre attenzione al fatto che  $r$  non è il modulo di  $\mathbf{r}(t)$  ma di  $\mathbf{r}(t - \tau)$ , quindi per avere  $m$  all'istante  $t$  usiamo come approssimazione lo sviluppo di Taylor troncato al primo termine

$$m(t) = \frac{1}{2} M_2 k \left( \frac{\mathcal{R}}{r} \right)^3 \left( 1 + 3 \frac{\dot{r}}{r} \tau \right). \quad (2.12)$$

Ognuna delle due masse  $m$  esercita una forza attrattiva sul secondario (vedi (a) e (b) in Fig. 2.10) la cui somma  $\mathbf{F}'$  non è più parallela ad  $\mathbf{r}$ . La componente tangenziale di  $\mathbf{F}'$  aumenta (o diminuisce)  $\dot{\theta}$ , portando all'aumento (o diminuzione) del modulo di  $\mathbf{L}_{\text{orb}}$  e di conseguenza, per la conservazione di  $\mathbf{L}_{\text{tot}}$ , alla diminuzione (o aumento) del modulo di  $\mathbf{L}_{\text{spin}}$ . In altre parole  $\mathbf{F}'$  genera un *accoppiamento spin-orbita*, cioè permette lo scambio di momento angolare tra rotazione e rivoluzione.

La forza gravitazionale perturbata agente su  $M_2$  vale

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -\frac{\mathcal{G}(M_1 - 2m)M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ & - \frac{\mathcal{G}mM_2}{r^2 + \mathcal{R}^2 - 2r\mathcal{R}\cos\phi} (\cos\psi\hat{\mathbf{r}} - \sin\psi\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ & + \frac{\mathcal{G}mM_2}{r^2 + \mathcal{R}^2 + 2r\mathcal{R}\cos\phi} (\cos\psi'\hat{\mathbf{r}} - \sin\psi'\hat{\boldsymbol{\theta}}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

la quale può essere semplificata sviluppandola fino al quinto ordine in  $\mathcal{R}/r$  (Hut 1981)

$$\mathbf{F} = -\frac{\lambda}{r^2} \left\{ \hat{\mathbf{r}} + 3\frac{M_2}{M_1} \left(\frac{\mathcal{R}}{r}\right)^5 k \left[ \left(1 + 3\frac{\dot{r}}{r}\tau\right) \hat{\mathbf{r}} - (\Omega - \dot{\theta})\tau\hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Il carattere dissipativo di  $\mathbf{F}$  permette di comprendere il significato delle frecce nella Fig. 1.10: in un'orbita circolare e coplanare la coppia di forze prodotta dalle maree conserva il momento angolare ma diminuisce l'energia, permettendo al sistema di evolvere verso un'equilibrio stabile o di spiraleggiare fino alla collisione.

### 2.3 EVOLUZIONE ORBITALE

A partire dalla (2.14), usando solo considerazioni fisiche, Hut (1981) deriva le equazioni differenziali che governano l'interazione mareale

$$\frac{da}{dt} = -6\frac{k}{T}q(1+q) \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^8 a(1-e^2)^{-\frac{15}{2}} \left\{ f_1 - (1-e^2)^{\frac{3}{2}} f_2 \frac{\Omega}{n} \right\} \quad (2.15)$$

$$\frac{de}{dt} = -27\frac{k}{T}q(1+q) \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^8 e(1-e^2)^{-\frac{13}{2}} \left\{ f_3 - \frac{11}{18}(1-e^2)^{\frac{3}{2}} f_4 \frac{\Omega}{n} \right\} \quad (2.16)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 3\frac{k}{T} \frac{q^2 \mathcal{R}^2 M_1}{I_1} \left(\frac{\mathcal{R}}{a}\right)^6 n(1-e^2)^{-6} \left\{ f_2 - (1-e^2)^{\frac{3}{2}} f_5 \frac{\Omega}{n} \right\} \quad (2.17)$$

dove  $n$  è la velocità media (vedi pagina 7),  $q = M_2/M_1$  è il rapporto tra le masse,  $T$  è il costant time lag espresso col temposcala di *free-fall*  $\tau_{\text{ff}}$

$$T = \frac{\tau_{\text{ff}}}{\tau} \tau_{\text{ff}} = \frac{\mathcal{R}^3}{\mathcal{G}M_1\tau} \quad (2.18)$$

e  $f_j$  sono dei polinomi di  $e^2$

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8 \\ f_2 &= 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 \\ f_3 &= 1 + \frac{15}{4}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6 \\ f_4 &= 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 \\ f_5 &= 1 + 3e^3 + \frac{3}{8}e^4. \end{aligned} \quad (2.19)$$

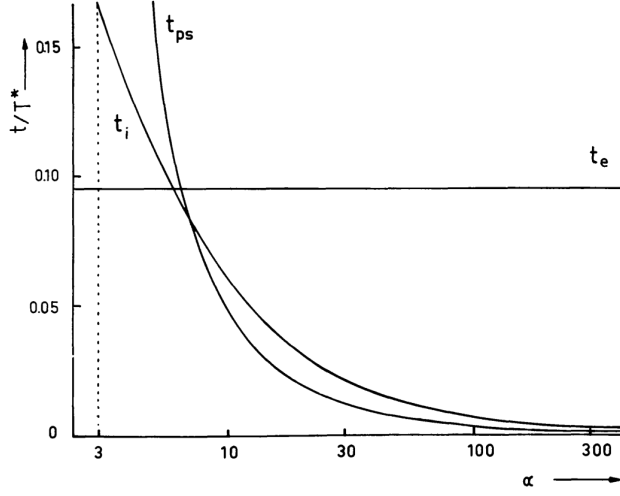


Figura 2.11: La figura, riportata dall'articolo di Hut (1981), rappresenta i tempiscala con cui  $e, i$  e  $\Omega$  diminuiscono esponenzialmente in funzione di  $\alpha$ . Il tempo è espresso con un'unità  $T^*$  caratteristica dell'interazione mareale.

Nel caso in cui  $i \neq 0$  Hut (1981) deriva anche l'evoluzione dell'inclinazione

$$\frac{di}{dt} = -3 \frac{k}{T} q (1+q) \left( \frac{\mathcal{R}}{a} \right)^8 a (1-e^2)^{-\frac{15}{2}} \left\{ f_1 - (1-e^2)^{\frac{3}{2}} f_2 \frac{\Omega}{n} \right\} \quad (2.20)$$

che tuttavia è derivata approssimando i contributi di  $i$  al primo ordine e quindi è valida solo per piccole inclinazioni; considerare ordini successivi introdurrebbe un fattore  $\cos i$  nelle (2.15-2.17).

Dalle equazioni che regolano l'interazione mareale possiamo già trarre delle previsioni: nel caso in cui l'orbita sia approssimativamente circolare ( $e \simeq 0$ ) e coplanare ( $i \simeq 0$ ) i polinomi  $f_j$  tendono all'unità quindi il segno delle equazioni è governato da  $\Omega/n$ . Ne deduciamo che

- a) se  $\Omega > n \Rightarrow \dot{a} > 0, \dot{e} > 0, \dot{\Omega} < 0$ ,
- b) se  $\Omega < n \Rightarrow \dot{a} < 0, \dot{e} < 0, \dot{\Omega} > 0$ ;

il primo caso corrisponde al sistema Terra-Luna, dove la rotazione terrestre rallenta e la Luna si allontana, mentre il secondo caso corrisponde al sistema Marte-Fobos, dove il satellite sta spiraleggiando verso il pianeta (Murray 1999, §4.9).

### 2.3.1 Pseudo-Sincronizzazione

Dalla linearizzazione attorno all'equilibrio delle equazioni differenziali (2.15-2.17,2.20) Hut (1981) ricava i tempiscala dell'evoluzione orbitale in funzione di  $\alpha^1$ , rivelando che  $a, e, \Omega$  e  $i$  raggiungono l'equilibrio dopo tempi diversi. In Fig. 2.11 sono rappresentati il temposcala della circolarizzazione  $t_e$ , il temposcala

<sup>1</sup>Ricordiamo che  $\alpha$  è il rapporto tra  $L_{\text{orb}}$  e  $L_{\text{spin}}$  per un'orbita all'equilibrio, dato dall'equazione (1.43).

della coplanarizzazione  $t_i$  e quello della sincronizzazione  $t_{ps}$  in un'unità di tempo tipica dell'interazione mareale

$$T^* = [kq(1+q)]^{-1} \left( \frac{a_0}{\mathcal{R}} \right)^8 T \quad (2.21)$$

dove  $a_0$  è il raggio dell'orbita all'equilibrio stabile. Il temposcala di  $a$  non è presente in quanto coincide con quello di  $\Omega$ , essendo legati proporzionalmente dalla conservazione di  $\mathbf{L}_{tot}$ .

Notiamo che mentre per  $\alpha \ll 7$  la circolarità e la coplanarità vengono raggiunte prima della sincronizzazione, per  $\alpha \gg 7$  prima avviene la sincronizzazione poi la coplanarizzazione e infine la circolarizzazione. Il secondo caso tuttavia necessita un'analisi più accurata, in quanto la sincronizzazione non può essere raggiunta prima della circolarizzazione. Da (2.14) abbiamo che  $\mathbf{F} \propto r^{-7}$  perciò se l'orbita è eccentrica l'interazione mareale avviene principalmente al pericentro, quando i corpi sono più vicini. Se il temposcala della circolarizzazione è maggiore di quello della sincronizzazione (che è il caso di  $\alpha \gg 7$ ) allora il primario tende a sincronizzare  $\Omega$  con la velocità orbitale al periasse  $\dot{\theta}_{ps}$  anziché con  $n$ : questo processo viene chiamato *pseudo-sincronizzazione*.

### 2.3.2 Evoluzione globale

Usando  $T^*$  è possibile semplificare le equazioni (2.15) e (2.16) mettendo in evidenza la dipendenza da  $\alpha$ : posto  $t' = t/T^*$  Hut (1981) ricava

$$\frac{d\tilde{a}}{dt'} = -6\tilde{a}^{-7}(1-e^2)^{-\frac{15}{2}} \left\{ g_1 + \alpha g_2 \tilde{a}^2 - (1+\alpha)g_3(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{a}^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (2.22)$$

$$\frac{de}{dt'} = -27\tilde{a}^{-8}(1-e^2)^{-\frac{13}{2}} \left\{ g_4 + \frac{11}{18}\alpha g_5 \tilde{a}^2 - \frac{11}{18}(1+\alpha)g_6(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{a}^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (2.23)$$

dove  $\tilde{a} = a/a_0$  e  $g_j$  sono dei polinomi di  $e^2$

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8 \\ g_2 &= 1 + \frac{11}{2}e^2 - \frac{67}{8}e^4 - \frac{55}{16}e^6 + 5e^8 + \frac{5}{16}e^{10} \\ g_3 &= 1 + \frac{13}{2}e^2 - \frac{15}{8}e^4 - \frac{85}{16}e^6 - \frac{5}{16}e^8 \\ g_4 &= 1 + \frac{15}{4}e^2 + \frac{15}{8}e^4 + \frac{5}{64}e^6 \\ g_5 &= 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{15}{8}e^4 + \frac{5}{4}e^6 + \frac{1}{8}e^8 \\ g_6 &= 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{11}{8}e^4 - \frac{1}{8}e^6 . \end{aligned} \quad (2.24)$$

In Fig. 2.12 sono riportati i flussi delle equazioni (2.22) e (2.23) sul piano  $(e, \tilde{a})$  per tre valori diversi di  $\alpha$ ; la linea tratteggiata rappresenta  $\tilde{a}_- = a/a_-$  dove  $a_-$  è il raggio dell'orbita all'equilibrio instabile. È evidente dai grafici che  $\alpha$  influisce profondamente e globalmente sull'evoluzione orbitale, creando situazioni molto diverse.

L'evoluzione di un sistema con  $\alpha = 4$  (vedi Fig. 2.12) non presenta comportamenti peculiari, tendendo monotonicamente o all'equilibrio ( $\tilde{a} = 1$  e  $e = 0$ )

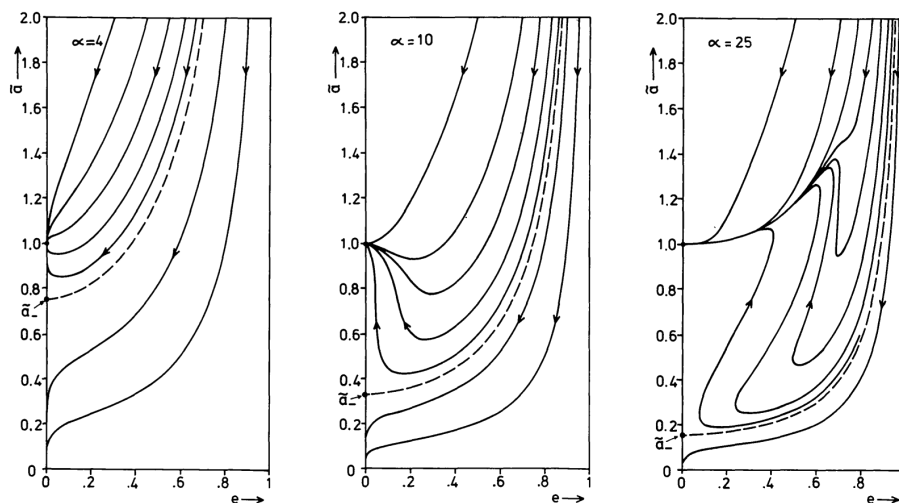


Figura 2.12: I flussi sul piano  $(e, \tilde{a})$  individuano l'evoluzione temporale di alcune orbite, per tre valori di  $\alpha$ . La linea tratteggiata individua l'equilibrio instabile, il quale separa le orbite in grado di raggiungere la stabilità da quelle che spiraleggiano verso la collisione. La figura è riportata dall'articolo di Hut (1981).

o alla collisione ( $\tilde{a} = 0$ ). Aumentando  $\alpha$  (vedi  $\alpha = 25$  in Fig. 2.12) si nota che per alcune orbite la decrescita monotona di  $\tilde{a}$  ed  $e$  si trasforma in una crescita monotona, e viceversa: queste inversioni possono essere spiegate dalla pseudo-sincronizzazione. Se l'orbita è inizialmente eccentrica si ha che la velocità orbitale al pericentro  $\dot{\theta}_{ps}$  è molto maggiore della velocità media  $n$ , e se  $\Omega < \dot{\theta}_{ps}$  allora  $\tilde{a}$  diminuisce. Anche  $e$  diminuisce, ma mentre la decrescita di  $\tilde{a}$  si blocca quando  $\Omega = \dot{\theta}_{ps}$  la decrescita di  $e$  continua (a causa dei tempi scala differenti). La circolarizzazione diminuisce la velocità al pericentro facendola tendere a  $n$ , eventualmente portando il sistema ad avere  $\Omega > \dot{\theta}_{ps}$  ed invertendo l'evoluzione di  $\tilde{a}$  ed  $e$ , i quali ricominciano a crescere. Il trasferimento di momento angolare dallo spin all'orbita diminuisce  $\Omega$  e termina quando viene raggiunta nuovamente una pseudo-sincronizzazione. A questo punto il sistema può evolvere lentamente verso l'equilibrio, continuando la circolarizzazione e iniziando la sincronizzazione.



## CAPITOLO 3

# *Effetti delle Maree sulle Stelle Binarie*

Nei capitoli precedenti abbiamo derivato un modello semplice per l'interazione mareale nei sistemi binari. La generalità delle assunzioni fatte ci ha permesso di non dover specificare né la natura dei corpi né i fenomeni fisici coinvolti, fatta eccezione per la gravità Newtoniana.

In questo capitolo studieremo l'influenza delle maree nell'evoluzione orbitale di questi sistemi attraverso delle simulazioni numeriche. Nella sezione 3.1 introdurremo il codice di sintesi di popolazione SEVN, motiveremo lo studio condotto con questo codice ed esporremo i risultati ottenuti. Nella sezione 3.2 trarremo infine le conclusioni.

### 3.1 SIMULAZIONE DI BINARIE

Nell'universo locale una frazione molto alta di stelle (circa il 50-70%, e.g. Sana et al. 2012) è membro di sistemi binari. Per questa ragione la modellizzazione dei sistemi binari è fondamentale per lo studio di una popolazione stellare. L'indagine di una popolazione stellare può essere fatta attraverso un *codice di sintesi di popolazione*. In questi codici vengono implementati i modelli per l'evoluzione di stelle e binarie attraverso un approccio Monte Carlo, permettendo di simulare come evolve la popolazione a partire da un set di condizioni iniziali. Le sintesi di popolazione sono importanti complementi alle simulazioni di  $N$ -Corpi, dove solo l'evoluzione dinamica della popolazione viene simulata.

#### 3.1.1 SEVN

Il codice SEVN, acronimo di "*Stellar EVolution N-body simulations*", è un codice di sintesi di popolazione open-source che implementa i modelli più recenti di evoluzione stellare, venti stellari e supernove (Spera et al. 2015). L'evoluzione stellare non viene simulata dal codice, e.g. fittando delle formule analitiche, ma viene interpolata da tracce evolutive prodotte con codici di evoluzione stellare, ad esempio dalle tracce prodotte con PARSEC (Bressan et al. 2012). Questa caratteristica lo rende versatile in quanto può essere adattato ad un nuovo modello di evoluzione stellare semplicemente cambiando le tracce interpolate; il codice inoltre può essere accoppiato a simulazioni di  $N$ -Corpi per includere gli effetti dell'evoluzione dinamica. Attualmente SEVN è applicato nello studio di oggetti compatti, binarie di oggetti compatti e i loro progenitori.

### 3.1.2 Obiettivo della tesi

**In SEVN è presente un modulo dedicato all'interazione mareale, che però non è ancora stato testato: lo scopo di questa tesi è effettuare dei test sul codice e verificare il funzionamento del modulo.**

Per poter confrontare le simulazioni con le previsioni del modello di Hut dovremo scegliere un campione di binarie che escluda quanto più possibile i processi fisici al di fuori dell'interazione mareale, in modo far emergere gli effetti dovuti alle maree. Useremo una versione del codice in cui i trasferimenti di massa (wind accretion, Roche lobe overflow e common envelope) sono disabilitati, per approssimarci il più possibile alla conservazione del momento angolare. Useremo la metallicità minima disponibile per limitare eventuali perdite di massa attraverso il vento stellare. Le binarie modellate dovrebbero quindi fornire dei dati confrontabili col modello di Hut, se l'implementazione delle forze mareali in SEVN è corretta.

Le binarie avranno componenti di massa uguale e i set simulati comprenderanno

- a) 4 diverse masse: 3, 5, 15 e 40  $M_{\odot}$ ;
- b) per ogni massa, 4 diverse eccentricità: 0.0, 0.5, 0.6 e 0.7;
- c) per ogni eccentricità, la velocità iniziale di spin della stella  $\Omega_1 = \Omega_2$  sarà inizializzata con 3 diversi valori: 0,  $\Omega_{\text{sinc}}$ ,  $\Omega_{\text{crit}}$

dove  $\Omega_{\text{sinc}}$  è il valore per cui l'equazione (2.17) si annulla e  $\Omega_{\text{crit}}$  è il limite kepleriano (vedi pagina 18), per un totale di 48 binarie. L'orbita sarà inizializzata con un semi-asse maggiore arbitrario pari a circa 4 volte il raggio massimo raggiunto dalla stella durante l'evoluzione.

L'evoluzione orbitale delle binarie sarà simulata durante il periodo in cui la stessa brucia idrogeno nel core, cioè la *sequenza principale*. Questa scelta è dovuta al fatto che la sequenza principale è la fase più lunga durante tutta la vita di una stella in cui i parametri stellari, e.g. raggio e massa, non variano drasticamente, permettendoci quindi di osservare un'evoluzione relativamente liscia.

### 3.1.3 Risultati

I risultati sono suddivisi per massa e riportati nelle Figure 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4.

Nella 1<sup>a</sup> riga è riportata l'evoluzione del semi-asse maggiore e il suo valore all'equilibrio, ottenuto risolvendo l'equazione (1.38) e usando la terza legge di Keplero (1.14). Nella 2<sup>a</sup> riga è riportata l'evoluzione dell'eccentricità. Nella 3<sup>a</sup> riga è riportata la velocità di spin delle stelle e il suo valore all'equilibrio, calcolato con l'equazione (1.38).

Risulta esserci un'evidente correlazione tra le variazioni di eccentricità, semi-asse e velocità angolare. Nei casi con  $\Omega_{\text{iniziale}} = 0$  l'aumento di  $\Omega_1$  corrisponde a una netta decrescita del semi-asse, prevista dal trasferimento di momento angolare dalla rivoluzione alla rotazione. Le variazioni hanno valori maggiori e sono più rapide quanto maggiore è l'eccentricità: ciò è prevedibile perché la distanza del pericentro diminuisce all'aumentare della velocità comportando un'interazione mareale maggiore. Inoltre il picco di  $\Omega_1$  si ha in corrispondenza del cambio di eccentricità: questo è previsto dalla pseudo-sincronizzazione, infatti



quando l'orbita è eccentrica  $\Omega_1$  tende a sincronizzarsi con  $\Omega_{ps}$  che è più alta della velocità media. Il caso limite con  $e = 0$  non raggiunge l'equilibrio durante la sequenza principale, perché il pericentro è più grande (rispetto a quello delle orbite eccentriche) e quindi l'interazione mareale è più debole.

Per  $\Omega_{iniziale} = \Omega_{sinc}$  ritroviamo gli stessi comportamenti del caso precedente, con la differenza che all'inizio c'è un trasferimento di momento angolare dalla rotazione alla rivoluzione. Si nota che la decrescita del semi-asse è più lenta del caso precedente, probabilmente a causa dell'aumento di momento angolare orbitale; nei casi con  $\Omega_{iniziale} = \Omega_{crit}$  l'aumento di momento angolare orbitale provoca addirittura un aumento di eccentricità e semi-asse. In entrambi i casi è presente nelle orbite eccentriche un picco in  $\Omega_1$  imputabile alla pseudo-sincronizzazione.

Un particolare interessante si riscontra per le binarie con  $e = 0$  e  $\Omega_{iniziale} = \Omega_{spin}$ :  $\Omega_1$  inizialmente tende a diminuire. Questo comportamento non trova riscontro nel modello di Hut, infatti l'orbita è circolare e sincrona quindi non dovrebbe esserci dissipazione o scambio di momento angolare. Una spiegazione può essere trovata nella crescita del raggio della stella: all'aumento del raggio aumenta anche l'inerzia, quindi per conservare il momento angolare la velocità angolare deve diminuire. Si osserva che successivamente a questa diminuzione l'orbita non è più sincrona e l'interazione mareale prende luogo riportando la velocità angolare verso il valore di equilibrio, sottraendo momento angolare all'orbita.

Nelle Figure 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 sono riportate le tracce evolutive sul piano  $(e, \tilde{a})$ ; i colori delle tracce individuano l'eccentricità e corrispondono a quelli dei grafici precedenti. Nei grafici è riportato anche il flusso del campo vettoriale ottenuto dalle equazioni (2.22, 2.23), tuttavia abbiamo omissso la parte di grafico con  $e < 0.1$  perché la funzione usata (StreamPlot di Wolfram Mathematica) non riesce a risolvere le equazioni nell'intorno dell'equilibrio.

I flussi sono risolti usando un  $\alpha$  arbitrario. Questo parametro è diverso per ogni orbita, passando da  $\alpha \sim 80$  per  $e = 0.7$  ad  $\alpha \sim 300$  per  $e = 0.5$ , tuttavia in questi intervalli di valori il comportamento globale non cambia molto. Dato che durante l'evoluzione il valore di  $\alpha$  decresce monotonicamente abbiamo scelto di risolvere i flussi con  $\alpha \sim 100$ , che è un valore incontrato da quasi tutte le orbite e per questo dovrebbe aumentare l'accordo tra i flussi teorici e le tracce evolutive; ricordiamo comunque che  $\alpha$  varia durante l'evoluzione, quindi non è possibile ottenere una corrispondenza perfetta.

In generale notiamo che tutti in tutti i grafici c'è una corrispondenza qualitativa e quantitativa tra l'evoluzione prevista dal modello e quella ottenuta con SEVN. Le tracce, oltre che avere pendenze simili ai flussi, presentano un aumento di  $\tilde{a}$  ed  $e$  nelle zone in cui i flussi risalgono verso l'alto e tendono all'equilibrio nelle zone in cui i flussi riscendono. Le eventuali discrepanze, che comunque sono minime, possono essere imputate sia al variare di  $\alpha$  sia alla presenza di processi fisici che si sovrappongono all'interazione mareale durante l'evoluzione della binaria.

## 3.2 CONCLUSIONI

La correlazione tra l'eccentricità e le variazioni di semi-asse maggiore e velocità angolare ci permette di concludere che l'evoluzione di questi parametri è stata guidata dall'interazione mareale. Inoltre i risultati ottenuti sono in buon accordo

con le previsioni del modello di Hut sia qualitativamente che quantitativamente, quindi concludiamo che l'interazione mareale è ben implementata in SEVN. Notiamo che la velocità angolare iniziale ha un ruolo importante nell'evoluzione orbitale: se consideriamo come limiti del sistema  $\Omega = 0$  e  $\Omega = \Omega_{\text{crit}}$  abbiamo visto che per le stelle binarie l'evoluzione orbitale è molto diversa tra i due, passando da decrescita rapida e monotona di  $a$  ed  $e$  per  $\Omega = 0$  a fenomeni via via più complessi all'aumentare di  $\Omega$ .

In generale l'interazione mareale può influenzare profondamente l'evoluzione orbitale di una binaria con possibili conseguenze anche sull'evoluzione stellare (ad esempio portandola a trasferimenti di massa significativi o al common envelope), e per questo la sua integrazione nei codici di sintesi di popolazione che simulano binarie risulta fondamentale.

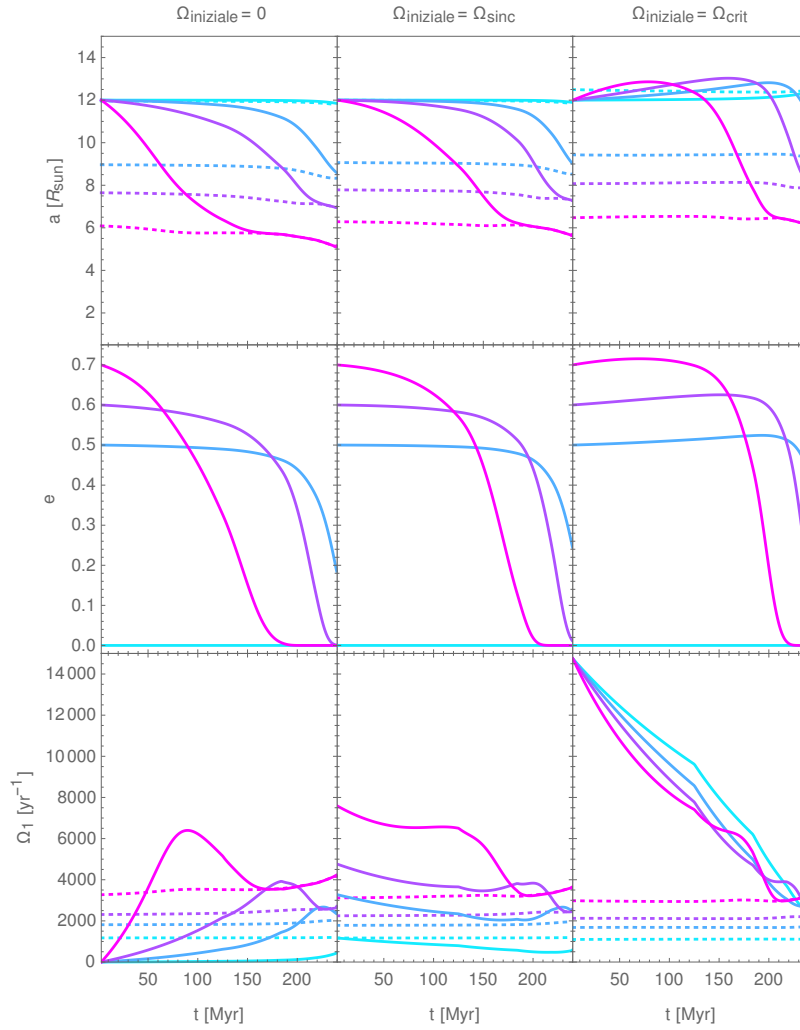


Figura 3.1: Evoluzione temporale di semi-asse maggiore, eccentricità e velocità di spin durante la sequenza principale di binarie con componenti di  $3 M_{\odot}$ . Nella 1<sup>a</sup> riga è riportato il semi-asse in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Nella 2<sup>a</sup> riga è riportata l'eccentricità. Nella 3<sup>a</sup> riga è riportata la velocità di spin della singola stella in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Ogni colonna raggruppa le 4 binarie del set inizializzate con la stessa velocità di spin; le diverse eccentricità sono individuate dai quattro diversi colori.

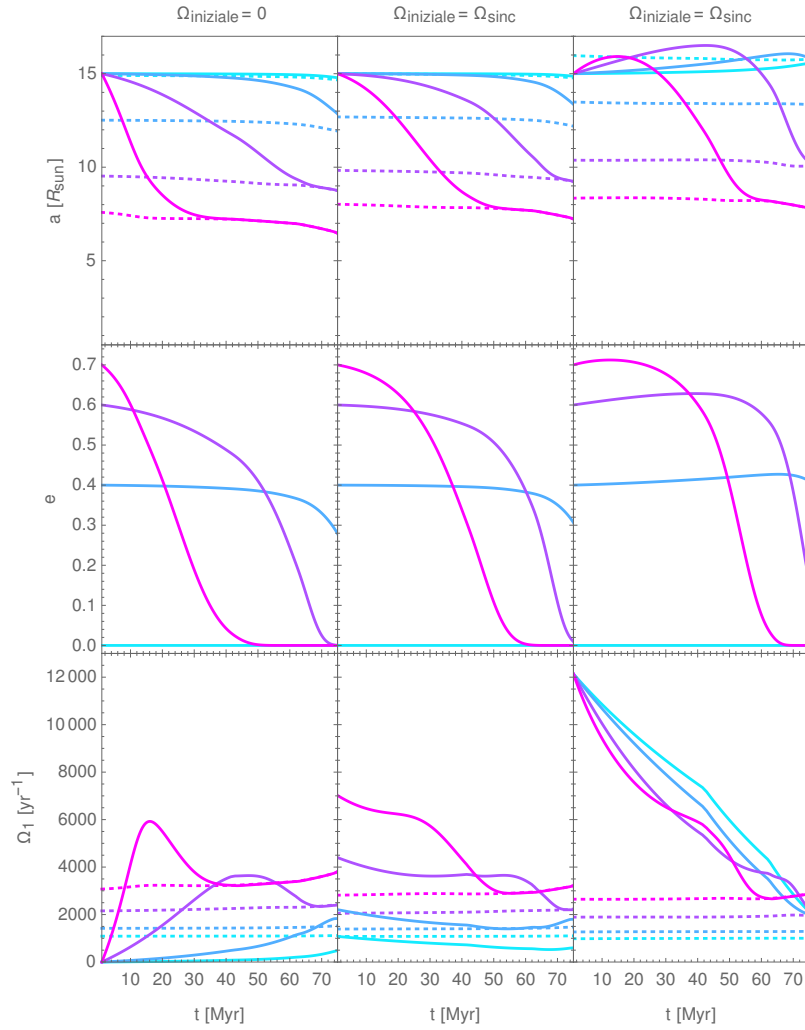


Figura 3.2: Evoluzione temporale di semi-asse maggiore, eccentricità e velocità di spin durante la sequenza principale di binarie con componenti di  $5 M_{\odot}$ . Nella 1<sup>a</sup> riga è riportato il semi-asse in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Nella 2<sup>a</sup> riga è riportata l'eccentricità. Nella 3<sup>a</sup> riga è riportata la velocità di spin della singola stella in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Ogni colonna raggruppa le 4 binarie del set inizializzate con la stessa velocità di spin; le diverse eccentricità sono individuate dai quattro diversi colori.

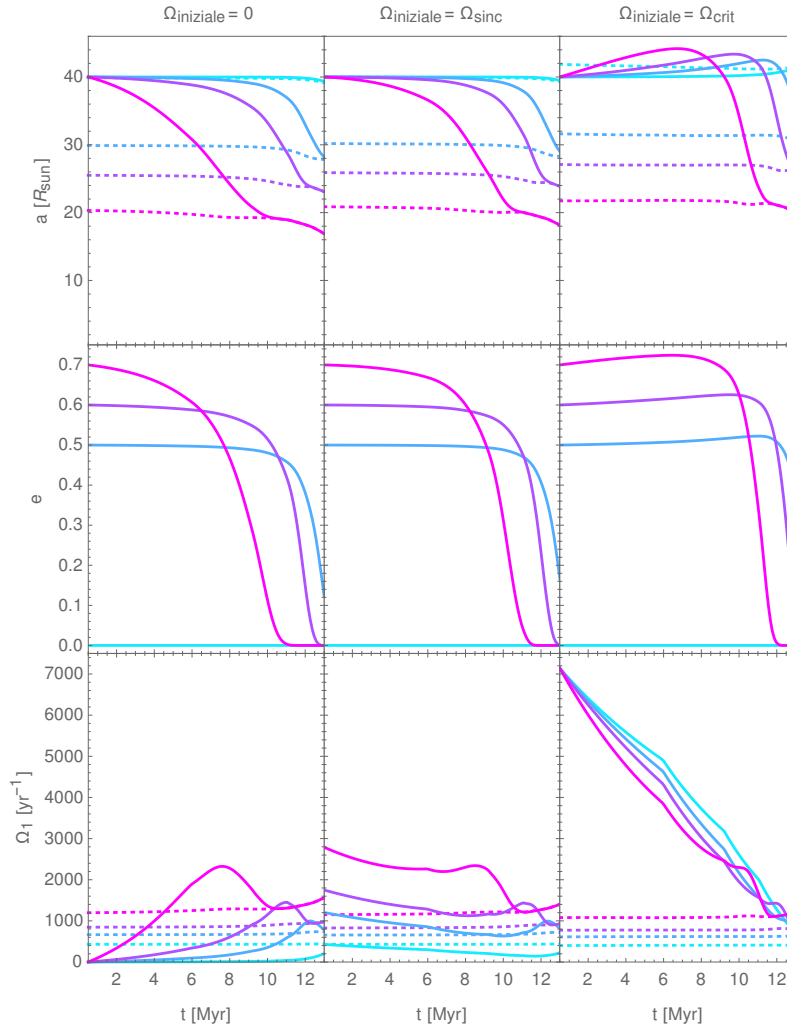


Figura 3.3: Evoluzione temporale di semi-asse maggiore, eccentricità e velocità di spin durante la sequenza principale di binarie con componenti di  $15 M_{\odot}$ . Nella 1<sup>a</sup> riga è riportato il semi-asse in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Nella 2<sup>a</sup> riga è riportata l'eccentricità. Nella 3<sup>a</sup> riga è riportata la velocità di spin della singola stella in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Ogni colonna raggruppa le 4 binarie del set inizializzate con la stessa velocità di spin; le diverse eccentricità sono individuate dai quattro diversi colori.

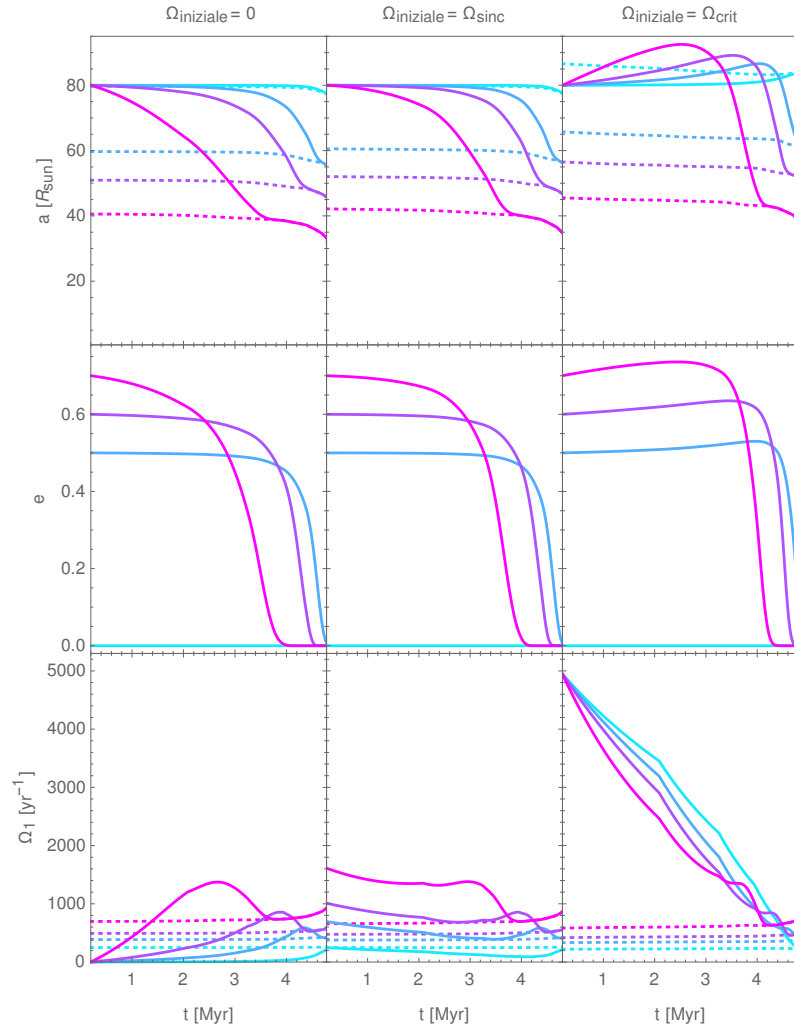


Figura 3.4: Evoluzione temporale di semi-asse maggiore, eccentricità e velocità di spin durante la sequenza principale di binarie con componenti di  $40 M_{\odot}$ . Nella 1<sup>a</sup> riga è riportato il semi-asse in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Nella 2<sup>a</sup> riga è riportata l'eccentricità. Nella 3<sup>a</sup> riga è riportata la velocità di spin della singola stella in tratto solido e il valore di equilibrio in tratto tratteggiato. Ogni colonna raggruppa le 4 binarie del set inizializzate con la stessa velocità di spin; le diverse eccentricità sono individuate dai quattro diversi colori.

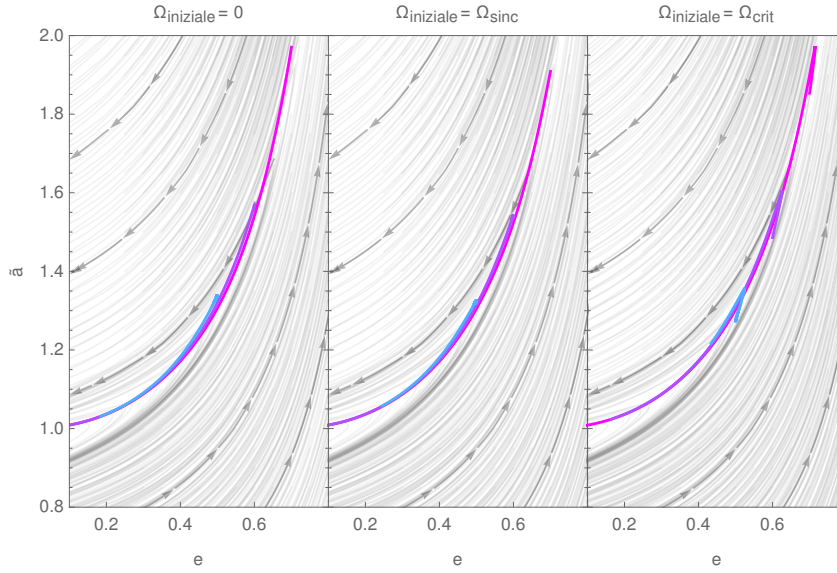


Figura 3.5: Tracce evolutive sul piano  $(e, \bar{a})$  delle binarie con componenti di  $3 M_{\odot}$ ; i colori individuano l'eccentricità e corrispondono a quelli della Fig. 3.1. In grigio sono riportate delle soluzioni delle equazioni (2.22,2.23), risolte con  $\alpha = 100$ . Le frecce indicano il verso di percorrenza delle soluzioni nel tempo.

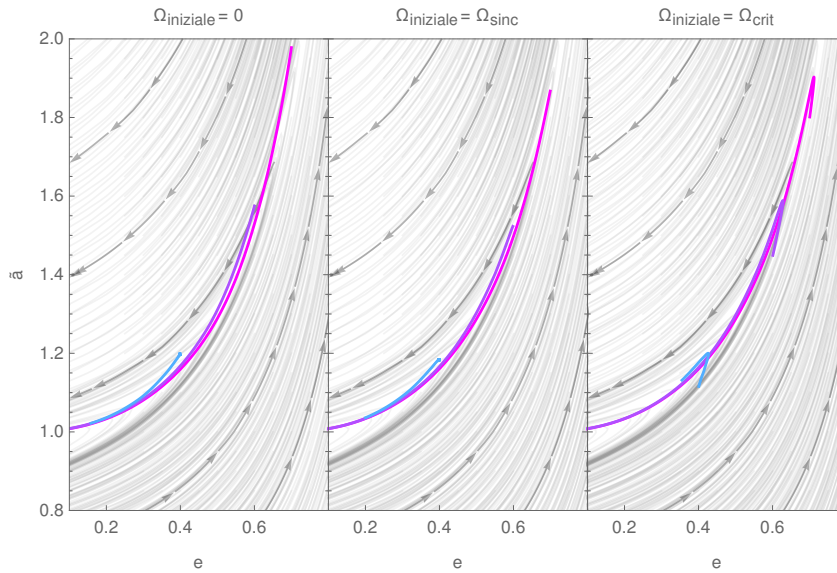


Figura 3.6: Tracce evolutive sul piano  $(e, \bar{a})$  delle binarie con componenti di  $5 M_{\odot}$ ; i colori individuano l'eccentricità e corrispondono a quelli della Fig. 3.2. In grigio sono riportate delle soluzioni delle equazioni (2.22,2.23), risolte con  $\alpha = 100$ . Le frecce indicano il verso di percorrenza delle soluzioni nel tempo.

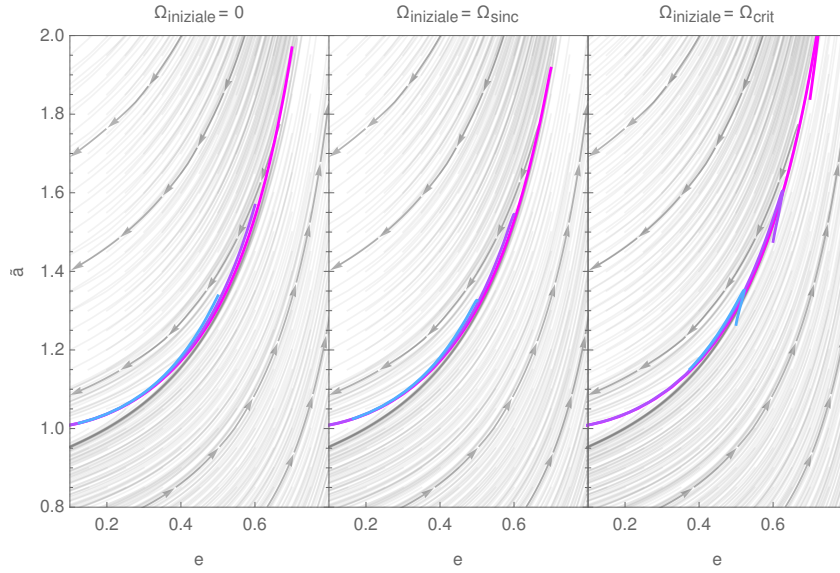


Figura 3.7: Tracce evolutive sul piano  $(e, \bar{a})$  delle binarie con componenti di  $15 M_{\odot}$ ; i colori individuano l'eccentricità e corrispondono a quelli della Fig. 3.3. In grigio sono riportate delle soluzioni delle equazioni (2.22,2.23), risolte con  $\alpha = 200$ . Le frecce indicano il verso di percorrenza delle soluzioni nel tempo.

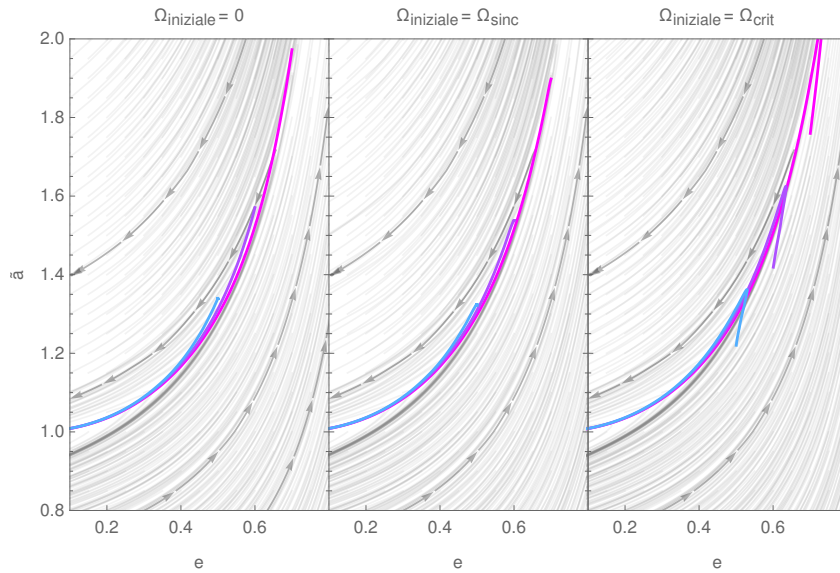


Figura 3.8: Tracce evolutive sul piano  $(e, \bar{a})$  delle binarie con componenti di  $40 M_{\odot}$ ; i colori individuano l'eccentricità e corrispondono a quelli della Fig. 3.4. In grigio sono riportate delle soluzioni delle equazioni (2.22,2.23), risolte con  $\alpha = 150$ . Le frecce indicano il verso di percorrenza delle soluzioni nel tempo.



APPENDICE A

*Tabella degli input per SEVN*

Riportiamo i dati iniziali usati come input per simulare le binarie con SEVN.

$M_1$	$M_2$	$Z_1$	$Z_2$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$a$	$e$	$T$	$t_0$	$dt$	$dt_{\text{out}}$
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	12.	0.	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	12.	0.5	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	12.	0.6	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	12.	0.7	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	12.	0.	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	12.	0.5	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	12.	0.6	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	12.	0.7	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	12.	0.	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	12.	0.5	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	12.	0.6	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
3.	3.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	12.	0.7	300.	3.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0	15.	0.	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0	15.	0.4	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0	15.	0.6	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0	15.	0.7	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	15.	0.	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	15.	0.4	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	15.	0.6	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	15.	0.7	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	15.	0.	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	15.	0.4	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	15.	0.6	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
5.	5.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	15.	0.7	80.	1.	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	40.	0.	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	40.	0.5	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0.	40.	0.6	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0.	40.	0.7	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	40.	0.	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	40.	0.5	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	40.	0.6	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	40.	0.7	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	40.	0.	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	40.	0.5	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	40.	0.6	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
15.	15.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	40.	0.7	13.	0.5	$10^{-3}$	0.1
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0	80.	0.	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	80.	0.5	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0	0.	80.	0.6	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	0.	0.	80.	0.7	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	80.	0.	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	80.	0.5	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	80.	0.6	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	sync	sync	80.	0.7	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01

40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	80.	0.	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	80.	0.5	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	80.	0.6	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01
40.	40.	$10^{-4}$	$10^{-4}$	crit	crit	80.	0.7	5.	0.2	$10^{-3}$	0.01

Tabella A.1: Input usati per le simulazioni con SEVN analizzate nella tesi: la massa della primaria  $M_1$  e della secondaria  $M_2$  in  $M_\odot$ , la metallicità della primaria  $Z_1$  e della secondaria  $Z_2$ , la velocità di spin della primaria  $\Omega_1$  e della secondaria  $\Omega_2$  in  $yr^{-1}$ , il semi-asse maggiore  $a$  in  $R_\odot$ , l'eccentricità  $e$ , il tempo totale di integrazione  $T$  in  $Myr$ , il tempo iniziale di integrazione  $t_0$  in  $Myr$ , il time step di integrazione  $dt$  in  $Myr$  e il time step tra i valori nel file di output  $dt_{out}$  in  $Myr$ . Se vengono usate le stringhe "sync" o "crit" per la velocità di spin allora SEVN inizializza le binarie con  $\Omega_{sync}$  o  $\Omega_{crit}$ , i cui valori sono calcolati dal codice.

## Bibliografia

- Arnol'd, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer.
- Bressan, A. et al. (2012). “PARSEC: stellar tracks and isochrones with the PADova and TRIeste Stellar Evolution Code”. In: *MNRAS* 427, pp. 127–145. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012MNRAS.427..127B>.
- Eggleton, P. P., L. G. Kiseleva e P. Hut (1998). “The Equilibrium Tide Model for Tidal Friction”. In: *ApJ* 499, pp. 853–870. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998ApJ...499..853E>.
- Hut, P. (1980). “Stability of tidal equilibrium”. In: *A&A* 92, pp. 167–170. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1980A%5C%26A...92..167H>.
- (1981). “Tidal evolution in close binary systems”. In: *A&A* 99, pp. 126–140. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1981A%5C%26A...99..126H>.
- Landau, L. D. e E. M. Lifšic (1976). *Mechanics*. Oxford: Pergamon Press.
- Maeder, A. (2009). *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- Murray, C. D. e S. F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Newton, I. (1846). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. [Trad. da Motte, A.] New York: Daniel Adee. URL: <https://archive.org/details/newtonspmathema00newtrich>.
- Sana, H. et al. (2012). “Binary Interaction Dominates the Evolution of Massive Stars”. In: *Science* 337, p. 444. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012Sci...337..444S>.
- Souchay, J., S. Mathis e T. Tokieda, cur. (2013). *Tides in Astronomy and Astrophysics*. Berlin-Heidelberg: Springer.
- Spera, M., M. Mapelli e A. Bressan (2015). “The mass spectrum of compact remnants from the PARSEC stellar evolution tracks”. In: *MNRAS* 451, pp. 4086–4103. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015MNRAS.451.4086S>.



## *Ringraziamenti*

Ringrazio il Dott. Spera per avermi fornito il codice SEVN e avermi dato l'opportunità di sperimentarlo. Ringrazio la Prof.ssa Mapelli, il Dott. Trani e il Dott. Spera per avermi introdotto alle loro attività di ricerca. Ringrazio i membri del gruppo ForDyS per la formazione, le discussioni e i consigli ricevuti.

Ringrazio soprattutto la mia famiglia per avermi sempre dato piena fiducia e, insieme ai miei amici, supporto costante.

