



Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

LA TEORIA CLASSICA DEGLI INVARIANTI ADIABATICI E LA TEORIA NEO-ADIABATICA

Relatore:
Prof. *Guzzo Massimiliano*

Laureando:
Travali Davide

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Introduzione	3
2	Teoria classica: l'invariante adiabatico	4
2.1	Definizione del problema in esame, spazio delle variabili	4
2.2	Teoria delle perturbazioni	6
2.3	Invariante adiabatico	8
3	Esempio: l'oscillatore armonico con pulsazione lentamente variabile nel tempo	9
3.1	Oscillatore armonico con costante elastica lentamente variabile nel tempo	10
3.1.1	Sistema non autonomo: forma dell'invariante adiabatico J . . .	13
3.1.2	Stima migliorata dell'invariante adiabatico all'ordine ε	16
4	Teoria neo-adiabatica: l'attraversamento delle separatrici	19
5	Bibliografia	23

1 Introduzione

La tesi tratta lo studio della teoria degli invarianti adiabatici, che si occupa di sistemi Hamiltoniani dipendenti da un parametro che varia lentamente nel tempo. Per ogni valore di quest'ultimo fissato nel tempo, i sistemi in esame risultano Liouville-Arnold [1] integrabili, ed i loro moti possono essere calcolati, per esempio, tramite una trasformazione in variabili di azione-angolo dipendente dal parametro in questione. L'integrabilità, tuttavia, viene rotta dalla variazione nel tempo del parametro, e bisogna fare uso della teoria degli invarianti adiabatici per poter, in prima approssimazione, determinare i moti dei sistemi in esame. L'ipotesi da rispettare per poter applicare la teoria è che il parametro, che senza perdere di generalità indicheremo con λ , abbia una variazione lenta nel tempo. A titolo di esempio, possiamo assumere $\lambda = \varepsilon t$ con $\varepsilon > 0$ parametro piccolo. Allora, nei casi che rispettano la precedente condizione su λ , si dimostra che esiste una particolare variabile che rimane pressoché costante nel tempo. Viene definito perciò l'*invariante adiabatico* del sistema. Per trovare questa variabile, si procede innanzitutto a rendere autonoma l'hamiltoniana di partenza, che identifichiamo nel caso più generale come $H(q, p, \varepsilon t)$ con $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, aggiungendo la coppia di variabili coniugate (λ, Λ) , ottenendo una nuova hamiltoniana $H_0(q, p, \lambda, \Lambda)$ autonoma. Successivamente, si effettua una trasformazione in variabili di azione-angolo $(\psi, J, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda})$ che coniuga H_0 ad una \tilde{H} che risulta dipendere dalla coordinata angolare ψ all'ordine ε , mentre la variabile J è l'invariante adiabatico cercato. Infine, si procede ad utilizzare il metodo di Lie della teoria delle perturbazioni per effettuare una trasformazione canonica prossima all'identità, ottenendo una hamiltoniana \tilde{H}' dipendente da ψ all'ordine ε^2 e una conseguente definizione migliorata dell'invariante adiabatico, che identificheremo come J' . Iterando il procedimento si può migliorarne la stima fino ad una dipendenza di H da ψ all'ordine ε^{N+1} .

Lo studio degli invarianti adiabatici è rilevante in molti esempi fisici noti, come nel caso dell'oscillatore armonico con costante elastica lentamente variabile nel tempo. Nella tesi si è proceduto ad applicare la teorica classica al caso sopracitato, effettuando inizialmente uno studio sui moti di fase del sistema non autonomo, per poi applicare la trasformazione in variabili di azione-angolo e determinare \tilde{H} , stimando la variazione dell'invariante adiabatico. Successivamente, si sono calcolati i moti tramite integrazione numerica con metodo Runge-Kutta ordine 6 esplicito, rappresentando $J(t)$ per diversi valori di ε , verificandone la migliore stabilità per piccoli valori. Infine, tramite la teoria delle perturbazioni, si è proceduto a stimare \tilde{H}' ed a stimare l'invariante adiabatico migliorato J' , rappresentandone la variazione nel tempo e confermandone la migliore stabilità rispetto a J a parità di ε .

L'ultima sezione della tesi tratta la teoria neo-adiabatica. Il limite della teoria classica è il dominio nel quale viene effettuata la trasformazione in variabili di azione-angolo: a causa del parametro λ , la traiettoria di moto può intersecare le separatrici, che subiranno una deformazione nel tempo. La teoria neo-adiabatica si occupa di stimare la variazione dell'invariante adiabatico che ha luogo quando una traiettoria passa da un generico dominio di partenza D_i ad un generico dominio di arrivo D_j , utilizzando il *valore critico* dell'azione J , calcolato nei pressi della separatrice stessa. La variazione dell'invariante adiabatico, nel caso di una traiettoria che compie ripetuti passaggi

tra due o più domini, può cumularsi e complicarne lo studio fino a generare un moto *caotico*.

Gli argomenti teorici descritti in questo testo sono una rielaborazione degli argomenti descritti in [3]. Il calcolo degli invarianti adiabatici per l'oscillatore armonico e gli esperimenti numerici sono invece originali, benché ottenuti con tecniche standard.

2 Teoria classica: l'invariante adiabatico

2.1 Definizione del problema in esame, spazio delle variabili

La teoria degli invarianti adiabatici si occupa dello studio delle proprietà delle soluzioni di sistemi Hamiltoniani in cui la complessità dei moti è fornita dalla variazione lenta di un parametro del problema. Infatti, si considerano sistemi con funzione di Hamilton $H(q, p, \lambda)$ ove $(q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ sono variabili canoniche, e λ è un parametro tale che, per ogni valore in un intervallo reale dato, il sistema Hamiltoniano è integrabile alla Liouville-Arnold, ed in particolare ammette variabili di azione-angolo dipendenti da λ in modo parametrico.

Il problema della determinazione dei moti si complica se λ è sostituito da una funzione variabile nel tempo: questa operazione rompe l'integrabilità del sistema. Tuttavia, se la variazione di λ è lenta, ad esempio: $\lambda = \varepsilon t$ con $\varepsilon > 0$ parametro piccolo, ci si aspetta che le variabili di azione-angolo sopra definite continuino ad avere un ruolo, da determinare mediante la teoria delle perturbazioni. In particolare, si ricercano delle nuove variabili che, se non proprio costanti del moto, abbiano una variazione temporale estremamente lenta. Tali variabili prendono il nome di invarianti adiabatici.

In questa tesi descriveremo alcuni aspetti della teoria classica degli invarianti adiabatici nel caso più semplice in cui essa è significativa: quello in cui $n=1$, cosicché per ogni valore di λ fissato, l'hamiltoniana $H(q, p, \lambda)$ è l'hamiltoniana di un problema ad un grado di libertà, e pertanto in sottoinsiemi aperti dello spazio delle fasi costituiti dalle sue curve di livello chiuse (con l'eccezione di un sottoinsieme dello spazio delle fasi contenenti gli equilibri e le separatrici), ammette variabili di azione-angolo.

Si sceglie un dominio $D \in \mathbb{R}^2$ privo di punti di equilibrio e delle loro eventuali separatrici, nel quale si possa eseguire la trasformazione canonica a variabili di azione-angolo (ψ, J) della forma:

$$\begin{aligned} q &= Q(\psi, J, \lambda) \\ p &= P(\psi, J, \lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

che coniuga l'hamiltoniana $H(q, p, \lambda)$ ad una hamiltoniana $h(J, \lambda)$, indipendente dall'angolo ψ .

Considerando poi la trasformazione canonica dipendente dal tempo:

$$\begin{aligned} q &= Q(\psi, J, \varepsilon t) \\ p &= P(\psi, J, \varepsilon t), \end{aligned} \quad (2)$$

essa coniuga l'hamiltoniana $H(q, p, \varepsilon t)$ ad una hamiltoniana:

$$\tilde{H}(\psi, J, \varepsilon t) = h(J, \varepsilon t) + \varepsilon f(\psi, J, \varepsilon t). \quad (3)$$

È conveniente procedere rendendo autonoma l'hamiltoniana $H(q, p, \varepsilon t)$ aumentando il numero dei gradi di libertà di una unità, aggiungendo allo spazio delle fasi la coppia di variabili coniugate (λ, Λ) e definendo l'hamiltoniana:

$$H_0(q, \lambda, p, \Lambda) := H(q, p, \lambda) + \varepsilon \Lambda \quad (4)$$

Per ottenere la forma di \tilde{H} in (3) si consideri la funzione generatrice a variabili miste:

$$\tilde{\chi}(J, \tilde{\Lambda}, q, \lambda) = \lambda \tilde{\Lambda} + \rho(J, q, \lambda) \quad (5)$$

ove $\rho(J, q, \lambda)$ è la funzione che genera la trasformazione (1) a meno della soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \rho}{\partial q}(J, q, \lambda) \\ \psi &= \frac{\partial \rho}{\partial J}(J, q, \lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

La funzione $\tilde{\chi}(J, \tilde{\Lambda}, q, \lambda)$ genera a sua volta la trasformazione canonica:

$$(q, p, \lambda, \Lambda) \mapsto (\psi, J, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) \quad (7)$$

definita a meno della soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial \rho}{\partial q}(J, q, \lambda) \\ \psi &= \frac{\partial \rho}{\partial J}(J, q, \lambda) \\ \tilde{\lambda} &= \lambda \\ \Lambda &= \tilde{\Lambda} + \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}(J, q, \lambda) \end{aligned} \quad (8)$$

con coniugazione di H_0 a:

$$\tilde{H}_0 = h(J, \tilde{\lambda}) + \varepsilon \tilde{\Lambda} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}(J, \psi, \tilde{\lambda}) \quad (9)$$

Si osserva come in formula (9) la dipendenza dalla coordinata angolare ψ sia dell'ordine del parametro ε , supposto piccolo per ipotesi. Da formula (3) si può ottenere una stima di \dot{J} all'ordine ε , che implica una variazione lenta di J nel tempo: è definito quindi l'invariante adiabatico. Per procedere a migliorare la stima di un ordine in ε , ossia verificare che J è ε -vicino ad una funzione J' tale che $J' = \theta(\varepsilon^2)$, si può applicare la teoria Hamiltoniana delle perturbazioni, generando trasformazioni canoniche prossime all'identità mediante il metodo della serie di Lie.

2.2 Teoria delle perturbazioni

In questa sezione descriviamo brevemente la tecnica delle serie di Lie, nella sua versione classica applicata alla teoria dei sistemi quasi-integrabili. Nella sezione 2.3 mostriamo che con piccoli cambiamenti essa viene applicata anche ai sistemi hamiltoniani della teoria degli invarianti adiabatici.

Sia data l'hamiltoniana quasi-integrabile definita nel dominio $A \times \mathbb{T}^n$, ove $A \in \mathbb{R}^n$ è aperto:

$$H(I, \phi) = h(I) + \varepsilon f(I, \phi) \quad (10)$$

con ε parametro piccolo. Tramite la teoria delle perturbazioni si vuole coniugare $H(I, \phi)$ ad una funzione di Hamilton del tipo:

$$H'(I', \phi') = h(I') + \varepsilon g(I') + \varepsilon^2 f'(I', \phi', \varepsilon) \quad (11)$$

mediante un procedimento detto 'passo perturbativo'. Grazie alla forma della nuova hamiltoniana, la cui dipendenza dall'angolo ϕ è aumentata di un ordine in ε , la stima di I' sarà migliore rispetto alla stima di I . Si può poi iterare il procedimento fino ad una stima della dipendenza dagli angoli dell'ordine di ε^{n+1} . In particolare, il passo perturbativo è realizzabile con il metodo di Lie.

Metodo di Lie ed equazione fondamentale della teoria perturbativa

Tramite questo metodo è possibile idealmente generare trasformazioni canoniche ε -prossime all'identità, attraverso il flusso hamiltoniano Φ_Ω di una funzione $\Omega(I, \phi)$ al tempo $t=\varepsilon$ e, iterando il procedimento, è possibile trovare la funzione H' coniugata ad H ad ogni ordine di ε desiderato. L'esistenza di tale coniugazione è in realtà subordinata alla verifica di alcune proprietà del dominio, tali da escludere la presenza dei cosiddetti "piccoli divisori". Denotando con $(I(t), \phi(t))$ le soluzioni delle equazioni di Hamilton di $\Omega(I, \phi)$ con dato iniziale (I', ϕ') , la trasformazione risulta:

$$(I', \phi') \mapsto (I, \phi) \quad (12)$$

con:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(I(t), \phi(t)) &= \{H, \Omega\} \\ \frac{d^j}{dt^j} H(I(t), \phi(t)) &= L_\Omega^j H \end{aligned} \quad (13)$$

con $L_\Omega f = \{f, \Omega\}$ derivata di Lie di una funzione f definita dal flusso hamiltoniano di Ω . In particolare, tramite sviluppo di Taylor della funzione $H(I(t), \phi(t))$ centrato in $t=0$, si ottiene:

$$H'(I', \phi') = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} L_\Omega^j H(I', \phi') = H(I', \phi') + \varepsilon \{H, \Omega\}(I', \phi') + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{H, \Omega\}, \Omega\}(I', \phi') + \dots \quad (14)$$

Inoltre si ricava:

$$\begin{aligned} I &= I' - \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial \phi}(I', \phi') + O(\varepsilon^2) \\ \phi &= \phi' + \varepsilon \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I', \phi') + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Se H ha la forma descritta in (10) si ottiene:

$$H'(I', \phi') = h(I') + \varepsilon(\{h, \Omega\}(I', \phi') + f(I', \phi')) + O(\varepsilon^2). \quad (16)$$

Si osserva come la trasformazione generata da Ω coniuga H ad H' solo se esiste una funzione $g(I)$ tale che sia soddisfatta l'equazione:

$$-\nabla h(I) \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \phi}(I, \phi) + f(I, \phi) = g(I), \quad (17)$$

detta equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni.

Le soluzioni (Ω, g) di (17) si trovano assumendo una regolarità minima per le funzioni f, Ω che ne consenta lo sviluppo in serie di Fourier:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k(I) e^{ik \cdot \phi}, \quad \Omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \Omega_k(I) e^{ik \cdot \phi}. \quad (18)$$

Si denota poi l'insieme $S \subseteq \mathbb{Z}^n$ tale che:

$$S = \{k \in \mathbb{Z}^n : f_k \neq 0\} \\ f = \sum_{k \in S} f_k(I) e^{ik \cdot \phi}. \quad (19)$$

Allora l'equazione (17) si riscrive come:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (-ik \cdot \underline{\omega}(J)) \Omega_k(I) e^{ik \cdot \phi} + \sum_{k \in S} f_k(I) e^{ik \cdot \phi} = g(I) \quad (20)$$

Allora le soluzioni (in un dominio $A' \times \mathbb{T}^n$) possono esistere solo se sono rispettate tre condizioni:

(i) $g(I) = f_0(I)$

(ii) i coefficienti di Fourier di Ω soddisfano:

$$\Omega_k(I) = \frac{f_k(I)}{ik \cdot \underline{\omega}(I)}, \quad k \in S \quad (21)$$

(iii) inoltre:

$$\Omega = -i \sum_{k \in S} \frac{f_k(I)}{k \cdot \underline{\omega}(I)} e^{ik \cdot \phi} \quad (22)$$

deve essere regolare in $A' \times \mathbb{T}^n$.

In particolare, la (i) è automaticamente soddisfatta dalla scelta di $g(I)$; la (ii) richiede che $\forall I \in A'$:

$$k \cdot \underline{\omega}(I) \neq 0 \quad \forall k \in S \setminus 0. \quad (23)$$

Nel caso in cui S abbia un numero infinito di elementi, la (23) non è condizione sufficiente (per la sufficienza serve un'accurata selezione del dominio, come fatto nella teoria di Nekhoroshev [4]).

Si noti che in questa formulazione classica della teoria delle perturbazioni, tale ipotesi prevede che la perturbazione f sia a spettro finito, ovvero un polinomio trigonometrico in \emptyset .

Le versioni più moderne, che si applicano a generiche serie di Fourier e hanno portato ai celebri teoremi KAM e di Nekhoroshev, sono oltre gli scopi di questa tesi.

Iterando il procedimento, si può sperare di arrivare a definire N passi perturbativi per giungere ad una dipendenza da ϕ dell'ordine di ε^{n+1} che coniugano H alle hamiltoniane:

$$\begin{aligned} H'(I', \phi') &= h(I') + \varepsilon g(I') + \varepsilon^2 f'(I', \phi', \varepsilon) \\ H^{(2)}(I^{(2)}, \phi^{(2)}) &= h(I^{(2)}) + \varepsilon g_2(I^{(2)}, \varepsilon) + \varepsilon^3 f_2(I^{(2)}, \phi^{(2)}, \varepsilon) \\ &\dots \\ H^{(N)}(I^{(N)}, \phi^{(N)}) &= h(I^{(N)}) + \varepsilon g_N(I^{(N)}, \varepsilon) + \varepsilon^{N+1} f_N(I^{(N)}, \phi^{(N)}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (24)$$

le cui stime a priori conducono a stime di stabilità su tempi di ordine $\frac{1}{\varepsilon^N}$, sempre più lunghi al crescere del numero N dei passi perturbativi. Nel caso limite, si convergerebbe ad una hamiltoniana indipendente dalle variabili angolari, e quindi si determinerebbe un dominio in cui il sistema è integrabile alla Liouville-Arnold. Chiaramente questo caso limite esiste solo se l'hamiltoniana era Liouville-Arnold integrabile fin dall'inizio. Il fatto che questo non sia vero genericamente, fa comprendere come il meccanismo di iterazione dei passi perturbativi sia più complesso di come presentato, ed in effetti il suo limite a $+\infty$ è proprio impedito dalle proprietà di accumulazione dei piccoli divisori ad ogni passo. Tale discussione è comunque al di fuori dello scopo di questa tesi, in cui discuteremo le proprietà di un solo passo perturbativo.

2.3 Invariante adiabatico

La teoria degli invarianti adiabatici generalizza il metodo descritto nella sezione precedente all'hamiltoniana (3). Procedendo con il metodo di Lie si ottiene, con un passo perturbativo e funzione generatrice $\chi(J, \psi, \lambda)$, la coniugazione di H ad una hamiltoniana H' :

$$\begin{aligned} H &= h(J, \lambda) + \varepsilon \Lambda + \varepsilon f(J, \psi, \lambda) \\ H' &= h + \varepsilon \{h, \chi\} + \varepsilon \Lambda' + \varepsilon f' + O(\varepsilon^2) \\ &= h - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial J'} \frac{\partial \chi}{\partial \psi'} + \varepsilon \Lambda' + \varepsilon f' + O(\varepsilon^2) \\ &= h + \varepsilon \Lambda' + \varepsilon \left[f'(J', \psi', \lambda') + h'(J') \frac{\partial \chi}{\partial \psi'} \right] + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (25)$$

nel caso in esame risulta $f = \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}$ e quindi:

$$H' = h(J', \lambda') + \varepsilon \Lambda' + \varepsilon \left[\frac{\partial \rho'}{\partial \lambda'}(J', \psi', \lambda') - \frac{\partial h}{\partial J'} \frac{\partial \chi}{\partial \psi'} \right] + \varepsilon^2 K_r(J', \psi', \lambda', \varepsilon) \quad (26)$$

con χ, g determinate dall'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \lambda'}(J', \psi', \lambda') - \frac{\partial h}{\partial J'} \frac{\partial \chi}{\partial \psi'} = g(J', \lambda'). \quad (27)$$

Si osserva come la dipendenza della funzione H' dalla variabile angolare si è ridotta all'ordine di ε^2 .

Con la nuova hamiltoniana si può quindi procedere a stimare la derivata totale rispetto al tempo dell'azione J' , la quale è legata a J da:

$$J = J' + \varepsilon f_2(\psi', J', \lambda', \varepsilon) \quad (28)$$

con f_2 funzione analitica di periodo 2π in ψ' .

La derivata rispetto al tempo della nuova azione J' soddisfa:

$$\left| \frac{dJ'}{dt} \right| = \varepsilon^2 \left| \frac{\partial K_r}{\partial \psi'} \right| \leq C' \varepsilon^2, \quad (29)$$

ove C' è il massimo superiore di $\frac{\partial K_r}{\partial \psi'}$ nel suo dominio.

Tramite formula (29) si arriva quindi ad ottenere una restrizione per la variazione dell'azione mediata J' , la quale si può legare ad una restrizione per l'azione di partenza, tramite i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} |J(t) - J(0)| &= |J(t) - J'(t) + J'(t) - J'(0) + J'(0) - J(0)| \\ &\leq |J(t) - J'(t)| + |J'(t) - J'(0)| + |J'(0) - J(0)|. \end{aligned} \quad (30)$$

Per $|t| \leq \varepsilon^{-\frac{3}{2}}$ e sapendo che da (15) vale che $|J(t) - J'(t)|$ e $|J(0) - J'(0)|$ sono $O(\varepsilon)$, si ottiene:

$$|J(t) - J(0)| \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (31)$$

In questo modo si dimostra come anche l'invariante adiabatico originale rimane quasi costante su tempi di ordine $\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}$.

3 Esempio: l'oscillatore armonico con pulsazione lentamente variabile nel tempo

Di seguito è riportato un esempio fisico noto, l'oscillatore armonico con costante elastica lentamente variabile nel tempo, dove l'invariante adiabatico svolge un ruolo significativo per la dinamica del sistema.

3.1 Oscillatore armonico con costante elastica lentamente variabile nel tempo

L'hamiltoniana di un oscillatore armonico con costante elastica lentamente variabile nel tempo assume la forma:

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega(\epsilon t)^2 q^2) \quad (32)$$

ove ω denota la pulsazione dell'oscillatore.

Consideriamo a titolo di esempio ω data da:

$$\omega(\epsilon t)^2 = 1 + \frac{1}{2} \cos(\epsilon t) \quad (33)$$

Per il sistema "congelato", ossia dove $\lambda = \epsilon t$ è un parametro fisso nel tempo, il diagramma delle fasi, osservabile in Figura 1, è ben noto.

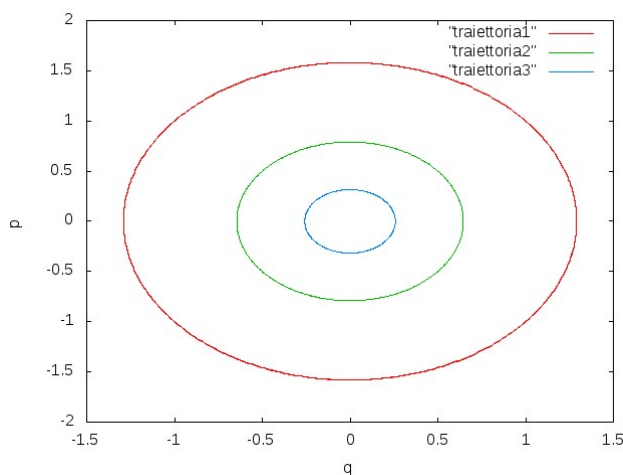


Figura 1: Traiettorie dell'oscillatore armonico per vari dati iniziali con $\epsilon=0$.

Analizziamo un'orbita di esempio con dati iniziali:

$$\begin{aligned} q(0) &= 1 \\ p(0) &= 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Procedendo come dichiarato precedentemente, si considera la trasformazione a variabili di azione-angolo (ψ, J) :

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin(\psi) \\ p &= \sqrt{2\omega J} \cos(\psi) \end{aligned} \quad (35)$$

ricavabile da:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint Pdq = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{2h}}{\omega}} \sqrt{2h - \omega^2 q^2} dq = \frac{2}{\pi} \sqrt{2h} \frac{\sqrt{2h}}{\omega} \int_0^1 \sqrt{1 - k^2} dk = \frac{h}{\omega} \quad (36)$$

mentre per l'angolo ψ risulta:

$$\psi = \frac{\partial}{\partial J} \int \sqrt{2\omega J - \omega^2 q^2} dq = \int_0^1 \frac{dk}{\sqrt{1 - k^2}} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2J}} q\right) \quad (37)$$

Invertendo le formule precedenti si ottiene il sistema (35).

Nel caso in cui ω dipenda dal tempo, l'azione risultante J , essendo un invariante adiabatico, avrà variazione lenta. Il parametro ω , quindi, variando lentamente, comporta una variazione dell'energia h associata al sistema, come da formula (36).

Si ricava quindi che le orbite rappresentate in Figura 1 si deformeranno per mantenere pressoché costante J . In effetti il grafico della traiettoria in Figura 2 risulta in accordo con quanto dichiarato.

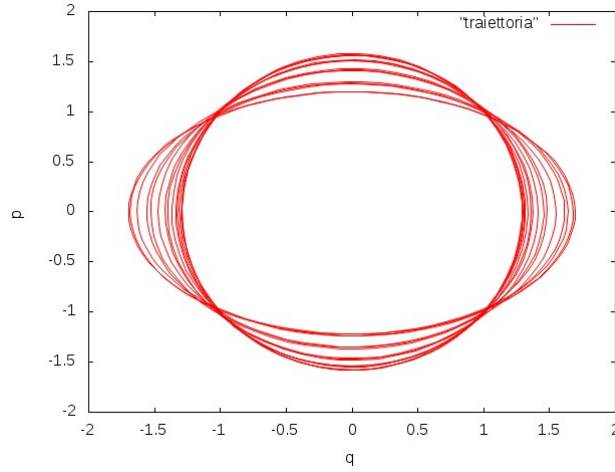


Figura 2: Rappresentazione dell'orbita dell'oscillatore nel piano di fase, ottenuta per $\varepsilon=0.1$ e $q(0)=1, p(0)=1$.

Inoltre gli andamenti di $J(t)$ e $H(t)$ si possono osservare in Figura 3, calcolati con passi di integrazione di 10^{-3} e di 10^{-2} rispettivamente.

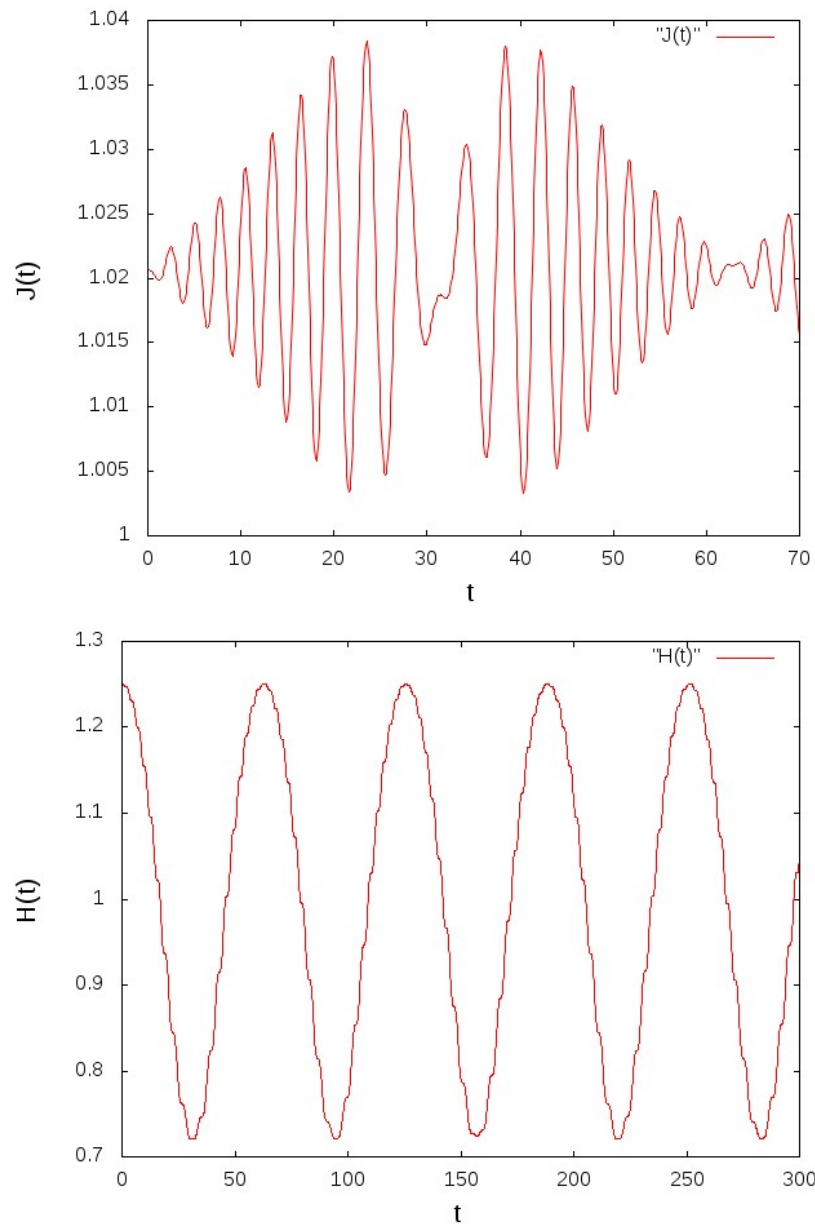


Figura 3: Rappresentazione delle funzioni $J(t)$ e $H(t)$ per $\varepsilon=0.1$ ottenute per i dati iniziali $q(0)=1, p(0)=1$.

Si osserva come l'invariante adiabatico risulta molto più stabile dell'hamiltoniana: questo suggerisce l'esistenza di un invariante migliorato, almeno di un ordine in ε , che ora procediamo a calcolare.

3.1.1 Sistema non autonomo: forma dell'invariante adiabatico J

In questa sezione forniamo un calcolo esplicito dell'invariante adiabatico migliorato per l'esempio discusso nella sezione precedente. Cominciamo calcolando esplicitamente la funzione f della formula (3). Si considera quindi la trasformazione di variabili:

$$\begin{aligned} (q, p, \lambda, \Lambda) &\mapsto (\psi, J, \tilde{\lambda}, \tilde{\Lambda}) \\ p &= \sqrt{2\omega J} \cos(\psi) \\ q &= \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin(\psi) \\ \lambda &= \tilde{\lambda} \\ \Lambda &= \tilde{\Lambda} + A(\psi, J, \tilde{\lambda}) \end{aligned} \quad (38)$$

la quale deve conservare le parentesi di Poisson elementari:

$$\begin{cases} \{q, \Lambda\} = \left\{ \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \sin(\psi), \tilde{\Lambda} + A \right\} = 0 \\ \{p, \Lambda\} = \left\{ \sqrt{2\omega J} \cos(\psi), \tilde{\Lambda} + A \right\} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Da (39) ne segue:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial \psi} \frac{\partial A}{\partial J} - \frac{\partial q}{\partial J} \frac{\partial A}{\partial \psi} + \frac{\partial q}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \psi} \frac{\partial A}{\partial J} - \frac{\partial p}{\partial J} \frac{\partial A}{\partial \psi} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

o esplicitamente:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos(\psi) \frac{\partial A}{\partial J} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\omega J}} \sin(\psi) \frac{\partial A}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J}{\omega^3}} \sin(\psi) \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = 0 \\ -\sqrt{2\omega J} \sin(\psi) \frac{\partial A}{\partial J} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\omega}{J}} \cos(\psi) \frac{\partial A}{\partial \psi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos(\psi) \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (41)$$

risolvendo il sistema (41) si ricava il seguente sistema di equazioni per la funzione A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial J} &= \frac{\cos(\psi) \sin(\psi)}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial A}{\partial \psi} &= \frac{J \cos(2\psi)}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (42)$$

che ammette soluzione:

$$A = \frac{J \cos(\psi) \sin(\psi)}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \quad (43)$$

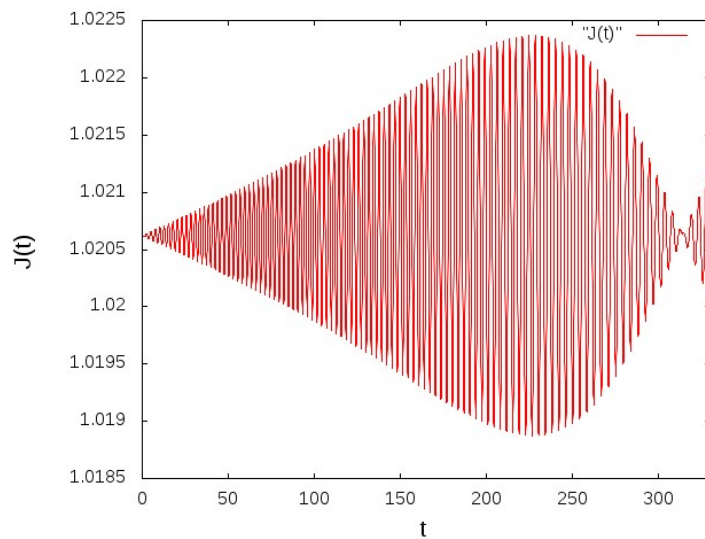
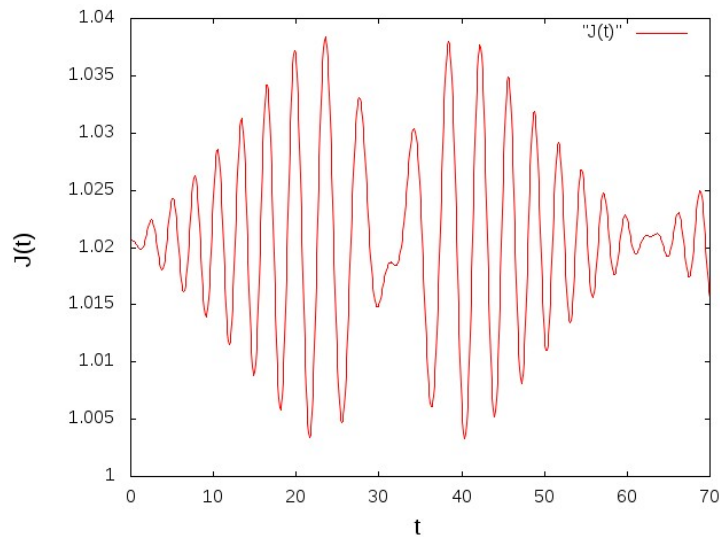
e quindi l'hamiltoniana \tilde{H} risulta:

$$\tilde{H} = \omega J + \varepsilon \tilde{\Lambda} + \varepsilon A(\psi, J, \tilde{\lambda}) \quad (44)$$

da cui si ottiene:

$$j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} = -\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{J \cos(2\psi)}{\omega} = \frac{-\varepsilon}{2\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \left(\frac{p^2}{\omega} - q^2 \omega \right). \quad (45)$$

In particolare si osserva in Figura 4 come la stabilità di $J(t)$ aumenti con il diminuire di ε .



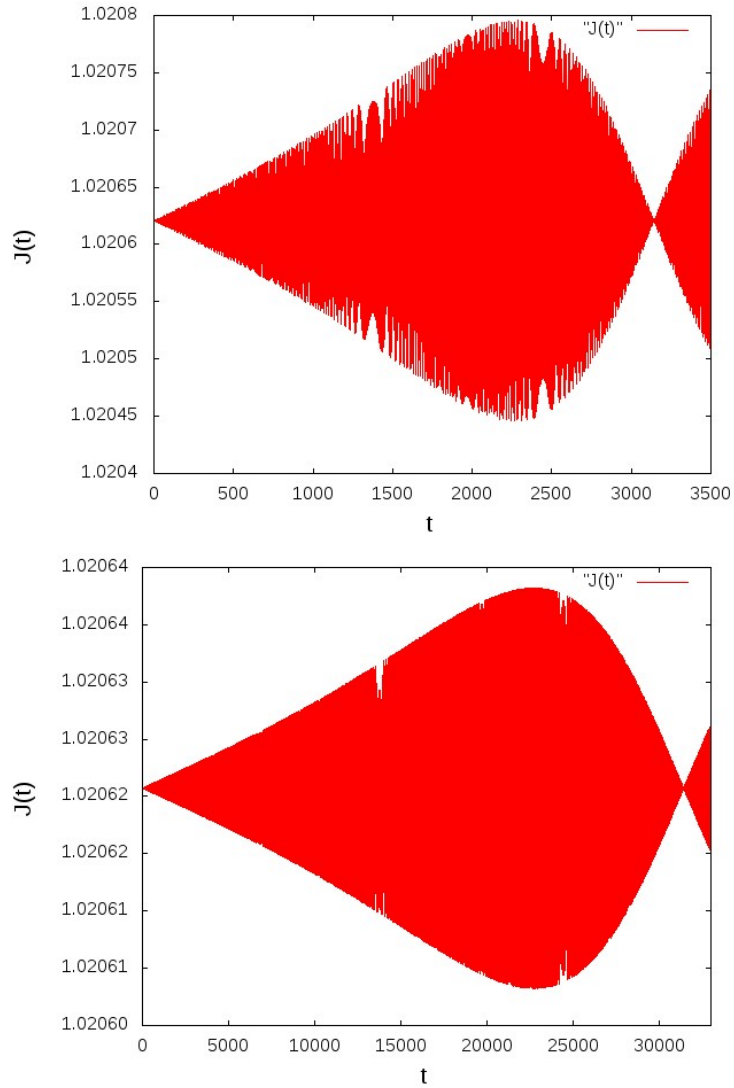


Figura 4: Rappresentazioni di $J(t)$ per valori di $\varepsilon=0.1;0.01;0.001;0.0001$, per dati iniziali $q(0)=1,p(0)=1$. Passo di integrazione rispettivamente di: $10^{-3};10^{-3};10^{-2};10^{-2}$.

3.1.2 Stima migliorata dell'invariante adiabatico all'ordine ε

Applicando il metodo perturbativo, come descritto nella sezione 1.2, si può migliorare la stima di J di un ordine in ε : trattando l'hamiltoniana (44) come l'hamiltoniana in formula (25), ove $f(J, \psi, \lambda) = A(J, \psi, \lambda)$, e risolvendo l'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni si ottiene (con $\lambda = \tilde{\lambda}$):

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (-ik\omega) \chi_k(J, \lambda) e^{ik\psi} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} A_k(J, \lambda) e^{ik\psi} = g(J, \lambda). \quad (46)$$

Scrivendo A in serie di Fourier:

$$A = J \frac{\cos(\psi) \sin(\psi)}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = \frac{J}{4i\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} (e^{2i\psi} - e^{-2i\psi}) \quad (47)$$

con coefficienti non nulli solo per $k = 2$ e $k = -2$.

Allora le soluzioni dell'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni al variare di k risultano:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_2 e^{i2\psi} + \chi_{-2} e^{-i2\psi} \\ \begin{cases} \chi_2(J) = \frac{J}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{1}{\omega i 8}, & k_1 = +2 \\ \chi_{-2}(J) = \frac{J}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{1}{\omega i 8}, & k_1 = -2 \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

Con χ :

$$\chi = -\frac{J}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{1}{\omega 8} (e^{2i\psi} + e^{-2i\psi}) \quad (49)$$

Si può quindi procedere a stimare H al secondo ordine mediante serie di Lie:

$$\tilde{H}' = \omega J + \varepsilon \tilde{\Lambda} + \varepsilon^2 (\{\tilde{\Lambda}, \chi\} + \{A, \chi\}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \{\{\omega J, \chi\}, \chi\} + \dots \quad (50)$$

e tramite formula (15) si ricava la stima migliorata dell'invariante adiabatico J' :

$$J' = J + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial \psi} + O(\varepsilon^2) = J + \varepsilon \frac{J \sin(2\psi)}{2\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + O(\varepsilon^2) = J - \varepsilon \frac{J \sin(\lambda) \sin(2\psi)}{8\omega^3} + O(\varepsilon^2) \quad (51)$$

ove si è utilizzato:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = -\frac{\sin(\lambda)}{4\omega} \quad (52)$$

In Figura 5 si può osservare l'andamento di $J'(t)$ in funzione del tempo. La migliore stabilità di $J'(t)$ rispetto a $J(t)$ si può osservare in Figura 6. In Figura 7 si osserva invece come la stabilità di J' aumenti con il diminuire di ε .

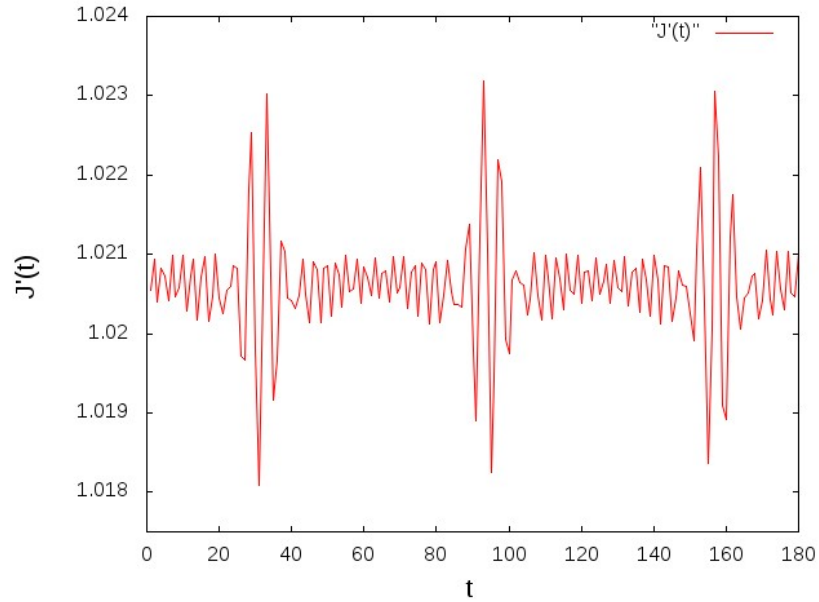


Figura 5: Stabilità $J'(t)$ per $\varepsilon=0.1$ e dati iniziali $q(0)=1$, $p(0)=1$. Passo di integrazione di 10^{-3} .

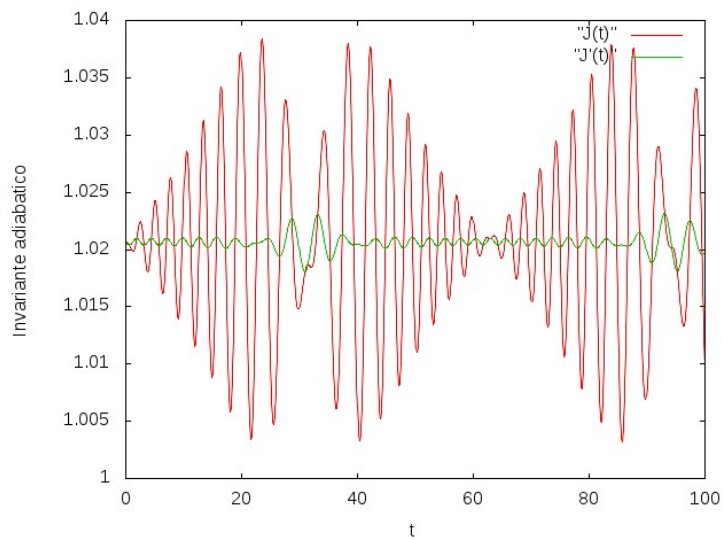


Figura 6: Confronto stabilità $J(t)$ e $J'(t)$ per $\varepsilon=0.1$ e dati iniziali $q(0)=1$, $p(0)=1$. Passo di integrazione di 10^{-3} .

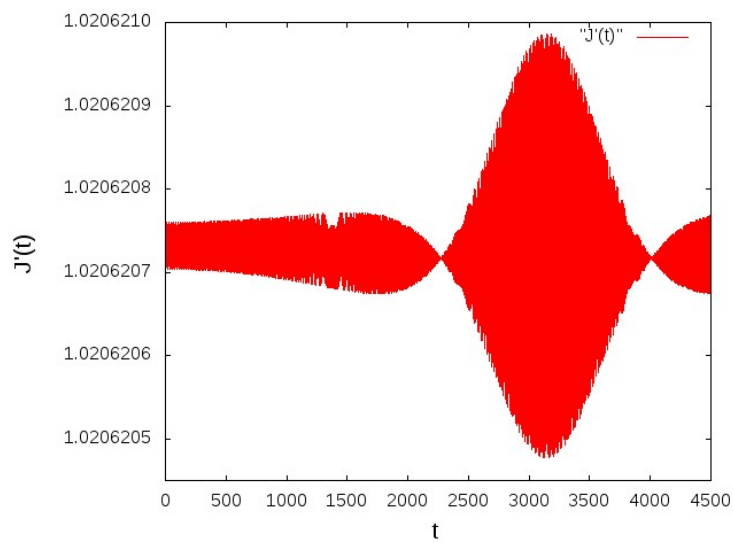
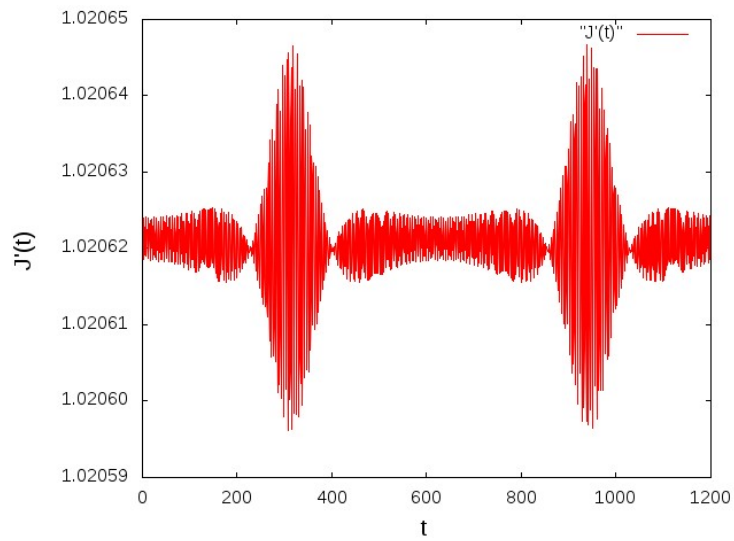


Figura 7: $J'(t)$ per valori di $\epsilon=0.01;0.001$ e per dati iniziali $q(0)=1, p(0)=1$. Passo di integrazione di 10^{-2} .

4 Teoria neo-adiabatica: l'attraversamento delle separatrici

La teoria neo-adiabatica studia l'attraversamento delle separatrici della traiettoria di moto, causato alla variazione del parametro λ . Infatti, le separatrici subiranno una deformazione così come la traiettoria, portando in alcuni casi quest'ultima ad attraversarle, cambiando il dominio di definizione delle variabili di azione-angolo. Come dichiarato nel capitolo 2, le variabili di azione angolo si introducono in domini D_i privi di punti critici e, forniti dei valori iniziali, è possibile seguire la traiettoria del moto all'interno di essi. Il problema del sistema in esame, però, risiede nel passaggio tra due domini distinti: ne segue infatti un cambiamento dell'invariante adiabatico. Si riporta di seguito un esempio del problema dell'attraversamento delle separatrici, rappresentato in Figura 8.

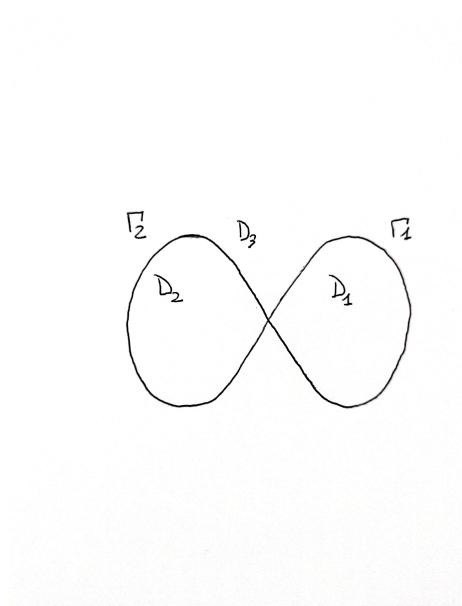


Figura 8: Rappresentazione di tre domini D_i delimitati dalle separatrici. Si veda figura 3, pagina 103 di *Hamiltonian Dynamics Theory and Applications* [3].

Nei pressi delle separatrici, si può stimare il *valore critico* dell'azione J , che risulterà utile in seguito:

$$J_i^* = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} (pdq - qdp) \quad (53)$$

$$J_3^*(\lambda) = J_1^*(\lambda) + J_2^*(\lambda)$$

con $1 \leq i \leq 2$.

Si dimostra (si veda [3]) che, sulle separatrici, la relazione tra J' e J soddisfa:

$$J'_i = J_i + \varepsilon g_i + \dots \quad (54)$$

$$J'_3 = J_3 + \varepsilon(g_3 - \pi\Delta_{12}) + \dots$$

con J' invariante adiabatico migliorato e g_i funzione che esprime la correzione al primo ordine.

In particolare la funzione Δ_{12} risulta uguale a:

$$\Delta_{12} = \frac{\partial J_1}{\partial \lambda} \frac{\partial J_2}{\partial h} - \frac{\partial J_2}{\partial \lambda} \frac{\partial J_1}{\partial h}. \quad (55)$$

Ipotizzando di avere una traiettoria che compie N giri nel dominio di partenza (in questo caso D_i) per poi attraversare le separatrici ed entrare nel dominio D_j , denominiamo “apici” i punti di incontro della traiettoria con l'asse delle ascisse (o delle ordinate) a ogni giro completo, come osservabile in Figura 9. Nel caso in esame avremo quindi N apici in D_i , denominati A_k ($k \in [1, N]$). Denominiamo il primo apice nel dominio D_j come A_0 .

Si può dimostrare che a ogni apice, $\Delta h = h_{k+1} - h_k$ rimane pressoché costante, mentre $\Delta \lambda = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ cambia sensibilmente. Ne deriva una perdita di sincronizzazione, tra la “traiettoria vera”, ossia la traiettoria che segue il cambiamento dell'invariante adiabatico, e la “pseudo traiettoria”, che conserva invece l'invariante adiabatico. Da questa differenza, si possono identificare due tempi:

$$T_i = \lambda_0 - \lambda_N \quad (56)$$

$$T_i^* = \tau_i - \lambda_N$$

Ove in (56) l'espressione τ_i indica il valore di λ se l'invariante adiabatico fosse conservato durante l'attraversamento, stimato tramite :

$$J_i^*(\tau_i) = J'_i(h_N, \lambda_N), \quad (57)$$

ove J_i^* è il valore dell'azione J nel dominio “i” calcolata nei pressi delle separatrici. In questo modo si può procedere a stimare il cambiamento dell'invariante J' a seguito di un attraversamento della traiettoria dal dominio D_i (calcolato nell'apice N) al dominio D_j (calcolato nell'apice M):

$$\begin{aligned} \Delta J' &= J'_j(h_M, \lambda_M) - J'_i(h_N, \lambda_N) = J_j^*(\tau_j) - J_i^*(\tau_i) \\ &= J_j^*(\tau_i) - J_i^*(\tau_i) + \frac{\partial J_j^*}{\partial \lambda}(\tau_j - \tau_i) + O(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \log^2(\varepsilon^{-1})). \end{aligned} \quad (58)$$

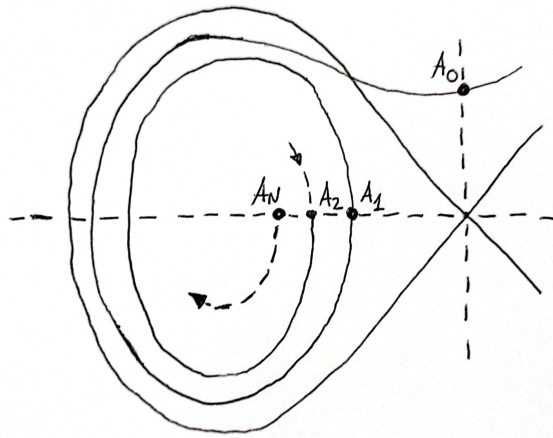


Figura 9: Rappresentazione traiettoria d'esempio, si veda figura 6, pagina 117 di *Hamiltonian Dynamics Theory and Applications* [3].

Infine, si può arrivare ad una formulazione per $\Delta J'$ come:

$$\Delta J' = \Delta_1(i, j) + \Delta_2(i, j) + O(\varepsilon^{\frac{4}{3}} \log^2(\varepsilon^{-1})) \quad (59)$$

con:

$$\begin{aligned} \Delta_1(i, j) &= J_j^* - J_i^* + \varepsilon \left(\frac{\partial J_j^*}{\partial \lambda} \right) \left[\left(\frac{\partial J_j^*}{\partial \lambda} \right)^{-1} g_j - \left(\frac{\partial J_i^*}{\partial \lambda} \right)^{-1} g_i \right] \\ \Delta_2(i, j) &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{\partial J_j^*}{\partial \lambda} \right) G_{ij}(z). \end{aligned} \quad (60)$$

Dove la funzione G_{ij} è data da:

$$\begin{aligned} G_{k3} = G_{3k} &= \frac{1}{2}(1-2z)(1-2\alpha) \log(\varepsilon^{-1}) + \frac{1}{2}(1-2z) \left[\log \left(\frac{h_k^* \varepsilon}{b_k} \right) - 2\alpha \log \left(\frac{h_3^* \varepsilon}{b_3} \right) \right] \\ &+ \log \left(\frac{\Gamma(\alpha - \alpha z) \Gamma(1 - \alpha z) \Gamma(z)}{(2\pi)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (61)$$

con $\alpha = \frac{b_k}{b_3}$, $b_k = 2\pi\varepsilon \left| \frac{\partial J_k^*}{\partial \lambda} \right|$, $z = \frac{b_k - h_0}{b_k}$, Γ funzione gamma di Eulero, se uno dei due domini corrisponde a D_3 , mentre è data da:

$$G_{ij} = z(1 + \alpha) \log(\varepsilon^{-1}) + z \left[\log \left(\frac{h_i^* \varepsilon}{b_i} \right) + \alpha \log \left(\frac{h_j^* \varepsilon}{b_j} \right) + \log \left(\frac{\Gamma(1-z) \Gamma(1-\alpha z)}{2\pi z \sqrt{\alpha}} \right) \right] \quad (62)$$

con $\alpha = \frac{b_i}{b_j}$, $b_{i,j} = 2\pi\varepsilon \left| \frac{\partial J_{i,j}^*}{\partial \lambda} \right|$, $z = \frac{h_0}{b_i}$ se non comprende il salto nel dominio D_3 . Risulta quindi possibile stimare la variazione dell'invariante adiabatico a seguito del passaggio delle separatrici sul piano di fase. Ne segue che, per ogni passaggio della traiettoria di moto da un dominio all'altro, l'invariante adiabatico varia di una quantità $\Delta J'$, che cumulandosi per esempio tramite ripetuti passaggi tra due domini, può portare ad un moto cosiddetto *caotico* [3], ossia un moto non facilmente descrivibile.

5 Bibliografia

1. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti (2010).
2. M. Guzzo, *Appunti tratti dal corso di Meccanica Analitica*, Università di Padova, 2022-2023.
3. J.Henrard, *The Adiabatic Invariant Theory and Applications*. Da G. Benettin, J Henrard, S. Kuksin; *Hamiltonian Dynamics Theory and Applications*, A. Giorgilli (1999).
4. N.N. Nekhoroshev, Usp. Mat. Nauk 32-6, 5 (1977); Russ. Math. Surv. 32, 1 (1977).