UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"GIOCHI DIFFERENZIALI: INTRODUZIONE GENERALE E APPLICAZIONE ALLO SFRUTTAMENTO DI RISORSE E ALL'ECONOMIA AMBIENTALE"

RELATORE:

CH.MA PROF. ALESSANDRA BURATTO

LAUREANDO: FILIPPO LAGO

MATRICOLA N.: 1114857

ANNO ACCADEMICO : 2017-2018

GIOCHI DIFFERENZIALI: introduzione generale e applicazione allo sfruttamento di risorse e all'economia ambientale

Filippo Lago*

Università degli Studi di Padova
Scuola di Economia e Scienze Politiche
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali "Marco Fanno"

Sommario

Il presente elaborato tratta i giochi differenziali, in particolare quelli caratterizzati da una struttura informativa open-loop. Nella prima parte viene data un'introduzione generale, specificando come si formulano vincoli e funzionale obiettivo e come si traduce il concetto di equilibrio di Nash nel contesto dei giochi differenziali. La seconda parte dell'elaborato espone un' importante applicazione economica dei giochi differenziali: lo sfruttamento di risorse non rinnovabili. Si spiegheranno le differenze tra cooperazione e competizione tra diversi giocatori, confrontando i payoff degli stessi nei due casi e ragionando sulle condizioni che rendono la cooperazione più conveniente della competizione.

I conflitti militari, la competizione tra due imprese multinazionali per la leadership di un mercato, la trattativa tra forze politiche per formare una maggioranza parlamentare. Nella società sono situazioni ricorrenti, che spesso monopolizzano l'attenzione dei media e diventano problemi fondamentali per il futuro di una nazione o di un continente. Cosa possono avere in comune queste situazioni così frequenti? Sicuramente l'uso, da parte degli attori coinvolti, di una strategia. La strategia può essere definita come un insieme di azioni, pianificate da un soggetto, volte al raggiungimento di un obiettivo. Una situazione in cui due o più soggetti interagiscono strategicamente viene definita gioco (si veda [4, pag.449]). Gli attori che partecipano ad un gioco sono detti, ovviamente, giocatori. I giocatori elaborano strategie e compiono le conseguenti azioni, al fine di raggiungere un determinato obiettivo, detto payoff. Può risultare spontaneo pensare a un gioco come a una situazione in cui i giocatori sono in conflitto tra di loro, nella quale il raggiungimento del payoff per il giocatore i-esimo implica che un altro giocatore j-esimo non raggiunga il suo. Questo tipo di giochi sono detti non cooperativi o competitivi. Esistono anche situazioni di interazione strategica nelle quali i giocatori collaborano tra di loro, per raggiungere un payoff "comune". Questo tipo di giochi vengono chiamati cooperativi. Inoltre, i giochi possono essere distinti anche dall'istante di tempo in cui i giocatori possono compiere le loro mosse. I giochi simultanei, prevedono che i giocatori compiano le loro azioni contemporaneamente, senza ovviamente sapere quali siano le mosse altrui. Esempio celebre di questo tipo di giochi è il dilemma del prigioniero, che prevede che due detenuti scelgano contemporaneamente se confessare o no (ad esempio, si vedano [4, pag.455][1, pag.272]). Tuttavia esistono giochi nei quali i partecipanti compiono mosse non simultaneamente, ovvero esiste un ordine stretto di azioni tra i giocatori. Questo tipo di giochi vengono detti sequenziali (si veda [5, pag.325]), e possono essere gerarchici qualora esista una precisa gerarchia fra i giocatori che giustifica l'ordine delle loro azioni.

*Relatore: Prof. Alessandra Buratto

Un esempio di questo tipo di giochi può essere il duopolio di Stackelberg, nel quale l'impresa che ha un vantaggio gerarchico, dovuto a un'asimmetria informativa, è detta leader, mentre la seconda è detta follower (si veda [pag.483][4]). A questo punto, dopo aver formalizzato il problema, è legittimo chiedersi se e come i giochi possano essere risolti, ovvero se sia possibile trovare una situazione di equilibrio dalla quale nessun giocatore abbia incentivo a muoversi. Vogliamo quindi trovare una situazione in cui ciascun giocatore ha scelto un comportamento ottimale in risposta alla decisione di tutti gli altri giocatori. La teoria dei giochi, branca della matematica che studia le interazioni strategiche, definisce questo tipo di situazione come equilibrio di Nash (dal nome del celebre matematico John Nash, a cui se ne deve la scoperta). Formalmente, definiamo "equilibrio di Nash" la situazione in cui ogni giocatore adotta la strategia più conveniente, date le strategie degli altri (si vedano, ad esempio, [4, pag.453][5, pag.312]). Nel prossimo capitolo verrà comunque data una definizione più rigorosa di questo fondamentale concetto. E' importante sottolineare che la Teoria dei Giochi si basa su due importanti assiomi. Il primo è che i giocatori devono essere intelligenti. Per "intelligenti" si intende che i giocatori capiscono la situazione in cui si trovano e sono in grado di fare ragionamenti logici corretti. Il secondo è che i giocatori devono essere razionali. Per "razionali" si intende che i giocatori hanno preferenze coerenti sugli esiti finali del processo decisionale e che hanno l'obiettivo di ottimizzare queste preferenze. Se questi prerequsiti vengono a mancare, non sarà possibile ricavare l'equilibrio di Nash (si veda [1, pag.271]).

I. I GIOCHI DIFFERENZIALI

Finora non abbiamo considerato una variabile fondamentale: il tempo. Quando consideriamo giochi nei quali la strategia non è esplicitamente influenzata dal tempo, allora il gioco è detto statico. Un gioco è altresì detto dinamico se la "storia delle azioni", ovvero l'insieme di tutte le mosse precedentemente compiute da tutti i giocatori, influenza le strategie dei giocatori ad ogni istante diverso da quello iniziale. Da un altro punto di vista, possiamo dire che un gioco è dinamico se i payoff dei giocatori sono funzioni della "storia delle azioni" presa nell' istante finale. I giochi differenziali sono giochi dinamici che si svolgono in un tempo continuo. Essi sono molto importanti, perché modellizzabili matematicamente usando gli strumenti del controllo ottimo. In altre parole, i giochi differenziali hanno le seguenti caratteristiche (si veda [2, pag.27]):

1. nel modello matematico che formalizza il gioco, vengono introdotte una serie di variabili per caratterizzare lo stato del sistema dinamico in ogni istante di tempo per tutta la durata del gioco;

2. l'evoluzione nel tempo delle variabili descritte nel punto precedente sono descritte da un insieme di equazioni differenziali.

D'ora in poi considereremo solo i giochi differenziali, introducendoli con una trattazione matematica per poi provare a ottenerne analiticamente l'equilibrio di Nash, ove questo sia possibile.

I.1. FORMALIZZAZIONE DI UN GIOCO DIFFERENZIALE

Un gioco differenziale è caratterizzato da (vedasi [1, pag.272]):

1. un insieme di giocatori $L = \{1, ...N\}, N \geq 2$;

2. una variabile temporale t, che assume valori in un intervallo $[t_0, t_1]$, eventualmente illimitato, $[t_0, +\infty)$;

3. una variabile di stato $x(t) \in \Re^n$,che caratterizza lo stato del sistema dinamico in ogni istante del gioco;
4. una variabile di controllo $u_i(t)$ per il giocatore i-esimo, $u_i(t) \in \Re^{m_i}, i \in L$, che rappresenta le decisioni del giocatore in ogni istante;
5. un insieme di equazioni del moto, equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione temporale delle variabili di stato in dipendenza delle funzioni di controllo, e relative condizioni iniziali,
   $\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t), \quad x_j(0) = x_j^0, \quad j = 1, ..., n;$
6. un funzionale obiettivo, detto payoff, per il giocatore i-esimo, che quindi intende massimizzare,
   $J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_0 i(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t)dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1));$
7. una struttura informativa, che definisce l'informazione disponibile a ciascun giocatore nel tempo per la scelta del proprio controllo;
8. per ogni giocatore $i \in L$, un insieme di strategie ϕ_i, dove una strategia è una regola di decisione che definisce il controllo $u_i(t)$ in dipendenza dell'informazione disponibile.

Lo stato del gioco evolve nel tempo in accordo con delle equazioni differenziali controllate, dette equazioni del moto. Si noti come, a prima vista, la trattazione matematica di un gioco differenziale generico sia del tutto analoga a un problema di controllo ottimo con funzionale obiettivo espresso nella forma di Bolza. In realtà vi è una significativa differenza rispetto a un classico problema di controllo ottimo, che prevede che il 'decisore' tenga conto solo dei suoi obiettivi e dei relativi vincoli. La differenza sta nel fatto che il funzionale obiettivo di ogni singolo decisore non dipende solo dal proprio controllo e dallo stato, ma anche dai controlli degli altri N giocatori. Quindi, una possibile soluzione come equilibrio di Nash di un gioco differenziale può essere trovato solo considerando come fissati i controlli di tutti i giocatori, eccetto ovviamente quello per il quale si sta risolvendo il problema. In altre parole, per trovare l'equilibrio di Nash è necessario risolvere N problemi di controllo ottimo interdipendenti, come verrà spiegato nei dettagli successivamente. Ovviamente, i giocatori scelgono le strategie e le azioni in base alle informazioni loro disponibili in ogni istante di tempo $t \in [t_0, t_1]$, ovvero scelgono in base alla loro struttura informativa. Tra le possibili strutture informative utilizzabili, due particolarmente interessanti sono la struttura open-loop e la struttura feedback (ad esempio si veda [1, pag.273]):

1. Struttura informativa open-loop: ciascun giocatore conosce lo stato iniziale x^0 e osserva il tempo t; una strategia open-loop per il giocatore i è una funzione γ_i tale che il valore del controllo al tempo t sia dato da :
$$u_i(t) = \gamma_i(x^0, t);$$
2. Struttura informativa feedback: ciascun giocatore osserva la posizione del sistema $(t, x(t))$; una strategia feedback per il giocatore i è una funzione γ_i tale che il valore del controllo al tempo t sia dato da:
$$u_i(t) = \gamma_i(t, x(t)).$$

Quindi si ha un controllo open-loop, se il suo valore al tempo t dipende esclusivamente dall'istante di tempo t e dallo stato iniziale x^0, mentre si ha un controllo di tipo feedback se il suo valore dipende esclusivamente dalla posizione del gioco $(t, x(t))$ in quell'istante. Si noti che un controllo di tipo feedback non dipende né dalla "storia delle azioni" né dallo stato iniziale del gioco.

Il problema del giocatore i-esimo si può scrivere nella seguente forma (da [1, pag.274]):

$$\text{massimizza } J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_{0i}(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t)dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)),$$

soggetto a:

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t); \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$u_i(t) \in U_i, \tag{3}$$

dove le funzioni di controllo (e le strategie che le determinano) $u_k(t), k \neq i$, non sono note al giocatore i-esimo. Con U_i si indica l'insieme dei controlli ammissibili, ovvero l'insieme dei controlli (decisioni) che possono essere accettati nell'ambito del gioco. Come anticipato precedentemente, si osservi che risolvere un problema di questo tipo significhi studiare N problemi di ottimizzazione dinamica interconnessi. Si noti infatti come il problema di ogni i-esimo giocatore, preso singolarmente, sia un problema di controllo ottimo nella forma di Bolza. Ciò che distingue un gioco differenziale rispetto a un problema di controllo ottimo è che in ogni i-esimo problema di ottimizzazione sono presenti le strategie degli altri N-1 giocatori. Ciò rende inapplicabile il concetto di controllo ottimo nella sua accezione classica, perché nel problema proposto, come in un qualsiasi gioco, la soluzione è determinata da una situazione di equilibrio tra le strategie dei vari giocatori. In altre parole, per risolvere il gioco è necessario trovare l'equilibrio di Nash.

I.2. EQUILIBRIO DI NASH DI UN GIOCO DIFFERENZIALE

Il concetto di Equilibrio di Nash può essere formalizzato come segue (si veda [1, pag.275]).
Denotiamo con Φ_i l'insieme delle strategie per il giocatore i-esimo; un equilibrio di Nash è una combinazione di strategie $(\hat{\gamma_1}, ..., \hat{\gamma_N})$, tale che per ogni giocatore i $\in$ L si abbia:

$$J_i(\hat{\gamma_1}, ..., \hat{\gamma_N}) \geq J_i(\hat{\gamma_1}, ..., \hat{\gamma_{i-1}}, \gamma_i, \hat{\gamma_{i+1}}, ..., \hat{\gamma_N}) \quad \text{per ogni } \gamma_i \in \Phi_i, \quad i = 1, ..., N.$$

In altre parole, si tratta della particolare situazione nella quale nessun giocatore può trarre vantaggio dal cambiare unilateralmente la propria strategia. Un giocatore massimizza il proprio payoff con la strategia di Equilibrio di Nash, solo se anche tutti gli altri giocatori giocano la strategia di equilibrio. Se tutti gli altri giocatori giocano la strategia di Equilibrio di Nash, e il giocatore i-esimo sceglie un controllo diverso, egli può solo peggiorare o al limite lasciare invariato il suo payoff. La definizione di Equilibrio di Nash appena fornita vale sia per giochi che usano strategie open- loop sia con quelli che usano strategie feedback. D'ora in poi la trattazione dell'argomento si limiterà a giochi che usano strategie open-loop, ovvero quei giochi in cui i giocatori per scegliere i loro controlli $u_i(t)$ possono usare solo due informazioni: lo stato iniziale del gioco x_0 e il tempo t. A questo punto, è possibile formalizzare analiticamente l'equilibrio di Nash open-loop, usando la forma tipica del controllo ottimo già esposta precedentemente. Un insieme di controlli $(\hat{u_1}, ..., \hat{u_n})$ è un equilibrio di Nash open-loop se, per ogni i $\in$ L, la funzione di controllo $\hat{u_i}$ è ottima per il problema di controllo:

$$\text{massimizza } J_i = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} f_0(x(t), [u_i(t), \hat{u}_{-i}(t)], t)dt + e^{-\rho_i t_1} S_i(x(t_1)) \ ,$$

soggetto a:

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), [u_i(t), \hat{u}_{-i}(t)], t) \ ; \quad x_j(t_0) = x_j^0, \quad j = 1, ..., N.$$

Per semplificare la notazione, si è posto $[u_i(t), \hat{u}_{-i}(t)] = (\hat{u_1}, ..., \hat{u}_{i-1}, u_i, \hat{u}_{i+1}, ..., \hat{u}_N)$, espressione con cui si indicano tutti i controlli dei giocatori diversi da quello considerato nel problema di massimizzazione.
Quindi l'insieme di controlli $(\hat{u}_1, ..., \hat{u}_n)$ rappresentano un equilibrio di Nash open-loop se sono soluzione del problema del giocatore i-esimo di massimizzare il payoff del giocatore i-esimo condizionato dal vincolo che tutti gli altri N-1 giocatori abbiano giocato la loro strategia di Equilibrio di Nash. Prima di determinare analiticamente l'equilibrio, si osservi come l'equilibrio di Nash open-loop sia consistente nel tempo. Questo significa che ogni giocatore, una volta scelte le mosse (controlli) da effettuare lungo la durata del gioco, non ha più alcun motivo per modificarle, dato che le sole informazioni che ha a disposizione sono lo stato iniziale e l'istante di tempo. Tuttavia, il lato negativo della consistenza nel tempo è che rende l'equilibrio open-loop fragile rispetto alle perturbazioni. Infatti, se si verificano deviazioni dalla percorso di equilibrio di un giocatore, il piano di azioni deciso originariamente non è più ottimo per tutti gli N giocatori.

I.3. DETERMINAZIONE ANALITICA DELL'EQUILIBRIO DI NASH OPEN LOOP

L'approccio che si utilizza è quello delle condizioni sufficienti di Mangasarian, particolarmente semplice e adatto a descrivere equilibri open-loop (si veda ad esempio [3, pag.358]). Siano $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$ un insieme di funzioni continue a tratti $\gamma_i : [t_0, t_1] \to \Re^{m_i}$ ed esista una funzione continua e di classe C^1 a tratti $x : [t_0, t_1] \to X \in \Re^n$ soluzione del sistema:

$$\dot{x_j}(t) = f_j(x(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), ..., t) \ ; \quad x(t_0) = x^0;$$

Si definiscano le funzioni hamiltoniane H^i come:

$$H^i(x, u_i, \lambda^i, t) = f_{0i}(x, [u_i, \gamma_{-i}(t)], t) + \lambda^i f(x, [u_i, \gamma_{-i}(t)], t)$$

e le funzioni hamiltoniane massimizzate:

$$H^{i*}(x, \lambda^i, t) = max \quad H^i(x, u_i, \lambda^i, t).$$

Si assuma che l'insieme degli stati X sia convesso, che le funzioni S_i siano differenziabili con continuità e concave e che esistano N funzioni continue e di classe C^1 a tratti $\lambda^i : [t_0, t_1] \to \Re^n$ tali che:

1. valga la condizione di massimizzazione delle funzioni hamiltoniane, ossia per ogni $i \in$ L e per ogni $t \in [t_0, t_1]$ in cui tutti i controlli siano continui valga:

$$\gamma_i(t) \in arg \quad max \quad H^i(x(t), u_i, \lambda^i(t), t);$$

2. per ogni $i \in$L e per ogni $t \in [t_0, t_1]$ in cui tutti i controlli siano continui,

$$\dot{\lambda}^i(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H^i(x(t), u_i(t), \lambda^i(t), t) + \rho_i \lambda^i(t) \ ;$$

3. per ogni $i \in$ L:

$$\lambda^i(t_1) = \frac{\partial}{\partial x} S_i(x(t_1))$$

4. la funzione $x \to H^{i*}(x(t), \lambda^i(t), t)$ sia differenziabile con continuità e concava per ogni $i \in$ L e per ogni $t \in [t_0, t_1]$;

allora $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$ è un equilibrio di Nash open-loop. Come già detto, la soluzione del problema per la determinazione di un equilibrio di Nash open-loop richiede la soluzione di N problemi di controllo ottimo interdipendenti, risolvibili con il Principio del Massimo di Pontryagin. Nel prossimo capitolo verrà discusso un gioco differenziale con struttura informativa open loop, in cui verranno esplicitati funzionale obiettivo (payoff) del giocatore i-esimo, equazione del moto e relativa condizione iniziale, per rendere più chiaro il procedimento matematico che porta alla determinazione dell'equilibrio di Nash.

II. ESEMPIO PRATICO DI DETERMINAZIONE DELL'EQUILIBRIO DI NASH OPEN LOOP

L'esempio che segue può essere utile per apprendere appieno il procedimento che porta alla determinazione dell' Equilibrio di Nash, in un gioco differenziale con strategie open-loop. Verrà esposto un semplice modello di un generico gioco differenziale con due giocatori.
Siano dati due giocatori, L = {1, 2}, in un gioco con durata temporale [0, T], con T $\geq$ 0. La variabile di stato del gioco verrà indicata con $x(t) \in \Re$, mentre i controlli $u_i(t) \in U_i$ con i = 1, 2. Con U_i si indica l'insieme dei controlli ammissibili del gioco, matematicamente la regione ammissibile.
L'equazione del moto sia:

$$\dot{x}(t) = n_1 u_1(t) + n_2 u_2(t) + s u_1(t) u_2(t),$$

con condizione iniziale

$$x(0) = x^0 \geq 0,$$

con $n_1, n_2 \geq 0, s \in \Re$. Per i = 1,2 il payoff del giocatore i-esimo sia:

$$J_i(u_1, u_2) = -\int_0^T \frac{u_i^2(t)}{2} dt + a_i x(T),$$

con $a_i \geq 0$ e $a_1 + a_2 = 1$. Da sopra si deduce che $S_i(x) = a_i x$.
Analizziamo il problema del primo giocatore, i=1. Per il giocatore in questione la funzione hamiltoniana risulta:

$$H^1(x, u, \lambda^1, t) = -\frac{u_i^2(t)}{2} + \lambda^1(n_1 u_1(t) + n_2 u_2(t) + s u_1(t) u_2(t))$$

da cui si ricavano le seguenti derivate parziali rispetto a u_1 :

$$\frac{\partial H^1}{\partial u_1}(x, u_1, \lambda^1, t) = -u_1 + \lambda^1(n_1 + s u_2(t)), \quad \frac{\partial^2 H^1}{\partial u_1^2} = -1,$$

La hamiltoniana ha un unico punto di massimo (ottenuto dalla condizione del primo ordine) :

$$u_1^* = \lambda^1(n_1 + s u_2(t)).$$

Trattandosi di giochi deterministici con struttura informativa open-loop, tra strategia e controllo vi è una perfetta corrispondenza biunivoca. Una volta scelta la strategia, gli N giocatori non avranno più motivo per cambiarla, per tutta la durata del gioco. Quindi i controlli riflettono esattamente la strategia scelta dai giocatori prima che il gioco evolva. Per questo motivo, da qui in poi sostituiremo le variabili di controllo $u_i(t)$ con le rispettive strategie $\gamma_i(t)$.
Dalle condizioni sufficienti per l'ottimalità viste nel precedente capitolo, otteniamo queste tre relazioni:

1. $\gamma_1(t) = \lambda^1(t)(n_1 + s\gamma_2(t))$,

2. $\dot{\lambda}^1(t) = -\frac{\partial H^1}{\partial x}(x(t), u_1(t), \lambda^1(t), t) = 0,$
3. $\lambda^1(T) = a_1;$

da cui:

$$\lambda^1(t) \equiv a_1, \text{ costante;}$$

quindi si ottiene:

$$\gamma_1(t) = a_1(n_1 + s\gamma_2(t)).$$

Ovviamente, seguendo lo stesso procedimento, si individua la strategia ottima anche per il giocatore 2, che è:

$$\gamma_2(t) = a_2(n_2 + s\gamma_1(t)).$$

Dalle strategie ricavate si ottiene il sistema dei controlli ottimi:

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = a_1(n_1 + sn_2a_2)/(1 - s^2a_1a_2) \\ \gamma_2(t) = a_2(n_2 + sn_1a_1)/(1 - s^2a_1a_2) \end{cases}$$

I controlli appena determinati sono accettabili se e solo se $(1 - s^2a_1a_2) > 0$, ovvero se

$$s^2 < \frac{1}{a_1a_2}.$$

Questi controlli, costanti, costituiscono l'equilibrio di Nash open-loop del gioco differenziale appena discusso. I payoff dei giocatori si possono ottenere sostituendo i controlli di equilibrio al funzionale obiettivo. Per un valore particolare del parametro $s = 0$, la coppia dei controlli d'equilibrio è:

$$(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (a_1n_1, a_2n_2)$$

e i payoff sono:

$$J_1(\gamma_1, \gamma_2) = a_1[x^0 + T(\frac{a_1n_1^2}{2} + a_2n_2^2)],$$

$$J_2(\gamma_1, \gamma_2) = a_2[x^0 + T(\frac{a_2n_2^2}{2} + a_1n_1^2)].$$

II.1. CASO PARTICOLARE : I GIOCHI SIMMETRICI

Per gioco simmetrico si intende un particolare gioco in cui i giocatori sono identici. Essi quindi hanno lo stessa funzione di utilità che descrive il loro payoff, anche nel valore dei parametri che caratterizzano le loro preferenze. Sul piano matematico, questo si traduce nel fatto che i parametri che contraddistinguono le preferenze dei giocatori assumono il medesimo valore, ovvero:

$$a_1 = a_2 = a, \quad n_1 = n_2 = n.$$

Supponiamo inoltre che sia rispettata la condizione di esistenza dei controlli ottimi, che nel gioco simmetrico diventa:

$$s^2 < a^{-2}.$$

Quindi l'equilibrio di Nash esiste ed è unico, ed è

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \equiv an\frac{1+sa}{1-s^2a^2}$$

I payoff assumono valore

$$J_1(\gamma_1, \gamma_2) = J_2(\gamma_1, \gamma_2) = a[x^0 + an^2T\frac{3+san(4-sa-2s^2a^2)}{2(1-s^2a^2)^2}].$$

Per un valore particolare del parametro $s = 0$, l'equilibrio di Nash è costituito dalle strategie

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \equiv an;$$

e i relativi payoff :

$$J_1(\gamma_1, \gamma_2) = J_2(\gamma_1, \gamma_2) = a(x^0 + \frac{3an^2T}{2}).$$

III. GIOCHI DIFFERENZIALI : APPLICAZIONE ALLO SFRUTTAMENTO DI RISORSE NON RINNOVABILI

Nel precedente capitolo sono stati introdotti i giochi differenziali, dai quali si è ricavato, attraverso gli strumenti matematici del controllo ottimo, l'equilibrio di Nash. In questa sezione invece sarà fornita un'applicazione economica particolarmente interessante ai concetti teorici visti precedentemente. Si procederà ad analizzare il problema dello sfruttamento delle risorse non rinnovabili, un problema attualissimo e che, se non risolto, potrebbe portare anche all' estinzione della razza umana. Il problema ovviamente, non può considerarsi puramente economico, bensì riguarda anche le cosiddette "scienze dure", come la Geologia, la Fisica o l'Ingegneria ambientale. Tuttavia lo scopo di questo capitolo sarà quello di affrontare il problema da un punto di vista economico. In altri termini, ci si chiederà sotto quali condizioni sia possibile rendere economicamente conveniente per gli attori attuare un comportamento volto alla coooperazione rispetto alla competizione. Ci si potrà chiedere quale sia la differenza, ai fini dello sfruttamento energetico, tra una situazione nella quale gli attori cooperino rispetto a una nella quale competono. La cooperazione è "ambientalmente" preferibile, nel modello che verrà presentato, perché essa consente uno sfruttamento potenzialmente infinito della risorsa, in quanto si presume che tutti gli attori vogliano consumare la risorsa per il più lungo tempo possibile. Al contrario, si presume che la competizione possa facilmente portare a un rapido esaurimento della risorsa non rinnovabile, in quanto in assenza di accordo ogni attore vorrà consumare la quantità più alta possibile della risorsa prima che essa venga esaurita dagli altri giocatori. Compito della seguente analisi sarà, grazie ovviamente alla formalizzazione di un modello matematico, spiegare sotto quali condizioni ciò che è preferibile ambientalmente è anche preferibile economicamente. In altri termini, si cercheranno di trovare le condizioni sotto le quali la cooperazione renda il payoff dei giocatori più alto rispetto alla competizione tra essi. Si partirà esponendo il caso in cui i giocatori cooperano, per poi passare al caso in cui essi competono. In termini matematici, analizzeremo un gioco differenziale con struttura informativa open-loop, confrontando i payoff dei giocatori nei due casi (cooperazione e competizione), ricavando analiticamente le condizioni sotto le quali uno è più vantaggioso dell'altro.

III.1. COOPERAZIONE TRA GIOCATORI

Il modello che verrà presentato prevede che ci siano N giocatori, che possono essere grandi aziende energetiche o nazioni, i quali si contendono lo sfruttamento di una risorsa non rinnovabile. Dallo sfruttamento essi ricavano utilità, la quale viene attualizzata per tenere conto dell'effetto dello scorrimento del tempo tipico di un gioco differenziale. Lo stato, o il livello quantitativo, della risorsa energetica viene descritta da un'equazione differenziale, che ne descrive l'andamento al variare del tempo. Essa non è altro che l'equazione del moto del sistema, già vista nel capitolo 1. Il livello quantitativo della risorsa, al tempo t, viene indicata con $x(t)$. Il tasso di estrazione del giocatore i, al tempo t viene indicato con $c_i(t)$. Si assuma che il tasso di estrazione della risorsa non possa essere negativo, $c_i(t) \geq 0$ e che, se il livello della risorsa $x(t) = 0$, allora l'unico tasso di estrazione possibile è $c_i(t) = 0$.
L'equazione del moto sia:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{i=1}^{N} c_j(t).$$

Ovviamente, ciascun giocatore ha una funzione di utilità, $u(c_i)$, di classe C^2, la quale è strettamente crescente, ovvero $u'(c_i) > 0$, e strettamente concava, ovvero $u''(c_i) > 0$. L'utilità è scontata ad un tasso costante $r \geq 0$, e il payoff del giocatore i è:

$$\int_0^{+\infty} e^{-rt} u(c_i(t))dt.$$

A questo punto, è necessario conoscere il tipo di funzione di utilità che si vuole utilizzare. Questa scelta è molto importante, perché la funzione di utilità scelta deve cogliere matematicamente delle caratteristiche economiche, fondamentali per il modello in questione. La classe di funzioni di utilità scelta prevede che l'elasticità dell'utilità marginale, $n = -\frac{du'(c_i(t))}{dt} \frac{t}{u'(c_i(t))}$, con $n \geq 0$, sia costante.
Se $n \neq 1$, allora abbiamo:

$$u(c_i) = \frac{Ac_i^{1-n}}{1-n} + B = v(c_i) + B,$$

mentre se $n = 1$ abbiamo:

$$u(c_i) = A(lnc_i) + B.$$

Il parametro A è strettamente positivo, e da qui in avanti verrà fissato $A = 1$. Il parametro B, da qui in avanti, verrà fissato $B = 0$. Dato che tutti i giocatori hanno la stessa funzione di utilità e cooperano, lo scopo sarà quello di massimizzare la somma degli N payoff scontati.
Il problema di controllo ottimo che descrive la situazione di cooperazione è (tratto da[2, pag.317]):

massimizza

$$\int_0^{+\infty} e^{-rt} Nu(c(t))dt$$

soggetto a:

$$\dot{x}(t) = -Nc(t), \tag{4}$$
$$c(t) \geq 0, \tag{5}$$
$$x(0) = x_0 > 0, \tag{6}$$
$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \geq 0. \tag{7}$$

La funzione Hamiltoniana è :

$$H(x, c, \lambda) = Nu(c) - \lambda Nc,$$

dalla quale ricaviamo le condizioni necessarie:

$$u'(c(t)) - \lambda(t) \leq 0, \quad c(t) \geq 0, \quad [u'(c(t)) - \lambda(t)]c(t) = 0, \quad \dot{\lambda}(t) = r\lambda(t).$$

Ogni percorso di estrazione possibile $\{c^*(.), x^*(.), \lambda^*(.)\}$ che soddisfa le condizioni necessarie, è ottimo se soddisfa anche la condizione di trasversalità (si veda [2, pag.317]):

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-rt}\lambda^*(t)[\tilde{x}(t) - x^*(t)] \geq 0,$$

dove $\tilde{x}(t)$ rappresenta ogni percorso possibile. La condizione di trasversalità richiede che il percorso di estrazione, scelto da ogni giocatore nel momento iniziale, (ricordiamo : si tratta di un gioco con struttura informativa open-loop) sia compatibile con il fatto che la risorsa di cui stiamo parlando è finita. Dalle condizioni necessarie, è facile ricavare la funzione composta $\lambda(t) = \lambda(0)e^{rt}$. In questo caso, adottiamo la funzione di utilità nel caso in cui $n \neq 1$, ovvero

$$u(c_i) = \frac{c_i^{1-n}}{1-n}.$$

Sostituendo nelle condizioni necessarie, con qualche passaggio algebrico si giunge alla seguente condizione:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{r}{n}.$$

Questa espressione è detta "regola di Hotelling" e dice, in sintesi, che l'utilita marginale del giocatore i-esimo cresce al tasso r, che ricordiamo essere il tasso di sconto dei payoff (si veda [2, pag.317]). Dalla condizione di Hotelling, risolvendo l'equazione differenziale, è facile ricavare la funzione esponenziale che descrive l'andamento del tasso di estrazione al variare del tempo:

$$c(t) = c(0)e^{\frac{-rt}{n}}.$$

Per definizione, lo stato iniziale dello stock di risorsa x_0 sarà $x_0 = \int_0^{+\infty} Nc(t)dt$, quindi sostituendo a $c(t)$ la sua espressione funzionale ricavata sopra e risolvendo l'integrale, otteniamo la seguente relazione:

$$x_0 = nNc(0)/r,$$

dalla quale possiamo ricavare $c(0) = \frac{rx_0}{nN}$. Sostituendo $c(0)$ in $c(t)$, otteniamo la soluzione ottima:

$$c^*(t) = \frac{rx_0}{nN}e^{\frac{-rt}{n}},$$

e la corrispondente funzione che descrive l'andamento dello stock di risorsa al variare del tempo:

$$x^*(t) = x_0 e^{\frac{-rt}{n}}.$$

Date queste soluzioni ottimali, il valore della somma dei payoff degli N giocatori che si voleva massimizzare assume il valore:

$$V(x_0) = \frac{N}{1-n}\left(\frac{x_0}{N}\right)^{1-n}\left(\frac{r}{n}\right)^{-n}.$$

Il payoff per ciascun giocatore i sarà quindi :

$$V_i(x_0) = V(x_0)/N.$$

III.2. COMPETIZIONE TRA GIOCATORI

Nel caso in cui i giocatori competano per lo sfruttamento della risorsa non rinnovabile, ci si potrebbe chiedere se l'Equilibrio di Nash open-loop del gioco cooperativo possa essere anche soluzione del gioco competitivo. In altri termini, ci si potrebbe chiedere se, per i giocatori, collaborare sia sempre più conveniente che competere. La risposta non è univoca, e dipende essenzialmente dal valore dei parametri n e N, ovvero rispettivamente dall'elasticità dell'utilità marginale e dal numero dei giocatori. Consideriamo ovviamente sempre un gioco con strategie open-loop, in cui le scelte sono fatte contemporaneamente. Se consideriamo $n \geq 1$, allora $\lim_{c \to 0} u(c) = -\infty$. Questo significa che, per il giocatore i-esimo, avere un consumo (tasso di estrazione) nullo per ogni valore di t porta ad avere un utilità infinitamente negativa. In questo caso, ogni giocatore cercherà di evitare ogni mossa che lo porti ad avere un consumo nullo, e cercherà dunque di allungare la sua estrazione tendenzialmente all'infinito. Come si può intuire, questo caso ben si sposa con l'equilibrio di Nash del gioco cooperativo, in quanto è facile che i giocatori si mettano d'accordo tra di loro per prolungare il consumo della risorsa energetica tendenzialmente all'infinito. Al contrario, se consideriamo $n \leq 1$, allora $\lim_{c \to 0} u(c)$ è finito. Questo potrebbe dunque fungere da incentivo per i giocatori a esaurire la risorsa in un tempo finito, in quanto l'utilità da un consumo nullo non è più $-\infty$. Ogni giocatore quindi proverà a estrarre la quota più grande possibile a discapito degli altri. Per analizzare il problema, iniziamo a formalizzarlo matematicamente. L'espressione:

$$\int_0^{+\infty} \sum_{j \neq i} c_j(t) dt \leq x_0$$

rappresenta l'ammontare totale dell'estrazione di tutti i giocatori, escluso il giocatore i-esimo preso in considerazione.

Possiamo ora distinguere tra risposte "fortemente accettabili" e risposte "debolmente accettabili" (si veda [2, pag.319].

Un percorso di estrazione $c_i(.)$ è una risposta fortemente accettabile agli $N-1$ percorsi di estrazione $c_j(.), j \neq i$, se e solo se:

$$\int_0^{+\infty} c_i(t) dt + \int_0^{+\infty} \sum_{j \neq i} c_j(t) dt \leq x_0;$$

mentre esso è una risposta debolmente accettabile se:

$$\int_0^{T_i} c_i(t) dt + \int_0^{T_i} \sum_{j \neq i} c_j(t) dt \leq x_0;$$

dove T_i è il tempo in cui la risorsa viene esaurita.

Le definizioni appena fornite sono molto importanti, perché se consideriamo le risposte debolmente accettabili, il giocatore i-esimo può "rovinare" i piani degli altri giocatori. Si immagini, ad esempio, che esista un tempo T_i tale che il percorso di estrazione del giocatore i-esimo, sommato a quello degli altri N-1 giocatori, implichi l'esaurimento della risorsa. Il giocatore i, a questo punto, potrebbe scegliere un percorso di estrazione tale che $c_i(t) = 0$ per ogni $t > T_i$. Se, per qualche $j \neq i$, il percorso di estrazione $c_j(t)$ risulta positivo per un qualsiasi $t > T_i$, allora il piano del giocatore j è saltato, perché in quell'istante di tempo la risorsa sarà già esaurita. Se si considerano solo risposte fortemente accettabili, una situazione del genere non può accadere, in quanto l'orizzonte di riferimento di ciascun giocatore è infinito, dunque non conviene a nessun giocatore esaurire la risorsa, in un qualsiasi istante di tempo finito. E' chiaro, a questo punto, come l'equilibrio di Nash di un gioco non cooperativo con risposte fortemente accettabili equivalga alla soluzione del gioco cooperativo già visto in precedenza.

III.2.1 EQUILIBRIO DI NASH CON RISPOSTE FORTEMENTE ACCETTABILI

Il problema di controllo ottimo è il seguente (tratto da [2, pag.320]):

$$\text{massimizza} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-rt} u(c_i(t))dt$$

soggetto a:

$$\dot{x}(t) = -c_i(t) - \sum_{j \neq i} c_j(t), \tag{8}$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) \geq 0. \tag{9}$$

La funzione Hamiltoniana è:

$$H(x, c_i, \lambda, t) = u(c_i) - \lambda_i [c_i + \textstyle\sum_{j \neq i} c_j(t) p],$$

dalla quale si ottengono le condizioni necessarie:

$$u'(c_i(t)) - \lambda_i(t) \leq 0, \quad c_i(t) \geq 0, \quad [u'(c(t)) - \lambda(t)]c(t) = 0, \quad \dot{\lambda}(t) = r\lambda(t).$$

E' evidente come queste siano del tutto equivalenti a quelle viste nel caso cooperativo, quindi anche in questo caso la soluzione ottima sarà:

$$c^*(t) = \tfrac{rx_0}{nN} e^{\frac{-rt}{n}}$$

e il corrispondente stock di risorse sarà descritto dalla relazione:

$$x^*(t) = x_0 e^{\frac{-rt}{n}} \ .$$

Ovviamente, queste soluzioni rispettano la condizione di trasversalità, che ricordiamo essere:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-rt} \lambda^*(t) [\tilde{x}(t) - x^*(t)] \geq 0,$$

Abbiamo quindi dimostrato come l'equilibrio di Nash del gioco cooperativo sia soluzione ottima anche per il gioco competitivo che ammette risposte fortemente accettabili.

III.2.2 EQUILIBRIO DI NASH CON RISPOSTE DEBOLMENTE ACCETTABILI

La situazione può cambiare, se i giocatori sono lasciati liberi di compiere risposte debolmente accettabili. Innanzitutto, cambia il vincolo sullo stock della risorsa, che diventa $\lim_{t \to T_i} x(t) \geq 0$. Ora lo stock di risorsa non deve più rimanere positivo o nullo per una durata tendenzialmente infinita, ma solo fino a un istante di tempo qualsiasi T_i. In altri termini, il giocatore i ora potrà scegliere un percorso di estrazione $c_i(.)$ tale che, ad esempio, $c_i(s) = 0$ con $s > T_i$. Risulta possibile, in questo caso, che i piani degli altri N-1 giocatori vengano rovinati, ovvero che:

$$\int_{T_i}^{+\infty} \textstyle\sum_{j \neq i} c_j(t) dt > x(T_i).$$

Ora si vuole dimostrare che, se $0 < n < 1$ (quindi $u(0)$ non è $-\infty$) e sono ammesse risposte debolmente accettabili, allora l'equilibrio di Nash del gioco competitivo non può più essere lo stesso del gioco cooperativo, qualora N sia sufficientemente grande.
Si ricordi che $u(c) = v(c) + B$, e quindi il payoff del giocatore è:

$$\int_0^{+\infty} [e^{-rt}(v(c_i) + B)] dt;$$

che può essere riscritto come:

$$\int_0^{T_i} e^{-rt}v(c_i)dt + \int_{T_i}^{+\infty} e^{-rt}v(c_i)dt + \int_0^{+\infty} e^{-rt}Bdt.$$

Dato che dopo T_i la risorsa sarà esaurita, il tasso di estrazione sarà 0 e dunque $u(c_i) = 0$. Quindi $\int_{T_i}^{+\infty} e^{-rt}v(c_i)dt = 0$.
Il problema di controllo ottimo è (si vedano [2, pag.322][3, pag.229]):

$$\text{massimizza} \quad \int_0^{T_i} e^{-rt}v(c_i)dt + \int_0^{+\infty} e^{-rt}Bdt$$

soggetto a:

$$A(0) = 0, \tag{10}$$
$$\dot{A}(t) = c_i(t), \tag{11}$$
$$A(T_i) \leq x_0 - \int_0^{T_i} (N-1)c_j(t)dt. \tag{12}$$

Per $A(t)$ si indica l'estrazione accumulata del giocatore i al tempo t. Si noti che il problema di ottimizzazione ha una complicazione: l'orizzonte temporale non è fisso ma è variabile, in particolare viene indicato con T_i. L'obiettivo dell'i-esimo giocatore è infatti proprio quello di scegliere T_i in modo da massimizzare il proprio payoff. Quindi l'ultimo vincolo non è costante, ma varia al variare di T_i. Al fine di semplificare la notazione, definiamo:

$$z(T_i) = \int_0^{T_i} (N-1)c_j(t)dt$$

e riscriviamo il vincolo in questione come:

$$h(A(T_i), T_i) = x_0 - z(T_i) - A(T_i) \geq 0.$$

Inoltre, applicando il teorema di Hestenes (si veda [2, pag.322]), si dimostra che esiste un moltiplicatore $\mu \geq 0$ associato a questo vincolo tale che:

$$\mu[x_0 - z(T_i) - A(T_i)] = 0.$$

La funzione Hamiltoniana è:

$$H(A, c_i, \lambda_i) = v(c_i) + \lambda_i c_i,$$

dalla quale ricaviamo le condizioni necessarie (si vedano [3, pag.179][2, pag.322]):

1. $v'(c_i(t)) + \lambda_i(t) \leq 0, \quad c_i(t) \geq 0, \quad [v'(c_i(t)) + \lambda_i(t)]c_i(t) = 0,$
2. $\dot{\lambda}(t) = r\lambda_i(t),$
3. $H(A(T_i), c_i(T_i), \lambda_i(T_i)) - \mu z'(T_i) = 0,$
4. $\lambda_i(T_i) - \mu h_A(A(T_i), T_i) = 0,$

dove h_A indica la derivata parziale di h rispetto a $A(T_i)$. Le prime due condizioni sono quelle classiche già viste più volte precedentemente e derivanti dal Principio del Massimo di Pontryagin, mentre le condizioni 3) e 4) rappresentano una novità. Esse sono condizioni aggiunte, dovute alla particolarità di avere un vincolo in cui figura la variabile temporale fondamentale per il problema di ottimizzazione. La condizione 3 richiede che la funzione Hamiltoniana nel suo istante finale risulti uguale a 0. Interessante è l'espressione $H(A(T_i), c_i(T_i), \lambda_i(T_i))$, che rappresenta economicamente quello che un giocatore potrebbe guadagnare in caso il tempo finale T_i aumenti

marginalmente. Usando un'espressione economico-statistica, essa rappresenta l'elasticità del payoff al variare del limite temporale finale, per il giocatore i-esimo. Se, da un punto di vista, il prolungarsi dell'orizzonte temporale finale incrementa il payoff dei giocatori, questo è vero solo se si assume che all'aumentare di T_i l'estrazione totale accumulata $A(T_i)$ non si riduca. Questa assunzione però non vale nel nostro caso. Di fatto, un'estensione di T_i ridurrebbe l'estrazione totale accumulata di un ammontare $z'(T_i)$. Quindi la condizione 3 non è altro che un vincolo che impone che il payoff del giocatore rimanga invariato, qualora T_i aumenti marginalmente.
Passiamo ora al procedimento analitico, per trovare le soluzioni ottime e i relativi payoff.
Dalle ultime due condizioni necessarie si ricavano queste espressioni:

1. $H(A(T_i), c_i(T_i), \lambda(T_i))(N-1)c_j(T_i) = 0$,
2. $[A(T_i) - x_0 + \int_0^T (N-1)c_j(t)dt]\lambda_i(T_i) = 0$.

Dalle prime due condizioni necessarie invece si ricava che:

$$c_i(t) = c_i(T_i)e^{r(T_i-t)/n},$$

oltre che:

$$\lambda_i(T_i) = -c_i(T_i)^{-n}.$$

Quindi la condizione necessaria 3) può essere riscritta come:

$$[\tfrac{nc_i(T_i)}{1-n} - \tfrac{(N-1)x_0re^{-rT_i/n}}{nN}]c_i(T_i)^{-n}e{-}rT_i = 0.$$

Se poniamo T_i finito, possiamo ricavare:

$$c_i(T_i) = \tfrac{(1-n)(N-1)x_0re^{-rT_i/n}}{n^2N}.$$

Ricordando che :

$$A(T_i) = \int_0^{T_i} c_i(t)dt.$$

A questo punto possiamo ricavare:

$$A(T_i) = \tfrac{(1-n)(N-1)x_0[1-e^{-rT_i/n}]}{nN}.$$

Sostituendo il valore di $A(T_i)$ in una delle due espressioni ricavate dalle condizioni necessarie (in $[A(T_i) - x_0 + \int_0^T (N-1)c_j(t)dt]\lambda_i(T_i) = 0$) si ottiene:

$$1 - e^{-rT_i/n} = nN/(N-1).$$

Dato che $e^{-rT_i/n}$ è strettamente positivo per ogni T_i, allora una soluzione ottima e finita T_i si può ricavare solo se $nN/(N-1) < 1$, che equivalentemente si può riscrivere come:

$$1 - n > 1/N.$$

E' possibile dunque ottenere l'espressione analitica del payoff del giocatore i-esimo:

$$V_i(x_0) = \tfrac{B}{r} + (\tfrac{x_0}{N})^{1-n}(\tfrac{r}{n})^{-n}(N-1)^{-n}N(1-n)^{-n}n^n.$$

A questo punto possiamo confrontarlo col payoff destinato al giocatore i-esimo, determinato nell'ambito del gioco cooperativo. Il payoff nel gioco competitivo è maggiore di quello del gioco cooperativo se e solo se vale la seguente condizione:

$$(N-1)^{-n}N(1-n)^{1-n}n^n > 1.$$

Si può dimostrare, con dei passaggi algebrici, che il payoff del gioco competitivo è maggiore di quello del gioco cooperativo se e solo se vale la condizione trovata precedentemente, ovvero se $1 - n > 1/N$.

III.3. CONSIDERAZIONI ECONOMICHE

Dopo avere spiegato, passo per passo, il procedimento matematico che porta alla determinazione delle condizioni sotto le quali per un giocatore è più proficuo competere che cooperare, appare opportuno dare una spiegazione economica ai risultati del modello. Ci si potrebbe chiedere, a ragione, che significato abbia la condizione $1 - n > 1/N$ sotto il profilo economico. Partiamo dall'analizzare il significato del parametro n, che ricordiamo essere l'elasticità dell'utilità marginale per il giocatore i-esimo. Ricordiamo inoltre, che esso è costante e maggiore di 0.
Poichè abbiamo assunto che $0 < n < 1$, il consumo nullo non causa al giocatore i-esimo un' utilità di meno infinito. In altri termini, i giocatori potrebbero avere incentivo a non cooperare, in quanto anche qualora la risorsa si esaurisse in tempo finito, non avrebbero una perdita tendente all'infinito. Essi potrebbero cambiare strategia, rispetto alla cooperazione, e scegliere un strategia e un percorso di estrazione che porti la risorsa ad esaurirsi in un certo orizzonte temporale T_i. Adottando questa strategia, un qualsiasi giocatore sta semplicemente "rubando" quella parte di risorsa non rinnovabile che sarebbe destinata agli altri giocatori, in caso essi cooperassero. Ovviamente, la questione non è così semplice: il giocatore i-esimo deciderà di deviare dal percorso di estrazione prestabilito se e solo se i vantaggi, derivanti dall'estrazione aggiuntiva, superano gli svantaggi derivanti dal consumo nullo dopo l'istante di tempo T_i., proprio quando l'utilità marginale derivante dal consumo cresce sempre di più.
Importante è anche il ruolo svolto dal parametro N, che ovviamente indica il numero dei giocatori. Più alto è il numero di giocatori, maggiore è la possibilità di deviare dalla cooperazione e "rubare" risorse agli altri giocatori, perché ovviamente maggiore sarebbe l'incremento di risorsa estratta rispetto al caso della cooperazione. Per questo, la soluzione cooperativa è attuabile se il numero dei giocatori N è abbastanza basso, in particolare se $N < 1/(1 - n)$.
A questo punto però, è necessario andare al cuore della questione, ovvero bisogna capire se la soluzione trovata rappresenta un Equilibrio di Nash di un gioco differenziale open-loop. In altri termini, dobbiamo capire se le condizioni sui parametri n e N ricavate, $0 < n < 1$ e $N > 1/(1 - n)$, sono in grado da sole di assicurare che il gioco, con l'esaurimento della risorsa al tempo T_i, sia in Equilibrio di Nash.
Procediamo, limitandoci al ragionamento esclusivamente discorsivo, senza dimostrazioni matematiche che risulterebbero troppo lunghe e complesse. Se un giocatore i sceglie un tempo finito T_i per esaurire la risorsa, allora un altro giocatore j dovrebbe scegliere un tempo T_j in cui esaurire la risorsa, tale però che $T_j < T_i$, per rovinare i piani del giocatore i. Se ne deduce che perché il gioco sia in Equilibrio di Nash, tutti i giocatori devono pianificare di esaurire la risorsa in un medesimo tempo finito, che possiamo indicare con T. Consideriamo due ipotesi. La prima è che il percorso di estrazione sia continuo e tenda a 0 nell'istante di tempo T. Matematicamente, che $\lim_{t \to T} c(t) = 0$. La seconda ipotesi è che ci sia un punto di discontinuità in T, con un salto che fa precipitare il consumo a 0.
La prima ipotesi viola chiaramente la regola di Hotelling vista nei paragrafi precedenti, che dice che l'utilità marginale ha un'elasticità costante n. Il percorso di estrazione dunque non può essere continuo e calare fino a tendere a 0, in quanto n dovrebbe decrescere e non essere più costante.
Per quanto concerne la seconda ipotesi, poichè l'orizzonte temporale di ogni giocatore è infinito, e dato che ogni giocatore sa se uno o più avversari decidono di cambiare il proprio percorso di estrazione, lo stesso giocatore potrebbe cambiare il proprio consumo, rimodulandolo in modo da renderlo costante, più basso ma "spalmato" su un tempo tendenzialmente infinito. In questo modo, egli non ha più da temere l'eventualità di vedersi "rubare" la propria parte di risorsa, e soprattutto lascia invariato il livello totale di risorsa accumulato nell'intera durata del gioco.

Per questi motivi, non è possibile trovare un equilibrio di Nash open-loop quando il gioco diventa competitivo. A conclusione del ragionamento, si noti come solo il gioco nella sua forma cooperativa offra un Equilibrio di Nash open-loop, mentre quando i giocatori competono risulta impossibile che essi trovino una situazione in cui non abbiano vantaggio a compiere ulteriori mosse.
Se da un lato questo potrebbe sembrare scontato, in realtà in moltissimi altri giochi competitivi risulta possibile trovare un equilibrio di Nash. Il modello enfatizza molto il fatto che l'unico modo per rendere il più "rinnovabile" possibile una risorsa, che per sua natura è destinata ad esaurirsi, è la cooperazione tra i giocatori, per rendere fissa e continua l'estrazione. Appena un giocatore devia dal suo percorso "cooperativo", non solo "decide" di esaurire la risorsa in un tempo finito ma causa anche il movimento dello stato del gioco da una situazione di equilibrio a una di instabilità. Uscendo dal mondo astratto dei modelli, questa eventualità può applicarsi benissimo a molte situazioni reali, nelle quali l'interazione strategica è fondamentale. Si pensi ad esempio al Protocollo di Kyoto, accordo redatto nel 1997 e che impegnava i paesi sottoscriventi a ridurre le emissioni di elementi di inquinamento. Oppure ai trattati di alleanza tra le Nazioni siglati nelle due guerre del Novecento, o ad accordi di cartello tra due grandi imprese che monopolizzano un mercato. In tutti queste situazioni, chi esce dall'accordo o dall' Equilibrio di Nash crea instabilità a livello economico-politico, rendendo poi molto difficile o impossibile la creazione di un nuovo equilibrio basato sulla competizione. Questi sono solo alcuni esempi, utili per far capire che un problema apparentemente solo intellettuale possa avere dei risvolti pratici, dai quali può dipendere il futuro di un popolo.

IV. ALCUNE RIFLESSIONI FINALI

Il presente elaborato tenta di presentare un problema puramente matematico, come quello dei giochi differenziali, per poi presentarne un' interessante e attuale applicazione pratica, come quella dell'utilizzo di risorse energetiche non rinnovabili. Trattandosi di una prova finale di un corso di laurea in Economia, si è tentato di dare un taglio il più economico possibile all'argomento, pur cercando di mantenere un linguaggio sufficientemente rigoroso dal punto di vista matematico. I due pilastri fondamentali che permettono di approfondire l'argomento dei giochi differenziali sono la Teoria dei Giochi, e la teoria del Controllo Ottimo. Sulla prima si sono introdotti i concetti base nell'introduzione. Sul secondo argomento non è stato possibile, per motivi di spazio, dare una presentazione generale. La trattazione teorica riguardo ai giochi differenziali è stata solo introduttiva, in quanto l'argomento è in realtà molto più vasto e complesso. A titolo di esempio, si ricordi come in questo elaborato siano stati trattati solo i giochi differenziali con struttura informativa open-loop, nei quali i giocatori conoscono solo lo stato iniziale del gioco e il valore dell'istante di tempo. Come già detto nel Capitolo 1, esistono anche i giochi con strategie feedback, nei quali i giocatori conoscono la posizione del gioco in ogni istante. Questi non sono stati trattati, per via del più complesso sviluppo matematico che richiedeva l'uso dell'Ottimizzazione Dinamica di Bellman. Dopo aver presentato formalmente i Giochi Differenziali nel primo capitolo, nel secondo si è presentato un esempio matematico che può avere aiutato nella comprensione del problema. Si è esplicitata una forma funzionale e un'equazione del moto, si è quindi ricavato l'Equilibrio di Nash open-loop analiticamente, usando gli strumenti del controllo ottimo. Il terzo capitolo invece, giustifica il fatto che la prova finale tratti un argomento economico. In esso si affronta un problema tipico dell'economia e in particolare dell'economia ambientale: l'uso delle risorse energetiche. L'approccio economico, a torto o a ragione, tende a non tenere conto dei principi etico-morali che possono guidare le scelte dei decisori. La scienza economica preferisce sottolineare cosa è ottimo dal punto di vista del benessere sociale.

Ne consegue che, da un punto di vista economico, ciò che va massimizzato è il benessere sociale, inteso come somma dei surplus di tutti i decisori chiamati in causa dall'estrazione della risorsa. La logica del Capitolo 3 dunque non è quella di mostrare come si può incentivare ciò che è "giusto". L'obiettivo del capitolo è quello di trovare le condizioni sotto le quali le esigenze economiche degli estrattori rispettano le esigenze dell'ambiente atmosferico. Si è quindi trovata una soluzione di equilibrio nel caso cooperativo, dove l'estrazione della risorsa viene allungata fino a un tempo tendenzialmente infinito, per poi soffermarsi sulle possibilità che i giocatori deviino da questo equilibrio per ricercare dei guadagni maggiori.Per far questo, essi iniziano a competere fra di loro. Una volta trovate le condizioni matematiche sotto le quali i giocatori preferiscono la cooperazione alla competizione, si è tentato di dare una spiegazione economica delle espressioni ricavate analiticamente. Si tenga conto che questo argomento, affascinante dal punto di vista matematico ed economico, è importante anche per avere una chiave di lettura aggiuntiva sui fatti di attualità politico-economica. Esso infatti sottolinea come la strategia, e in generale le interazioni strategiche, ricoprano un ruolo primario in molte situazioni nelle quali si confrontano due o più individui o enti. L'orientamento al medio-lungo periodo, rispetto a quello al perseguimento dell'interesse immediato, spesso fa la differenza tra il successo o il fallimento di un piano economico, politico o aziendale.
In questo, i giochi differenziali possono insegnare molto ai protagonisti della società civile italiana ed europea. [1]

Riferimenti bibliografici

[1] BURATTO A.,VISCOLANI B.,GROSSET L., 2017. *Ottimizzazione dinamica: modelli economici e gestionali* Padova: Libreria Progetto.

[2] DOCKNER E., J⊘RGENSENS S., VAN LONG N., e SORGER G., 2000. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press.

[3] A.SEIERSTAD, K.SYDSAETER, 1987. *Optimal Control Theory with Economic Applications* C.J. Bliss and M.D. Intriligator.

[4] M.KATZ, H.ROSEN, C.A.BOLLINO, W.MORGAN, 2011. *Microeconomia* Mc Graw-Hill.

[5] G.A. JEHLE, P.J. RENY, 2011. *Advanced Microeconomic Theory* Pearson.

[1] Numero di parole dell'elaborato : 7043